

CHUYÊN ĐỀ TÌM MIN, MAX CỦA BIỂU THỨC

DẠNG 1: ĐA THỨC ĐƠN GIẢN

Bài 1: Tìm GTNN của: $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Bài 2: Tìm GTNN của: $B = (x-1)(x-3)(x^2-4x+5)$

Bài 3: Tìm min của: $A = x(x+2)(x+4)(x+6)+8$

Bài 4: Tìm GTNN của: $B = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Bài 5: Tìm GTNN của: $A = (x^2+x-6)(x^2+x+2)$

Bài 6: Tìm GTNN của: $C = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Bài 7: Tìm GTNN của: $D = (2x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$

Bài 8: Tìm min của: $C = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2011$

Bài 9: Tìm max của: $E = 5+(1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$

Bài 10: Tìm GTNN của: $M = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Bài 11: Tìm min của: $D = (x+1)(x^2-4)(x+5)+2014$

Bài 12: Tìm min của: $B = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+m$ với $a+d = b+c$

Bài 13: Tìm GTNN của: $C = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

HD:

$$C = (x^4 - 2.3x^2.x + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0$$

Bài 14: Tìm GTNN của: $C = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22$

HD:

$$C = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 5(x^2 - 4x + 4) + 2$$

Bài 15: Tìm GTNN của: $B = x^4 - x^2 + 2x + 7$

HD:

$$B = (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 + 2x + 1) + 5$$

Bài 16: Tìm GTNN của: $D = (x+8)^4 + (x+6)^4$

HD:

$$\text{Đặt: } x+7 = y \Rightarrow D = (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2$$

Bài 17: Tìm GTNN của: $A = 9x^2 - 6x - 4|3x-1| + 6$

HD:

$$\text{Đặt: } |3x-1| = t \Rightarrow t^2 = 9x^2 - 6x + 1 \Rightarrow E = t^2 - 4t + 5$$

Bài 18: Tìm GTLN của: $A = (2x+1)^2 - (3x-2)^2 + x - 11$

Bài 19: Tìm min của: $A = (x+2)^4 + (x-2)^4$

Bài 20: Tìm min của: $A = x^2 + 4y^2 - 4x + 32y + 2018$

Bài 21: Tìm min của: $A = 3x^2 + y^2 + 4x - y$

Bài 22: Tìm min của: $B = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 18$

Bài 24: Tìm max của: $B = -3x^2 - 16y^2 - 8xy + 5x + 2$

Bài 25: Tìm min của: $A = 3x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - 4y + 26$

Bài 26: Tìm min của: $5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

Bài 27: Tìm max của: $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Bài 28: Tìm min của: $A = (x-3)^2 + (x-1)^2$

Bài 29: Tìm min của: $B = 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 - 4(x+3)^2$

Bài 30: Tìm max của: $F = 2 - 3(x+1)^4 - 3(x-5)^4$

Bài 31: Tìm min của: $G = (x+3)^4 + (x-7)^4$

Bài 32: Tìm min của: $H = x^4 - 7x^2 + 4x + 25$

Bài 33: Tìm min của: $I = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x + 20$

Bài 34: Tìm min của: $K = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 20x - 15$

Bài 35: Tìm min của: $M = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x - 18$

Bài 36: Tìm max của : $N = -x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 3$

Bài 37: Tìm max của: $P = -3x^2 - 5y^2 + 2x + 7y - 23$

Bài 38: Tìm max của: $Q = -x^2 - 5y^2 + 4xy + 12y + 7$

Bài 39: Tìm max của: $Q = -x^2 - 5y^2 + 4xy + 12y + 7$

Bài 40: Tìm max của: $R = -7x^2 - 4y^2 - 8xy + 18x + 9$

Bài 41: Tìm max của: $A = 5 - 2x^2 - 4y^2 + 4xy - 8x - 12y$

Bài 42: Tìm max của: $B = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$

Bài 43: Tìm min của: $C = a^2 + ab + b^2 - 3x - 3b + 1989$

Bài 44: Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x: $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m$

Bài 45: Tìm GTNN của: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

HD:

Ta có: $A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1$

Do: $(x-y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0$, Nên $A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$

Bài 46: Tìm min của: $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$

Bài 47: Tìm GTNN của biểu thức: $A = a^4 - 2a^3 - 4a + 5$

HD:

$A = a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3 = (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3 \geq 3$ dấu bằng khi $a=1$

Bài 48: Tìm GTNN của biểu thức : $A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Bài 49: Tìm Min của: $P = 5x^2 - |6x-1| - 1$

DẠNG 2: NHÓM ĐƯA VỀ TỔNG BÌNH PHƯƠNG

Bài 1: Tìm GTNN của: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Bài 2: Tìm min của: $B = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

Bài 3: Tìm min của: $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

Bài 4: Tìm min của: $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Bài 5: Tìm min của: $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

Bài 6: Tìm max của: $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$

Bài 7: Tìm min của: $G = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$

Bài 8: Tìm max của: $H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$

Bài 9: Tìm min của: $I = x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 11$

Bài 10: Tìm min của: $K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$

Bài 11: Tìm min của: $M = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$

Bài 12: Tìm min của: $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$

Bài 13: Tìm min của: $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$

Bài 14: Tìm min của: $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$

Bài 15: Tìm min của: $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$

Bài 16: Tìm min của: $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$

Bài 17: Tìm min của: $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$

Bài 18: Tìm min của: $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$

Bài 19: Tìm max của: $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Bài 20: Tìm min của: $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$

Bài 21: Tìm GTNN của $A = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

HD:

Ta có: $4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + bh2) + 4 + 2ab - 4a - 4b = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$

Bài 22: Tìm min của: $G = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$

Bài 23: CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15 = 0$

Bài 24: Tìm min của: $A = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

Bài 24: Tìm min của: $B = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Bài 25: Tìm min của: $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

