

CHUYÊN ĐỀ

BÀI 9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được khái niệm về đường cao của tam giác, tính chất ba đường cao trong tam giác và các đường đồng quy trong tam giác cân.

❖ Kỹ năng

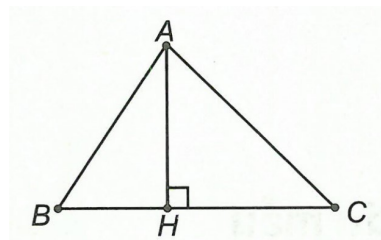
- + Vận dụng được các tính chất của đường cao để giải toán.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa đường cao của tam giác

Đoạn thẳng vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện của tam giác gọi là đường cao của tam giác đó.

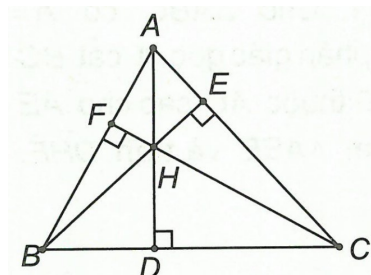
Mỗi tam giác có 3 đường cao.



Tính chất ba đường cao của tam giác

- Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

- Trong hình bên AD , BE , CF lần lượt là các đường cao hạ từ A , B , C của $\triangle ABC$. H là giao điểm của 3 đường cao và được gọi là trực tâm của tam giác.

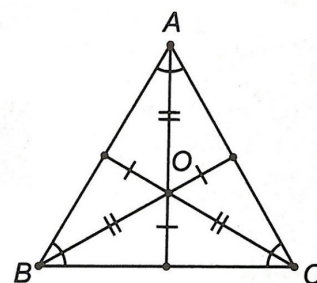
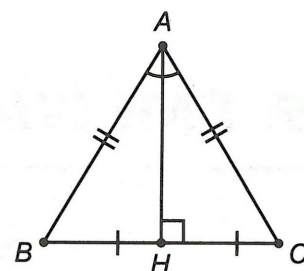


Các định lý về đường cao trong tam giác

Định lý 1: Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

Định lý 2: Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Lưu ý: Trong tam giác đều, trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh của tam giác, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác là bốn điểm trùng nhau.



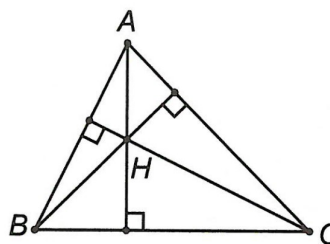
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định trực tâm của tam giác

Phương pháp giải

Để xác định trực tâm của tam giác, ta đi tìm giao điểm của hai đường cao trong tam giác đó.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$ nhọn, có H là trực tâm. Xác định trực tâm của $\triangle HAB$, $\triangle HAC$, $\triangle HBC$.



Hướng dẫn giải

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$, nên

$$AH \perp BC, BH \perp AC, CH \perp AB.$$

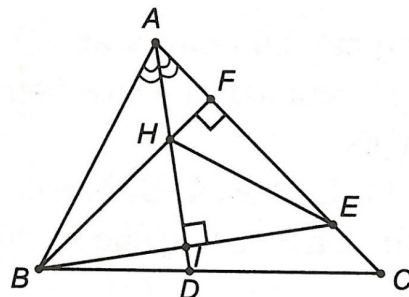
Xét $\triangle HAB$ ta có $BC \perp AH$ và $AC \perp BH$

$$\Rightarrow \{C\} = BC \cap AC \Rightarrow C \text{ là trực tâm } \triangle HAB.$$

Tương tự ta có B là trực tâm $\triangle HAC$ và A là trực tâm $\triangle HBC$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$, $AB < AC$, đường phân giác góc A cắt BC tại D , $BF \perp AC$ tại F , E thuộc AC sao cho $AE = AB$. Xác định trực tâm $\triangle ABE$ và tính $\widehat{DHF}$.



Hướng dẫn giải

Gọi $\{I\} = AD \cap BE$.

Vì $AB = AE$ nên $\triangle ABE$ cân tại A .

Mặt khác AD là phân giác góc A của $\triangle ABC$

$\Rightarrow AI$ là đường cao của $\triangle ABE$.

$BF \perp AE \Rightarrow BF$ là đường cao của $\triangle ABE$.

Mà $\{H\} = BF \cap AI$ nên H là trực tâm $\triangle ABE$.

Xét $\triangle HEF$ có $\widehat{FHE} = 90^\circ - \widehat{FEH}$. (1)

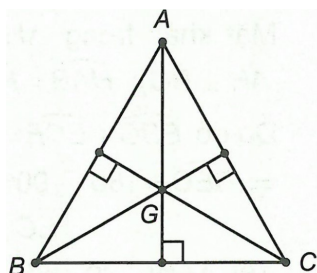
Xét $\triangle HIE$ có $\widehat{EHI} = 90^\circ - \widehat{IEH}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{FHD} = \widehat{FHE} + \widehat{EHI} = 180^\circ - \widehat{FEH} - \widehat{IEH} = 180^\circ - \widehat{FEI}$.

Vì $\triangle ABE$ cân tại A nên $\widehat{AEB} = \widehat{ABE} = \frac{180^\circ - \widehat{BAE}}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EHD} = 180^\circ - \widehat{FEI} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều, G là trọng tâm của tam giác. Xác định trực tâm các tam giác GAB , GAC , GBC .



