

CHUYÊN ĐỀ: TÌM GTLN, GTNN CỦA BIỂU THỨC

MỤC LỤC

I. LÝ THUYẾT	2
II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN	3
Phương pháp 1. Sử dụng phép biến đổi đồng nhất	3
Dạng 1. Tìm GTNN và GTLN của đa thức bậc hai đơn giản	3
Dạng 2. Tìm GTNN và GTLN của đa thức bậc bốn đơn giản	10
Dạng 3. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức dạng $\frac{A}{B}$	14
Dạng 4. Tìm Min, Max của biểu thức có điều kiện của biến	31
Dạng 5. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:	41
Dạng 6. Tìm Min, Max bằng cách sử dụng bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối... ..	44
Phương pháp 2. Phương pháp chọn điểm rơi	47
Phương pháp 3. Sử dụng phương pháp đặt biến phụ	53
Phương pháp 4. Sử dụng biểu thức phụ	56
Phương pháp 5. Phương pháp miền giá trị	59
Phương pháp 6. Phương pháp xét từng khoảng giá trị	61
Phương pháp 7. Phương pháp hình học	64

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

❖ M. được gọi là GTLN của $f(x,y,...)$ trên miền xác định D nếu 2 điều kiện sau đồng thời thỏa mãn :

1. $f(x,y,...) \leq M \quad \forall (x,y,...) \in D$
2. $\exists (x_0, y_0,...) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0,...) = M$.

Ký hiệu : $M = \text{Max } f(x,y,...) = f_{\max}$ với $(x,y,...) \in D$

❖ M. được gọi là GTNN của $f(x,y,...)$ trên miền D đến 2 điều kiện sau đồng thời thỏa mãn :

1. $f(x,y,...) \geq M \quad \forall (x,y,...) \in D$
2. $\exists (x_0, y_0,...) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0,...) = M$.

Ký hiệu : $M = \text{Min } f(x,y,...) = f_{\min}$ với $(x,y,...) \in D$

2. Các kiến thức thường dùng

2.1. Luỹ thừa:

a) $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^{2k} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x^{2k} \leq 0$

Tổng quát : $[f(x)]^{2k} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -[f(x)]^{2k} \leq 0$

Từ đó suy ra : $[f(x)]^{2k} + m \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$$M - [f(x)]^{2k} \leq M$$

b) $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^{2k} \geq 0 \quad \forall x \geq 0; k \in \mathbb{Z}$

Tổng quát : $(\sqrt{A})^{2k} \geq 0 \quad \forall A \geq 0$ (A là 1 biểu thức)

2.2 Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

a) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$; nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x.y \geq 0$

c) $|x - y| \geq |x| - |y|$; nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x.y \geq 0$ và $|x| \geq |y|$

2.3. Bất đẳng thức côsi:

$$\forall a_i \geq 0 ; i = \overline{1, n} : \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2.4. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

Với n cặp số bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n ; b_1, b_2, \dots, b_n$ ta có :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \text{Const} = \text{Const}$

Nếu $b_i = 0$ xem như $a_i = 0$

2.5. Bất đẳng thức Bernonlly :

Với $a \geq 0 : (1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

Phương pháp 1. Sử dụng phép biến đổi đồng nhất

Bằng cách nhóm, thêm, bớt, tách các hạng tử một cách hợp lý, ta biến đổi biểu thức đã cho về tổng các biểu thức không âm (hoặc không dương) và những hằng số. Từ đó :

1. Để tìm Max $f(x,y,...)$ trên miền D ta chỉ ra :

$$\begin{cases} f(x,y,...) \leq M \\ \exists (x_0, y_0, ...) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{sao cho } f(x_0, y_0, ...) = M$$

2. Để tìm Min $f(x,y,...)$ trên miền D ta chỉ ra :

$$\begin{cases} f(x,y,...) \geq m \\ \exists (x_0, y_0, ...) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{sao cho } f(x_0, y_0, ...) = m$$

➤ **Phương pháp giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đại số bằng cách đưa về dạng $A(x) \geq 0$ { hoặc $A(x) \leq 0$ }**

– Để tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức $A(x)$ ta cần:

+ Chứng minh rằng $A(x) \geq k$ với k là hằng số.

+ Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra.

– Để tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức $A(x)$ ta cần:

+ Chứng minh rằng $A(x) \leq k$ với k là hằng số.

+ Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra.

Dạng 1. Tìm GTNN và GTLN của đa thức bậc hai đơn giản

Phương pháp: Áp dụng hằng đẳng thức bình phương của một tổng và hiệu

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức sau:

a) $A = x^2 + 4x + 7$

b) $R = 3x^2 - 5x + 3$

c) $M = x^2 + x + 1$

d) $A = x^2 + 2x + y^2 + 1$

e) $A(x) = x^2 - 4x + 24$

f) $B(x) = 2x^2 - 8x + 1$

g) $C(x) = 3x^2 + x - 1$

h) $A = (2x+1)^2 - (3x-2)^2 + x - 11$

i) $P = 2 + x - x^2$

j) $Q = 4x^2 + 4x + 11$

k) $N = x^2 - 4x + 1$

l) $D = 3x^2 - 6x + 1$

m) $K = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$

n) $B = x^2 + y^2 + 2xy + 4$

o) $Q = 4x^2 + 3x + 2$

p) $M = 5x^2 - |6x - 1| - 1$

q) $A = 9x^2 - 6x - 4|3x - 1| + 6$

r) $B = 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 - 4(x+3)^2$

HD:

q) Đặt $|3x - 1| = t$ $\frac{1}{2} t^2 = 9x^2 - 6x + 1$ $\frac{1}{2} A = t^2 - 4t + 5 = (t - 2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $t = 2 \equiv |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của các đa thức sau

a) $A = -x^2 + 6x - 15$

b) $B = -5x^2 - 4x + 1$

c) $C = -x^2 + 4x - 5 < 0$

d) $D = 4x - 10 - x^2$

e) $E = 2 + x - x^2$

f) $F = -5x^2 - 4x + 1$

- g) $G = -3x^2 + x + 1$ h) $H = -x^2 - 4x - 7$ i) $K = -5x^2 + 7x - 3$
 j) $L = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$ k) $M = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 5$ l) $N = -x^2 - x - 1$

Bài 3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:*

- a) $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5$ b) $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2$
 c) $A = x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 2018$ d) $A = 3x^2 + y^2 + 4x - y$
 e) $A = x^2 + 2x + 3 + 4y^2 + 4y$ f) $B = 4x^2 + y^2 + 12x + 4y + 15$
 g) $C = 5x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 2xz$ h) $D = x^2 + 17 + 4y^2 + 8x + 4y$
 i) $E = 16x^2 + 5 + 8x - 4y + y^2$ j) $F = x^2 + y^2 + 2x - 6y - 2$
 k) $I = x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 11$ l) $M = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$
 m) $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$ n) $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$
 o) $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$ p) $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$
 q) $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$ r) $Q = x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15 = 0$
 s) $A = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$ t) $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$

Bài 4. *Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:*

- a) $B = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$ b) $A = -4x^2 - 5y^2 + 8xy + 10y + 12$
 c) $A = x + y + z - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)$ d) $B = -3x^2 - 16y^2 - 8xy + 5x + 2$
 e) $N = -x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 3$ f) $P = -3x^2 - 5y^2 + 2x + 7y - 23$
 g) $R = -7x^2 - 4y^2 - 8xy + 18x + 9$ h) $Q = xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2$

HD:

h) Ta có : $Q = xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = -\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$

$$Q = -\frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \leq 0 \quad \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow \text{Max}Q = 0 \Leftrightarrow x = y = z \quad \text{Vậy: } \text{Max}Q = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

Bài 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau bằng cách đưa về HĐT $(a \pm b)^2$; $(a \pm b \pm c)^2$*

- a) $A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$ b) $B = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$
 c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ d) $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$
 e) $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$ f) $K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$
 g) $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$ h) $A = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$
 i) $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$ j) $G = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$
 k) $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$ l) $D = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$

- m) $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$ n) $Q = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$
- o) $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$ p) $B(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$
- q) $C(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$ r) $E(x) = 2x^2 + 8xy + 11y^2 - 4x - 2y + 6$
- s) $C = a^2 + ab + b^2 - 3x - 3b + 1989$ t) $A = 3x + 4y^2 + 4xy + 2x - 4y + 26$
- u) $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$ v) $A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$
- w) $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$
- x) $G = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$
- y) $F = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$
- z) $B = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 5xy - 3yz - 3xz - 2x - 2y + 3$
- aa) $B = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y$

HD:

a) $A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

$$A = x^2 - 2x(y - 1) + 2y^2 - 10y + 17 = x^2 - 2x(y - 1) + (y - 1)^2 + [2y^2 - 10y + 17 - (y - 1)^2]$$

$$A = (x - y + 1)^2 + (y^2 - 8y + 16) = (x - y + 1)^2 + (y - 4)^2$$

b) $B = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

$$B = x^2 - x(y + 2) + y^2 - 2y = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{y + 2}{2} + \frac{y^2 + 4y + 4}{4} \right] + y^2 - 2y - \frac{y^2}{4} - y - 1$$

$$4B = (x - y - 2)^2 + 4y^2 - 8y - y^2 - 4y - 4 = (x - y - 2)^2 + 3y^2 - 12y - 3$$

$$= (x - y - 2)^2 + 3(y^2 - 4y) - 3 = (x - y - 2)^2 + 3(y - 2)^2 - 15 \geq -15$$

$$\frac{1}{2} B \geq -\frac{15}{4}$$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

$$C = x^2 + x(y - 3) + y^2 - 3y = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{y - 3}{2} + \frac{y^2 - 6y + 9}{4} \right] + y^2 - 3y - \frac{y^2 - 6y + 9}{4}$$

$$4C = (x + y - 3)^2 + [4y^2 - 12y - y^2 + 6y - 9]$$

d) $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

$$D = x^2 - 2x(y + 6) + 6y^2 + 2y + 45$$

$$= x^2 - 2x \cdot (y + 6) + (y + 6)^2 + 6y^2 + 2y + 45 - (y^2 + 12y + 36)$$

$$= (x - y - 6)^2 + 5y^2 - 10y + 9 = (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \geq 4$$

e) $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

$$E = x^2 - x(y - 2) + 3y^2 - 10y + 20$$

$$= x^2 - 2x \cdot \frac{y - 2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + 3y^2 - 10y + 20 - \frac{y^2 - 4y + 4}{4}$$

$$4E = (x - y + 2)^2 + (12y^2 - 40y + 80) - (y^2 - 4y + 4) = (x - y + 2)^2 + (11y^2 - 36y + 76)$$

f) $K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$

$$4K = 4x^2 + 4y^2 - 4xy + 12x + 12y + 80 = \left[4x^2 - 4x(y-3) + (y-3)^2 \right] + \left[4y^2 + 12y + 80 - (y-3)^2 \right]$$

$$4K = (2x - y + 3)^2 + 3y^2 + 18y + 71$$

g) $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$

$$N = x^2 - x(2y+1) + 2y^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{2y+1}{2} + \frac{(2y+1)^2}{4} + 2y^2 - \frac{(2y+1)^2}{4}$$

$$4N = (x - 2y - 1)^2 + 8y^2 - (4y^2 + 4y + 1)$$

h) $A = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$

$$A = x^2 - 2x(y+1) + 3y^2 + 1997 = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 3y^2 + 1997 - (y^2 + 2y + 1)$$

i) $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$

$$Q = x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 10y = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 - 10y - (y^2 - 2y + 1)$$

j) $G = x^2 + xy + y^2 - 3(x+y) + 3$

$$4G = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 12$$

$$4G = 4x^2 + 4x(y-3) + (y-3)^2 + (4y^2 - 12y + 12) - (y^2 - 6y + 9)$$

$$4G = (2x + y - 3)^2 + 3y^2 - 6y + 3 = (2x + y - 3)^2 + 3(y-1)^2 \geq 0$$

k) $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

$$H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$$

$$\Rightarrow 4H(x) = (2x)^2 - 2.2x.y + y^2 + 3y^2 - 4x + 4y + 4$$

$$= (2x - y)^2 - 2(2x - y) + 3y^2 + 2y + 3 + 1 = (2x - y - 1)^2 + 3(y^2 + \frac{2}{3}y + 1)$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3(y + \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Min} 4H(x) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{Min} H(x) = \frac{2}{3}$$

l) $D = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$

$$2D = 4x^2 + 4xy + 10y^2 - 16x - 44y = 4x^2 + 4x(y-4) + 10y^2 - 44y$$

$$2D = 4x^2 + 2.2x(y-4) + (y-4)^2 + 10y^2 - 44y - y^2 + 8y - 16$$

m) $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$

$$2E = 4x^2 + 18y^2 - 12xy - 12x - 24y + 4008$$

$$2E = 4x^2 - 12x(y+1) + 9(y+1)^2 + 18y^2 - 24y + 4008 - 9(y^2 + 2y + 1)$$

$$2E = (2x - y - 1)^2 + 9y^2 - 42y + 3999$$

n) $Q = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

$$4Q = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2) + 4 + 2ab - 4a - 4b = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$$

o) $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$

$$A = x^2 - 2x(2y + 3z) + 6y^2 - 14z^2$$

$$A = x^2 - 2x(2y + 3z) + (2y + 3z)^2 + 6y^2 - 14z^2 - (4y^2 + 12yz + 9z^2)$$

$$A = (x - 2y - 3z)^2 + 2y^2 - 12yz - 23z^2$$

p) $B(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

$$B(x) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + x(y - 1) - (y - 1) - 3 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) - 3$$

$$= (x - 1)^2 + 2(x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y - 1) + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - 3$$

$$= \left[x - 1 + \frac{y - 1}{2} \right]^2 - \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + y^2 - 2y + 1 - 3$$

q) $C(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

$$C(x) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + y^2 - 8x - 2y + 18 = 2[(x + y)^2 - 2(x + y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$= 2(x + y - 2)^2 + (y + 3)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow y = -3; x = 5$$

r) $E(x) = 2x^2 + 8xy + 11y^2 - 4x - 2y + 6$

$$E(x) = 2(x^2 + 4xy + 4y^2) + 3y^2 - 4x - 2y + 6 = [2(x + 2y)^2 - 4(x + 2y) + 2] + 3y^2 + 6y + 4$$

$$= 2(x + 2y - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

s) $C = a^2 + ab + b^2 - 3x - 3b + 1989$

$$C = a^2 + a(b - 3) + b^2 - 3b + 1989 = a^2 + 2a \cdot \frac{b - 3}{2} + \frac{(b - 3)^2}{4} + b^2 - 3b + 1989 - \frac{(b - 3)^2}{4}$$

$$4C = 4a^2 + 4ab + 4b^2 - 12a - 12b + 7956$$

$$= [4a^2 + 4a(b - 3) + (b - 3)^2] + 4b^2 - 12b + 7956 - (b - 3)^2$$

$$= (2a + b - 3)^2 + 3b^2 - 6b + 7947$$

t) $A = 4y^2 + (4xy - 4y) + 3x^2 + 2x + 26$

$$= [4y^2 + 2 \cdot 2y \cdot (x - 1) + (x - 1)^2] + 3x^2 + 2x + 26 - (x - 1)^2$$

$$A = (2y + x - 1)^2 + 2x^2 + 4x + 25 = (x + 2y - 1)^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 23 \geq 23$$

u) $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 \\ &= x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003 \geq 2003 \\ &\Leftrightarrow x = -4; y = 3 \end{aligned}$$

v) $A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

$$\begin{aligned} A &= 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82 \\ &= 9y^2 - 12y(x+4) + 4(x+4)^2 - 4(x+4)^2 + 5x^2 + 24x + 82 \\ &= [3y - 2(x+4)]^2 + (x-4)^2 + 2 \geq 2 \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

w) $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 2x(y-z+1) + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 8z + 2000 \\ &= x^2 - 2x(y-z+1) + (y-z+1)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 2z + 2000 - (y^2 + z^2 + 1 - 2yz - 2z + 2y) \\ &= (x-y+z-1)^2 + (y^2 + 2z^2 - 4y + 2yz + 1999) \\ &= (x-y+z-1)^2 + [y^2 - 2y(z+2) + (z+2)^2] + 2z^2 - (z^2 + 4z + 4) + 1999 \\ &= (x-y+z-1)^2 + (y-z-2)^2 + (z^2 - 4z + 1995) \end{aligned}$$

x) $G = (x-ay)^2 + 6(x-ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$

$$G = [(x-ay)^2 + 6(x-ay) + 9] + (x^2 + 2x + 1) + 16y^2 - 8ay - 8y$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + 16y^2 - 8y(a+1) + (a+1)^2 - (a+1)^2$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + (4y-a-1)^2 - (a+1)^2 \geq -(a+1)^2$$

y) $F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$

$$F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x^2 - 2x(3y+z) + 2\left(\frac{3y+z}{2}\right)^2 + 6y^2 + 5z^2 + 8yz - \left(\frac{3y+z}{2}\right)^2 + 2y + 4z + 2 \\ &= 2\left(x - \frac{3y+z}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y^2 + \frac{10}{3}yz + \frac{25}{9}z^2\right) + \frac{1}{3}z^2 + 2y + 4z + 2 \\ &= 2\left(x - \frac{3y+z}{2}\right)^2 + \left[\frac{3}{2}\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 + 2\left(y + \frac{5}{3}z\right) + \frac{2}{3}\right] + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= 2(\dots) + \frac{3}{2}\left(y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3y+z}{2} = 0 \\ y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \min A = 1 \end{aligned}$$

z) $B = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 5xy - 3yz - 3xz - 2x - 2y + 3$

$$B = \left[z - \frac{3}{2}(x+y)\right]^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{y}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}(y-2)^2 + 1 \geq 1$$

aa) $G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y$

$$\begin{aligned} G(x) &= 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+y-z)^2 - 5 \geq -5 \\ &\Leftrightarrow x=1; y=2; z=3 \end{aligned}$$