Bài 26: Tìm min của: $D = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$

Bài 27: Tìm min của: $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$

Bài 28: Tìm min của: $F = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 12y + 45$

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức : $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

HD:

$P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 \Rightarrow 4P = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$

Bài 30: Tìm min của: $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$

Bài 31: Tìm min của: $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

Bài 32: Tìm GTLN của biểu thức: $T = -2x^2 - y^2 - 4x + 12y + 4xy + 2002$

Bài 33: Tìm GTNN của biểu thức: $P = 5x^2 + 2y^2 - 4xy - 2x - 4y + 2023$

Bài 34: Tìm GTNN của biểu thức: $M = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y - 2$

DẠNG 3: PHÂN THỨC

Bài 1: Tìm min của: $A = \frac{2}{6x-5-9x^2}$

Bài 2: Tìm min của: $B = \frac{1}{x^2-4x+9}$

Bài 3: Tìm max của: $C = \frac{-3}{x^2-5x+1}$

Bài 4: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{6}{-x^2+2x-3}$

Bài 5: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{2}{x^2+8}$

Bài 6: Tìm min hoặc max của: $M = \frac{4}{x^2+x+1}$

Bài 7: Tìm min hoặc max của: $E = \frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}$

Bài 8: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{x^2-4x+1}{x^2}$

Bài 9: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{4x^2-6x+1}{(2x+1)^2}$

Bài 10: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{x}{(x+10)^2}$

Bài 11: Tìm min hoặc max của: $I = \frac{x}{(x+2016)^2}$

Bài 12: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{x^2-2x+2000}{x^2}$

Bài 13: Tìm min hoặc max của: $E = \frac{x^2-2x+2015}{2015x^2}$

Bài 14: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x}{(x+2000)^2}$

Bài 15: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^2-x+1}{(x^2+2x+1)}$

Bài 16: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{2x^2+4x+4}{x^2}$

Bài 17: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^2-2x+2012}{x^2}$

Bài 18: Tìm cả min và max của: $K = \frac{3-4x}{x^2+1}$

Bài 19: Tìm min hoặc max của: $M = \frac{27-12x}{x^2+9}$

Bài 20: Tìm min hoặc max của: $N = \frac{3x^2+4x+8}{x^2+3}$

Bài 21: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{8x+3}{4x^2+1}$

Bài 22: Tìm min hoặc max của: $C = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$

Bài 23: Tìm min hoặc max của: $N = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

Bài 24: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$

Bài 25: Tìm min hoặc max của: $E = \frac{2x + 1}{x^2}$

Bài 26: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

Bài 27: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{6x - 8}{x^2 + 1}$

Bài 28: Tìm min hoặc max của: $Q = \frac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 2x + 5}$

Bài 29: Tìm min hoặc max của: $R = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22}$

Bài 30: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^6 + 27}{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 9}$

Bài 31: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^6 + 512}{x^2 + 8}$

Bài 32: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{4x^4 + 16x^3 + 56x^2 + 80x + 356}{x^2 + 2x + 5}$

Bài 33: Tìm min của: $H = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Bài 34: Tìm min hoặc max của: $I = \frac{-8}{3x^2 + 2}$

Bài 35: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2010}$

Bài 36: Tìm min hoặc max của: $Q = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 37: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2}$

Bài 38: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$

Bài 39: Tìm min hoặc max của: $C = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2}$

Bài 40: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$

Bài 41: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{x^2y + x^2(x^2 - y) + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2}$

Bài 42: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Bài 43: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 4}$

Bài 44: Tìm min hoặc max của: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$

Bài 45: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 3x + 5}$

Bài 46: Tìm min hoặc max của: $I = \frac{2x^2 - 16x + 71}{x^2 - 8x + 22}$

Bài 47: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Bài 48: Tìm min hoặc max của: $N = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$

Bài 49: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

Bài 50: Tìm min hoặc max của: $Q = \frac{x^2 - 2x + 1999}{x^2 - 3x + 2} : \frac{x^3}{x^2 - 3x^2 + 2x}$

Bài 51: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$

Bài 52: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{6x - 8}{x^2 + 1}$

Bài 53: Tìm min và max của: $C = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$

Bài 54: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$

Bài 55: Tìm min hoặc max của: $E = \frac{8x + 3}{4x^2 + 1}$

Bài 56: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

Bài 57: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Bài 58: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$

Bài 59: Tìm min và max của: $I = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$

Bài 39: Tìm min $P = \frac{2(2x + 1)}{x^2 + 2}$

Bài 60: Tìm min hoặc max của: $J = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Bài 61: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2}$

Bài 62: Tìm min hoặc max của: $M = \frac{4x + 1}{x^2 + 3}$

Bài 63: Tìm min hoặc max của: $N = \frac{3x^2 - 6x + 14}{2x^2 + 5}$

Bài 64: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{12x + 13}{x^2 + 2x + 3}$

Bài 65: Tìm min hoặc max của: $Q = \frac{5y^2 - 3xy}{x^2 - 3xy + 4y^2}$

Bài 66: Tìm min hoặc max của: $R = \frac{x^2 - 4y^2}{3x^2 - 4xy + 5y^2}$

Bài 67: Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^2 - 6x + 23}{x^2 - 6x + 10}$

Bài 68: Tìm min hoặc max của: $B = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2}$

Bài 69: Tìm min hoặc max của: $C = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

Bài 70: Tìm min hoặc max của: $D = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2}$

Bài 71: Tìm min hoặc max của: $E = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x - 2)^2}$

Bài 72: Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 73: Tìm min hoặc max của: $G = \frac{4x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$

Bài 74: Tìm min hoặc max của: $H = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{9x^2 - 6xy + 2y^2}$