Hướng dẫn giải

Vì $\triangle ABC$ đều, G là trọng tâm nên G cũng là trực tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow AG \perp BC; BG \perp AC; CG \perp AB$.

Xét $\triangle GAB$ có $BC \perp AG; AC \perp BG$.

Mà $\{C\} = AC \cap BC$ nên C là giao của 2 đường cao trong $\triangle ABG$

$\Rightarrow C$ là trực tâm $\triangle GAB$.

Tương tự B là trực tâm $\triangle GAC$; A là trực tâm $\triangle GBC$.

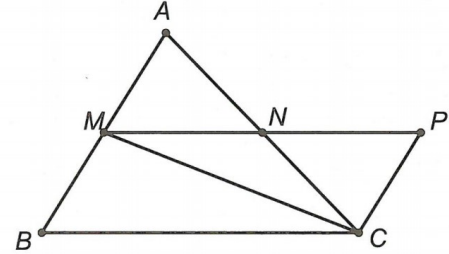
Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi trung điểm của BH là D , trung điểm của AH là E . Xác định trực tâm $\triangle ADE$.

Đáp án

Xét bài toán phụ nếu $\triangle ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm AB và AC thì $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Thật vậy, trên tia đối của tia NM lấy điểm P sao cho $NP = MN$.



Xét $\triangle NAM$ và $\triangle NCP$ có $AN = NC$; $\widehat{ANM} = \widehat{CNP}$ (đối đỉnh) và $MN = NP$.

Do đó $\triangle NAM = \triangle NCP$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = CP$ và $\widehat{MAN} = \widehat{NCP}$ (hai cạnh và hai góc tương ứng).

Hai góc $\widehat{MAN}$; $\widehat{NCP}$ ở vị trí so le trong nên $MA \parallel CP \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{MCP}$ (hai góc so le trong).

Xét $\triangle BMC$ và $\triangle PCM$ có

$MB = CP$ (cùng bằng MA);

$\widehat{BMC} = \widehat{PCM}$ (chứng minh trên);

MC là cạnh chung.

Do đó $\triangle BMC = \triangle PCM$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = MP$ và $\widehat{BCM} = \widehat{CMP}$ (hai cạnh và hai góc tương ứng).

Hai góc $\widehat{BCM}$; $\widehat{CMP}$ ở vị trí so le trong nên $MN \parallel BC$.

Lại có $MP = MN + NP = 2MN$ (do cách vẽ).

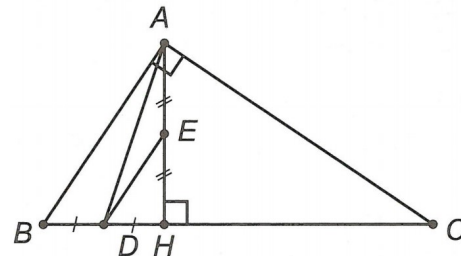
Suy ra $BC = 2MN$ hay $MN = \frac{1}{2}BC$.

Xét $\triangle HAB$ có D là trung điểm BH , E là trung điểm AH , theo kết quả bài toán trên $DE \parallel AB$.

Xét $\triangle ADE$ có $DC \perp AE$, mặt khác $AB \perp AC$ và $DE \parallel AB$ nên $AC \perp DE$

$\Rightarrow AC$ và DC là đường cao của $\triangle ADE$.

Mà $\{C\} = AC \cap DC \Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ADE$.



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC và $MA = MB = MC$. Tìm trực tâm $\triangle ABC$.

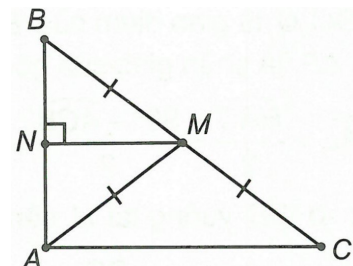
Đáp án

Kẻ $MN \perp AB$ ($N \in AB$).

Xét $\triangle MAB$ có $MA = MB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M .

Mặt khác $MN \perp AB$ tại N

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB (tính chất tam giác cân).



Xét $\triangle ABC$ có N là trung điểm AB , M là trung điểm của BC , theo kết quả của câu 1 nên $MN \parallel AC$. Mà $MN \perp AB \Rightarrow AB \perp AC$ nên A là trực tâm $\triangle ABC$.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

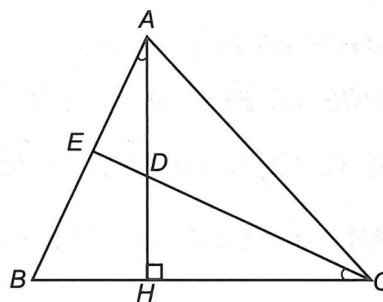
Phương pháp giải

Cách 1. Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác đồng quy tại một điểm.

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ nhọn, có $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên AH lấy điểm D sao cho $\widehat{HAB} = \widehat{HCD}$.

Chứng minh rằng $BD \perp AC$.