Bài 2. *Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau bằng cách đưa về HĐT $(a \pm b)^2$; $(a \pm b \pm c)^2$*

- | | |
|---|---|
| a) $H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$ | b) $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$ |
| c) $A = 5 - 2x^2 - 4y^2 + 4xy - 8x - 12y$ | d) $A = 5 - 2x^2 - 4y^2 + 4xy - 8x - 12y$ |
| e) $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$ | f) $E = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$ |

HD:

- a) $H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$
 $-H = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y - 11 = x^2 - x(y-2) + y^2 - 4y - 11$
 $-H = x^2 - 2x \cdot \frac{y-2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + y^2 - 4y - 11 - \frac{(y-2)^2}{4}$
 $\frac{1}{2} - 4H = (x - y + 2)^2 + 4y^2 - 16y - 44 - (y^2 - 4y + 4)$
- b) $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$
 $-D = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - x(y+2) + y^2 - 2y$
 $-D = x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} + y^2 - 2y - \frac{y^2 + 4y + 4}{4}$
- c) $A = 5 - 2x^2 - 4y^2 + 4xy - 8x - 12y$
 $-A = 2x^2 + 4y^2 - 4xy + 8x + 12y - 5 = 2x^2 - 4x(y-2) + 4y^2 + 12y - 5$
 $= 2 \left[x^2 - 2x(y-2) + (y-2)^2 \right] + 4y^2 + 12y - 5 - 2(y-2)^2$
- d) $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$
 $-A = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - (xy + 2x) + y^2 - 2y = x^2 - x(y+2) + (y^2 - 2y)$
 $A = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{y^2 + 4y + 4}{4} \right] + y^2 - 2y - \left(\frac{y^2 + 4y + 4}{4} \right) = \left(x - \frac{y+2}{2} \right)^2 + \left(\frac{3y^2}{4} - 3y - 1 \right)$
 $A = \left(\frac{2x - y - 1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(y^2 - 4y + 4 - \frac{4}{3} - 4 \right)$
- e) $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$
 $-F = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3 = x^2 - 2x(y+1) + 4y^2 - 10y + 3$
 $-F = x^2 - 2x(y+1) + (y+1)^2 + 4y^2 - 10y + 3 - (y+1)^2$
- f) $E = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$
 $E = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y \Rightarrow 4E = -4x^2 - 4y^2 + 4xy + 8x + 8y$

$$\begin{aligned} E &= -4x^2 + 4x(y+2) - (y+2)^2 + (y+2)^2 - 4y^2 + 8y \\ &= -(2x-y-2)^2 - 3(y^2-4y) + 4 = -(2x-y-2)^2 - 3(y-2)^2 + 16 \leq 16 \\ \Rightarrow E \leq 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 2. Tìm GTNN và GTLN của đa thức bậc bốn đơn giản

Phương pháp:

- Phân tích thành các biểu thức tương đồng để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng phương pháp nhóm hợp lý làm xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2, (a+b+c)^2$.

Dạng 2.1 Biểu thức có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bài 1. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

- $C(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22$
- $D(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x + 20$
- $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$
- $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$
- $C(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2017$
- $A(x) = a^4 - 2a^3 - 4a + 5$
- $D(x) = x^4 - x^2 + 2x + 7$

HD:

- Biến đổi biểu thức về dạng $(a \pm b)^2$

$$C(x) = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 5(x^2 - 4x + 4) + 2 = x^2(x-2)^2 + 5(x-2)^2 + 2 \geq 2$$

- $D(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 20 = x^2(x^2 - 6x + 9) + 2x^2 - 12x + 20$

$$= x^2(x-3)^2 + 2(x^2 - 6x + 9) + 2 = x^2(x-3)^2 + 2(x-3)^2 + 2 \geq 2$$

- $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

$$A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$$

$$= (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \text{Min } A(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

- $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$

$$B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30 = (x^2 - 5x)^2 + (x-5)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

- $C(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2017$

$$C(x) = x^2(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) + 2015 = (x^2 + 2)(x-1)^2 + 2015 \geq 2015 \Leftrightarrow x = 1$$

- $A = a^4 - 2a^3 - 4a + 5$

$$A = a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3 = (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3 \geq 3 \text{ dấu bằng khi } a = 1$$

- $D(x) = x^4 - x^2 + 2x + 7$

$$B = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \geq -1, \text{ Dấu "=" khi } t^2 = 0 \circ x^2 - 4x + 4 = 0 \circ t = 2$$

c) $A = x(x+2)(x+4)(x+6) + 8$

$$A = x(x+6)(x+2)(x+4) + 8 = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 8$$

$$\text{Đặt } x^2 + 6x + 4 = t. \text{ Khi đó: } A = (t-4)(t+4) + 8 = t^2 - 16 + 8 = t^2 - 8 \geq -8$$

$$\text{Dấu "=" khi đó: } t^2 = 0 \circ x^2 + 6x + 4 = 0 \circ \begin{cases} x = -3 + \sqrt{5} \\ x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

d) $D = (x+1)(x^2-4)(x+5) + 2014$

$$D = (x+1)(x+2)(x-2)(x+5) + 2014 = (x^2 + 3x - 10)(x^2 + 3x + 2) + 2014$$

$$\text{Đặt } x^2 + 3x - 4 = t. \text{ Khi đó: } D = (t-6)(t+6) + 2014 = t^2 + 1978$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } t^2 = 0 \circ x^2 + 3x - 4 = 0 \circ \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

e) $A = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

$$\text{Đặt } x^2 + x - 2 = t. \text{ Khi đó: } A = (t-4)(t+4) = t^2 - 16 \geq -16$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } t = 0 \circ x^2 + x - 2 = 0 \circ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

f) $C = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

$$C = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5x = t. \text{ Khi đó: } C = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36$$

$$\text{Dấu "=" khi } t = 0 \circ x^2 + 5x = 0 \circ \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

g) $D = (2x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$

$$D = (2x-1)(x+3)(x+2)(2x+1) = (2x^2 + 5x - 3)(2x^2 + 5x + 2)$$

$$\text{Đặt } 2x^2 + 5x = t, \text{ Khi đó: } D = (t-3)(t+2) = t^2 - t - 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \geq \frac{-25}{4}$$

$$\text{Dấu "=" khi: } t = \frac{1}{2} \circ 2x^2 + 5x = \frac{1}{2} \circ x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{4}$$

h) $C = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2011$

$$C = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) + 2011 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2011$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5x + 5 = t. \text{ Khi đó: } C = (t-1)(t+1) + 2011 \circ x^2 + 5x + 5 = 0 \circ x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

i) $G(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) - 2006$

$$G(x) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) - 2006 = (x^2 + 5x)^2 - 2042 \geq -2042 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

j) $A = x(x-7)(x-3)(x-4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$,

Đặt $x^2 - 7x + 6 = t$ Khi đó: $A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36$

Dấu “=” khi $t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

Vậy Min $A = -36$ khi $x = 1$ hoặc $x = 6$

Bài 2. Tìm GTLN của biểu thức sau $E = 5 + (1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$

HD:

$$E = 5 - (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = -(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 5$$

Đặt $x^2 + 5x = t$.

Khi đó: $E = -(t-6)(t+6) + 5 = -(t^2 - 36) + 5 = -t^2 + 41 \leq 41$

Dấu “=” khi $t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức sau

$$C = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) + 2002$$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) + 2002 \\ &= (x-1)(x-8)(x-4)(x-5) + 2002 \\ &= (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20) + 2002 \\ &= [(x^2 - 9x + 14) - 6] \cdot [(x^2 - 9x + 14) + 6] + 2002 \\ &= (x^2 - 9x + 14)^2 - 36 + 2002 \\ &= (x^2 - 9x + 14)^2 + 1966 \geq 1966 \text{ vì } (x^2 - 9x + 14)^2 \geq 0 \forall x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Min} C = 1966 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases} \text{ Vậy } \text{Min} C = 1966 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Bài 4. Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x: $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m$

HD:

$$VT = (x+1)(x+3)(x+2)^2 = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4)$$

Đặt $x^2 + 4x = t$, Khi đó:

$$VT = (t+3)(t+4) = t^2 + 7t + 12 = t^2 + 2 \cdot t \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} + 12 - \frac{49}{4} = \left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4}$$

Dạng 3. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức dạng $\frac{A}{B}$

Dạng 3.1 Biểu thức dạng $A = \frac{m}{ax^2 + bc + c}$ với m là hằng số hoặc m đã xác định được âm

hoặc dương:

Phương pháp giải:

1. Biểu thức dạng $A = \frac{m}{ax^2 + bc + c}$ khi đó $A_{\max} \Leftrightarrow (ax^2 + bc + c)_{\min}$ hoặc $A_{\min} \Leftrightarrow (ax^2 + bc + c)_{\max}$

2. Bên cạnh việc biến đổi về tổng các bình phương, ta sử dụng thêm tính chất nghịch đảo:

$$\text{Nếu } a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

3. Sử dụng cả biểu thức Delta để tìm GTNN hoặc GTLN rồi mới biến đổi thêm bớt.

4. Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm.

$$\Rightarrow \text{Ta đưa về dạng: } A = m + \frac{C}{D} \left(\frac{C}{D} \geq 0 \right)$$

Bài 1. Tìm Min của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

b) $B = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$

c) $C = \frac{-3}{x^2 - 5x + 1}$

d) $D = \frac{6}{-x^2 + 2x - 3}$

e) $K = \frac{2}{x^2 + 8}$

f) $A = \frac{1}{9x^2 - 12x + 10}$

g) $B = \frac{2}{x^2 + x + 4}$

h) $A = \frac{5}{x^2 - 2x - 5}$

i) $B = \frac{1}{x^2 - 4x + 11}$

k) $A = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2} (x \neq 0)$ l) $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$

HD:

a) Ta có: $-9x^2 + 6x - 5 = -(9x^2 - 6x + 1 + 4) = -(3x - 1)^2 - 4 \leq -4$

$$\Rightarrow \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{2}{-(3x - 1)^2 - 4} \geq \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}, \text{ Dấu "=" khi } x = \frac{1}{3}$$

k) $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$ Ta có: $y = 0 \Rightarrow A = 0$

$$y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{1}{9\frac{x^2}{y^2} - 12\frac{x}{y} + 5} \quad \text{Đặt } t = \frac{x}{y}$$

$$A = \frac{1}{9t^2 - 12t + 5} = \frac{1}{(3t - 2)^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$$

l) Ta có: $y = 0 \Rightarrow A = 0$

$$y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3}{-25\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} - 5} \quad (\text{Đặt } t = \frac{x}{y})$$

$$\text{Vì } A = \frac{3}{-25t^2 + 20t - 5} = \frac{-3}{(5t-2)^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow A \geq -3 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y$$

Dạng 3.2 Phương pháp giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức

đại số dạng $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Phương pháp giải:

- Thực hiện phép chia tử thức cho mẫu thức để đưa biểu thức về dạng $m + \frac{n}{a'x^2 + b'x + c'}$ hoặc đưa biểu thức về dạng $\frac{A(x)}{B(x)} + c$ với $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ với mọi x
- Biến đổi biểu thức về dạng $m + \frac{n}{ax + b} + \frac{p}{(ax + b)^2}$ rồi đặt ẩn phụ đối với phân thức có mẫu thức là bình phương của một đa thức bậc nhất

Dạng 3.2.1 Thực hiện phép biến đổi đưa phân thức về dạng $m + \frac{n}{a'x^2 + b'x + c'}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức đại số $A(x) = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

HD:

$$\text{Từ } A(x) = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\text{Ta có } A(x) = \frac{3x^2 + 6x + 9 + 1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3(x^2 + 2x + 3) + 1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Vì $(x+1)^2 \geq 0$ với $\forall x$ nên $(x+1)^2 + 2 \geq 2$ với $\forall x$.

$$\text{Do đó: } \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{Vậy } A(x) = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$\text{Max } A(x) = 3\frac{1}{2} \text{ khi } (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 2. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

$$\text{a) } B(x) = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} \text{ với } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } Q = \frac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 2x + 5}$$

HD:

$$\text{a) Từ } B(x) = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} = \frac{2(x^2 - 8x + 22) - 3}{x^2 - 8x + 22} = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6}$$

Vì $(x-4)^2 \geq 0$ với $\forall x$ nên $(x-4)^2 + 6 \geq 6$.

$$\text{Nên } \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B(x) = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{Min } B(x) = \frac{3}{2} \text{ khi } (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{b) Ta có: } Q = 3 + \frac{2}{x^2 - 2x + 5}, \text{ mà } x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 2x + 5} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bài 3. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

b) $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7}$

HD: a) Ta có: $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{(x-2)^2 + 1} \geq 3 - 5 = -2$

Do $(x-2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{-5}{(x-2)^2 + 1} \geq -5 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ta có: $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7} = \frac{2(3x^2 + x + 7) + 5}{3x^2 + x + 7} = 2 + \frac{5}{3x^2 + x + 7}$

Đặt $M = 3x^2 + x + 7 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12} \geq \frac{83}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow A_{\max} = M_{\min} \Rightarrow A_{\max} = 2 + \frac{5}{\frac{83}{12}} = 2\frac{60}{83} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

Bài 4. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

a) $I = \frac{2x^2 - 16x + 71}{x^2 - 8x + 22}$

b) $N = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$

HD:

a) Hạ phép chia ta được: $I = 2 + \frac{27}{x^2 - 8x + 22}$, mà $x^2 - 8x + 22 = (x-4)^2 + 6 \geq 6$

b) Hạ phép chia ta được: $N = 2 + \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$, mà $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$

Bài 5. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^2 - 6x + 23}{x^2 - 6x + 10}$

b) $C = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

b) $G = \frac{4x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$

c) $D = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

HD:

a) Ta có: $A = 1 + \frac{13}{x^2 - 6x + 10} = 1 + \frac{13}{(x-3)^2 + 1}$

b) Ta có: $C = 3 + \frac{-5}{x^2 - 4x + 5} = 3 + \frac{-5}{(x-2)^2 + 1}$

c) Ta có: $G = 2 + \frac{-1}{2x^2 - 3x + 2}$

d) Ta có: $D = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{D} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 3$ (Áp dụng Côsi)

Dạng 3.2.2 Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

Bài 1. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) $Q = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

b) $M = \frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (x \neq 1)$

HD:

a) Ta có: $Q = 2 + \frac{-2x+3}{x^2-2x+1} = 2 + \frac{-2x+3}{(x-1)^2} = 2 + \frac{-2(x-1)+1}{(x-1)^2} = 2 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Đặt $\frac{1}{x-1} = t$, khi đó ta có: $Q = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \geq 1$

b) Ta có: $M = \frac{2x^2-10x-1}{x^2-2x+1} = \frac{2(x^2-2x+1)-6(x-1)-9}{(x-1)^2} = 2 - \frac{6}{x-1} - \frac{9}{(x-1)^2}$

Đặt $\frac{1}{x-1} = t$, khi đó ta có: $M = -9t^2 - 6t + 2 = -(3t+1)^2 + 3 \leq 3$

Bài 2. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2x^2+4x+4}{x^2}$

b) $B = \frac{x^2-4x+1}{x^2}$

c) $H = \frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}$

HD:

a) Ta có: $A = 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = t$ $\frac{1}{2} A = 4t^2 + 4t + 2 = (2t+1)^2 + 1 \geq 1$

b) Ta có: $K = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$, đặt $\frac{1}{x} = t$ $\frac{1}{2} K = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3 \geq -3$

c) Đặt $x^2+1 = t$ $\frac{1}{2} x^2 = t-1$ $\frac{1}{2} x^4 = t^2-2t+1$, khi đó $H = \frac{t^2-2t+1+1}{t^2} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2} H = 2a^2 - 2a + 1$

Bài 3. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{4x^2-6x+1}{(2x+1)^2}$

b) $B = \frac{x}{(x+10)^2}$

c) $C = \frac{x}{(x+2016)^2}$

d) $D = \frac{x^2-2x+2000}{x^2}$

e) $E = \frac{x^2-2x+2015}{2015x^2}$

f) $F = \frac{x}{(x+2000)^2}$

HD:

a) Đặt $2x+1 = t$ $\frac{1}{2} x = \frac{t-1}{2}$ $\frac{1}{2} x^2 = \frac{t^2-2t+1}{4}$, Khi đó:

$A = \frac{t^2-2t+1-3(t-1)+1}{t^2} = \frac{t^2-5t+5}{t^2} = 1 - \frac{5}{t} + \frac{5}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2} A = 1 - 5a + 5a^2$

b) Đặt $x+10 = t$ $\frac{1}{2} x = t-10$ $\frac{1}{2} B = \frac{t-10}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{10}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2} B = -10a^2 + a$

c) Đặt $x+2016 = t$ $\frac{1}{2} x = t-2016$ $\frac{1}{2} C = \frac{t-2016}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{2016}{t^2}$,

Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2} C = a - 2016a^2$

d) Ta có : $D = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2000}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = a$ $\frac{1}{2}$ $D = 1 - 2a + 2000a^2$

e) Ta có : $2015E = \frac{x^2 - 2x + 2015}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2015}{x^2}$,

Đặt $\frac{1}{x} = a$ $\frac{1}{2}$ $2015E = 1 - 2a + 2015a^2$ $\frac{1}{2}$ $E = a^2 - \frac{2}{2015}a + \frac{1}{2015}$

f) Đặt $x + 2000 = t$ $\frac{1}{2}$ $F = \frac{t - 2000}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{2000}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2}$ $F = a - 2000a^2$