Bài 75: Tìm min hoặc max của: $I = \frac{4x^2 + 22x + 19}{x^2 + 4x + 4}$

Bài 76: Tìm min hoặc max của: $K = \frac{9x^2 + 30x - 7}{9x^2 + 6x + 1}$

Bài 77: Tìm min hoặc max của: $M = \frac{x^2 - 5xy + 2y^2}{2x^2 - 10xy + 7y^2}$

Bài 78: Tìm min hoặc max của: $N = \frac{22x^2 - 58xy + 73y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

Bài 79: Tìm min hoặc max của: $P = \frac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$

Bài 80: Tìm min hoặc max của: $Q = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 81: Tìm min hoặc max của: $R = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

Bài 82: Tìm GTLN của biểu thức: $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$, GTLN đó đạt được tại giá trị nào của x

HD:

$$\text{Ta có : } P(x) = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{P(x)} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 3$$

Bài 83: Tìm GTNN của biểu thức: $M = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} (x \neq -1)$

HD:

$$\text{Ta có : } M = \frac{x^2 + 2x + 1 - (x + 1) + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Đặt $\frac{1}{x+1} = t$, ta có: $M = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Bài 84 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

HD:

Ta có: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$

Do $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow B = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3$, Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$

Bài 85: Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{x^2 - 2x + 2012}{x^2}$, với $x \neq 0$

Bài 86: Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 87: Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 88: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $B = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 89: Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - 2x + 2011}{x^2}$, với $x > 0$, Tìm x để M có GTNN

Bài 90: Tìm GTNN và GTLN của: $A = \frac{6x+1}{12x^2+1}$

Bài 91: Cho x, y là các số thực khác 0, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2xy + y^2}$

Bài 92: Cho $x \geq 0$, Tìm GTNN của : $Q = \frac{x^2 + 2x + 17}{2(x+1)}$

Bài 93: Tìm GTNN của : $B = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

Bài 94: Tìm GTNN của : $C = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Bài 95: Tìm GTLN của: $B = \frac{5x^2 + 21}{x^2 + 3}$

Bài 96: Tìm GTLN của: $C = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2}$

Bài 97: Tìm GTLN của: $D = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

DẠNG 4: TÌM MIN, MAX CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1: Tìm min của: $A = 3x^2 + y^2$ biết: $3x + y = 1$

HD:

$$y = 1 - 3x \Rightarrow A = 3x^2 + (1 - 3x)^2 = 12x^2 - 6x + 1$$

Bài 1: Cho các số x, y thỏa mãn: $2x + 3y = 13$, tìm GTNN của $Q = x^2 + y^2$

Bài 2: Tìm min của: $A = xy$ biết $3x + y = 1$

HD:

$$y = 1 - 3x \Rightarrow A = x(1 - 3x) = -3x^2 + x$$

Bài 3: Tìm min của: $A = a^3 - b^3 - ab$ biết: $a - b = 1$

HD:

$$a = b + 1 \Rightarrow A = (b + 1)^3 - b^3 - (b + 1)b = 2b^2 + 2b + 1$$

Bài 4: Tìm max của: $B = a.b$ biết: $3a + 5b = 12$

HD:

$$\text{Từ gt ta có: } a = \frac{12 - 5b}{3}, \text{ thay vào } B = b \left(\frac{12 - 5b}{3} \right) = \frac{-5}{3}b^2 + \frac{12}{3}b$$

Bài 5: Tìm min của: $C = x^3 + y^3 + xy$ biết: $x + y = 1$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow y = 1 - x \text{ thay vào C ta được: } C = x^3 + (1 - x)^3 + xy = 2x^2 - 2x + 1$$

Bài 6: Tìm min của: $D = x^2 + 2y^2$ biết: $x + 2y = 1$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x = 1 - 2y \text{ thay vào } D = (1 - 2y)^2 + 2y^2$$

Bài 7: Tìm min của: $E = 2x^2 + 5y^2$ biết: $4x - 3y = 7$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow y = \frac{4x - 7}{3} \text{ thay vào E}$$

Bài 8: Cho $x + y = 1$, Tìm min của: $A = x^2 + y^2$

Bài 9: Cho $x + y = 1$, Tìm min của: $B = 3 - xy$

Bài 9: Cho a, b > 0 và a + b = 4, tìm GTLN của $P = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Bài 10: Tìm min của: $F = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, biết: a + b = 1 và a, b > 0

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 &= \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 = 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &\geq 8 + 4.2 + 2 = 18 \end{aligned}$$

Bài 11: Cho x, y thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$, Tìm max của: $A = x.y$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ gt ta có: } 4 &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 2 \Rightarrow 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy + 2 \\ &\Rightarrow xy + 2 \leq 4 \Rightarrow xy \leq 2 \end{aligned}$$

Bài 12: Cho hai số thực $a, b \neq 0$, thỏa mãn: $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$, Tìm min, max của: $S = ab + 2017$

HD:

$$\text{Từ gt ta có : } 4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\right) + ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + 2$$

$$\Rightarrow ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab + 2017 \leq 2019 \Rightarrow S \leq 2019$$

$$\text{Mặt khác : } 4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab\right) - ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2$$

$$\Rightarrow -ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow ab + 2017 \geq 2015 \Rightarrow S \geq 2015$$

Bài 13: Cho hai số x, y khác 0 thỏa mãn: $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8$, Tìm min, max của: $A = xy + 2024$

HD:

$$\text{Từ gt ta có : } 8 = x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} \Rightarrow 16 = 2x^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - xy + 8$$

$$\Rightarrow 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - xy + 8 \Rightarrow -xy + 8 \leq 16 \Rightarrow xy \geq -8 \Rightarrow A = xy + 2024 \geq 2016$$

$$\text{Mặt khác : } 16 = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy - 8$$

$$\Rightarrow xy - 8 \leq 16 \Rightarrow xy \leq 8 \Rightarrow S = xy + 2024 \leq 2032$$