Hướng dẫn giải



Gọi E là giao điểm của AB và CD kéo dài.

$$\text{Xét } \triangle EBC \text{ có } \widehat{BEC} = 180^\circ - (\widehat{EBC} + \widehat{ECB}). \quad (1)$$

Mặt khác trong $\triangle HAB$ có $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$ (do $AH \perp BC$); $\widehat{HAB} = \widehat{HCD}$ (giả thiết).

$$\text{Do đó } \widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BEC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow EC \perp AB.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} EC \perp AB & (\text{chứng minh trên}) \\ AH \perp BC & (\text{giả thiết}) \\ \{D\} = CE \cap AH \end{cases}$$

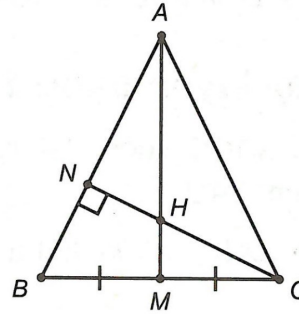
Suy ra D là trực tâm của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow D \text{ thuộc đường cao hạ từ } B \text{ của } \triangle ABC \Rightarrow BD \perp AC.$$

Cách 2. Sử dụng định lý trong tam giác cân thì đường trung tuyến, đường phân giác ứng với cạnh đáy đồng thời là đường cao.

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , M là trung điểm của BC , đường cao CN cắt AM tại H . Chứng minh rằng $BH \perp AC$.

Hướng dẫn giải



Vì $\triangle ABC$ cân tại A và M là trung điểm của BC nên AM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao ứng với $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Mặt khác $CN \perp AB$; $\{H\} = AM \cap CN$.

Suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow BH$ thuộc đường cao hạ từ B của $\triangle ABC$

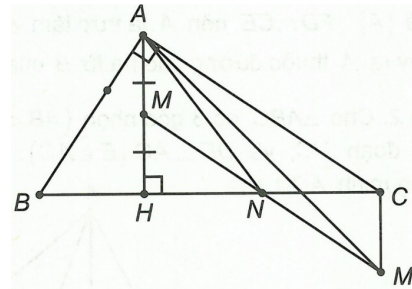
$\Rightarrow BH \perp AC$.

Cách 3. Hai đường thẳng song song với nhau thì cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , đường cao AH . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và CH .

Chứng minh BM vuông góc với AN .

Hướng dẫn giải



Trên tia đối của tia NM ta lấy M' sao cho $NM = NM'$.

Xét $\triangle NMH$ và $\triangle NM'C$ có

$MN = NM'$ (theo cách vẽ hình),

$\widehat{MNH} = \widehat{M'NC}$ (hai góc đối đỉnh),

$HN = NC$ (do N là trung điểm HC).

Do đó $\triangle NMH = \triangle NM'C$ (c.g.c)

$\Rightarrow CM' = HM$ và $\widehat{HMN} = \widehat{CM'N}$.

(hai cạnh, hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $HM \parallel CM'$.

Xét $\triangle AMM'$ và $\triangle M'CA$ có

$AM = CM'$ (cùng bằng HM),

$\widehat{MAM'} = \widehat{CM'A}$ (so le trong do $AM \parallel CM'$),

AM' là cạnh chung.

Do đó $\triangle AMM' = \triangle M'CA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MM'A} = \widehat{CAM'}$.

Mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel MM'$.

Mặt khác $AC \perp AB$ nên $MN \perp AB$.

Xét $\triangle ABN$ có $AH \perp BN$ và $MN \perp AB \Rightarrow M$ là giao của hai đường cao $\Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle ABN \Rightarrow M$ thuộc đường cao hạ từ B xuống $AN \Rightarrow BM \perp AN$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > 90^\circ$, AD vuông góc với BC tại D , BE vuông góc với AC tại E . Gọi F là giao điểm của đường thẳng AD và BE . Chứng minh $AB \perp FC$.

Hướng dẫn giải

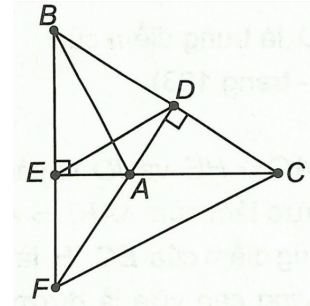
Xét $\triangle FBC$ có $AD \perp BC$ nên $FD \perp BC$. (1)

$BE \perp AC \Rightarrow CE \perp BF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra CE và FD là các đường cao của $\triangle FBC$.

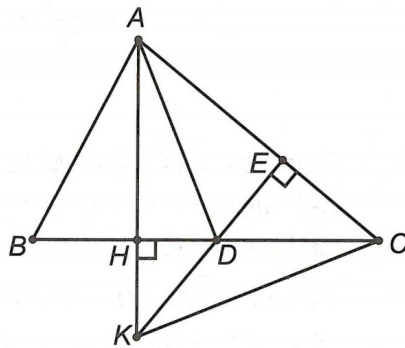
Mà $\{A\} = FD \cap CE$ nên A là trực tâm $\triangle FBC$.

Suy ra A thuộc đường cao hạ từ B của $\triangle FBC \Rightarrow AB \perp FC$.



Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Lấy D là điểm thuộc đoạn HC , vẽ $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Gọi K là giao điểm của AH và DE .

Chứng minh $AD \perp KC$.



Hướng dẫn giải

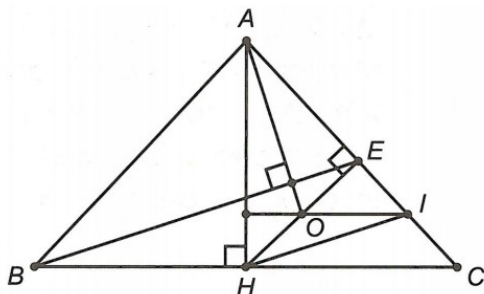
Xét $\triangle AKC$ ta có $AH \perp BC \Rightarrow CH \perp AK$. (1)

và $DE \perp AC \Rightarrow KE \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra KE và CH là hai đường cao của $\triangle AKC$.