Bài 4. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau

a) $B = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $E = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

HD:

a) Ta có: $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x + 1)^2}$, Đặt $x + 1 = t$ $\frac{1}{2}$ $x = t - 1$ $\frac{1}{2}$ $x^2 - 2x + 1$

$\frac{1}{2}$ $B = \frac{t^2 - 3t + 3}{t^2} = 1 - \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2}$ $B = 3a^2 - 3a + 1$

b) Ta có : $E = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x - 1)^2}$ Đặt $x - 1 = t$ $\frac{1}{2}$ $x = t + 1$ $\frac{1}{2}$ $x^2 = t^2 + 2t + 1$

$E = \frac{3(t^2 + 2t + 1) - 8(t + 1) + 6}{t^2} = \frac{3t^2 - 2t + 1}{t^2} = 3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$,

Đặt : $\frac{1}{t} = a$ $\frac{1}{2}$ $E = a^2 - 2a + 3 = (a - 1)^2 + 2 \geq 2$

Bài 5. Tìm Min hoặc Max của: $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

HD: Ta có:

$E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(x^4 + 2x^2 + 1) - 9(x^2 + 1) + 4}{(x^2 + 1)^2} = 4 - \frac{9}{x^2 + 1} + \frac{4}{(x^2 + 1)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{x^2 + 1}$, ta được $E = 4 - \frac{9}{t} + \frac{4}{t^2} = \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + 4$

Ta có: $x^2 + 1 \geq 1$ $\frac{1}{2}$ $t \leq 1$

$\Rightarrow 2t - \frac{9}{4} \leq 2 - \frac{9}{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow E \geq \frac{1}{16} - \frac{17}{16} = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Lời giải khác

Ta có: $E + 1 = \frac{5x^4 + x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \Rightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 0$

Cách khác: $E = \frac{4x^4}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 6. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau

a) $A = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2}$

b) $E = \frac{2x + 1}{x^2}$

HD:

a) Ta có: $A = 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = a$ $\frac{1}{2}$ $A = 4a^2 + 4a + 2$

b) Ta có: $E = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$, Đặt $\frac{1}{x} = a$ $\frac{1}{2}$ $E = a^2 + 2a$

Bài 7. Tìm Min hoặc Max của: $B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1}$

HD: Ta có:

$$B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 1 - x + 1 - 11}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 - (x-1) - 11}{(x-1)^2} = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{11}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow A = -1 - y - 11y^2 = -(11y^2 + y + 1) = -\left[11\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{22^2}\right) - \frac{1}{22^2} + \frac{1}{11}\right]$$

$$= -\left[11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 + \frac{43}{44}\right] = \frac{-43}{44} - 11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 \leq \frac{-43}{44} \Leftrightarrow y = \frac{-1}{22} \Leftrightarrow x = -21$$

Bài 8. Tìm Min hoặc Max của: $C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25}$ ($x \neq -5$)

HD: Ta có:

$$C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} = \frac{x}{(x+5)^2} = \frac{(x+5) - 5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5} - \frac{5}{(x+5)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x+5} \Rightarrow -A = 5t^2 - t = 5\left(t - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{20} \geq \frac{-1}{20}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow t = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 5$$

Bài 9. Tìm Min hoặc Max của: $D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1}$ ($x \neq 1$)

HD: Ta có:

$$D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1) + (6x - 6) - 9}{(x-1)^2} = 1 + \frac{6}{x-1} - \frac{9}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{2} \quad D = 1 + 6t - 9t^2 = -(3t-1)^2 + 2 \leq 2$$

Cách khác: Đặt $t = \frac{1}{x-1}$ $\frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{t} + 1$

$$\Rightarrow A = t^2 \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 14 \right] = (t+1)^2 + 4t(t+1) - 14t^2 = -(3t-1)^2 + 2 \leq 2$$

Bài 10. Tìm Min hoặc Max của: $A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}$ ($x \neq -1$)

HD: Ta có:

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - (x+1) + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Đặt } y = \frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{2} A = 1 - y + y^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 11. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) $B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$

b) $A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

HD:

a) Ta có: $B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - (x-1) + 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\text{Đặt } y = \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{2} B = y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

b) $A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x+y)^2 + (x-y)^2]}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$

Bài 12. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau

a) $B = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

b) $C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2}$

c) $E = \frac{4x^2 + 22x + 19}{x^2 + 4x + 4}$

d) $F = \frac{9x^2 + 30x - 7}{9x^2 + 6x + 1}$

HD:

a) $B = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$, đặt $\frac{1}{x} = t \quad \frac{1}{2} B = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3 \geq -3$

b) Đặt $x-2 = t \quad x^2 = t^2 + 4t + 4$, khi đó: $C = \frac{4t^2 + 10t + 5}{t^2} = 4 + \frac{10}{t} + \frac{5}{t^2}$,

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \quad \frac{1}{2} C = 5a^2 + 10a + 4$$

c) $E = 4 + \frac{6x+3}{(x+2)^2}$, Đặt $x+2 = t \quad \frac{1}{2} E = 4 + \frac{6(t-2)+3}{t^2} = 4 + \frac{6}{t} - \frac{9}{t^2}$

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \quad \frac{1}{2} E = -9a^2 + 6a + 4$$

d) $F = 1 + \frac{24x-8}{(3x+1)^2}$, đặt $3x+1 = t \quad 3x = t-1 \quad \frac{1}{2} F = 1 + \frac{3t-3-8}{t^2} = 1 + \frac{3}{t} - \frac{11}{t^2}$

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \quad \frac{1}{2} F = -11a^2 + 3a + 1$$

Dạng 3.2.3 Thực hiện biến đổi đưa phân thức về dạng $\frac{A(x)}{B(x)} + c$ (với $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$)

Bài 1. Tìm giá trị của x để biểu thức $A = \frac{x^2 - 2x + 2011}{x^2}$ (với $x > 0$) đạt giá trị nhỏ nhất

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{x^2 - 2x + 2011}{x^2} = \frac{2011x^2 - 2.2011x + 2011^2}{2011x^2} = \frac{(x - 2011)^2 + 2010x^2}{2011x^2} \\ A &= \frac{(x - 2011)^2 + 2010x^2}{2011x^2} = \frac{(x - 2011)^2}{2011x^2} + \frac{2010}{2011} \geq \frac{2010}{2011} \end{aligned}$$

Bài 2. Tìm Min và Max của các biểu thức sau:

$$\text{a) } C = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} \qquad \text{b) } N = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } C &= \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} + 1 \geq 1 \\ \text{Mặt khác: } C &= \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(-x^2 + 2x - 1) + (3x^2 + 3)}{x^2 + 1} = \frac{-(x - 1)^2}{x^2 + 1} + 3 \leq 3 \\ \text{b) Ta có: } N &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \text{Mặt khác: } N &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(-x^2 + 2x - 1) + 3x^2 + 3}{2(x^2 + 1)} = \frac{-(x - 1)^2}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 3. Tìm cả Min và Max của các biểu thức sau

$$\text{a) } K = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} \qquad \text{b) } M = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$$

HD:

a) Nháp để nhằm GTLN và GTNN nếu có :

$$a = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = ax^2 + a = 3 - 4x \quad \frac{1}{2} \quad a.x^2 + 4x + a - 3 = 0, \text{ Xét } \Delta = 16 - 4a^2 + 12a = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có: } K = \left(\frac{3 - 4x}{x^2 + 1} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1} - 1 \geq -1, \text{ Dấu « = » khi } x = -2$$

$$\text{Mặt khác: } K = \left(\frac{3 - 4x}{x^2 + 1} - 4 \right) + 4 = \frac{-4x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} + 4 \leq 4, \text{ Dấu « = » khi } x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{b) Nháp: } a = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} \quad \frac{1}{2} \quad a.x^2 + 9a = 27 - 12x \quad \frac{1}{2} \quad a.x^2 + 12x + 9a - 27 = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = 36 - a(9a - 27) = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có : } M = \left(\frac{27-12x}{x^2+9} - 4 \right) + 4 = \frac{-4x^2-12x-9}{x^2+9} + 4 = \frac{-(2x-3)^2}{x^2+9} + 4 \leq 4$$

$$\text{Mặt khác : } M = \left(\frac{27-12x}{x^2+9} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2-12x+36}{x^2+9} - 1 = \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1 \geq -1$$

Bài 4. Tìm cả Min và Max của: $P = \frac{8x+3}{4x^2+1}$

HD:

$$\text{Nháp : } a = \frac{8x+3}{4x^2+1} \quad \frac{1}{2} \quad 4a \cdot x^2 + a = 8x+3 \quad \frac{1}{2} \quad 4ax^2 - 8x + a - 3 = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = 16 - 4a(a-3) \quad \frac{1}{2} \quad a = 4; a = -1$$

$$\text{Khi đó : } P = \left(\frac{8x+3}{4x^2+1} - 4 \right) + 4 = \frac{-16x^2+8x-1}{4x^2+1} + 4 = \frac{-(4x-1)^2}{4x^2+1} + 4 \leq 4$$

$$\text{Mặt khác : } P = \left(\frac{8x+3}{4x^2+1} + 1 \right) - 1 = \frac{4x^2+8x+4}{4x^2+1} - 1 = \frac{4(x+1)^2}{4x^2+1} - 1 \geq -1$$

Bài 5. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{8x+12}{x^2+4} \quad \text{b) } B = \frac{4x+2}{x^2+2} \quad \text{c) } C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0)$$

HD:

$$\text{a) } A = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{x^2+8x+16-x^2-4}{x^2+4} = -1 + \frac{(x+4)^2}{x^2+4} \geq -1 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{b) } B = \frac{4x+2}{x^2+2} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{(x+2)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{c) } C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0) = \frac{(x-4)^2}{x} + 18 \geq 18 \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 6. Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau:

$$\text{a) } B = \frac{2x+1}{x^2+2} \quad \text{b) } C = \frac{4x+3}{x^2+1}$$

HD:

$$\text{a) } B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow B_{\min} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{x^2+2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} + 1 \leq 1 \Rightarrow A_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b) } C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{-4x^2+4x-1+4x^2+4}{x^2+1} = \frac{-(2x-1)^2}{x^2+1} + 4 \leq 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 7. Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{2x-1}{x^2+2}$

b) $B = \frac{6x-8}{x^2+1}$

HD:

a) Nháp : $a = \frac{2x-1}{x^2+2} \iff a.x^2 - 2x + 2a + 1 = 0,$

có $\Delta' = 1 - a(2a+1) = 1 - 2a^2 - a \iff a = \frac{1}{2}; a = -1$

Khi đó : $A = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-4}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2} = \frac{-(x-2)^2}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Mặt khác : $A = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} - 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1$

b) Nháp : $a = \frac{6x-8}{x^2+1} \iff a.x^2 - 6x + a + 8 = 0,$ có:

$\Delta' = 9 - a(a+8) = -a^2 - 8a + 9 = 0 \iff a = 1; a = -9$

Khi đó : $B = \left(\frac{6x-8}{x^2+1} - 1 \right) + 1 = \frac{-x^2+6x-9}{x^2+1} + 1 = \frac{-(x-3)^2}{x^2+1} + 1 \leq 1$

Mặt khác : $B = \left(\frac{6x-8}{x^2+1} + 9 \right) - 9 = \frac{9x^2+6x+1}{x^2+1} - 9 = \frac{(3x+1)^2}{x^2+1} - 9 \geq -9$

Bài 8. Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau:

a) $M = \frac{4x+1}{x^2+3}$

b) $P = \frac{12x+13}{x^2+2x+3}$

HD:

a) Nháp : $a = \frac{4x+1}{x^2+3} \iff a.x^2 - 4x + 3a - 1 = 0,$ có $\Delta' = 4 - a(3a-1) = 0 \iff a = -1; a = \frac{4}{3}$

b) Nháp : $a = \frac{12x+13}{x^2+2x+3} \iff a.x^2 + 2a.x + 3a - 12x - 13 = 0,$

Có $\Delta' = (a-6)^2 - a(3a-13) = 0 \iff a = -4; a = \frac{9}{2}$

Bài 9. Tìm cả Min và Max của: $N = \frac{3x^2+4x+8}{x^2+3}$

HD:

Ta có: $N = \frac{3x^2+9+4x-1}{x^2+3} = 3 + \frac{4x-1}{x^2+3},$ Nháp : $a = \frac{4x-1}{x^2+3} \iff a.x^2 - 4x + 3a + 1 = 0$

Có $\Delta' = 4 - a(3a+1) = 0 \iff a = 1; a = -\frac{4}{3}$

Khi đó ta có : $N = \left(\frac{4x-1}{x^2+3} - 1 \right) + 1 + 3 = \frac{-(x^2-4x+4)}{x^2+3} + 4 \leq 4$

Mặt khác : $N = \left(\frac{4x-1}{x^2+3} + \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{3} + 3 = \frac{4x^2+12x+9}{3(x^2+3)} + \frac{5}{3} = \frac{(2x+3)^2}{3(x^2+3)} + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3}$

Bài 10. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

b) $A = \frac{7y^2 - 4xy}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

HD: a) Ta có:

$$B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

b) Điều kiện $(x, y) \neq (0, 0)$

$$A + 1 = \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{(x-3y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 3y \neq 0$$

$$A - 4 = \frac{-(y^2 + 4xy - 4x^2)}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{-(2x-y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \leq 0 \Rightarrow A \leq 4 \Leftrightarrow x = 1; y = 2$$

Bài 11. Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau

a) $E = \frac{4x}{4x^2 + 1}$

b) f) $A = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

HD:

a) $E = \frac{4x}{4x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 1 - 4x^2 - 1 + 4x}{4x^2 + 1} = 1 - \frac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$E = \frac{4x}{4x^2 + 1} = \frac{-(4x^2 + 1) + (4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 + 1} = -1 + \frac{(2x+1)^2}{4x^2 + 1} \geq -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) $A = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A_{\max} = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 12. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} (x \in \mathbb{R})$

b) $A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in \mathbb{R}^+)$

HD:

a) Ta có: $D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} = \frac{335(6x + 8)}{x^2 + 1} = \frac{335(x^2 + 6x + 9 - x^2 - 1)}{x^2 + 1}$
 $= \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} - 335 \geq -335 \Leftrightarrow x = -3$

b) Ta có: $A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in \mathbb{R}^+) = \frac{(x-4)^2}{3x} + \frac{23}{3} \geq \frac{23}{3} \Rightarrow \min A = \frac{23}{3} \Leftrightarrow x = 4$

Bài 13. Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} (x, y \in \mathbb{R})$

b) $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

HD:

a) Ta có: $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} = \frac{y^4 + 1}{(y^4 + 1)(x^2 + 2)}$

Vì $y^4 + 1 \neq 0 \forall x$ nên chia cả tử và mẫu cho $y^4 + 1$ ta được: $A = \frac{1}{x^2 + 2}$

Vì $x^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \forall x \Rightarrow A = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; y \in \mathbb{R}$

b) Xét $x = 0 \Rightarrow A = 0$ giá trị này không phải giá trị lớn nhất của A vì với $x \neq 0 \Rightarrow A > 0$

Xét $x \neq 0$ đặt $P = \frac{1}{A} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$

Ta có $P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$; $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow P \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow P_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bài 14. Tìm GTNN hoặc GTLN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} (x \neq 0)$ b) $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$ c) $C = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

HD:

a) $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{3x^2} = \frac{(x-3)^2}{3x^2} + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A_{\min} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3$

b) $C = \frac{2(x^2 + 2x + 3)}{2(x^2 + 2)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{2(x^2 + 2)} + \frac{x^2 + 2}{2(x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

$C = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2(x^2 + 2) - 4 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 2 \Leftrightarrow x = 1$

c) $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2} = \frac{2016x^2 - 2x \cdot 2016 + 2016^2}{2016x^2} = \frac{(x-2016)^2}{2016x^2} + \frac{2015}{2016} \geq \frac{2015}{2016} \Leftrightarrow x = 2016$

Bài 15. Tìm GTLN của các biểu thức: $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7}$

HD:

$A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7} = \frac{2(3x^2 + x + 7) + 5}{3x^2 + x + 7} = 2 + \frac{5}{3x^2 + x + 7}$

Đặt $M = 3x^2 + x + 7 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12} \geq \frac{83}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow A_{\max} = M_{\min} \Rightarrow A_{\max} = 2 + \frac{5}{\frac{83}{12}} = 2 + \frac{60}{83} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

Bài 16. Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ b) $B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1}$ c) $C = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

HD:

a) $A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 2 \Leftrightarrow x = -1$

$$A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4}{x^2 + 1} - \frac{(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 4 \Leftrightarrow x = 1$$

b) $B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2 - (2x^2 + 2x + 2)}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 \leq -2 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 = \frac{3}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \Rightarrow A \geq \frac{3}{\frac{4}{3}} - 2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow x = -2$

c) Ta có: $A = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{(x+1)^2 + 2} \right]_{\max}$

$$\Leftrightarrow [(x+1)^2 + 2]_{\min} \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow A_{\max} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 17. Tìm min hoặc max của:

a) $D = \frac{x^6 + 512}{x^2 + 8}$

b) $D = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) $E = \frac{x^6 + 27}{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 9}$

d) $F = \frac{4x^4 + 16x^3 + 56x^2 + 80x + 356}{x^2 + 2x + 5}$

HD:

c) Hạ phép chia ta được : $B = x^4 - 8x^2 + 64 = (x^2 - 4)^2 + 48 \geq 48$

d) Ta có: $H = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$

e) Hạ phép chia ta được : $E = x^2 + 3x + 3$

f) Hạ phép chia ta được: $F = 4(x^2 + 2x + 5) + \frac{256}{x^2 + 2x + 5},$

Đặt $x^2 + 2x + 5 = t \quad \frac{1}{2} F = 4t + \frac{256}{t} \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{256}{t}} = 18$ (Cauchy)