Bài 14: Cho 2 số x, y khác 0 thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$, Tìm max, min của $A = xy$

Bài 15: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ khác 0 biết: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$, Tìm x, y để $B = x.y$ đạt min và đạt max

HD:

$$\text{Ta có : } 4 = 8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2\right) + (4x^2 + y^2 - 4xy) + 4xy + 2$$

$$4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x - y)^2 + 4xy + 2 \Rightarrow 4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác : } 4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x + y)^2 - 4xy + 2 \Rightarrow -4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \geq -\frac{1}{2}$$

Bài 16: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$. Tìm min của: $P = xy$

Bài 17: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$, Tìm min của: $A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

HD:

$$\text{Ta có : } A = 16(xy)^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy = 6x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$$

$$\text{Vì } x + y = 1 \text{ nên } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy, \text{ thay vào } A$$

$$A = 6x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy, \text{ Đặt } xy = t \text{ khi đó : } A = 6t^2 - 2t + 12$$

Bài 17: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x + y = 1$ Tìm min của biểu thức:

$$C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$$

Bài 18: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x + 2y = 3$ tìm min của: $A = x^2 + 2y^2$

HD:

Từ gt ta có : $x = 3 - 2y$ thay vào $A = (3 - 2y)^2 + 2y^2 = 6y^2 - 12y + 9$

Bài 19: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$, Tìm min và max của: $A = x^2 + y^2$

HD:

Ta có : $x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy = 8 \Rightarrow (x - y)^2 + x^2 + y^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 8$ hay $A \leq 8$

mặt khác : $8 = 2x^2 + 2y^2 - 2xy \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8 + 2xy \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 8 + (x + y)^2 \geq 8$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{8}{3}$ hay $A \geq \frac{8}{3}$

Bài 20: Cho x, y thỏa mãn: $x + y = 2$, Tìm min của: $A = x^3 + y^3 + 2xy$

HD:

Từ gt ta có : $y = 2 - x$ thay vào A ta được : $A = x^3 + (2 - x)^3 + 2x(2 - x)$

Bài 21: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x + y + 4 = 0$, Tìm max của:

$A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$

HD:

Ta có : $x + y = -4$, nên $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -64 + 12xy$,

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2xy$ thay vào $A = 2(-64 + 12xy) + 3(16 - 2xy) + 10xy$

Bài 21: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x + y = 1$, Tìm GTNN của $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$

Bài 22: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $2x + 2y + z = 4$, Tìm max của: $A = 2xy + yz + zx$

HD:

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 4 - 2x - 2y$ thay vào A ta được :

$A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y$

Bài 23: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x + y + z = 6$. Tìm max của: $A = xy + 2yz + 3zx$

HD:

Từ gt $\Rightarrow z = 6 - x - y$ thay vào $A = xy + 2y(6 - x - y) + 3x(6 - x - y)$

Bài 24: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$, Tìm min và max của: $S = x + y + 3$

HD:

Từ gt ta có : $x^2 + 2xy + 7x + 7y + 2y^2 + 10 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x\left(\frac{2y+7}{2}\right) + \frac{(2y+7)^2}{4} + 2y^2 + 7y + 10 - \frac{(2y+7)^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} = 0$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x + y + \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Rightarrow -2 \leq x + y + 3 \leq 1$

Bài 25: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$, Tìm min, max của: $A = m + n + p$

HD:

Từ gt ta có : $2n^2 + 2np + 2p^2 = 2 - 3m^2 \Rightarrow 3m^2 + 2n^2 + 2p^2 + 2np = 2$

$\Rightarrow (m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp) + (2m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp) = 2$

$\Rightarrow (m + n + p)^2 + (m - p)^2 + (m - n)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m + n + p \leq \sqrt{2}$

Bài 26: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, Tìm min, max của: $P = x + y + 2z$

HD:

Ta có : $P^2 = (x + y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz$, nên ta nhân 6 vào gt :

$$18 = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz) + (5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz - 4xz)$$

$$18 = (x + y + 2z)^2 + (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (2y - z)^2 \Rightarrow (x + y + 2z)^2 \leq 18$$

$$-\sqrt{18} \leq x + y + 2z \leq \sqrt{18}$$

Bài 27: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$, Tìm min max

của: $B = m + n + p$

HD:

Từ gt ta có : $4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3$

$$\Rightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np) + (m^2 + n^2 + 5p^2 - 4mp - 2np) = 3$$

$$\Rightarrow 3(m + n + p)^2 + (2p - m)^2 + (n - p)^2 = 3 \Rightarrow 3(m + n + p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m + n + p \leq 1$$

Bài 28: Cho x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$, Tìm min max của: $A = xy + yz + zx$

HD:

Từ gt $\Rightarrow z = 3 - x - y$ thay vào $A = xy + y(3 - x - y) + x(3 - x - y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y$

Bài 29: Cho x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$, Tìm min max của: $B = -xy + 3yz + 4zx$

HD:

Từ gt ta có : $z = 3 - x - y \Rightarrow B = -xy + 3y(3 - x - y) + 4x(3 - x - y)$

$$\Rightarrow B = -4x^2 - 3y^2 - 16xy + 9y + 12x$$

Bài 30: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $2x + 3y - z = 4$, Tìm min max của $A = -xy + yz + zx$

HD:

Từ gt $\Rightarrow z = 2x + 3y - 4$ thay vào $A = -xy + y(2x + 3y - 4) + x(2x + 3y - 4)$

Bài 31: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $2x + 3y - z = 4$, Tìm min max của: $B = 12xy - 3yz - 4zx$

HD:

Từ gt ta có : $z = 2x + 3y - 4$ thay vào $B = 12xy - 3y(2x + 3y - 4) - 4x(2x + 3y - 4)$

Bài 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = -2$, tìm min của: $A = 2(x^3 + y^3) - 15xy + 7$

HD:

Từ $x + y = -2$, ta có : $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -8 + 6xy$ thay vào