Mà $\{D\} = KE \cap CH$ nên D là trực tâm của $\triangle AKC \Rightarrow D$ thuộc đường cao hạ từ A của $\triangle AKC \Rightarrow AD \perp KC$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH , vẽ $HE \perp AC$ ($E \in AC$). Gọi O và I lần lượt là trung điểm của EH và EC . Chứng minh rằng $AO \perp BE$.



Hướng dẫn giải

Với I là trung điểm của EC , O là trung điểm của EH

$\Rightarrow IO \parallel HC$ (tương tự ví dụ 3 – trang 123).

Mà $AH \perp BC$ nên $IO \perp AH$.

Xét $\triangle AHI$ có $IO \perp AH$, $HE \perp AC \Rightarrow HE$ và IO là các đường cao của $\triangle AHI$.

Mà $\{O\} = HE \cap IO$ nên O là trực tâm của $\triangle AHI \Rightarrow AO \perp HI$.

Mặt khác $\triangle CBE$ có I là trung điểm của EC , H là trung điểm BC (do $\triangle ABC$ cân tại A nên AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến) $\Rightarrow AO \perp HI$.

Mặt khác xét $\triangle CBE$ có I là trung điểm của EC , H là trung điểm của BC (do $\triangle ABC$ cân tại A nên AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến) $HI \parallel BE$ (tương tự ví dụ 3 – trang 123).

Mà $AO \perp HI$ (chứng minh trên) nên $AO \perp BE$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\widehat{C} = 70^\circ$, đường cao BH cắt đường trung tuyến AM ($M \in BC$) ở K . Chứng minh $CK \perp AB$ và tính $\widehat{HKM}$.

Đáp án

Do $\triangle ABC$ cân tại A và AM là trung tuyến $\Rightarrow AM$ cũng là đường cao ứng với $BC \Rightarrow AM \perp BC$ tại M .

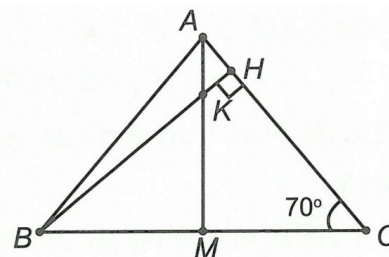
Mặt khác $BH \perp AC$ và $\{K\} = BH \cap AM$ nên K là trực tâm $\triangle ABC$

$\Rightarrow K$ thuộc đường cao hạ từ C của $\triangle ABC \Rightarrow CK \perp AB$.

Ta có $\widehat{HKM} = \widehat{HKC} + \widehat{CKM} = (180^\circ - \widehat{KHC} - \widehat{KCH}) + (180^\circ - \widehat{KMC} - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCH}) + (180^\circ - 90^\circ - \widehat{KCM})$

$\Rightarrow \widehat{HKM} = 180^\circ - (\widehat{KCH} + \widehat{KCM}) = 180^\circ - \widehat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D bất kì ($D \neq A, B$), trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Chứng minh $ED \perp BC$.

Đáp án

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có

$AE = AD$ (giả thiết),

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD} = 90^\circ$ (giả thiết),

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ vuông cân tại A).

Do đó $\triangle ABE = \triangle ACD$ (c,g,c) $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ (hai góc tương ứng). (1)

Gọi F là giao điểm của CD và BE .

Ta có $\widehat{FDB} = \widehat{ADC}$ (hai góc đối đỉnh); (2)

$\widehat{ADC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{FDB} + \widehat{FBD} = \widehat{ADC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$.

Trong $\triangle FDB$ có

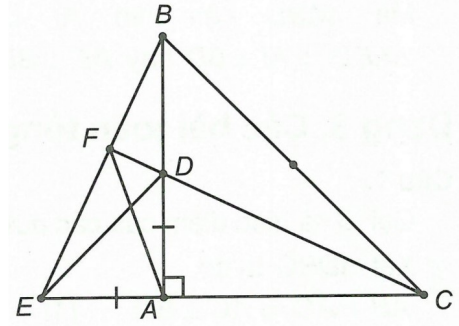
$$\widehat{DFB} = 180^\circ - (\widehat{FDB} + \widehat{FBD}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$\Rightarrow CD \perp BE$.

Xét $\triangle BEC$ có $AB \perp EC$; $CD \perp BE$.

Mà $\{D\} = CD \cap AB$ nên D là trực tâm $\triangle BEC$

$\Rightarrow ED$ là đường cao của $\triangle BEC \Rightarrow ED \perp BC$.



Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Lấy D là một điểm thuộc đoạn thẳng HC , vẽ $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Gọi F là giao điểm của AD và BE .

Chúng minh rằng $AD \perp FC$.

Đáp án

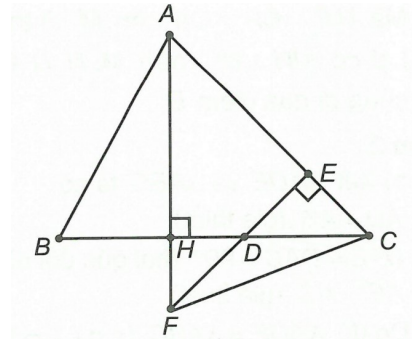
Vì $DE \perp AC \Rightarrow FE \perp AC$;

$AH \perp BC \Rightarrow CH \perp AF$.

Xét $\triangle AFC$ có $FE \perp AC$ và $CH \perp AF$.