Bài 18. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{-8}{3x^2 + 2}$

b) $B = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2010}$

c) $C = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2}$

HD:

a) Ta có : $3x^2 + 2 \geq 2 \quad \frac{1}{2} A = \frac{8}{3x^2 + 2} \leq \frac{8}{2} = 4$

b) Hạ phép chia ta được : $B = 1 + \frac{2x - 2010}{x^2 - 2x + 2010},$

Nháp : $a = \frac{2x - 2010}{x^2 - 2x + 2010} \quad \frac{1}{2} a.x^2 - 2a.x + 2010a - 2x + 2010 = 0$

Có $\Delta' = (a+1)^2 - a(2010a + 2010) = 0 \quad \frac{1}{2} a = -1; a = \frac{1}{2009}$

c) Nháp : $a = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2} \quad \frac{1}{2} a.x^2 + +2a - x^2 - 2 = 0,$

có $\Delta = a^2 - 4(a-1).2(a-1) \quad \frac{1}{2} a = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{7}$

Làm tương tự như các bài trên

Bài 19. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$

b) $B = \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 4}$

c) $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$

HD:

a) Nháp : $a = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3} \frac{1}{2} a.x^2 - 2a.x + 3a - x^2 - 2x - 3 = 0,$

có $\Delta' = (a+1)^2 - 3(a-1)(a-1) = -2a^2 + 8a - 2 = 0 \frac{1}{2} a = 2 \pm \sqrt{3}$

Làm như các bài trên.

b) Ta có: $B = \frac{3x^2 + 12 - 8}{x^2 + 4} = 3 - \frac{8}{x^2 + 4} \geq 1$

c) Ta có: $C = \frac{3x^2 + 3 - 2x}{x^2 + 1} = 3 + \frac{-2x}{x^2 + 1}$

Bài 20. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

a) $G = \frac{x^2y + x^2(x^2 - y) + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2}$

b) $H = \frac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 3x + 5}$

HD:

a) Ta có : $G = \frac{x^2y + x^4 - x^2y + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2} = \frac{x^4 + 1}{2(x^4 + 1) + y^2(x^4 + 1)} = \frac{1}{y^2 + 2}$

Nháp: $a = \frac{-2x}{x^2 + 1} \frac{1}{2} a.x^2 + 2x + a = 0$, có $\Delta' = 1 - a^2 = 0 \frac{1}{2} a = \pm 1$

Khi đó: $C = \left(\frac{-2x}{x^2 + 1} + 1 \right) - 1 + 3 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} + 2 \geq 2$

Mặt khác: $C = \left(\frac{-2x}{x^2 + 1} - 1 \right) + 1 + 3 = \frac{-x^2 - 2x - 1}{x^2 + 1} + 4 = \frac{-(x+1)^2}{x^2 + 1} + 4 \leq 4$

b) Hạ phép chia ta được : $H = 3 + \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 5}$

Nháp : $a = \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 5} \frac{1}{2} a.x^2 - 3a.x - 3x + 5a - 2 = 0,$

Có $\Delta = 9(x+1)^2 - 4a(5a-2) = -11a^2 + 26a + 9 = 0 \frac{1}{2} a = \frac{13 \pm 2\sqrt{67}}{11},$

Bài 21. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau

a) $I = \frac{2x^2 - 16x + 71}{x^2 - 8x + 22}$

b) $P = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

HD:

a) Hạ phép chia ta được : $I = 2 + \frac{27}{x^2 - 8x + 22}$, mà $x^2 - 8x + 22 = (x-4)^2 + 6 \geq 6$

b) Nháp : Đặt $x^2 = t \frac{1}{2} a = \frac{t}{t^2 + 1} \frac{1}{2} at^2 - t + a = 0 \frac{1}{2} a = \pm \frac{1}{2}$

Khi đó : $P = \left(\frac{x^2}{x^4 + 1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2(x^4 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2(x^4 + 1)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2},$

Không xảy ra dấu bằng $\frac{1}{2}$ ko có giá trị nhỏ nhất

$$\text{Mặt khác : } P = \left(\frac{x^2}{x^4+1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{-x^4+2x^2-1}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} = \frac{-(x^2-1)^2}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 22. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

$$\text{a) } Q = \frac{x^2-2x+1999}{x^2-3x+2} : \frac{x^3}{x^2-3x^2+2x} \quad \text{b) } F = \frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$$

HD:

a) Thực hiện phép tính ta được : $Q = \frac{x^2-2x+1999}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1999}{x^2}$

Đặt $\frac{1}{x} = t$ $\frac{1}{2}$ $Q = 1999t^2 - 2t + 1$

b) Ta có: $F = 1 + \frac{-4x}{x^2+2x+2}$ Nháp : $a = \frac{-4x}{x^2+2x+2}$ $\frac{1}{2}$ $a.x^2 + 2a.x + 4a + 2a = 0$,

có $\Delta' = (a+2)^2 - a.2a = 0$ $\frac{1}{2}$ $a = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Bài 23. Tìm min hoặc max của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x^2+1}{x^2-x+1} \quad \text{b) } N = \frac{3x^2-6x+14}{2x^2+5}$$

HD:

a) Ta có : $A = 1 + \frac{x}{x^2-x+1}$

Nháp : $a = \frac{x}{x^2-x+1}$ $\frac{1}{2}$ $a.x^2 - a.x - x + a = 0$, có $\Delta = (a+1)^2 - 4a.a = 0$ $\frac{1}{2}$ $a = 1$; $a = \frac{-1}{3}$

Khi đó : $A = 1 + \left(\frac{x}{x^2-x+1} - 1 \right) + 1 = 2 + \left(\frac{-x^2+2x-1}{x^2-x+1} \right) = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} \leq 2$

Mặt khác : $A = 1 + \left(\frac{x}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{x^2+2x+1}{3(x^2-x+1)} \geq \frac{2}{3}$

b) Nháp : $a = \frac{3x^2-6x+14}{2x^2+5}$ $\frac{1}{2}$ $2a.x^2 + 5a - 3x^2 + 6x - 14 = 0$

Có $\Delta' = 9 - (2a-3)(5a-14) = 0$ $\frac{1}{2}$ $a = 1$; $a = \frac{33}{10}$

Bài 24. Tìm giá trị lớn nhất của $N = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ **với** $x, y > 0$

HD: Ta có:

$$N = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y}) - y(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$$

$$N = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}).(x-y)}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \geq 0 \quad \forall x, y > 0$$

$$\Rightarrow N_{\min} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Vậy : $N_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = y > 0$

Bài 25. Tìm min hoặc max của biểu thức:

a) $H = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$ b) $Q = \frac{5y^2 - 3xy}{x^2 - 3xy + 4y^2}$ c) $R = \frac{x^2 - 4y^2}{3x^2 - 4xy + 5y^2}$

HD:

a) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $H = \left(2 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 2 \cdot \frac{x}{y} + 9 \right) : \left(\frac{x^2}{y^2} + 2 \cdot \frac{x}{y} + 5 \right)$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ $\frac{1}{2}$ $H = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5} = 2 - \frac{6t + 1}{t^2 + 2t + 5}$

Nháp: $a = -\frac{6t + 1}{t^2 + 2t + 5} \frac{1}{2}$ $at^2 + 2at + 5a + 6t + 1 = 0$,

Có: $\Delta' = (a + 3)^2 - a(5a + 1) = 0 \frac{1}{2}$ $a = -1; a = \frac{9}{4}$, làm giống các bài trên

b) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $Q = \frac{5 - 3 \cdot \frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} - 3 \cdot \frac{x}{y} + 4}$, đặt $\frac{x}{y} = t \frac{1}{2}$ $Q = \frac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4}$

Nháp: $a = \frac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4} \frac{1}{2}$ $at^2 - 3at + 4a + 3t - 5 = 0$,

có: $\Delta = 9(a - 1)^2 - 4a(4a - 5) = 0 \frac{1}{2}$ $a = -1; a = \frac{9}{7}$

c) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $R = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 4}{3 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 4 \cdot \frac{x}{y} + 5}$, Đặt $\frac{x}{y} = t \frac{1}{2}$ $R = \frac{t^2 - 4}{3t^2 - 4t + 5}$

Nháp: $a = \frac{t^2 - 4}{3t^2 - 4t + 5} \frac{1}{2}$ $3at^2 - 4at + 5a - t^2 + 4 = 0$,

Có $\Delta' = 4a^2 - (3a - 1)(5a + 4) = 0 \frac{1}{2}$ $a = -1; a = \frac{4}{11}$

Bài 26. Tìm min hoặc max của biểu thức:

a) $B = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2}$ b) $D = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2}$ c) $H = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{9x^2 - 6xy + 2y^2}$

HD:

a) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $B = \frac{1}{9 \frac{x^2}{y^2} - 12 \frac{x}{y} + 5}$, Đặt $\frac{x}{y} = t \frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{9t^2 - 12t + 5}$

b) Tương tự câu a) ta được $D = \frac{3}{-25 \frac{x^2}{y^2} + 20 \frac{x}{y} - 5}$, Đặt $\frac{x}{y} = t \frac{1}{2}$ $D = \frac{3}{-25t^2 + 20t - 5}$

c) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $H = \frac{3\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 1}{9\frac{x^2}{y^2} - 6\frac{x}{y} + 2}$, Đặt $\frac{x}{y} = t$ $\frac{1}{2} H = \frac{3t^2 - 2t + 1}{9t^2 - 6t + 2}$

Nháp: $a = \frac{3t^2 - 2t + 1}{9t^2 - 6t + 2} \frac{1}{2} 9at^2 - 6at + 2a - 3t^2 + 2t - 1 = 0$,

có: $\Delta' = (3a - 1)^2 - (9a - 3)(2a - 1) = 0 \frac{1}{2} a = \frac{1}{3}; a = \frac{2}{3}$

Bài 27. Tìm min hoặc max của biểu thức:

a) $M = \frac{x^2 - 5xy + 2y^2}{2x^2 - 10xy + 7y^2}$

b) $R = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

HD:

a) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $M = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 2}{2\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 7}$, Đặt $\frac{x}{y} = t$ $\frac{1}{2} M = \frac{t^2 - 5t + 2}{2t^2 - 10t + 7}$

Nháp $a = \frac{t^2 - 5t + 2}{2t^2 - 10t + 7} \frac{1}{2} 2at^2 - 10at + 7a - t^2 + 5t - 2$

có: $\Delta = 25(2a - 1)^2 - 4(2a - 1)(7a - 2)$, $\Delta = 0 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}; a = \frac{17}{22}$

b) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $R = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1\right)$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ $\frac{1}{2} R = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1} = 1 + \frac{2t}{t^2 - t + 1}$ Nháp: $a = \frac{2t}{t^2 - t + 1} \frac{1}{2} at^2 - at + a - 2t = 0$,

có $\Delta = (a + 2)^2 - 4a.a = 0 \frac{1}{2} a = 2; a = \frac{-2}{3}$

Bài 28. Tìm min hoặc max của biểu thức:

a) $N = \frac{22x^2 - 58xy + 73y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

b) $P = \frac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$

HD:

a) Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được: $N = \frac{22\frac{x^2}{y^2} - 58\frac{x}{y} + 73}{\frac{x^2}{y^2} - 4\frac{x}{y} + 4}$,

Đặt $\frac{x}{y} = t$ $\frac{1}{2} N = \frac{22t^2 - 58t + 73}{t^2 - 4t + 4} = 22 + \frac{30t - 15}{(t - 2)^2}$

Đặt $a = t - 2$ $\frac{1}{2} N = 22 + \frac{30(a + 2) - 15}{a^2} = 22 + \frac{30a + 45}{a^2} = 22 + \frac{30}{a} + \frac{45}{a^2}$

Đặt $\frac{1}{a} = b$ $\frac{1}{2} N = 22 + 30b + 45b^2$

HD:

- a) Từ giả thiết $\frac{1}{2} y = 1 - x$ thay vào A ta được: $A = x^3 + (1 - x)^3 + xy = 2x^2 - 2x + 1$
- b) Từ giả thiết $\frac{1}{2} x = 1 - 2y$ thay vào B $= (1 - 2y)^2 + 2y^2 = 6y^2 - 4y + 1$
- c) Từ giả thiết $\frac{1}{2} y = \frac{4x - 7}{3}$ thay vào C ta được: $C = 2x^2 + 5y^2 = 2x^2 + 5\left(\frac{4x - 7}{3}\right)^2$
- d) Từ giả thiết $\frac{1}{2} x = 3 - 2y$ thay vào D ta được $D = (3 - 2y)^2 + 2y^2 = 6y^2 - 12y + 9$

Bài 3. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

- a) $A = x^3 + y^3 + 2xy$, biết $x + y = 2$ b) $A = 2xy + yz + zx$, biết $2x + 2y + z = 4$
- c) $A = xy + 2yz + 3zx$, mẫn: $x + y + z = 6$ d) $A = xy + yz + zx$, biết $x + y + z = 3$

HD:

- a) Từ gt ta có: $y = 2 - x$ thay vào A ta được : $A = x^3 + (2 - x)^3 + 2x(2 - x)$
- b) Từ giả thiết $\frac{1}{2} z = 4 - 2x - 2y$ thay vào A ta được :
 $A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y$
- c) Từ giả thiết $\frac{1}{2} z = 6 - x - y$ thay vào $A = xy + 2y(6 - x - y) + 3x(6 - x - y)$
- d) Từ giả thiết $\frac{1}{2} z = 3 - x - y$ thay vào A ta được:
 $A = xy + y(3 - x - y) + x(3 - x - y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y$

Bài 4. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

- a) $A = -xy + 3yz + 4zx$, biết : $x + y + z = 3$ b) $B = -xy + yz + zx$, biết: $2x + 3y - z = 4$
- c) $C = 12xy - 3yz - 4zx$, biết: $2x + 3y - z = 4$ d) $D = 2(x^3 + y^3) - 15xy + 7$, biết: $x + y = -2$

HD:

- a) Từ gt ta có : $z = 3 - x - y$ $\frac{1}{2} B = -xy + 3y(3 - x - y) + 4x(3 - x - y)$
- b) Từ giả thiết $\frac{1}{2} z = 2x + 3y - 4$ thay vào $A = -xy + y(2x + 3y - 4) + x(2x + 3y - 4)$
- c) Từ giả thiết $\frac{1}{2} z = 2x + 3y - 4$ thay vào $B = 12xy - 3y(2x + 3y - 4) - 4x(2x + 3y - 4)$
- d) Từ $x + y = -2$, ta có : $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -8 + 6xy$ thay vào A ta được:
 $A = 2(-8 + 6xy) - 15xy + 7 = -3xy - 9$ và $y = -2 - x$ thay vào $A = -3x(-2 - x) - 9$

Bài 5. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

- a) Cho các số x, y, z thỏa mẫn: $x + y + z = 1$, Tìm max của: $A = 2xy + 3yz + 4zx$
- b) Cho x, y $\in \mathbb{R}$, thỏa mẫn: $x + 2y = 1$, Tìm max của: $P = x.y$
- c) Cho x, y ≥ 0 , $x + y = 1$, Tìm min, max của: $A = x^2 + y^2$
- d) Cho các số x, y, z thỏa mẫn: $3x + y + 2z = 1$. Tìm min max của: $P = x^2 + y^2 + z^2$

HD:

- a) Từ gt $\frac{1}{2} z = 1 - x - y$ thay vào A ta được: $A = 2xy + 3y(1 - x - y) + 4x(1 - x - y)$
 $A = 3y - 5xy - 3y^2 + 4x - 4x^2$
- b) Từ gt $\frac{1}{2} x = 1 - 2y$ thay vào P ta được: $P = y(1 - 2y)$

c) Từ gt $\frac{1}{2}y = 1 - x$ thay vào A ta được: $A = x^2 + (1 - x)^2$

d) Từ gt ta có: $y = 1 - 3x - 2z$ $\frac{1}{2}y^2 = 1 + 9x^2 + 4z^2 - 6x + 12xz - 4z$ khi đó:

$$P = 10x^2 + 5z^2 + 12xz - 6x - 4z + 1$$

Bài 6. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) Cho x, y thỏa mãn: $(11x + 6y + 2015)(x - y + 3) = 0$, Tìm min của: $P = xy - 5x + 2016$

b) Tìm GTNN của biểu thức $A = x^3 + y^3 + xy$, biết x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$

HD:

a) Từ gt ta có : $11x + 6y + 2015 = 0$ hoặc $x - y + 3 = 0$

TH1: Ta có : $11x + 6y + 2015 = 0 \Rightarrow y = \frac{11x + 2015}{6}$ thay vào P

TH2: ta có: $x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$ thay vào P

b) Ta có $x + y = 1 \Rightarrow x = y - 1$

c) Từ gt ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$

$$A = (1 - y)^2 + y^2 = 2y^2 - 2y + 1 = 2(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + 1 = 2(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu '=' xảy ra $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$

Bài 7. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) Tìm GTNN của biểu thức $B = 5x^2 + y^2$ biết x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y = 1$

b) Tìm GTNN của biểu thức $C = x^2 + 2y^2$, biết x, y thỏa mãn điều kiện: $x + 2y = 1$

HD:

a) Từ giả thiết $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= 5x^2 + (1 - x)^2 = 6x^2 - 2x + 1 = 6(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}) \\ &= 6(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{5}{6} \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}; y = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

b) Từ giả thiết $x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y$ $\frac{1}{2}C = x^2 + 2y^2 = 6y^2 - 4y + 1$

Bài 8. Tìm Min hoặc Max của các biểu thức sau:

a) Tìm GTNN của biểu thức $D = 2x^2 + 5y^2$, biết x, y thỏa mãn điều kiện: $4x - 3y = 7$

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 2$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 2xy$

HD:

a) Từ giả thiết $4x - 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{4x - 7}{3}$

$$\Rightarrow D = 2x^2 + 5(\frac{4x - 7}{3})^2 \Rightarrow 9D = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x - 10)^2 + 45 \geq 45$$

$$\Rightarrow \min D = 5 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}; y = \frac{-3}{7}$$

b) Ta có: $A = x^3 + y^3 + 2xy = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 2xy$

Theo giả thiết $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$

$$\Rightarrow A = 2^3 - 6x(2 - x) + 2x(2 - x) = 4x^2 - 8x + 8 = 4(x - 1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Bài 9. Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$

HD:

Có $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$

$$\Rightarrow A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a) = a^3 + 2ab + b^3 - ab$$

$$= a^3 + b^3 + ab = a^3 + (1 - a)^3 + a(1 - a) = 2a^2 - 2a + 1$$

$$= 2\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \forall a \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 6$. Tìm GTLN của $A = xy + 2yz + 3xz$

HD:

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 6 - x - y$

$$\Rightarrow A = xy + z(2y + 3x) = xy + (6 - x - y)(2y + 3x) = -3x^2 - 2y^2 - 4xy + 18x + 12y$$

$$\Rightarrow 3A = -9x^2 - 6y^2 - 12xy + 54x + 36y = -9x^2 - 6x(2y - 9) - 6y^2 + 36y$$

$$= -(3x + 2y - 9)^2 - 2y^2 + 81 \leq 81$$

$$\Rightarrow A \leq 27 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3$$

Dạng 4.2 Biến đổi biểu thức thành các thành phần có chứa điều kiện để thay thế.