$A = 2(-8 + 6xy) - 15xy + 7 = -3xy - 9$ và $y = -2 - x$ thay vào $A = -3x(-2 - x) - 9$

Bài 33: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = -2$, Tìm min của

$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$

HD:

$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$

Từ $x + y = -2$, ta có: $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$

$x^3 + y^3 = 6xy - 8$, $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$, Thay vào b ta được :

$B = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - (6xy - 8) + 2x^2y^2 + 2xy(4 - 2xy) + 13xy$

$B = -xy + 24$, thay $y = -2 - x \Rightarrow B = x^2 + 2x$

Bài 34: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 5$, Tìm max của: $A = x^3 + y^3 - 8(x^2 + y^2) + xy + 2$

HD:

Vì $x+y=5$ nên $x^3+y^3=125-15xy$ và $x^2+y^2=25-2xy$ thay vào

$$A=125-15xy-8(25-2xy)+xy+2$$

Bài 35: Cho hai số x, y thỏa mãn: $x+y=5$, Tìm max của:

$$B=x^4+y^4-4(x^3+y^3)-20(x^2+y^2)-2x^2y^2+xy$$

HD:

$$B=x^4+y^4-4(x^3+y^3)-20(x^2+y^2)-2x^2y^2+xy$$

Vì $x+y=5$ nên $x^4+y^4=(25-2xy)^2-2x^2y^2$, $x^3+y^3=125-15xy$, $x^2+y^2=25-2xy$

$$B=(25-2xy)^2-2x^2y^2-4(125-15xy)-20(25-2xy)-2x^2y^2+xy$$

Bài 36: Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^4+y^4-7=xy(3-2xy)$, Tìm min max của: $P=xy$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x^4+y^4-3xy+2x^2y^2=7 \Rightarrow$$

$$(x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2-3xy=7 \Rightarrow (x^2-y^2)^2+\left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{121}{16} \Rightarrow \left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{121}{16}$$

Bài 37: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $7x^2+9y^2+12xy-4x-6y-15=0$, Tìm min max của:

$$A=2x+3y+5$$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow (2x)^2+(3y)^2+2.2x.3y-2.2x-2.3y+1+3x^2=16 \Rightarrow (2x+3y+1)^2+3x^2=16$$

Bài 38: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $3x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+2yz=5$, Tìm min max của:

$$P=x+y$$

HD:

$$\text{Từ gt ta có: } (x^2+y^2+2xy)+(2x^2+y^2+5z^2+2xy-2xz+2yz)=5$$

$$\Rightarrow (x+y)^2+(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)+(4z^2-4xz+x^2)=5$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x+y \leq \sqrt{5}$$

Bài 39: Cho các số x, y, z thỏa mãn: $3x+y+2z=1$. Tìm min max của: $p=x^2+y^2+z^2$

HD:

$$\text{Từ gt ta có: } y=1-3x-2z \Rightarrow y^2=1+9x^2+4z^2-6x+12xz-4z \text{ khi đó:}$$

$$P=10x^2+5z^2+12xz-6x-4z+1$$

Bài 40: Cho các số x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$, Tìm max của: $A=2xy+3yz+4zx$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow z=1-x-y \text{ thay vào } A=2xy+3y(1-x-y)+4x(1-x-y)$$

Bài 41: Cho $x, y \in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $x+2y=1$, Tìm max của: $P=x.y$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x=1-2y \text{ thay vào } P=y(1-2y)$$

Bài 42: Cho $x, y \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn: $x+y=10$, Tìm min của: $A=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{4}{x+y} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Bài 43: Cho $x, y \geq 0$, $x+y=1$, Tìm min, max của: $A=x^2+y^2$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow y=1-x \text{ thay vào } A=x^2+(1-x)^2$$

Bài 44: Tìm min max của: $P = x + y + z$, biết: $y^2 + z^2 + yz = 1 - \frac{3}{2}x^2$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ gt} \Rightarrow 2y^2 + 2z^2 + 2yz &= 2 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) &+ (2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx) = 2 \\ \Rightarrow (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 &= 2 \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 2 \end{aligned}$$

Bài 45: Cho $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x - 14y + 18 = 0$, Tìm min, max của: $S = x + y$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ gt} \Rightarrow x^2 + 2x(y - 5) + (y - 5)^2 + 3y^2 - 14y + 18 - y^2 + 10y - 25 &= 0 \\ \Rightarrow (x + y - 5)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) &= 9 \Rightarrow (x + y - 5)^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x + y - 5 \leq 3 \end{aligned}$$

Bài 46: Cho a,b,c không âm thỏa mãn: $3a + 2c = 51$ và $c + 5b = 21$, Tìm max của $A = a + b + c$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Cộng theo vế giả thiết ta được: } 3a + 3c + 5b &= 72 \Rightarrow 3(a + b + c) = 72 - 2b \leq 72 \\ \text{Do } b \geq 0 \Rightarrow a + b + c &\leq \frac{72}{3} = 24 \end{aligned}$$

Bài 46: Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $(a - b)(b - c)(c - a) = a + b + c$

a, CMR: $a + b + c \leq 2$

b, Tìm GTNN của $P = a + b + c$

Bài 47: Cho a,b,c là các số không âm thỏa mãn: $2a + b = 6 - 3c$ và $3a + 4b = 3c + 4$, Tìm min $E = 2a + 3b - 4c$ **HD:**

$$\text{Cộng theo vế ta được: } a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 - 3c \\ b = 3c - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \leq \frac{4}{3} \\ c \geq \frac{2}{3} \end{cases} \text{ do } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } E = 2(4 - 3c) + 3(3c - 2) - 4c = 2 - c$$