Mà $\{D\} = FE \cap CH$ nên D là trực tâm của $\triangle AFC$

$\Rightarrow AD \perp FC$.



Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , đường cao AH , phân giác AD . Gọi I, J lần lượt là giao điểm các đường phân giác trong của $\triangle ABH$, $\triangle ACH$. E là giao điểm của đường thẳng BI với AJ . Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE$ là tam giác vuông.

b) $IJ \perp AD$.

Đáp án

a) Gọi Q là giao điểm của BE và AH .

Vì AE là phân giác của góc HAC nên

$$\widehat{QAE} = \frac{\widehat{HAC}}{2} = \frac{90^\circ - \widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{QAE} = \frac{90^\circ - (90^\circ - \widehat{ABC})}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Xét $\triangle HQB$ vuông tại H nên $\widehat{HQB} + \widehat{QBH} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{QBH} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$ và $\widehat{HQB} = \widehat{AQE}$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{QAE} + \widehat{AQE} = \widehat{QBH} + \widehat{HQB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow BE \perp AE \Rightarrow \triangle ABE \text{ vuông tại } E.$$

b) Hoàn toàn tương tự nếu gọi F là giao của CJ và AI thì $CJ \perp AI$.

$$\text{Xét } \triangle AIJ \text{ có } \begin{cases} IE \perp AJ \\ JF \perp AI \\ \{P\} = EI \cap JF \end{cases} \Rightarrow P \text{ là giao điểm ba đường cao của } \triangle ABC.$$

Do đó P là trực tâm của $\triangle AIJ \Rightarrow P$ thuộc đường cao của $\triangle AIJ \Rightarrow AP \perp IJ$ hay $AD \perp IJ$.

Câu 5: Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$, đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 10^\circ$. Vẽ đường phân giác của góc BAD cắt BC ở E . Chứng minh rằng $AE \perp BD$.

Đáp án

Vì $\widehat{ADB}$ là góc ngoài $\triangle DBC$ nên

$$\widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ.$$

Trong $\triangle ABC$ có

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ACB}$$

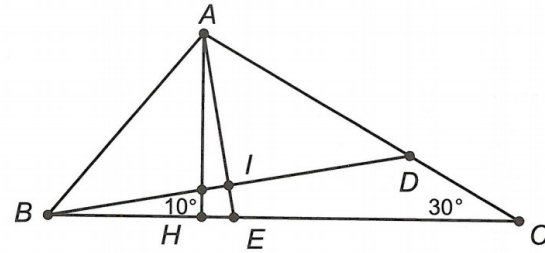
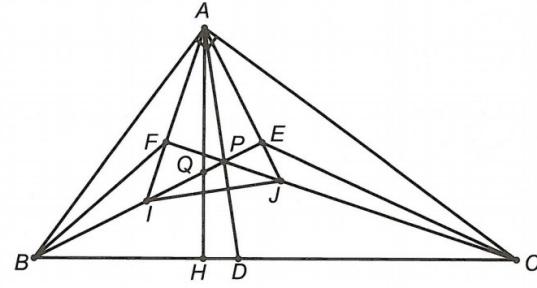
$$= 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ,$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ.$$

Xét $\triangle ABD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 40^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A .

Gọi I là giao của AE và BD thì AI là phân giác của $\widehat{BAD}$.

Mà $\triangle ABD$ cân nên AI cũng là đường cao của $\triangle ABD \Rightarrow AI \perp BD$ hay $AE \perp BD$.



Dạng 3: Các bài toán tổng hợp

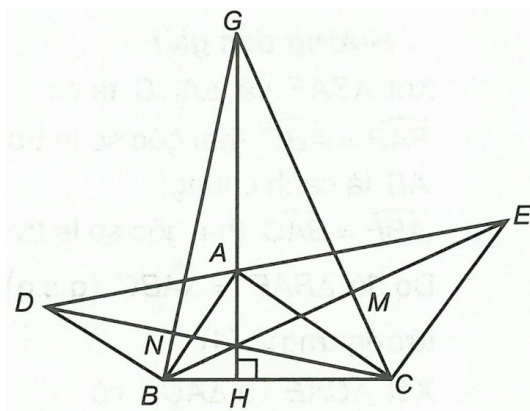
Phương pháp giải

Sử dụng tính chất ba đường cao trong tam giác đồng quy tại một điểm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Vẽ ra phía ngoài của tam giác hai tam giác vuông cân ABD và ACE ($\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 90^\circ$). Chứng minh ba đường thẳng AH , BE và CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn giải



Trên tia đối của tia AH lấy G sao cho $GA = BC$.

Ta có $\widehat{GAC} = 180^\circ - \widehat{HAC} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{HCA}) = 90^\circ + \widehat{HCA}$;

$$\widehat{BCE} = \widehat{ACE} + \widehat{ACB} = 90^\circ + \widehat{ACH} \Rightarrow \widehat{GAC} = \widehat{BCE}$$

Xét $\triangle AGC$ và $\triangle CBE$ có

$AG = CB$ (theo cách vẽ hình),

$\widehat{GAC} = \widehat{BCE}$ (chứng minh trên)

$AC = CE$ (do $\triangle ACE$ vuông cân tại C).

Do đó $\triangle AGC = \triangle CBE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{CEB}$ (hai góc tương ứng).

Gọi M là giao điểm của GC và BE .

Xét $\triangle MEC$ có $\widehat{MEC} + \widehat{ECM} = \widehat{ECN} + \widehat{MCA} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp GC$.