Bài 1. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 4$, tìm GTLN của $P = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

HD:

Ta có: $P = 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{4}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{3}{ab}$

Do $a, b > 0 \Rightarrow a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow ab \leq 4$

Khi đó: $\frac{3}{ab} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{ab} \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} a + b = 4 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2$

Bài 2. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

a) Tìm min của: $F = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, biết: $a + b = 1$ và $a, b > 0$

b) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$, Tìm Min của: $A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

HD:

a) Ta có: $\left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 = 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \geq 18$

b) Ta có: $A = 16(xy)^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy = 6x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$

Vì $x + y = 1$ nên $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy$, thay vào A

Ta được $A = 6x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy$, Đặt $xy = t$ khi đó : $A = 6t^2 - 2t + 12$

Bài 3. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x + y = 1$ Tìm Min của $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$
 b) Tìm max của: $A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$ biết x, y thỏa mãn: $x + y + 4 = 0$

HD:

- a) Ta có : $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy = x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy = x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$

Do $x + y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ Thay vào C ta được :

$$C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy = x^2y^2 + 12xy + 4 = (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32 = (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$$

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

- b) Ta có : $x + y = -4$, nên $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -64 + 12xy$,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2xy \text{ thay vào } A = 2(-64 + 12xy) + 3(16 - 2xy) + 10xy$$

Bài 4. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Tìm min của $B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$ biết x, y thỏa mãn: $x + y = -2$
 b) Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 5$, Tìm max của: $A = x^3 + y^3 - 8(x^2 + y^2) + xy + 2$

HD:

- a) Từ $x + y = -2$, ta có: $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$

$$x^3 + y^3 = 6xy - 8, \quad x^2 + y^2 = 4 - 2xy, \text{ Thay vào } B \text{ ta được :}$$

$$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy \\ = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - (6xy - 8) + 2x^2y^2 + 2xy(4 - 2xy) + 13xy = -xy + 24$$

$$\text{Thay } y = -2 - x \Rightarrow B = x^2 + 2x$$

- b) Vì $x + y = 5$ nên $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$ và $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$ thay vào A ta được:

$$A = 125 - 15xy - 8(25 - 2xy) + xy + 2 = -73 + 2xy$$

$$\text{Mặt khác } x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x \Rightarrow B = -2x^2 + 10x - 73$$

Bài 5. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Tìm max của: $B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy$, biết $x + y = 5$.
 b) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$, Tìm min và max của: $A = x^2 + y^2$

HD:

- a) Vì $x + y = 5$ nên $x^4 + y^4 = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$, $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$, $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$

$$B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy \\ = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - 4(125 - 15xy) - 20(25 - 2xy) - 2x^2y^2 + xy$$

- b) Ta có : $x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy = 8 \Rightarrow (x - y)^2 + x^2 + y^2 = 8$

$$\frac{1}{2} x^2 + y^2 \leq 8 \text{ hay } A \leq 8$$

Mặt khác : $x^2 + y^2 - xy = 4 \circ 2x^2 + 2y^2 - 2xy = 8$

$$\frac{1}{2} 2x^2 + 2y^2 = 8 + 2xy \quad \frac{1}{2} 3x^2 + 3y^2 = 8 + (x+y)^2 \geq 8 \quad \frac{1}{2} x^2 + y^2 \geq \frac{8}{3} \text{ hay } A \geq \frac{8}{3}$$

Bài 6. Cho hai số thực $a, b \neq 0$, thỏa mãn: $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$, Tìm min, max của: $S = ab + 2017$

HD:

Từ gt ta có : $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4 \circ \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\right) + ab + 2 = 4$

$$\circ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + 2 = 4 \circ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab = 2$$

$$\frac{1}{2} ab \leq 2 \quad \frac{1}{2} ab + 2017 \leq 2019 \quad \frac{1}{2} S \leq 2019$$

Mặt khác : $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4 \circ \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab\right) - ab + 2 = 4$

$$\circ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2 = 4 \circ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - ab = 2$$

$$\frac{1}{2} -ab \leq 2 \quad \frac{1}{2} ab \geq -2 \quad \frac{1}{2} ab + 2017 \geq 2015 \quad \frac{1}{2} S \geq 2015$$

Bài 7. Tìm GTLN, GTNN của $S = ab + 2009$, với a, b , là hai số thực khác 0 và $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$

HD:

Ta có: $4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + ab - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + a \geq ab + 2$

$$\Rightarrow ab \leq 2 \Rightarrow S \leq 2011 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = -2 \\ a = 1; b = 2 \end{cases}$$

Ta lại có: $4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2 \geq -ab + 2 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow S \geq 2007$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -2 \\ a = -1; b = 2 \end{cases} \quad \text{Vậy GTNN của } S = 2007 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1; \pm 2)$$

Bài 8. Cho hai số x, y khác 0 thỏa mãn: $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8$, Tìm min, max của: $A = xy + 2024$

HD:

Ta có: $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8 \quad \frac{1}{2} 2x^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 16 \circ \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - xy + 8 = 16$

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{4}{x} \right)^2 + \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 - xy + 8 = 16 \quad \frac{1}{2} - xy + 8 \leq 16 \quad \frac{1}{2} \quad xy \geq -8 \quad A = xy + 2024 \geq 2016$$

Mặt khác : $\left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8 \right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy \right) + xy + 8 = 16 \quad \left(x - \frac{4}{x} \right)^2 + \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + xy - 8 = 16$

$$\frac{1}{2} \quad xy - 8 \leq 16 \quad \frac{1}{2} \quad xy \leq 8 \quad \frac{1}{2} \quad S = xy + 2024 \leq 2032$$

Bài 9. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

a) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ khác 0 biết: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$, Tìm x, y để $B = x.y$ đạt min và đạt max.

b) Cho x, y thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$, Tìm max của: $A = x.y$

HD:

a) Ta có: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4 \quad \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2 \right) + (4x^2 + y^2 - 4xy) + 4xy + 2 = 4$

$$\quad \left(2x - \frac{1}{2x} \right)^2 + (2x - y)^2 + 4xy + 2 = 4 \quad \frac{1}{2} \quad 4xy + 2 \leq 4 \quad \frac{1}{2} \quad B = xy \leq \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $4 = \left(2x - \frac{1}{2x} \right)^2 + (2x + y)^2 - 4xy + 2 \quad \frac{1}{2} \quad -4xy + 2 \leq 4 \quad \frac{1}{2} \quad B = xy \geq \frac{-1}{2}$

b) Từ gt ta có: $4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy \right) + xy + 2 \quad \frac{1}{2} \quad 4 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + xy + 2$
 $\frac{1}{2} \quad xy + 2 \leq 4 \quad \frac{1}{2} \quad xy \leq 2$

Bài 10. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

a) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$, Tìm min và max của: $S = x + y + 3$

b) Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$, Tìm min, max của: $A = m + n + p$

HD:

a) Từ gt ta có : $x^2 + 2xy + 7x + 7y + 2y^2 + 10 = 0$

$$\frac{1}{2} \quad x^2 + 2x \left(\frac{2y+7}{2} \right) + \frac{(2y+7)^2}{4} + 2y^2 + 7y + 10 - \frac{(2y+7)^2}{4} = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \left(x + y + \frac{7}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \leq x + y + \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -5 \leq x + y \leq -2 \quad \frac{1}{2} \quad -2 \leq x + y + 3 \leq 1$$

b) Theo giả thiết có: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2} \Rightarrow 2n^2 + 2np + 2p^2 + 3m^2 = 2$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp + m^2 - 2mn + n^2 + m^2 - 2np + p^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (m+n+p)^2 + (m-n)^2 + (m-p)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (m+n+p)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m+n+p \leq \sqrt{2} \text{ hay } -\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$$

$$A = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=0 \\ m-p=0 \\ m+n+p=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=n=p=\frac{-\sqrt{2}}{3}$$

$$A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ m - p = 0 \\ m + n + p = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Bài 11. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, Tìm min, max của: $P = x + y + 2z$
- b) Cho các số thực x, y thỏa mãn: $7x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y - 15 = 0$.
Tìm min, max của: $A = 2x + 3y + 1$
- c) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 2yz = 5$.
Tìm min max của: $P = x + y$

HD:

- a) Ta có : $P^2 = (x + y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz$, nên ta nhân 6 vào gt :
- $$18 = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz) + (5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz - 4xz)$$
- $$18 = (x + y + 2z)^2 + (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (2y - z)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} (x + y + 2z)^2 \leq 18$$
- $$-\sqrt{18} \leq x + y + 2z \leq \sqrt{18}$$
- b) Từ gt $\frac{1}{2} (2x)^2 + (3y)^2 + 2.2x.3y - 2.2x - 2.3y + 1 + 3x^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} (2x + 3y + 1)^2 + 3x^2 = 16$
- c) Từ gt ta có: $(x^2 + y^2 + 2xy) + (2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 2yz) = 5$
- $$\frac{1}{2} (x + y)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (4z^2 - 4xz + x^2) = 5$$
- $$\frac{1}{2} (x + y)^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x + y \leq \sqrt{5}$$

Bài 12. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Tìm min max của: $P = x + y + z$, biết: $y^2 + z^2 + yz = 1 - \frac{3}{2}x^2$
- b) Cho $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x - 14y + 18 = 0$, Tìm min, max của: $S = x + y$

HD:

- a) Từ gt $2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2$
- $$\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx) = 2$$
- $$\frac{1}{2} (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} (x + y + z)^2 \leq 2$$
- b) Từ gt $\frac{1}{2} x^2 + 2x(y - 5) + (y - 5)^2 + 3y^2 - 14y + 18 - y^2 + 10y - 25 = 0$
- $$\frac{1}{2} (x + y - 5)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 \Rightarrow \frac{1}{2} (x + y - 5)^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x + y - 5 \leq 3$$

Bài 13. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Cho a, b, c không âm thỏa mãn: $3a + 2c = 51$ và $c + 5b = 21$, Tìm max của $A = a + b + c$
- b) Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $2a + b = 6 - 3c$ và $3a + 4b = 3c + 4$, Tìm min của $E = 2a + 3b - 4c$
- c) Cho $a + b = 2$, Tìm max của: $A = ab(a^2 + b^2)$

HD:

- a) Cộng theo vế giả thiết ta được : $3a + 3c + 5b = 72 \Rightarrow 3(a + b + c) = 72 - 2b \leq 72$

Do $b \geq 0 \quad \frac{1}{2}a + b + c \leq \frac{72}{3} = 24$

b) Cộng theo vế ta được : $a + b = 2 \quad \frac{1}{2} \begin{cases} a = 4 - 3c \\ b = 3c - 2 \end{cases} \quad \frac{1}{2} \begin{cases} c \leq \frac{4}{3} \\ c \geq \frac{2}{3} \end{cases}$ do $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Khi đó: $E = 2(4 - 3c) + 3(3c - 2) - 4c = 2 - c$

c) Ta có: $a + b = 2 \quad \frac{1}{2}a^2 + b^2 = 4 - 2ab \quad \frac{1}{2}A = ab(4 - 2ab) = -2a^2b^2 + 4ab$

$A = -(a^2b^2 - 2ab + 1) + 2 \leq 2$, Max $A = 2$

Bài 14. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

a) Cho $x, y, z \geq 0, 2x + 7y = 2014, 3x + 5z = 3031$, Tìm GTLN của biểu thức : $A = x + y + z$

b) Cho 3 số x, y, z thỏa mãn : $x + y + z = 3$, Tìm GTLN của : $B = xy + yz + zx$

HD:

a) Cộng theo vế của gt ta có: $5x + 5y + 5z = 5045 - 2y \leq 5045$ do $y \geq 0$ nên
 $5(x + y + z) \leq 5045 \Rightarrow x + y + z \leq 1009$

b) Ta có : $B = xy + z(x + y) = xy + [3 - (x + y)](x + y)$

$B = xy + 3(x + y) - (x + y)^2 = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3}{4}(y-1)^2 + 3 \leq 3$

Bài 15. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

a) Tìm GTLN của $A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$, biết x, y thỏa mãn : $x + y + 4 = 0$.

b) Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x^2 + y^2$

HD:

a) Ta có : $A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy = 2(x + y)^3 - 6xy(x + y) + 3(x + y)^2 - 6xy + 10xy$
 $= 28xy - 80 = 28x(-4 - x) - 80 = -28(x^2 + 4x + 4) + 32$
 $\Rightarrow A = -28(x + 2)^2 + 32 \leq 32 \Leftrightarrow x = -2 \rightarrow y = -2$

b) Ta có: $x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 8 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2xy$
 $= x^2 + y^2 + (x - y)^2 \geq x^2 + y^2 \Rightarrow P \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 2$

Vậy GTLN của $P = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$

Mặt khác: $8 = 2(x^2 + y^2) - 2xy = 3(x^2 + y^2) - (x - y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow P \geq \frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -y = \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ Vậy GTNN của $P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}; y = \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{-2}{\sqrt{3}}; y = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Bài 16. Tìm GTLN của biểu thức $A = 2xy + yz + zx$, biết x, y, z thỏa mãn: $2x + 2y + z = 4$.

HD:

Từ giả thiết: $2x + 2y + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 2x - 2y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y \\ \Rightarrow 2A &= -4x^2 - 4y^2 - 4xy + 8x + 8y = -4x^2 - 4x(y + 2) - (y - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4y^2 + 8y \\ &= -(2x + y - 2) - 3\left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) + 4 = -(2x + y - 2) - 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3} \Rightarrow A \leq \frac{16}{3} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Bài 17. Tìm Min, Max của các biểu thức sau:

- a) Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$. Tìm GTNN $A = x + y + 3$
 b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN $A = x + y + 2z$

HD:

- a) Từ giả thiết $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9 \Rightarrow (2x + 2y + 7)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow |2x + 2y + 7| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x + 2y + 7 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Leftrightarrow -2 \leq A \leq 1$$

$$A = 1 \Leftrightarrow x = -2; y = 0$$

$$A = -2 \Leftrightarrow x = -5; y = 0$$

- b) Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 18$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2z)^2 + (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (2y - z)^2 = 18$$

$$\Rightarrow x + y + 2z \leq 18 \Rightarrow -3\sqrt{2} \leq A \leq 3\sqrt{2}$$

$$A = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ z = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Vậy } A = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}; z = \sqrt{2}$$

Bài 18. Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$ (1)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $A = m + n + p$

HD:

$$(1) \Leftrightarrow 4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2pm) + (m^2 - 4mp + 4p^2) + (n^2 - 2np + p^2) = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(m + n + p)^2 + (m - 2p)^2 + (n - p)^2 = 3$$

$$\Rightarrow 3(m + n + p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m + n + p \leq 1$$

$$A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2p = 0 \\ n - p = 0 \\ m + n + p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}; n = p = \frac{-1}{4}$$

$$A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2p = 0 \\ n - p = 0 \\ m + n + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}; n = p = \frac{1}{4}$$

Từ BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ o $\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$ $\frac{1}{ab} \geq \left(\frac{2}{a+b}\right)^2$ $\frac{1}{ab} \geq 4$ do $a+b=1$ và $a, b > 0$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ và kết quả trên ta có :

$$B = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{2}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{4}{2} + \frac{4}{2ab+a^2+b^2}$$

$$B \geq 2 + \frac{4}{(a+b)^2} = 6 \text{ do } a+b=1 \Rightarrow B_{\min} = 6 \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy : } B_{\min} = 6 \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

Bài 4. Cho $xy + xz + yz = 4$. Tìm GTNN của $B_3 = x^4 + y^4 + z^4$

HD:

$$\text{Do } xy + xz + yz = 4 \Rightarrow 16 = (xy + xz + yz)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(\text{Theo Bunhiacôpxki}) \Leftrightarrow 16 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^4 + y^4 + z^4)(1^2 + 1^2 + 1^2)$$

$$\Rightarrow B_3 = x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{3} \Rightarrow B_{3\min} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy : } B_{3\min} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B = (1 + x^2y + xy^2)^{2001} - 2001xy(x+y) + 2001 \text{ với } x^2y + xy^2 \geq 0$$