Bài 48: Cho $x, y, z \geq 0$, $2x + 7y = 2014$, $3x + 5z = 3031$, Tìm GTLN của biểu thức: $A = x + y + z$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Cộng theo vế của gt ta có: } 5x + 5y + 5z &= 5045 - 2y \leq 5045 \text{ do } y \geq 0 \text{ nên} \\ 5(x + y + z) &\leq 5045 \Rightarrow x + y + z \leq 1009 \end{aligned}$$

Bài 49: Cho $a + b + c = 3$, $a, b, c > 0$, CMR: $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$

Bài 50: Cho x,y,z là các số thực nguyên dương thỏa mãn: $x + y + z + xy + yz + zx = 6$, tìm min của: $A = x^2 + y^2 + z^2$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 12 &= 2x + 2y + 2z + 2xy + 2yz + 2zx \\ \text{MÀ } 2x &\leq x^2 + 1, 2y \leq y^2 + 1, 2z \leq z^2 + 1, 2xy \leq x^2 + y^2, 2yz \leq y^2 + z^2, 2zx \leq z^2 + x^2 \\ \text{nên } 12 &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \end{aligned}$$

Bài 51: Cho $x^2 + y^2 + z^2 \leq 27$, Tìm max $A = x + y + z + xy + yz + zx$

HD:

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leq 27 + (x^2 + y^2 + z^2 + z^2 + y^2 + x^2) \leq 81$$

$$\Rightarrow (x+y+z) \leq 9, \text{ mặt khác } xy + yz + zx \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} = 27$$

$$\text{Khi } A \leq 9 + 29 = 36, \text{ dấu '=' khi } x = y = z = 3$$

Bài 52: Cho $xy + yz + zx = 8$, Tìm min của: $A = x^4 + y^4 + z^4$

HD:

$$\text{Ta có: } 64 = (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

$$64 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^4 + y^4 + z^4)(1^2 + 1^2 + 1^2) \Rightarrow A \geq \frac{64}{3}, \text{ min } A = \frac{64}{3}$$

Bài 53: Cho $x \geq 2, x + y \geq 3$, tìm min của: $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$

Bài 54: Cho $a, b, c > 0$, thỏa mãn: $ab + bc + ca = 3$, Tìm min của: $A = \frac{19a+3}{b^2+1} + \frac{19b+3}{c^2+1} + \frac{19c+3}{a^2+1}$

HD:

$$A \geq \frac{19a+3}{2b} + \frac{19b+3}{2c} + \frac{19c+3}{2a} = \frac{19}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \cdot \frac{19}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3 \sqrt{\frac{1}{abc}} \geq \frac{57}{2} + \frac{9}{2}$$

$$\text{Vì } 3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$$

Bài 55: Cho $a, b, c > 0$, thỏa mãn: $a + b + c = 3$, CMR: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Bài 56: Cho $a+b+c+d=9$, Tìm min của: $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

HD:

$$\text{Dự đoán dấu "=" } a = b = c = d = \frac{9}{4}, \text{ nên xét } \left(a - \frac{9}{4} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{81}{16} \geq 0$$

$$b^2 - \frac{9}{2}b + \frac{81}{16} \geq 0, c^2 - \frac{9}{2}c + \frac{81}{16} \geq 0, d^2 - \frac{9}{2}d + \frac{81}{16} \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \frac{9}{2}(a+b+c+d) + \frac{81}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{81}{4} \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = d = \frac{9}{4}$$

Bài 57: Cho $a+b=2$, Tìm max của: $A = ab(a^2 + b^2)$

HD:

$$\text{Ta có: } a+b=2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - 2ab \Rightarrow A = ab(4 - 2ab) = -2a^2b^2 + 4ab$$

$$A = -(a^2b^2 - 2ab + 1) + 2 \leq 2, \text{ Max } A = 2$$

Bài 58: Cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$, Tìm min của: $A = x + y + z$

HD:

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = a (a \geq 0) \Rightarrow x = a^2, \sqrt{y} = b, \sqrt{z} = c \Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 \text{ và } a + b + c = 1$$

Bài 59: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn: $a + b \leq 1$, Tìm min của: $P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

HD:

$$\text{Điểm rơi: } a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 = 4a, \Rightarrow P = \left(4a + \frac{1}{a} \right) + \left(4b + \frac{1}{b} \right) - 3(a+b) \geq 4 + 4 - 3(a+b)$$

$$\text{mà } a+b \leq 1 \Rightarrow 3(a+b) \leq 3 \Rightarrow -3(a+b) \geq -3 \Rightarrow P \geq 8 - 3 = 5$$

Bài 60: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn: $a + b \leq 1$, Tìm min của: $A = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$

HD:

$$\text{Điểm rơi } a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3}=4, \frac{1}{a^2b}=8 \Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3}=\frac{1}{2a^2b}$$

$$\text{Khi đó: } A=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}+\frac{1}{2ab^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{(a^3+b^3)2^4a^6b^6}}$$

Bài 61: Cho x,y dương thỏa mãn: $x+y=4$, tìm min của: $P=x^2+y^2+\frac{33}{xy}$

HD :

$$\text{Điểm rơi: } x=y=2 \text{ khi đó: } P \geq 2xy+\frac{33}{xy}, \text{ nên } 2xy=8=\frac{k}{4} \Rightarrow k=32 \text{ khi đó:}$$

$$P=2xy+\frac{32}{xy}+\frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{64}+\frac{1}{xy}, \text{ Mà: } \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow P \geq 2.8+\frac{1}{4}$$

Bài 62: Cho a,b,c,d dương thỏa mãn: $a+b+c+d=4$, Tìm min của:

$$M=\frac{1}{(a^2+1)}+\frac{1}{(b^2+1)}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}$$