Chứng minh tương tự nếu gọi N là giao điểm của BG và CD , ta có $CN \perp GB$.

Xét $\triangle GBC$ có $GH \perp BC$, $CN \perp BG$, $BM \perp GC \Rightarrow CN, BM, GH$ là ba đường cao của $\triangle GBC$

$\Rightarrow CN, BM$ và GH cùng đi qua trực tâm $\triangle GBC$ hay AH, BE và CD cùng đi qua một điểm chính là trực tâm $\triangle GBC$.

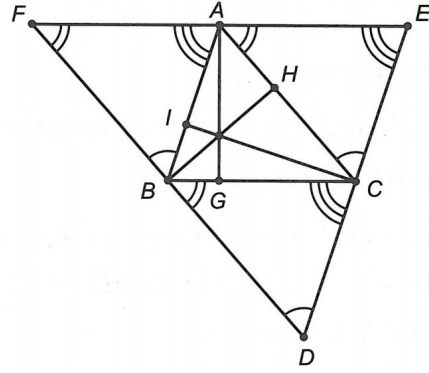
Bài toán 2. Một số dạng toán khác



Phương pháp giải

Vận dụng linh hoạt tính chất ba đường cao trong tam giác kết hợp với kiến thức hình học đã biết để giải bài tập.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$, qua các đỉnh A, B, C kẻ đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành $\triangle DEF$. Chứng minh rằng đường cao của $\triangle ABC$ là đường trung trực của $\triangle DEF$.



Hướng dẫn giải

Xét $\triangle BAF$ và $\triangle ABC$ ta có

$$\widehat{FAB} = \widehat{ABC} \text{ (hai góc so le trong do } BC \parallel EF \text{)};$$

AB là cạnh chung;

$$\widehat{ABF} = \widehat{BAC} \text{ (hai góc so le trong do } AC \parallel DF \text{)}.$$

Do đó $\triangle BAF = \triangle ABC$ (g.c.g)

$$\Rightarrow FA = BC \text{ (hai cạnh tương ứng). (1)}$$

Xét $\triangle CAE$ và $\triangle ACB$ có

$$\widehat{EAC} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc so le trong do } BC \parallel EF \text{)};$$

AC là cạnh chung;

$$\widehat{ACE} = \widehat{CAB} \text{ (hai góc so le trong do } AB \parallel ED \text{)}.$$

Do đó $\triangle CAE = \triangle ACB \Rightarrow AE = BC$ (hai cạnh tương ứng). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AF = AE$.

Tương tự ta chứng minh được $BF = BD$ và $CD = CE$.

Xét AG là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AG \perp BC$ ($G \in BC$).

Mà $BC \parallel FE$ nên $AG \perp FE$.

A là trung điểm $FE \Rightarrow AG$ là trung trực của FE .

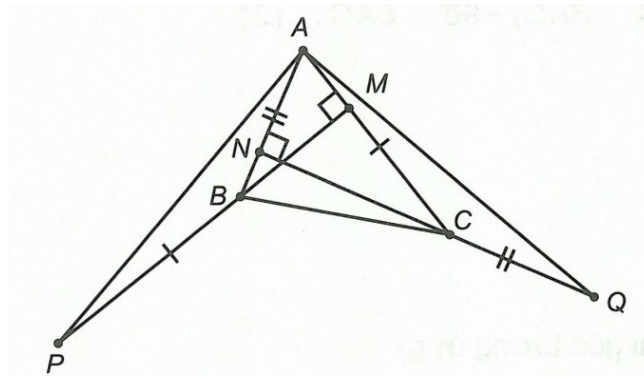
Chứng minh tương tự BH là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow BH$ là trung trực của DF ;

CI là đường cao $\triangle ABC \Rightarrow CI$ là trung trực của DE .

Vậy các đường cao của $\triangle ABC$ là các đường trung trực của $\triangle DEF$.

📌 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn, hai đường cao BM và CN . Trên tia đối của các tia BM lấy điểm P sao cho $BP = AC$, trên tia đối của tia CN lấy Q sao cho $CQ = AB$. Chứng minh rằng $\triangle APQ$ vuông cân tại A .



Hướng dẫn giải

Ta có $\widehat{ACN} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ và $\widehat{ABM} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{ABM}$.

Mà $\widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{ABM}$; $\widehat{ACQ} = 180^\circ - \widehat{ACN}$ nên $\widehat{PBA} = \widehat{ACQ}$.

Xét $\triangle BAP$ và $\triangle CQA$ có

$BA = CQ$ (giả thiết);

$\widehat{PBA} = \widehat{ACQ}$ (chứng minh trên);

$BP = AC$ (giả thiết).

Do đó $\triangle BAP = \triangle CQA$ (c.g.c) $\Rightarrow AP = AQ$ và $\widehat{CAQ} = \widehat{BPA}$ (hai cạnh và góc tương ứng).

Xét $\triangle APQ$ có $\widehat{PAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{CAQ} = \widehat{PAC} + \widehat{BPA} = \widehat{APM} + \widehat{MAP} = 90^\circ$.

Và $AP = AQ \Rightarrow \triangle APQ$ vuông cân tại A.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$, I là trung điểm của BC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC , hai tam giác đều ABE và ACF . Gọi H là trực tâm của $\triangle ABE$. Trên tia đối của tia IH , lấy điểm K sao cho $HI = IK$. Chứng minh:

a) $\triangle AHF = \triangle CKF$.

b) $\triangle KHF$ là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

a) Xét $\triangle IBH$ và $\triangle ICK$ có

$IB = IC$ (giả thiết),

$\widehat{HIB} = \widehat{KIC}$ (hai góc đối đỉnh),

$IH = IK$ (giả thiết).