HD:

$$\text{Theo BĐT Becnully ta có : } (1 + x^2y + xy^2)^{2001} \geq 1 + 2001(x^2y + xy^2)$$

$$\Rightarrow B = (1 + x^2y + xy^2)^{2001} - 2001xy(x+y) + 2001 \geq 1 + 2001xy(x+y) - 2001xy(x+y) + 2001.$$

$$\Leftrightarrow B \geq 2002 \Leftrightarrow B_{\min} = 2002 \Leftrightarrow xy(x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } B_{\min} = 2002 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Bài 6. Cho $xyz = 1$ và $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của $B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16}$

HD:

Cách 1 :

$$\text{Ta có : } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có :

$$B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16} = (x^8)^2 + (y^8)^2 + (z^8)^2 \geq x^8y^8 + y^8z^8 + z^8x^8$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq x^8y^8 + y^8z^8 + z^8x^8$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq (x^4y^4)^2 + (y^4z^4)^2 + (z^4x^4)^2 \geq x^4y^4 \cdot y^4z^4 + x^4y^4 \cdot z^4x^4 + y^4z^4 \cdot z^4x^4$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq x^4y^8z^4 + x^8y^4z^4 + x^4y^4z^8$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq (x^2y^4z^2)^2 + (x^4y^2z^2)^2 + (x^2y^2z^4)^2 \geq x^6y^6z^4 + x^6y^4z^6 + x^4y^6z^6$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq (x^3y^3z^2)^2 + (x^2y^3z^3)^2 + (x^3y^2z^3)^2 \geq x^5y^6z^5 + x^6y^5z^5 + x^5y^5z^6$$

$$\Leftrightarrow B_8 \geq (xyz)^5 \cdot x + (xyz)^5 \cdot y + (xyz)^5 \cdot z = x + y + z = 3 \quad (\text{do } xyz = 1 \text{ và } x + y + z = 3)$$

$$\Rightarrow B_{8\min} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Cách 2: (Không sử dụng giả thiết $xyz = 1$)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki nhiều lần ta có :

$$3 = x + y + z \Rightarrow 9 = (x + y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow 9 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^4 + y^4 + z^4) \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x^4 + y^4 + z^4 \Leftrightarrow 9 \leq (x^4 + y^4 + z^4)^2 \leq (x^8 + y^8 + z^8) \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x^8 + y^8 + z^8 \Leftrightarrow 9 \leq (x^8 + y^8 + z^8)^2 \leq (x^{16} + y^{16} + z^{16}) \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow B_8 = x^{16} + y^{16} + z^{16} \geq 3 \Rightarrow B_{8\min} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

$$\text{Vậy : } B_{8\min} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 7. Cho $|a| \leq 1$; $|b| \leq 1$ và $|a + b| = \sqrt{3}$. Tìm GTLN của $B_4 = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}$

HD:

$$\text{Ta có : } (a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Áp dụng (1) ta có :

$$\left(\frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}}{2}\right)^2 \leq \frac{1-a^2 + 1-b^2}{2} = \frac{2-(a^2+b^2)}{2} = 1 - \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Do } \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad (\text{do } |a+b| = \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}}{2}\right)^2 \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow (\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}) \leq 1$$

$$\Rightarrow B_4 = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 1 \Rightarrow B_{4\max} = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy : } B_{4\max} = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

III. Một số bài tập đề nghị :

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của $A = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$

Bài 2. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tìm GTNN của $B = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2}$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$

a) Tìm GTNN của $C = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

b) Tìm GTNN của $D = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Bài 4. Cho $x, y, z \geq -\frac{3}{4}$ và $x + y + z = 1$. Tìm GTLN $E = \sqrt{4x+3} + \sqrt{4y+3} + \sqrt{4z+3}$

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của $F = \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$

Bài 6. Cho $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Tìm GTLN của $G = 4x^2 - 3x^3$

Bài 7. Cho $0 \leq x \leq 3$; Cho $0 \leq y \leq 4$. Tìm GTLN $H = (3-x).(4-y).(2x+3y)$

Bài 8. Cho $x, y, z, t \geq 0$ và $2x + xy + z + yzt = 1$. Tìm GTLN của $I = x^2y^2z^2.t$

Bài 9. Cho $x, y, z, t \geq 0$ và $xt + xy + z + yzt = 1$. Tìm GTLN của $K = xyzt$

Dạng 6. Tìm Min, Max bằng cách sử dụng bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải:

Định nghĩa:
$$\begin{cases} |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \\ |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \end{cases}$$

Tính chất

- $\forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| \geq 0; |A| \geq A$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \Leftrightarrow x.y \geq 0$

Bài 1. Tìm GTNN của các biểu thức sau

a) $A = |x-3| + |x-7|$

b) $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

c) $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

d) $D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$

e) $E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$

HD:

a) $A = |x-3| + |x-7| = |x-3| + |7-x| \geq |x-3+7-x| = |4| = 4$

$\Rightarrow A \geq 4 \Leftrightarrow (x-3)(7-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

b) $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

Ta có : $B = |x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Mà : $|x-2| \geq 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow C \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

c) $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có : $|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3;$

$|x-2| + |x-4| = |x-2| + |4-x| \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

$\Rightarrow C \geq 4 \Rightarrow \min C = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

d) $D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$

Áp dụng bất đẳng thức $|M| \geq M \quad \forall M \in \mathbb{R}$

Ta có : $D = |x+5| + |x+2| + |7-x| + |8-x| \geq x+5+x+2+7-x+8-x = 22 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \min D = 22 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \\ x \leq 7 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 7$$

e) $E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$

$$= |-x-1| + |-x-2| + |-x-3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$$

$$\Rightarrow E \geq -x-1-x-2-x-3+x+4+x+5+x+6=9 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min E = 9 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3$$

Bài 2. *Tìm giá trị nhỏ nhất của $B_6 = |x+7| + |x-1995|$*

HD:

Ta có : $|x| + |y| \geq |x+y|$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x, y \geq 0$

$$\text{Do vậy : } B_6 = |x+7| + |x-1995| = |x+7| + |1995-x| \geq |x+7+1995-x| = 2002$$

$$\Rightarrow B_{6\min} = 2002 \Leftrightarrow (x+7).(1995-x) \geq 0 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 1995$$

$$\text{Vậy : } B_{6\min} = 2002 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 1995$$

Bài 3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. $B_7 = |x+2000| + |x+y+4| + |2x+y-6|$*

HD:

$$\text{Ta có : } B_7 = |x+2000| + |x+y+4| + |2x+y-6|$$

$$B_7 = |x+2000| + |x+y+4| + |6-(2x+y)|$$

$$B_7 \geq |x+2000+x+y+4+6-2x-y| = 2010$$

$$\Rightarrow B_{7\min} = 2010 \Leftrightarrow (x+2000); (x+y+4); (6-2x+y) \text{ cùng dấu}$$

$$\text{Vậy : } B_{7\min} = 2010$$

Bài 4. *Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau :*

a) $A = |x+3| + |x-2| + |x-5|$

b) $B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6|$

HD:

a) $A = |x+3| + |x-2| + |x-5| = |x+3| + |x-2| + |x-5| \geq |x+3| + |5-x| \geq x+3+5-x = 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Dấu ' = ' } \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 = 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

b) $B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6| = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |5-x| + |6-x|$

$$B \geq |x-2| + |x-3| + |5-x| + |6-x| \geq x-2+x-3+5-x+6-x = 6 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 5. *Cho số thực x. Tìm GTLN của các biểu thức sau :*

a) $A = |x+5| - |x-2|$

b) $B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$

HD:

a) $A = |x+5| - |x-2|$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức : } |x| - |y| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x-y) \geq 0$$

$$A = |x+5| - |x-2| \leq |x+5-(x-2)| = 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \max A = 7 \Leftrightarrow (x-2)(x+5-x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

b) $B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$

$$\forall i \quad -|x-5| \leq 0 \Rightarrow B \leq |x-2| - |x-4| \leq |x-2-x+4| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ (x-4)(x-2-x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Bài 6. *Cho số thực x. Tìm GTLN của các biểu thức sau :*

a) $A = |x+3| + |x-2| + 2012$

b) $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3$

HD:

a) Ta có $A = |x+3| + |x-2| + 2012 = |x+3| + |2-x| + 2012$

Lại có : $|x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3$

Mà $|2-x| \geq 2-x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow A = |x+3| + |2-x| + 2012 \geq x+3+2-x+2012 = 2017$

Vậy $\text{Min}A = 2017 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$

b) Ta có $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3 = |x+3| + |x-1| + |4-x| - 3$

$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow x = 1;$

Lại có $|x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3;$

$|4-x| \geq 4-x \Leftrightarrow x \leq 4$

$\Rightarrow A \geq x+3+0+4-x-3 = 4$

Vậy $\text{Min}A = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 7. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = |5x+3| + |2x-3| - x + 1$

c) $C = |4x+3| + |5x-7| + |2x-9| - 15$

b) $B = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

d) $D = (2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2$

HD:

a) Ta có $A = |5x+3| + |2x-3| - x + 1 = 2\left|x + \frac{3}{5}\right| + 3\left|x + \frac{3}{5}\right| + |2x-3| - x + 1$

Mặt khác $2\left|x + \frac{3}{5}\right| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}; 3\left|x + \frac{3}{5}\right| \geq 3\left(x + \frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$

Lại có $|3-2x| \geq 3-2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \geq 0 + 3\left(x + \frac{3}{5}\right) + 3 - 2x + 1 = \frac{29}{5}$

b) $\text{Min}B = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

c) Ta có $\text{Min}C = \frac{-1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$

d) Ta có $\text{Min}D = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 8. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-1998|$

c) $C = |x\sqrt{5}-6| + |x\sqrt{2}+1| + 2x + 2017$

b) $B = |x\sqrt{3}+2| + |x\sqrt{5}-7| + |x\sqrt{11}-9|$

HD:

a) Ta có $\text{Min}A = 999^2 \Leftrightarrow 999 \leq x \leq 1000$ hay $x = \frac{-1}{4}$

b) Ta có $\text{Min}B = \frac{9}{\sqrt{11}}(\sqrt{11}-\sqrt{5}+\sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{11}}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

c) Ta có $\text{Min}A = \frac{2018\sqrt{2}+\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 9. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x+2}}$

b) $B = \sqrt{x-4} + 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}} \ (x \geq 5)$

c) $C = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + 5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \ (x \geq 1)$

HD:

a) Đặt $t = \sqrt{x-2} \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x-2 \Rightarrow x = t^2 + 2$

$$\Rightarrow A = \sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = \sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-3)^2}$$

$$= |t-1| + |3-t| \geq t-1+3-t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ 3-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 11$$

b) Đặt $t = \sqrt{x-5} \ (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 5$

$$\Rightarrow B = \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(2-t)^2} = |t+1| + |2-t| = t+1+|2-t| \geq t+1+2-t = 3$$

$$B = 3 \Leftrightarrow 2-t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9$$

c) Đặt $t = \sqrt{x-1} \ (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 1$

$$\Rightarrow C = \sqrt{(t-1)^2} + 5\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-1| + 5|t-2| + |3-t|$$

$$C \geq |t-1| + |3-t| \geq t-1+3-t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ t=2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=5$$

Phương pháp 2. Phương pháp chọn điểm rơi

1. Lý thuyết về phương pháp chọn điểm rơi:

Chọn điểm rơi chính là việc dự đoán dấu bằng xảy ra tại các giá trị của biến.

Nếu biểu thức có điều kiện ràng buộc thì GTNN hoặc GTLN thường đạt tại vị trí biên. Thông thường với các biểu thức đối xứng thì dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau.

2. Điểm rơi của biểu thức đối xứng với các biến

Cho biểu thức $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$

Nếu ta hoán đổi vai trò của x, y, z cho nhau thì biểu thức P không thay đổi nên ta nói biểu thức P là biểu thức đối xứng với vai trò các biến bình đẳng nhau.

Vậy điểm rơi đạt được khi các biến có giá trị bằng nhau, tức là tại $x = y = z$

3. Phương pháp giải

Kỹ thuật chọn điểm rơi hay còn được gọi kỹ thuật điều chỉnh và lựa chọn tham số.

Kỹ thuật chủ yếu ở đây thường là các giá trị trung gian được xác định theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ đưa vào một cách hợp lý để phương trình xác định chúng có nghiệm

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra (tức chọn điểm rơi) tại giá trị các biến bằng nhau rồi ghép từng cặp áp dụng BĐT Cauchy.

VĐ1: Cho a, b > 0. Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Khi đó ta có hệ thức với a > 0 thì $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Rõ ràng với bài toán trên là kết quả của bất đẳng thức Cauchy

Nếu thay điều kiện a > 0 bởi a ≥ 1 hay a ≥ 2 hay a ≥ 9... thì lời giải bài toán trên như thế nào?

Ta xét các bài toán sau đây:

Bài 1. Cho $a \geq 3$. Tìm GTNN của biểu thức $P = a + \frac{1}{a}$

Phân tích

+ **Sai lầm thường gặp:** Nếu vội vàng, ta dẫn đến lời giải sai như sau:

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương a và $\frac{1}{a}$ ta được:

$$P = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1 < 3$. Mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$ nên lời giải sai.

Từ đó việc dự đoán dấu “=” xảy ra (tức chọn điểm rơi) là vô cùng quan trọng.

Vậy lời giải đúng là như thế nào?

+ **Xác định điểm rơi:**

Ta thử lập bảng giá trị của P tại các giá trị tương ứng của a tăng dần như sau:

a	3	4	5	6	7	8
$P = a + \frac{1}{a}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$

Ta nhận thấy khi a tăng thì P càng lớn nên dẫn đến dự đoán khi $a = 3$ thì P nhận GTNN. Do đó ta chọn điểm rơi là $a = 3$

Với $a = 3$ thì $a \neq \frac{1}{a}$ nên để sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta phải thêm hệ số $k > 0$ sao cho tại

điểm rơi $a = 3$ thì cặp số ka và $\frac{1}{a}$ phải bằng nhau:

Khi đó ta biến đổi biểu thức P như sau: $P = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a} + ka\right) + (a - ka)$

Tìm k dựa trên dấu “=” xảy ra $\circ \begin{cases} \frac{1}{a} = ka \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3k \Rightarrow k = \frac{1}{9}$

Với hướng phân tích trên, ta có lời giải chi tiết như sau:

$$P = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{9}\right) + \frac{8a}{9} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{9}} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3} \Rightarrow \text{Min} P = \frac{10}{3} \text{ khi } a = 3$$

Ngoài cách phân tích trên, ta còn có nhiều hướng tư duy khác như sau:

Hướng 2:

$$\text{Ta có: } P = a + \frac{1}{a} = \left(a + \frac{9}{a}\right) - \frac{8}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{9}{a}} - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow \text{Min} P = \frac{10}{3} \text{ khi } a = 3$$

Hướng 3: Dựa vào kết quả đã biết ở cách giải trên ta có cách giải sau:

$$\text{Xét hiệu: } P - \frac{10}{3} = a + \frac{1}{a} - \frac{10}{3} = \frac{3a^2 - 10a + 3}{3a} = \frac{3(a-3)^2 + 8(a-3)}{3a} \geq 0$$

$\frac{1}{2} P \geq \frac{10}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3$. Vậy $\text{Min}P = \frac{10}{3}$ khi $a = 3$

Tương tự, với $a \geq 4$, $a \geq 5$ hay $a \geq 9 \dots$ thì ta có lời giải như trên.

Bài 2. Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a + \frac{1}{a^2}$

Phân tích

+ **Xác định điểm rơi:** Ta chọn điểm rơi tại $a = 2$

$$\text{Ta có: } Q = a + \frac{1}{a^2} = \left(ka + \frac{1}{a^2}\right) + (a - ka)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \circ \begin{cases} ka = \frac{1}{a^2} \quad \frac{1}{2} \quad 2k = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad k = \frac{1}{8} \\ a = 2 \end{cases}$$

Tuy nhiên với cách phân tích sau đây lại dẫn đến **sai lầm** như sau:

$$Q = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \frac{2}{\sqrt{8a}} + \frac{7a}{8} \geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} + \frac{7 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Vậy với } a = 2 \text{ thì } \text{Min}Q = \frac{9}{4}$$

+ **Nguyên nhân:** Lời giải trên mắc sai lầm ở việc đánh giá mẫu số: “Nếu $a \geq 2$ thì $\frac{2}{\sqrt{8a}} \geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \frac{2}{4}$ là đánh giá sai”. Bởi vì để sử dụng được BĐT Cauchy thì ta phải làm sao khử hết biến số a ở tử và mẫu.