Bài 63: Cho x,y thỏa mãn: $(11x+6y+2015)(x-y+3)=0$, Tìm min của: $P=xy-5x+2016$

HD:

$$\text{Từ gt ta có: } 11x+6y+2015=0 \text{ hoặc } x-y+3=0$$

$$\text{TH1: Ta có: } 11x+6y+2015=0 \Rightarrow y=\frac{11x+2015}{6} \text{ thay vào P}$$

$$\text{TH2: ta có: } x-y+3=0 \Rightarrow y=x+3 \text{ thay vào P}$$

Bài 64: Cho a,b,c dương và tổng bằng 3, Tìm max của: $A=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}$

Bài 65: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $4c+2b \geq a(b^2+c^2)$, Tìm min của:

$$S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{a+c-b}+\frac{5}{a+b-c}$$

Bài 66: Cho a,b,c>0, thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$, Tìm min $P=2(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 67: Cho $x^2+y^2+z^2=1$, tìm min của: $F=xy+2yz+zx$

Bài 68: Cho a,b,c dương thỏa mãn: $a+b+c=1$, tìm min của:

$$S=\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

HD:

Ta có:

$$S=\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}+\frac{1}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}+\frac{1}{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+3\right)$$

$$S=\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{4}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{4}\right)+\frac{3}{4} \geq 1+1+1+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}, \text{ dấu “=” khi } x^2=4, y^2=4, z^2=4 \text{ Vì đặt}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=x$$

Bài 69: Cho $P = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$, CMR P luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Bài 70: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y \leq \dots$, Tìm min của: $P = \frac{1}{x^2} + y^2 + 1 + \frac{2}{5xy}$

Bài 71: Tìm min $A = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) + \frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2 y^2)^2$

Bài 72: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$, Tìm GTLN của: $B = xy + yz + zx$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= xy + z(x + y) = xy + [3 - (x + y)](x + y) \\ &= xy + 3(x + y) - (x + y)^2 = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3}{4}(y-1)^2 + 3 \leq 3 \end{aligned}$$

Bài 73: Cho $x, y, z > 0$ Tìm GTNN của: $A = \frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2zx} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy}$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &\geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \text{ dấu bằng khi} \\ 2yz &= y^2 + z^2, 2zx = x^2 + z^2, 2xy = x^2 + y^2 \text{ hay } x=y=z \end{aligned}$$

Bài 74: Cho x, y là các số thực khác 0 thỏa mãn: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$,

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{3x^2 y - 1}{4xy}$

Bài 75: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $x + y + z = 3$, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(x+y)(y+z)}{(z+x)} + \frac{(y+z)(z+x)}{(x+y)} + \frac{(z+x)(x+y)}{(y+z)}$$

Bài 76: Cho $x^2 + xy + 3y^2 = 5$, Tìm Min hoặc max của biểu thức: $P = x^2 - 2xy + 2y^2$

HD :

$$\text{Ta có: } \frac{P}{5} = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + 3y^2}$$

Bài 77: Cho $x \geq 2, x + y \geq 3, y > 0$, Tìm Min của $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\leq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \Rightarrow P \geq x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \\ P &\geq \left(x^2 + \frac{5}{4x}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{4y}\right), \text{ Điểm rơi cosi: } \begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 78: Cho $x > 0$, tìm GTNN của: $S = \frac{x^2 + 3}{x+1}$

Bài 79: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, Tìm GTNN của: $P = \frac{a+b}{2a-b} = \frac{c+b}{2c-b}$

Dạng 5: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

Các BĐT phụ là:

$$+ (a-b)^2 \geq 0 \text{ dấu "=" khi } a=b$$

$$+ a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$+ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Bài 1: Tìm min của biểu thức: $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} (0 < x < 1)$

HD:

$$\text{Tách } A = \frac{2-2x+2x}{1-x} + \frac{1-x+x}{x} = 3 + \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu "=" khi } \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

Bài 2: Tìm min của biểu thức: $B = \frac{x^2+1}{x+2}$ với $x \geq 0$

HD:

$$\text{Tách } A = \frac{x^2-4+5}{x+2} = x-2 + \frac{5}{x+2} = x+2 + \frac{5}{x+2} - 4 \geq 2\sqrt{5} - 4$$

$$\text{Dấu "=" khi } x+2 = \frac{5}{x+2} \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{5}$$

Bài 3: Tìm min của: $A = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ với $x > 0$

HD:

$$\text{Tách } A = \frac{x^2+x+1-2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2}{x+1+\frac{1}{x}}, \text{ mà } x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{x+\frac{1}{x}+1} \leq \frac{2}{3}$$

Bài 4: Tìm min của: $A = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

Bài 5: Tìm min của: $B = \frac{x^2+4x+4}{x}$ với $x > 0$

HD:

$$\text{Ta có: } B = x + 4 + \frac{4}{x} \geq 4 + 4 = 8, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 2$$

Bài 6: Tìm min của: $C = \frac{x^2}{x-1}$ với $x > 1$

HD:

$$\text{Ta có: } C = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2+2, \text{ Dấu bằng khi } x-1 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 2$$

Bài 7: Tìm min của: $B = (x+1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ với $x > 0$

HD:

$$\text{Tách } B = x+1 + 1 + \frac{1}{x} \geq 2+2, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$$

Bài 8: Tìm min của: $A = (x+1)^2 + \left(\frac{x^2}{x+1} + 2\right)^2$ với $x \neq -1$

HD:

$$\text{Tách } A = (x+1)^2 + \left[(x+1) + \frac{1}{(x+1)}\right]^2 = 2(x+1)^2 + 2 + \frac{1}{(x+1)^2} \geq 2\sqrt{2} + 2$$

$$\text{Dấu bằng khi } 2(x+1)^2 = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow (x+1)^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

Bài 9: Tìm min của: $A = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 10: Tìm min của: $B = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$

HD:

$$\text{Ta có: } B = \frac{x}{1-x} + \frac{5-5x+5x}{x} = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x} + 5 \geq 2\sqrt{5} + 5, \text{ dấu bằng khi } \frac{x}{1-x} = \frac{5(1-x)}{x}$$