Do đó $\triangle IBH = \triangle ICK$ (c.g.c)

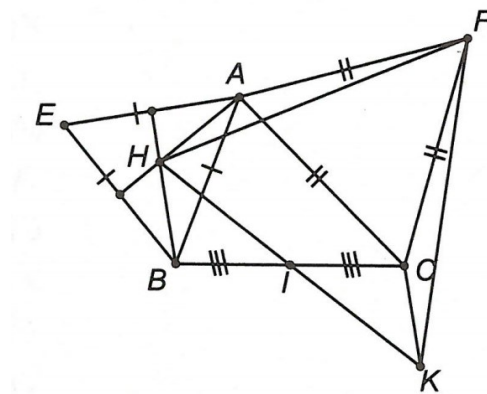
$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng)

và $\widehat{ICK} = \widehat{IBH} = \widehat{IBA} + \widehat{ABH} = \widehat{CBA} + 30^\circ$ (do AH là phân giác $\widehat{EBA}$).

Mà H là trực tâm của $\triangle ABE$ đều nên $BH = AH \Rightarrow CK = AH$.

Ta có

$$\widehat{HAF} = \widehat{HAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 30^\circ + \widehat{BAC} + 60^\circ = 90^\circ + \widehat{BAC}. \quad (1)$$



$$\widehat{KCF} = 360^\circ - \widehat{KCI} - \widehat{BCA} - \widehat{ACF} = 360^\circ - (\widehat{CBA} + 30^\circ) - \widehat{BCA} - 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KCF} = 270^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BCA}) = 270^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HAF} = \widehat{KCF}$.

Xét $\triangle AHF$ và $\triangle CKF$ có

$AF = CF$ (vì $\triangle ACF$ đều);

$\widehat{HAF} = \widehat{KCF}$ (chứng minh trên),

$AH = CK$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle AHF = \triangle CKF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{CFK}$ và $HF = KF$ (hai cạnh và hai góc tương ứng)

b) Xét $\triangle KHF$ có $HF = KF \Rightarrow \triangle KHF$ cân tại F .

Mặt khác $\widehat{HFK} = \widehat{HFC} + \widehat{CFK} = \widehat{HFC} + \widehat{AFH} = \widehat{AFC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle KHF$ đều.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh AC lấy điểm M bất kì ($M \neq A, C$). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại N ; từ C kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại P . Chứng minh ba đường thẳng AB , CP , MN cùng đi qua một điểm.

Đáp án

Gọi D là giao điểm của các đường thẳng AB và CP .

Xét $\triangle DBC$ ta có

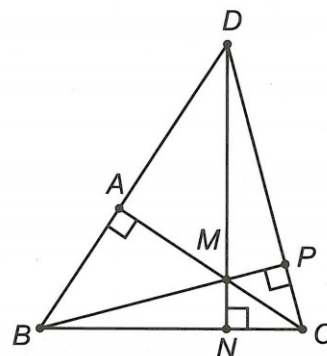
$AB \perp AC \Rightarrow AC \perp BD$, (1)

$CP \perp BP \Rightarrow BP \perp DC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra CA và BP là các đường cao của $\triangle DBC$.

Mà $\{M\} = BP \cap CA$ nên M là trực tâm $\triangle DBC \Rightarrow DM \perp BC$.

Lại có $MN \perp BC$ nên M, N, D thẳng hàng $\Rightarrow AB, MN$ và CP cùng đi qua điểm D .



Câu 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

a) Chứng minh $BC = DE$

b) Chứng minh $\triangle ABD$ vuông cân và $BD \parallel CE$.

Đáp án

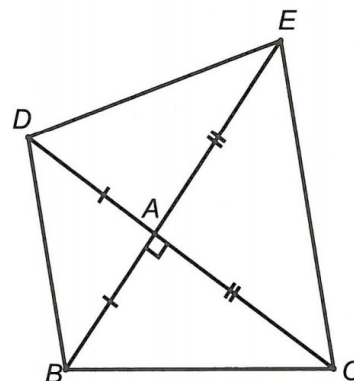
a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ ta có

$AD = AB$ (giả thiết);

$\widehat{ADE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ (hai góc đối đỉnh);

$AE = AC$ (giả thiết)

Do đó $\triangle ADE = \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = BC$ (hai cạnh tương ứng).



b) Xét $\triangle ABD$ có $DA \perp AB$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A)

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

Mà $AD = AB$ nên $\triangle ABD$ vuông cân tại A .

Chứng minh tương tự ta có $\triangle ACE$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{ACE} = 45^\circ.$$

Mặt khác hai góc $\widehat{BDA}$ và $\widehat{ACE}$ ở vị trí so le trong.

Suy ra $BD \parallel CE$.

Câu 3: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn biết $\widehat{ACB} = 50^\circ$, trực tâm H . Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC .

a) Chứng minh $\widehat{BCK} = \widehat{BAK}$.

b) Tính $\widehat{KBC}$.

Đáp án

a) Vì K là đối xứng của H qua BC nên

$$\widehat{BCK} = \widehat{BCH}. \quad (1)$$

Lại có $\widehat{IHC} = \widehat{EHA}$ (hai góc đối đỉnh);

$$\widehat{BCH} + \widehat{IHC} = 90^\circ \text{ và } \widehat{EHA} + \widehat{EAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{ICH}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BCK} = \widehat{BAH}$.