+ **Lời giải đúng:**

$$\text{Ta có: } Q = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{6a}{8} \geq 3\sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{3a}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}Q = \frac{9}{4} \text{ tại } a = 2$$

Ngoài cách giải trên ta còn có nhiều hướng giải khác như sau:

Hướng 2:

$$\text{Ta có: } Q = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{4}{a^2}\right) - \frac{3}{a^2} \geq 3\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{a^2}} - \frac{3}{a^2} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}Q = \frac{9}{4} \text{ tại } a = 2$$

Hướng 3: Dựa vào kết quả đã biết ở cách giải trên ta có cách giải sau:

$$\text{Xét hiệu } Q - \frac{9}{4} = a + \frac{1}{a^2} - \frac{9}{4} = \frac{4a^3 - 9a^2 + 4}{4a^2} = \frac{(a-2)(4a^2 - a - 2)}{4a^2} \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \quad Q \geq \frac{9}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra tại } a = 2. \text{ Vậy } \text{Min}Q = \frac{9}{4} \text{ tại } a = 2$$

Bài 3. Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2 + \frac{1}{a}$

Phân tích

+ **Xác định điểm rơi:** Ta chọn điểm rơi tại $a = 2$

$$\text{Ta có: } A = a^2 + \frac{1}{a} = \left(ka^2 + \frac{1}{a}\right) + (a^2 - ka^2)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \circ \begin{cases} ka^2 = \frac{1}{a} \\ a = 2 \end{cases} \quad \frac{1}{2} \quad 4k = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad k = \frac{1}{8}$$

Với cách phân tích này dẫn đến lời giải **sai lầm** như sau:

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = \left(\frac{a^2}{8} + \frac{1}{a}\right) + \frac{7a^2}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{7a^2}{8} = 2\sqrt{\frac{2}{8}} + \frac{7 \cdot 2^2}{8} = \frac{9}{2}$$

Vậy $\text{Min}A =$ tại $a = 2$

+ **Nguyên nhân:** Cũng như bài toán 2.1, lời giải trên là lời giải sai. Bởi vì để sử dụng được BĐT Cauchy thì ta phải làm sao khử hết biến số a ở tử và mẫu.

Tuy nhiên chúng ta cũng ko thể phân tích:

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = \left(\frac{a^2}{8} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) + \frac{7a^2}{8} - \frac{1}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{7a^2}{8} - \frac{1}{a} = 3\sqrt{\frac{1}{8}} + \frac{7 \cdot 2^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

+ **Lời giải đúng:** Với bài toán này ta cũng có nhiều hướng giải khác nhau:

Hướng 1:

+ **Xác định điểm rơi:** Ta dễ thấy điểm rơi đạt tại $a = 2$ cho cặp số a^2 và $k\frac{1}{a}$

$$\text{Ta có: Dấu “=” xảy ra } \circ \begin{cases} k \cdot \frac{1}{a} = a^2 \\ a = 2 \end{cases} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}k = 4 \quad \frac{1}{2} \quad k = 8$$

Khi đó ta biến đổi biểu thức M như sau:

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = \left(a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}\right) - \frac{15}{a} \geq 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} - \frac{15}{a} = 3 \cdot 4 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy $\text{Min}A = \frac{9}{2}$ tại $a = 2$

Hướng 2: Ta có:

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{a^2}{16}\right) - \frac{15}{16}a^2 \geq 3\sqrt{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^2}{16}} - \frac{15}{16}a^2 = 3\sqrt{\frac{1}{64}} - \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{9}{2}$$

Vậy $\text{Min}A = \frac{9}{2}$ tại $a = 2$

Hướng 3: Dựa vào kết quả đã biết ta có cách giải sau

$$\text{Xét hiệu: } A - \frac{9}{2} = a^2 + \frac{1}{a} - \frac{9}{2} = \frac{2a^2 - 9a + 2}{2a} - \frac{(a-2)(2a^2 + 4a - 1)}{2a} \geq 0 \quad (\forall a \geq 2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2$

Hướng 4: Ta có thể biến đổi biểu thức đã cho như sau:

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = (a-2)^2 + \left(4a + \frac{16}{a}\right) - \frac{15}{a} - 4$$

Áp dụng BĐDT Cauchy cho hai số dương $4a$ và $\frac{16}{a}$ với điểm rơi là $a = 2$ ta được

$$A = a^2 + \frac{1}{a} = (a-2)^2 + \left(4a + \frac{16}{a}\right) - \frac{15}{a} - 4 \geq 0 + 2\sqrt{4a \cdot \frac{16}{a}} - \frac{15}{a} - 4 = 2\sqrt{64} - \frac{15}{2} - 4 = \frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2$

Bài 4. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

Phân tích

+ **Sai lầm:** Nếu không chú ý đến điều kiện của a và b thì dẫn đến sai lầm như sau

$$S = ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \quad \frac{1}{2} \quad \text{Min } S = 2$$

+ **Nguyên nhân:** $\text{Min} = 2 \quad \circ \quad ab = \frac{1}{ab} = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ (Vô lí)

+ **Lời giải đúng**

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{ab} \quad \frac{1}{2} \quad t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 4$$

Đến đây ta quay về “**Bài toán 1**”

Cho $t \geq 4$, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = t + \frac{1}{t}$

+ Ta thấy Điểm rơi đạt tại $t = 4$

$$\text{Ta có: Dấu “=” xảy ra } \circ \quad \begin{cases} kt = \frac{1}{t} \quad \frac{1}{2} \quad 4k = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad k = \frac{1}{16} \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \geq 2\sqrt{\frac{t}{16} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{15 \cdot 4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Với } t = 4 \text{ hay } a = b = \frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min} S = \frac{17}{4}$$

Ta có thể trình bày lời giải cho bài toán trên như sau:

Do $t = 4 \equiv a = b = \frac{1}{2}$ nên ta có:

$$S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{17}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 5. Cho $a, b > 0$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

+ **Nhận xét:** Ta nhận thấy $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$ và $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ là hai biểu thức nghịch đảo của nhau

Dễ dàng giải bài toán trên bằng cách đưa bài toán về dạng như “**Bài toán 1**”

+ **Lời giải**

Đặt $t = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$. Ta có: $t = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 2$ (Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số a và b)

Khi đó ta có: $P = t + \frac{1}{t}$ với $t \geq 2$

+ **Xác định điểm rơi:** Ta chọn điểm rơi tại $t = 2$

Ta có: $P = \left(kt + \frac{1}{t}\right) + (t - kt)$

Dấu “=” xảy ra $\equiv \begin{cases} kt = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} & 2k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & k = \frac{1}{4} \\ t = 2 \end{cases}$

Ta có: $P = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t}\right) + \frac{3t}{4} \geq 2\sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{3 \cdot 2}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Vậy $\text{Min}P = \frac{5}{2}$ tại $t = 2 \equiv a = b > 0$

Bài 6. Cho $a \geq 10$; $b \geq 100$; $c \geq 1000$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Phân tích

Cả ba biến a, b, c không ràng buộc nhau bởi điều kiện nào, do đó có thể xảy ra bản chất của bài toán là:

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_1 = a + \frac{1}{a}$ với $a \geq 10$

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_2 = b + \frac{1}{b}$ với $b \geq 100$

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_3 = c + \frac{1}{c}$ với $c \geq 1000$

Áp dụng BĐT Cô - si ta có $P_1 = \frac{99}{100}a + \left(\frac{a}{100} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{99}{100} \cdot 10 + 2\sqrt{\frac{1}{100}} = 10 + \frac{1}{10}$

Suy ra $\text{min}P_1 = 10 + \frac{1}{10}$, đạt được khi và chỉ khi $a = 10$.

Tương tự $\text{min}P_2 = 100 + \frac{1}{100}$, đạt được khi và chỉ khi $b = 100$

$\text{min}P_3 = 1000 + \frac{1}{1000}$, đạt được khi và chỉ khi $c = 1000$

Do đó $\text{Min} P = \text{min} P_1 + \text{min} P_2 + \text{min} P_3 = 1110 + \frac{111}{1000}$, đạt được khi và chỉ khi $a = 10$,

$b = 100, c = 1000$

Bài 7. Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x+4x+5}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$

Bài 8. Cho số thực $a \geq 6$. Tìm GTNN của biểu thức $A = a^2 + \frac{18}{a}$

Phân tích

Ta có: $A = \frac{x+4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x+4\sqrt{x}+4)+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2+1}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}+2 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

+ **Sai lầm:**

Phân tích đến đây nếu ta vội vàng sẽ dẫn đến sai lầm sau:

$$A = \sqrt{x}+2 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+2}} = 2$$

+ **Nguyên nhân**

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}+2 = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$ (vô lý)

+ **Lời giải đúng:**

Đặt $t = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow t \geq 2$

$\Leftrightarrow A = t + \frac{1}{t}$ (Như vậy ta đã biến đổi A về dạng như **Bài toán 1**)

Lúc này ta dễ dàng nhận thấy **điểm rơi** đạt tại $t = 2$ cho cặp số kt và $\frac{1}{t}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} kt = \frac{1}{t} \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

Như vậy $A = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t}\right) + \frac{3t}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Vậy $\text{Min} A = \frac{5}{2}$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 9. Tìm GTNN của biểu thức $B = x^2 + \frac{1}{x^2+2}$

Phương pháp 3. Sử dụng phương pháp đặt biến phụ

I. Phương pháp

Bằng cách đặt biến phụ và sử dụng các phép biến đổi tương đương. Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản ta có thể chuyển biến thức đã cho về biểu thức đơn giản hơn, dễ xác định cực trị hơn.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm GTNN của $C_1 = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 12$

HD:

$$C_1 = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 12$$

$$C_1 = (x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25) - 6(x^2 + 3x + 5) + 17$$

$$C_1 = (x^2 + 3x + 5)^2 - 6(x^2 + 3x + 5) + 17$$

$$\text{Đặt : } x^2 + 3x + 5 = a$$

$$C_1 = a^2 - 6a + 17 = a^2 + 6a + 9 + 8$$

$$C_1 = (a - 3)^2 + 8 \geq 8 \text{ do } (a - 3)^2 \geq 0 \quad \forall a.$$

$$\Rightarrow C_{1\min} = 8 \Leftrightarrow a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } C_{1\min} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm GTNN của $C_2 = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 5 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6$ với $x, y > 0$

HD:

$$\text{Đặt : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\Rightarrow C_2 = 2(a^2 - 2) - 5a + 6 = 2a^2 - 5a + 2$$

$$\text{Ta thấy : } a \geq 2 \Rightarrow C_2 = 2a^2 - 5a + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow C_{2\min} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y > 0$$

$$\text{Vậy : } C_{2\min} = 0 \Leftrightarrow x = y > 0$$

Bài 3. Tìm GTNN của $C_3 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 3\sqrt{\frac{x}{y}} - 3\sqrt{\frac{y}{x}} + 2004$ với $x, y > 0$

HD:

$$\text{Đặt : } \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = a \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a^2 - 2$$

$$\text{Khi đó : } C_3 = (a^2 - 2) - 3a + 2004$$

$$C_3 = a^2 - 3a + 2004 = a^2 - 3a + 2 + 2002$$

$$C_3 = (a - 1)(a - 2) + 2000$$

$$\text{Do ta có : } a \geq 2 \Rightarrow a - 1 > 0 ; a - 2 \geq 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow C_3 = (a - 1)(a - 2) + 2000 \geq 2000$$

$$\Rightarrow C_3 \min = 2000 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y ; xy > 0$$

$$\text{Vậy } C_3 \min = 2000 \Leftrightarrow x = y \text{ và } xy > 0$$

Bài 4. Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của $C_4 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

HD:

$$\text{Đặt : } a = \sqrt{y} + \sqrt{z} ; \quad b = \sqrt{x} + \sqrt{z} ; \quad c = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-a + b + c}{2} ; \sqrt{y} = \frac{a - b + c}{2} ; \sqrt{z} = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\text{Khi đó : } C_4 = \frac{-a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2}$$

$$C_4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) - 3 \right]$$

Theo Côsi với $a, b, c > 0$ ta có : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

$$\Rightarrow C_4 \geq \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow C_{4\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow x = y = z > 0. \quad \text{Vậy } C_{4\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z > 0.$$

Bài 5. *Tìm GTLN, GTNN của* $C_5 = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2)^2 (1 + y^2)^2}$

HD:

$$\text{Ta có : } \frac{(a+b)^2}{4} \geq a.b \quad (1) \quad \forall a, b \quad \text{và} \quad \frac{-(a-b)^2}{4} \leq ab \quad (2) \quad \forall a, b$$

$$\text{Đặt : } \frac{x^2 + y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} = a \quad \text{và} \quad \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} = b$$

$$\text{Khi đó : } C_5 = a.b$$

$$\text{Theo (1) và (2) ta có : } -\frac{(a+b)^2}{4} \leq C_5 = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \left[\frac{x^2 - y^2 - 1 + x^2 y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right]^2 \leq C_5 \leq \frac{1}{4} \left[\frac{x^2 - y^2 + 1 - x^2 y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \left[\frac{(x^2 - 1)(1 + y^2)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right]^2 \leq C_5 \leq \frac{1}{4} \left[\frac{(x^2 + 1)(1 - y^2)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 \leq C_5 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2} \right)^2$$

$$\text{Ta có : } 0 \leq \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2} \right)^2 \leq 1$$

$$\text{Do đó : } -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 \leq C_5 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow C_{5\min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$C_{5\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1 - y^2)^2 = (1 + y^2)^2 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\text{Vậy : } C_{5\min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0$$

$$C_{5\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 0$$

III. Bài tập tự luyện

$$1. \text{ Tìm GTNN của } A = x^2 + 4 - x + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

2. Tìm GTLN của $B = \sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a}$ với $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{50}{3}\right]$

3. Cho $a \geq -\frac{1}{2}$; $b \geq -\frac{1}{2}$; $c \geq -\frac{1}{2}$ và $a+b+c=1$

Tìm GTLN của $C = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$

4. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $D = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4$

Phương pháp 4. Sử dụng biểu thức phụ

I. Phương pháp

Để tìm cực trị của 1 biểu thức nào đó, đôi khi người ta xét cực trị của 1 biểu thức khác có thể so sánh được với nó, nếu biểu thức phụ dễ tìm cực trị hơn.

Ví dụ : Để tìm cực trị của biểu thức A với $A > 0$, ta có thể xét cực trị của biểu thức : $\frac{1}{A}$, $-A$,

kA , $k+A$, $|A|$, A^2 (k là hằng số).

II. Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm GTLN của $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

HD:

a) Xét $x = 0 \Rightarrow A = 0$ giá trị này không phải là GTLN của A vì với $x \neq 0$ ta có $A > 0$.

b) Xét $x \neq 0$ đặt $P = \frac{1}{A}$ khi đó $A_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$

với cách đặt trên ta có : $P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$

ta có : $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$ (theo côsi)

$\Rightarrow P \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow P_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó : $A_{\max} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 2. Tìm GTNN của $B = \frac{-x}{(x+2002)^2}$ với $x > 0$

HD:

Đặt $P_1 = -B$ như vậy $P_{1\max} \Leftrightarrow M_{\min}$

Ta có : $P_1 = \frac{x}{(x+2002)^2}$ với $x > 0 \Rightarrow P > 0$

Đặt $P_2 = \frac{1}{P_1} > 0$ với $x > 0$ khi đó $P_{2\min} \Leftrightarrow P_{1\max}$

$P_2 = \frac{(x+2002)^2}{x} = \frac{x^2 + 2.x.2002 + 2002^2}{x}$

$P_2 = \frac{x^2 - 2.x.2002 + 2002^2 + 4.x.2002}{x}$

$$P_2 = \frac{(x-2002)^2}{x} + 4.2002 \geq 4.2002 = 8008$$

$$(\text{do } \frac{(x-2002)^2}{x} \geq 0 \quad \forall x > 0)$$

$$\Rightarrow P_{2\text{Min}} = 8008 \Leftrightarrow x = 2002$$

$$\Rightarrow P_{1\text{Max}} = \frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002$$

$$\Leftrightarrow B_{\text{Min}} = -\frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002. \quad \text{Vậy } B_{\text{Min}} = -\frac{1}{8008} \Leftrightarrow x = 2002$$

Bài 3. Cho a, b, c dương và $a + b + c = 3$

Tìm GTLN của $C = \sqrt{5a+4b} + \sqrt{5b+4c} + \sqrt{5c+4a}$

HD:

Do $a, b, c > 0 \Rightarrow C > 0$

Đặt : $P = C^2$ khi đó $\sqrt{P_{\text{Max}}} \Leftrightarrow C_{\text{Max}}$

Ta có : $P = (\sqrt{5a+4b} + \sqrt{5b+4c} + \sqrt{5c+4a})^2$

$\Leftrightarrow P \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(5a+4b+5b+4c+5c+4a)$ theo Bunhiacôpxki

$P \leq 3.9(a+b+c) = 81$ do $a+b+c = 3$

$\Rightarrow P_{\text{Max}} = 81 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$\Leftrightarrow C_{\text{Max}}^2 = 81 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$\Leftrightarrow C_{\text{Max}} = 9 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Vậy $C_{\text{Max}} = 9 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 4. Cho $x, y, z, t > 0$. **Tìm GTNN của $D = \frac{x}{y+t} + \frac{y+t}{x} + \frac{y}{t+x} + \frac{t+x}{y} + \frac{t}{x+y} + \frac{x+y}{t}$**

HD:

Đặt $P = 2D$ ta có :

$$P = \frac{2x}{y+t} + \frac{2(y+t)}{x} + \frac{2y}{t+x} + \frac{2(t+x)}{y} + \frac{2t}{x+y} + \frac{2(x+y)}{t}$$

$$P = \left(\frac{2x}{y+t} + \frac{y+t}{2x} \right) + \left(\frac{2y}{t+x} + \frac{t+x}{2y} \right) + \left(\frac{2t}{x+y} + \frac{x+y}{2t} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{y+t}{x} + \frac{t+x}{y} + \frac{x+t}{t} \right)$$

$$P = \left(\frac{2x}{y+t} + \frac{y+t}{2x} \right) + \left(\frac{2y}{t+x} + \frac{t+x}{2y} \right) + \left(\frac{2t}{x+y} + \frac{x+y}{2t} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{t} + \frac{y}{t} \right)$$

$P \geq 2 + 2 + 2 + \frac{3}{2} \cdot 6$ (theo côsi)