Bài 11: Tìm min của: $C = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ ($x > 1$)

HD:

$$C = \frac{x-1+1}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2}, \text{ Dấu bằng khi } \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1}$$

Bài 12: Cho $x, y > 0$, Tìm min của: $P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 2$

HD:

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t \Rightarrow P = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \text{ mà } t \geq 2 \Rightarrow P \geq \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

Bài 13: Cho $a, b > 0$. Tìm min của: $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$ với $x > 0$

HD:

$$\text{Ta có: } B = \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x} = a + b + \left(x + \frac{ab}{x}\right) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Bài 14: Cho trước hai số dương a, b , các số dương x, y thay đổi sao cho $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$, Tìm x, y để

$S = x + y$ đạt min, Tìm min S theo a, b

HD:

$$\text{Ta có } S = (x+y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = a + b + \frac{bx}{y} + \frac{ay}{x} \geq a + b + 2\sqrt{ab}, \text{ min } S = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\text{Dấu bằng khi } \frac{ay}{x} = \frac{bx}{y} \text{ mà } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \Rightarrow x = a + \sqrt{ab}, y = b + \sqrt{ab}$$

Bài 15: Tìm min của: $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$

HD:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2-2x+2x}{1-x} + \frac{1-x+x}{x} = 3 + \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 3 + 2\sqrt{2}, \text{ dấu bằng khi } \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x}$$

Bài 16: Cho $a, b, c > 0$, CMR: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

HD:

Đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b \Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$, thay vào VT

Ta được: $\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) \geq 3 \Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6$

Bài 17: Cho $0 < x < 1$, Tìm min của: $B = \frac{x}{1-x} + \frac{4}{x}$

HD:

Ta có: $B = \frac{x}{1-x} + \frac{4-4x+4x}{x} = 4 + \frac{x}{1-x} + \frac{4(1-x)}{x} \geq 4+4$, dấu bằng khi $\frac{x}{1-x} = \frac{4(1-x)}{x}$

Bài 18: Cho x, y là số tự nhiên khác 0, sao cho $x+y=11$, Tìm min $A = xy$

HD:

Từ gt ta có: $y = 11-x$, thay vào $A = x(11-x) = -x^2 + 11x$

Bài 19: Cho $x, y \in \mathbb{Z}_+$, Thỏa mãn $x+y=2016$, Tìm min và max của: $B = xy$

HD:

Ta có: $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \Rightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$,

để xy lớn nhất thì $(x-y)^2$ nhỏ nhất, do $x, y \in \mathbb{Z}$ mà $x+y=2016$ và $x \neq y \Rightarrow (x-y)^2 \geq 1 \Rightarrow$

$xy \leq \frac{2016^2}{4} - \frac{1}{4} = 1005006 \Rightarrow \text{Max } B$

Để xy nhỏ nhất thì $(x+y)^2$ lớn nhất, mà $x, y \in \mathbb{Z}$, Giả sử: $x < y \Rightarrow 1 \leq x, y \leq 2016$

$\Rightarrow 1^2 \leq (x-y)^2 \leq 2014^2 \Rightarrow xy \geq \frac{2016^2 - 2014^2}{4} = 2015 \Rightarrow \text{Min } B$

Bài 20: Tìm min của: $A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$ biết: $x, y > 0$ và $x + y = 1$

HD:

$A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 4 = (x^2 + y^2) + \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}\right) + 4 = (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) + 4$

Ta có: $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$, và $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{x^2 y^2} \geq 16$

Khi đó: $A \geq \frac{1}{2} \cdot (1+16) + 4 = \frac{25}{2}$

Bài 21: Cho ba số dương a, b, c có tổng là 1, Tìm Min của: $B = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$

HD:

Ta có: $B = (a^2 + b^2 + c^2) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 6$, Từ $1 = a+b+c$

$1 = (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ và $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$

mà $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 81 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 27$

Vậy $B \geq \frac{1}{3} + 27 + 6$

Bài 21: Cho a,b,c là các số dương, Tìm min của: $A = \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$

Bài 22: Cho x,y,z ≥ 0 , Thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$, CMR: $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

Bài 23: Cho a,b,c > 0 , thỏa mãn: $a+b+c+ab+bc+ca=6$, Tìm min của: $A = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}$

Bài 24: Cho x,y > 0 , thỏa mãn: $x+y=1$, Tìm min của: $A = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{y} \right)^2$

Bài 25: Cho x,y >0 , $4xy=1$ và $x+y=1$, Tìm min của: $A = \frac{2(x^2+y^2)+12xy}{x+y}$

HD:

$$\text{Ta có : } A = \frac{2[(x+y)^2 - 2xy] + 12xy}{x+y} = \frac{2(x+y)^2 + 8xy}{x+y} = 2 \left[x+y + \frac{1}{x+y} \right], \text{ Co si } x+y + \frac{1}{x+y} \geq 2$$

$$\Rightarrow A \geq 4 \text{ dấu bằng khi } \begin{cases} x, y > 0 \\ x+y=1 \Rightarrow x=y=\frac{1}{2} \\ 4xy=1 \end{cases}$$

Bài 26: Cho x,y >0 và $x^3+y^3+3(x^2+y^2)+4(x+y)+4=0$, Tìm min của: $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

HD:

$$Gt = (x+1)^3 + (y+1)^3 + (x+y+2) = 0 \Rightarrow (x+y+2) \left[(x+1)^2 - (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 1 \right] = 0$$

Ta cm ngoặc vuông > 0 với mọi x,y $\Rightarrow x+y+2=0$

$$\text{Mặt khác : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{-2}{xy}, \text{ mà } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow 4 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 1 \Rightarrow \frac{-2}{xy} \leq -2$$

Bài 27: Tìm min của: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 5$

Bài 28: Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện $a + \frac{1}{b} \leq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$