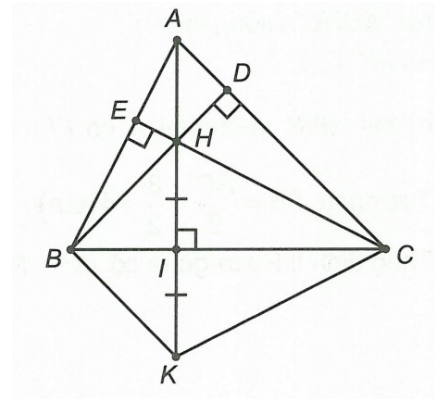
b) Vì K là đối xứng của H qua BC nên $\widehat{KBC} = \widehat{CBH}$.

Ta có $\widehat{CBH} + \widehat{BHI} = 90^\circ$ và $\widehat{AHD} + \widehat{HAD} = 90^\circ$.

Hơn nữa $\widehat{BHI} = \widehat{AHD}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{CBH} = \widehat{HAC}$.

Trong $\triangle IAC$ có $\widehat{CAI} = \widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Vậy $\widehat{KBC} = \widehat{CBH} = \widehat{CAH} = 40^\circ$.



Câu 4: Cho $\triangle ABC$ có BD và CE lần lượt là các đường cao hạ từ B, C và $BD = CE$. H là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân và AH là phân giác góc BAC .

Đáp án

Xét $\triangle DBA$ và $\triangle ECA$ có

$$\widehat{CEA} = \widehat{BDA} = 90^\circ;$$

$$CE = BD \text{ (giả thiết);}$$

$\widehat{A}$ là góc chung.

Do đó $\triangle DBA = \triangle ECA$ (g.c.g)

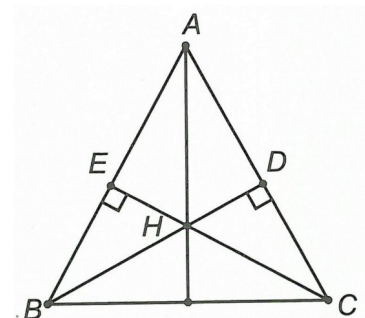
$$\Rightarrow AB = AC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A.$$

Xét $\triangle ABC$ có $BD \perp AC$; $CE \perp AB$.

Mà $\{H\} = CE \cap BD$ nên H là trực tâm của $\triangle ABC$.

Suy ra AH là đường cao của $\triangle ABC$.



Hơn nữa $\triangle ABC$ cân tại A

$\Rightarrow AH$ là phân giác của góc BAC .

Câu 5: Cho $\triangle ABC$ có các đường cao BE , CF cắt nhau tại H ($E \in AC$; $F \in AB$). Gọi I , K lần lượt là trung điểm các cạnh AH , BC .

a) Chứng minh $FK \perp FI$.

b) Cho $AH = 6$ cm; $BC = 8$ cm. Tính IK .

Đáp án

a) Xét bài toán phụ: Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A , I là trung điểm của BC thì $IA = IB = IC$. Thật vậy, gọi M , N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I xuống AB và AC .

Ta có $IM \perp AB$, $AC \perp AB \Rightarrow IM \parallel AC$

$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ (hai góc đồng vị).

Xét $\triangle MBI$ và $\triangle NIC$ có $\widehat{BMI} = \widehat{INC} = 90^\circ$, $\widehat{BIM} = \widehat{ICN}$ và $BI = IC$.

Do đó $\triangle MBI = \triangle NIC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BM = IN$ và $MI = NC$ (hai cạnh tương ứng).

Mặt khác $IM \perp AB$, $NA \perp AB \Rightarrow IM \parallel AN \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{IAN}$ (so le trong).

Xét $\triangle AMI$ vuông tại M và $\triangle ANI$ vuông tại N có AI chung, $\widehat{AIM} = \widehat{IAN}$.

Do đó $\triangle AMI = \triangle ANI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MI = AN \Rightarrow NC = AN$ (cùng bằng MI)

$\Rightarrow N$ là trung điểm AC .

Trong $\triangle IAC$ có IN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến ứng với AC

$\Rightarrow \triangle IAC$ cân tại I

$\Rightarrow IA = IC \Rightarrow IA = IB = IC$.

Xét $\triangle FAH$ có $\widehat{AFH} = 90^\circ$ và I là trung điểm của $AH \Rightarrow IA = IF = IH$.

$\Rightarrow \triangle IFH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IFH} = \widehat{IHF}$.

Xét $\triangle FBC$ có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ và K là trung điểm của $BC \Rightarrow KC = KB = KF$.

$\Rightarrow \triangle KFC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{KCF}$.

Ta có $\widehat{IFK} = \widehat{IFH} + \widehat{HFK} = \widehat{IHF} + \widehat{KCF}$.

Lại có $\widehat{IHF} = \widehat{DHC}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{IFK} = \widehat{DHC} + \widehat{DCH} = 90^\circ$ (do $\triangle DHC$ vuông tại D)

$\Rightarrow FK \perp FI$.

b) Xét $\triangle FIK$ vuông tại F có $FI = IA = IH = \frac{AH}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (cm).

Tương tự $FK = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (cm).

Theo định lý Pi-ta-go ta có $IK^2 = FI^2 + FK^2 \Rightarrow IK^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow IK = 5$ (cm).