$P \geq 15 \Rightarrow P_{\text{Min}} = 15 \Leftrightarrow x = y = t > 0$

$\Rightarrow D_{\text{Min}} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = t.$ Vậy $D_{\text{Min}} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = t$

Bài 5. Cho $x, y > 0$ và $7x + 9y = 63$ **Tìm GTLN của $E = x.y$**

HD:

Đặt : $P = 63.E$ ta có :

$$P = 63xy = 7x \cdot 9y \leq \left(\frac{7x + 9y}{2} \right)^2 \quad (\text{theo côsi})$$

$$P \leq \left(\frac{63}{2} \right)^2 = \frac{3969}{4} \Rightarrow P_{\text{Max}} = \frac{3969}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 7x = 9y = \frac{63}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 \\ y = 3,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{\text{Max}} = \frac{3969}{4} : 63 = \frac{63}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 \\ y = 3,5 \end{cases}$$

Bài 6. Cho $x^2 + y^2 = 52$ Tìm GTLN của $F = 2x + 3y$

HD:

Xét : $P_1 = |F|$ khi đó $P_1 = |2x + 3y|$

Đặt : $P_2 = P_1^2$ khi đó $P_2 = (2x + 3y)^2$

Theo Bunhiacôpxky : $P_2 \leq (4 + 9)(x^2 + y^2) = 13.13.4$

$$\Rightarrow P_{2 \text{ Max}} = 13.13.4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{1 \text{ Max}} = 26. \text{ Do } F \leq |F| = P \Rightarrow F_{\text{Max}} = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } F_{\text{Max}} = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Bài 7. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $G = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

HD:

$$\text{Đặt : } P = G - 2 \text{ ta có : } P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$$

$$P = \left(\frac{x^4}{y^4} - 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 1 \right) + \left(\frac{y^4}{x^4} - 2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + 1 \right) + \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right)$$

$$P = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

$$\Rightarrow P_{\text{Min}} = 0 \Leftrightarrow x = y > 0. \text{ Vậy } G_{\text{Min}} = 2 \Leftrightarrow x = y > 0$$

III. Bài tập vận dụng

1. Cho $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$

2. Cho $x \neq 0$. Tìm GTNN của $B = \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4}$

3. Cho $x \neq 0$. Tìm GTLN của $C = \frac{x^8}{x^{16} + x^8 + 1}$

4. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN của $D = a + 2b + 3c$

5. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Tìm GTNN của $E = \left(1 - \frac{4}{a^2}\right)\left(1 - \frac{4}{b^2}\right)$

6. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm GTNN của $F = \frac{a+b}{b+c+d} = \frac{b+c}{c+d+a} + \frac{c+d}{d+a+b} + \frac{d+a}{a+b+c}$

7. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm GTNN của $G = \sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-a)^2}$

Phương pháp 5. Phương pháp miền giá trị

I. Phương pháp

Trong một số trường hợp đặc biệt, biểu thức đại số đã cho chỉ có thể có một hoặc hai biên số và đưa được về dạng tam thức bậc 2 thì ta có thể sử dụng kiến thức về miền giá trị của hàm số để giải và thấy rất hiệu quả.

❖ Đường lối chung là :

Giải sử ta phải tìm cực trị của hàm số $f(x)$ có miền giá trị D . Gọi y là một giá trị nào đó của $f(x)$ với $x \in D$. Điều này có nghĩa là điều kiện để phương trình $f(x) = y$ có nghiệm. Sau đó giải điều kiện để phương trình $f(x) = y$ có nghiệm (x là biến, coi y là tham số).

Thường đưa đến biểu thức sau : $m \leq y \leq M$

Từ đó $\Rightarrow \text{Min } f(x) = m$ với $x \in D$.

$\Rightarrow \text{Max } f(x) = M$ với $x \in D$.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1. Tìm GTNN của $f(x) = x^2 + 4x + 5$

HD:

Gọi y là một giá trị của $f(x)$.

Ta có : $y = x^2 + 4x + 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - y = 0 \text{ (có nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 5 + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq 1$$

$$\text{Vậy } f(x)_{\text{Min}} = 1 \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 2. Tìm GTLN của $f(x) = -x^2 + 2x - 7$

HD:

Gọi y là một giá trị của $f(x)$.

Ta có : $y = -x^2 + 2x - 7$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y + 7 = 0 \text{ (có nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - y - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq -6$$

$$\text{Vậy } f(x)_{\text{Max}} = -6 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 3. Tìm GTLN, GTNN của $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3}$

HD:

Gọi y là một giá trị của $f(x)$.

Ta có : $y = \frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow yx^2 + 2yx + 3y - x^2 - 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 + 2(y - 2)x + 3y - 6 = 0$ (có nghiệm)

* Nếu $y = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

* Nếu $y \neq 1 \Rightarrow \Delta' = (y - 2)^2 + (3y - 6)(1 - y) \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 - 3y^2 + 3y + 6y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 5y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2$

Ta thấy : $\frac{1}{2} < 1 < 2$

Do vậy : $f(x)_{\min} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -3$

$f(x)_{\max} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 4. *Tìm GTNN của $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 - 2x + 1}$*

HD:

Gọi y là một giá trị của f(x) .

Ta có : $y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

$\Leftrightarrow yx^2 + 2yx + y - x^2 - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 - 2(y + 1)x + y - 6 = 0$ (có nghiệm)

* Nếu $y = 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$

* Nếu $y \neq 1 \Rightarrow \Delta' = (y + 1)^2 - (y - 1)(y - 6) \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 - y^2 + 6y + y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 9y - 5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{5}{9}$

Do $\frac{5}{9} < 1$ nên ta có $Y_{\min} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$. Vậy $f(x)_{\min} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

Bài 5. *Tìm GTLN của $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$*

HD:

Gọi y là một giá trị của f(x).

Ta có : $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow yx^2 + y - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)x^2 + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 1)x^2 = 2 - y$ (có nghiệm)

* Nếu $y = 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

* Nếu $y \neq 1 \Rightarrow x^2 = \frac{2 - y}{y - 1}$ (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{2 - y}{y - 1} \geq 0 \Leftrightarrow 1 < y < 2$

$\Rightarrow Y_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $f(x)_{\max} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

III. Bài tập tự luyện

1. Tìm GTNN của :

a) $A = 5x^2 + x + 7$; b) $B = \frac{3}{-4x^2 + 4x - 7}$; c) $C = \frac{5 - 2x}{x^2 + 4 - 4x}$

2. Tìm GTLN của :

a) $A = -x^2 + x + 2$; b) $B = \frac{11}{x^2 - 4x + 18}$; c) $C = \frac{-7x^2 + 74x - 196}{x^2 - 10x + 25}$

3. Tìm GTLN và GTNN của :

a) $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$; b) $B = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$; c) $C = \frac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$

Phương pháp 6. Phương pháp xét từng khoảng giá trị

I. Phương pháp

Có nhiều bài toán nếu ta chỉ sử dụng các phép biến đổi tương đương, các bất đẳng thức cơ bản phương pháp đổi biến hay biểu thức phụ, thậm chí ngay cả khi sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số, việc tìm cực trị vẫn gặp rất nhiều khó khăn có khi không thể tìm được. Những khi ta biết cách xét từng khoảng hợp lý (*có sự dự đoán*) thì việc tìm được cực trị trở nên đơn giản.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm GTNN của $A = |36^m - 5^n|$

HD:

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 36^m$ có chữ số tận cùng là 6

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 5^n$ có chữ số tận cùng là 5

Vì vậy : Nếu $36^m > 5^n$ thì A có chữ số tận cùng là 1

Nếu $5^n > 36^m$ thì A có chữ số tận cùng là 9

a) Xét $A = 1$ ta có : $36^m - 5^n = 1$ (*không xảy ra*) vì $(36^m - 1) : 7$ còn $5^n : 7$

b) Xét $A = 9$ ta có : $5^n - 36^m = 9$ (*không xảy ra*) vì $(5^n - 36^m) : 9$ còn $9 : 9$

c) Xét $A = 11$, xảy ra , chẳng hạn $m = 1, n = 2$

Vậy $A_{\min} = 11 \Leftrightarrow m = 1; n = 2$

Bài 2. Cho $m \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{n^2}{2^n}$

HD:

Với $n = 1$ ta có : $B = \frac{1}{2} < 1$

Với $n = 2$ ta có : $B = 1$

Với $n = 3$ ta có : $B = \frac{9}{8} > 1$

Với $n = 4$ ta có : $B = 1$

Với $n = 5$ ta có : $B = \frac{25}{32} < 1$

Với $n = 6$ ta có : $B = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} < 1$

Ta dự đoán rằng với $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$ thì $B < 1$

Thật vậy : Ta chứng minh dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

a) Giả sử $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$ ta có $B = \frac{n^2}{2^n} < 1$ (*)

Ta cần phải chứng minh công thức (*) đúng với $(n+1)$ nghĩa là phải chứng minh :

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} < 1 \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2^{n+1} \quad (1)$$

$$\text{Từ (*) ta có : } n^2 < 2^n \Leftrightarrow 2n^2 < 2^{n+1} \quad (2)$$

Để chứng minh (1) ta chứng minh $(n+1)^2 < 2n^2$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 < 2n^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 - 2 > 0 \quad (\text{đúng vì } n \geq 5)$$

b) Kết luận : $B = \frac{n^2}{2^n} < 1 \quad \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Vậy } B_{\max} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow n = 3$$

Bài 3. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $a + b = c + d = 20$. Tìm GTNN và GTLN của $T = \frac{ab}{ac + bd}$

HD:

$$\text{Do } T \neq 0 \text{ nên đặt } P = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$$

$$\text{Như vậy : } T_{\min} \Leftrightarrow P_{\max} \quad T_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$$

$$\text{Do } a, b, c, d \in \mathbb{N}^* \text{ và } a + b = c + d = 20 \Leftrightarrow 1 \leq a, b, c, d \leq 19$$

$$* \text{ Xét } a = b = 10 \text{ lúc đó } P = \frac{c}{10} + \frac{b}{10} = \frac{c+d}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

* Xét $b < a$ (trường hợp $b > a$ tương tự)

$$b < 10 < a \text{ hay } 1 \leq b \leq 19; 11 \leq a \leq 19$$

$$\text{a) Trước hết ta tìm } T_{\min} = P_{\max} = 19 + \frac{1}{19}$$

Ta xét 3 trường hợp sau :

$$a_1) \quad 1 \leq b < 10 = c = d < a \leq 19$$

$$\text{Khi đó : } P = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} = \frac{10}{b} + \frac{10}{a} < \frac{10}{1} + 1 = 11$$

$$a_2) \quad 1 \leq c \leq b < 10 < a \leq d \leq 19. \text{ Khi đó : } P = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} < 1 + \frac{19}{11} < 3$$

$$a_3) \quad 1 \leq d \leq b < 10 < a \leq c \leq 19 \text{ Nếu } b > 1 \text{ thì } P \leq \frac{19}{2} + 1 < 11$$

$$\text{Nếu } b = 1 \text{ thì } P \leq \frac{19}{1} + \frac{1}{19} = 19 + \frac{1}{19}$$

$$\text{Kết hợp cả 3 trường hợp ta thấy } P_{\max} = 19 + \frac{1}{19} = \frac{172}{19}$$

$$\text{Do đó } T_{\min} = \frac{19}{172} \Leftrightarrow a=19, b=1, c=19, d=1$$

b) Bây giờ ta tìm $T_{\text{Max}} = P_{\text{Min}}$ với $1 \leq b \leq 9$; $11 \leq a \leq 19$

$$P = \frac{c}{b} + \frac{d}{a} = \frac{c}{b} + \frac{20-c}{a} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)c + \frac{20}{a}$$

Ta có : $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$; đặt $A = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

Ta có : $P = A.C + \frac{20}{a}$

Vì $A > 0$ nên P_{Min} với $C = 1$

* Xét $P = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{20}{a} = \frac{1}{b} + \frac{19}{a} = \frac{1}{b} + \frac{19}{20-b}$

Đặt $\Rightarrow P_b = \frac{1}{b} + \frac{19}{20-b}$

* Xét $P_{b+1} - P_b$: $1 \leq b \leq 9$; $b \in \mathbb{N}$

$$P_{b+1} - P_b = \frac{18b^2 + 58b - 380}{b(b+1)(19-b)(20-b)}$$

Ta có : $b(1+1)(19-b)(20-b) > 0 \quad \forall 1 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$

Do vậy : Xét $t = 18b^2 + 58b - 380$ (*)

Nghiệm dương t_0 của (*) là $t = \frac{-29 + \sqrt{7681}}{18}$

Ta có bảng xét dấu :

b	−	$\frac{-29 + \sqrt{7681}}{18}$	$\frac{-29 + \sqrt{7681}}{18}$	+	
t	+	0	−	0	+

Với $0 < b < b_0$ thì $t < 0 \Rightarrow P_{b+1} < P_b$

$b > b_0$ thì $t > 0 \Rightarrow P_{b+1} > P_b$

Luôn luôn chứng minh được $3 < b_0 < 4$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Xét } P_3 = \frac{1}{3} + \frac{19}{7} = 1\frac{23}{51} \\ P_4 = 1 + \frac{7}{16} = 1\frac{7}{16} \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 > P_4$$

Nên : $a = 16, b = 4, c = 1, d = 19$ thì $P_{\text{Min}} = \frac{23}{16} \Leftrightarrow T_{\text{max}} = \frac{16}{23}$

Vậy : $T_{\text{Max}} = \frac{16}{23}$; $T_{\text{Min}} = \frac{19}{172}$

III. Bài tập vận dụng

1. Tìm GTNN của $A = |11^m - 5^n|$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$

2. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $a + b = c + d = 1000$. Tìm GTLN của $B = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$

3. Cho $m, n \in \mathbb{N}$ và $1 \leq m$; $n \leq 1981$ và $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$

Tìm GTLN của $C = m^2 + n^2$

Phương pháp 7. Phương pháp hình học

Trong các bài toán xét cực trị của biểu thức đại số nếu biểu thức ở dạng là tổng hiệu của căn bậc hai của các tam thức thì ta có thể đưa bài toán xét cực trị của các biểu thức đại số sang xét độ dài của các đoạn thẳng bằng việc chọn các điểm có tọa độ thích hợp chứa các đoạn thẳng đó.

❖ Lý thuyết cần vận dụng.

+ Nếu $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

+ Với 3 điểm M, A, B bất kỳ ta có :

$$|MA - MB| \leq AB \leq MA + MB$$

❖ Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho $f(x) = \left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right|$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$.

HD:

Ta có : $f(x) = \left| \sqrt{(x-2)^2 + 1} - \sqrt{(x-5)^2 + 25} \right|$

Chọn trong mặt phẳng tọa độ 3 điểm : A (2,1); B(5, 5); M (x, 0)

Ta có : $MA = \sqrt{(x-2)^2 + 1^2}$; $MB = \sqrt{(x-5)^2 + 5^2}$; $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Mặt khác ta có : $|MA - MB| \leq AB$ hay $\left| \sqrt{(x-2)^2 + 1^2} - \sqrt{(x-5)^2 + 5^2} \right| \leq 5$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x) = 5$ khi và chỉ khi 3 điểm M, A, B thẳng hàng.

Ta lại có phương trình của đường thẳng qua A và B là : $d = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

d cắt ox tại M $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$. Vậy giá trị lớn nhất của $f(x) = 5$ đạt tại $x = \frac{5}{4}$

Bài 2. Cho $f(x) = \sqrt{5x^2 + 20} + \sqrt{5x^2 - 32x + 64} + \sqrt{5x^2 - 40x + 100} + \sqrt{5x^2 - 8x + 16}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ (1)

HD:

Ta có : $\sqrt{5x^2 + 20} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x-2)^2}$

$$\sqrt{5x^2 - 40x + 100} = \sqrt{x^2 + (2x-10)^2}$$

Chọn A (4, -2) ; B(x, 2x) ; C (0, 10)

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+2)^2} ; BC = \sqrt{x^2 + (2x-10)^2} ; AC = 4\sqrt{10}$$

Ta có : $AB + BC \geq AC$

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2 + 20} + \sqrt{5x^2 - 40x + 100} \geq 4\sqrt{10} \quad (2)$$

Ta lại có : $\sqrt{5x^2 - 32x + 64} = \sqrt{x^2 + (2x-8)^2}$

$$\sqrt{5x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x)^2}$$

chọn D (x, 8); E (0, 2x) ; F (x-4, 0)

$$DE = \sqrt{x^2 + (2x-8)^2} ; EF = \sqrt{(x-4)^2 + (2x)^2} ; DF = 4\sqrt{5}$$

ta có : $DE + EF \geq DF$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (2x-8)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (2x)^2} \geq 4\sqrt{5} \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) ta có :

$$VT \geq 4(\sqrt{5} + \sqrt{10})$$

$$VT = 4(\sqrt{5} + \sqrt{10}) \text{ khi và chỉ khi}$$

$$\begin{cases} A, B, C \text{ thẳng hàng} \\ D, E, F \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{PT đường thẳng đi qua AB nhận C (0, 10) là nghiệm} \\ \text{PT đường thẳng đi qua DE nhận F (x-4, 0) là nghiệm} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Giải điều kiện ta tìm được $x = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 4(\sqrt{5} + \sqrt{10})$ tại $x = 2$.

Nhận xét : Vận dụng phương pháp này để tìm cực trị của biểu thức, đòi hỏi người giải phải rất tinh tế khi chọn điểm để thảo luận những yêu cầu bài toán.

Bài tập tham khảo :

$$\text{Bài 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất của } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10}$$

$$\text{Bài 2 : Tìm giá trị lớn nhất của } f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$$

