

CHUYÊN ĐỀ:**TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA DẪY TỶ SỐ BẰNG NHAU****A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Định nghĩa, tính chất của tỉ lệ thức****a) Định nghĩa:**

Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ còn được viết: $a : b = c : d$

Trong đó: - a, b, c, d là các số hạng của tỷ lệ thức;

- a và d là các số hạng ngoài hay *ngoại tỉ*;

- b và c là các số hạng trong hay *trung tỉ*;

b) Tính chất

- Tính chất 1 (tính chất cơ bản)

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$

- Tính chất 2 (tính chất hoán vị)

Nếu $ad = bc$ và a, b, c, d khác 0 thì ta có các tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

2) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

+ Từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} (b \neq \pm d)$

+ Mở rộng: từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

ta suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} = \dots$

(giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

3. Chú ý:

+ Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5 ta cũng viết $a:b:c = 2:3:5$.

+ Vì tỉ lệ thức là một đẳng thức nên nó có tính chất của đẳng thức, từ tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy

$$\text{ra: } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}; k \cdot \frac{a}{b} = k \cdot \frac{c}{d} (k \neq 0); \frac{k_1 a}{k_1 b} = \frac{k_2 c}{k_2 d} (k_1, k_2 \neq 0)$$

$$\text{từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ suy ra } \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{e}{f}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}; \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

B/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

PHẦN 1: TÌM SỐ HẠNG CHƯA BIẾT

1. Tìm một số hạng chưa biết

a) *Phương pháp*: áp dụng tính chất cơ bản tỉ lệ thức

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow a = \frac{b \cdot c}{d}; b = \frac{a \cdot d}{c}; c = \frac{a \cdot d}{b}$$

Muốn tìm ngoại tỉ chưa biết ta lấy tích của 2 trung tỉ chia cho ngoại tỉ đã biết, muốn tìm trung tỉ chưa biết ta lấy tích của hai ngoại tỉ chia cho trung tỉ đã biết.

b) *Ví dụ minh họa*:

★ **Thí dụ 1.** Tìm x biết:

a) $-0,52 : x = -9,36 : 16,38$

b) $\frac{x-3}{5-x} = \frac{5}{7}$

c) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x+4}{x+7}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$-0,52 : x = -9,36 : 16,38 \Rightarrow x \cdot (9,36) = 0,52 \cdot 16,38 \Rightarrow x = \frac{-0,52 \cdot 16,38}{-9,36} = 0,91$$

b)

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{5-x} &= \frac{5}{7} \\ \Rightarrow (x-3) \cdot 7 &= (5-x) \cdot 5 \\ \Rightarrow 7x - 21 &= 25 - 5x \\ \Rightarrow 12x &= 46 \\ \Rightarrow x &= 3\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Cách 2: Từ $\frac{x-3}{5-x} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x-3}{5} = \frac{5-x}{7}$

Áp dụng tính chất cơ bản của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{5-x}{7} = \frac{x-3+5-x}{5+7} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Do đó: } \frac{x-3}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6(x-3) = 5 \Rightarrow x-3 = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 3\frac{5}{6}$$

c)

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-1} &= \frac{x+4}{x+7} \\ \Rightarrow (x-2)(x+7) &= (x-1)(x+4) \\ \Rightarrow x^2 + 7x - 2x - 14 &= x^2 - x + 4x - 4 \\ \Rightarrow 5x - 14 &= 3x - 4 \\ \Rightarrow 5x - 3x &= -4 + 14 \\ \Rightarrow 2x &= 10 \\ \Rightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Từ } \frac{x-2}{x-1} = \frac{x+4}{x+7} \Rightarrow \frac{2-x}{1-x} = \frac{x+4}{x+7}$$

Áp dụng tính chất cơ bản của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2-x}{1-x} = \frac{x+4}{x+7} = \frac{(2-x) + (x+4)}{(1-x) + (x+7)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{1-x} &= \frac{3}{4} \Rightarrow 4(2-x) = 3(1-x) \Rightarrow 8-4x = 3-3x \\ \Rightarrow 4x-3x &= 8-3 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

2. Tìm nhiều số hạng chưa biết

Dạng 1: Tìm các số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$$\text{và } x + y + z = d \quad (2)$$

(trong đó $a, b, c, a+b+c \neq 0$ và a, b, c, d là các số cho trước)

Cách giải:

- Cách 1: Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ka, y = kb, z = kc$

Thay $x = ka, y = kb, z = kc$ vào (2) ta có: $k.a + k.b + k.c = d \Rightarrow k(a+b+c) = d \Rightarrow k = \frac{d}{a+b+c}$

$$\text{Từ đó tìm được } x = \frac{a.d}{a+b+c}; y = \frac{b.d}{a+b+c}; z = \frac{c.d}{a+b+c}$$

- Cách 2: áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{d}{a+b+c} \Rightarrow x = \frac{a.d}{a+b+c}; y = \frac{b.d}{a+b+c}; z = \frac{c.d}{a+b+c}$$

c) Ví dụ minh họa:

★Thí dụ 1. Tìm x, y biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $2x - y = 3$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 10$.

Hướng dẫn giải

a) Từ tỉ số $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{-y}{-5} = \frac{2x-y}{4-5} = \frac{3}{-1} = -3$

Do đó: $x = (-3).2 = -6$ và $y = 5.(-3) = -15$.

b) Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x = 2k, y = 5k$. Khi đó: $xy = (2k).(5k) = 10k^2 = 10 \Rightarrow x = \pm 1$

Với $k = 1$ ta có: $x = 2, y = 5$.

Với $k = -1$ ta có $x = -2, y = -5$.

★Thí dụ 2. Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x + y + z = 27$

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z}{4}$ và $x + y - z = 9$

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1.**

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \Rightarrow x = 2k, y = 3k, z = 4k$

Từ $x + y + z = 27$ ta suy ra $2k + 3k + 4k = 27 \Rightarrow 9k = 27 \Rightarrow k = 3$

Khi đó $x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12$

Vậy $x = 6; y = 9; z = 12$.

- **Cách 2.** Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12.$$

b) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3+4} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow x = 2.1 = 2; y = 3.1 = 3; z = (-4).1 = (-4)$$

Dạng 2: Cho x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$$\text{và } x + y + z = d \quad (2)$$

Bằng cách biến đổi các điều kiện (1) và (2) ta được các bài toán phức tạp hơn.

Các cách diễn đổi thường gặp:

+ Giữ nguyên điều kiện (1) thay đổi đk (2) như sau:

$$* k_1x + k_2y + k_3z = e$$

$$* k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 = f$$

$$* x.y.z = g$$

+ Giữ nguyên điều kiện (2) thay đổi đk (1) như sau:

$$- \frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2}; \frac{y}{a_3} = \frac{z}{a_4}$$

$$- a_2x = a_1y; a_4y = a_3z$$

$$- b_1x = b_2y = b_3z$$

$$- \frac{b_1x - b_3z}{a} = \frac{b_2y - b_1x}{b} = \frac{b_3z - b_2y}{c}$$

$$- \frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y_2 - b_2}{a_2} = \frac{z_3 - b_3}{a_3}$$

+Thay đổi cả hai điều kiện.

★**Thí dụ 1.** Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $2x + 3y - 5z = -21$

b) $6x = 4y = 3z$ và $2x + 3y - 5z = 14$

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1:** Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ suy ra: $x = 2k, y = 3k, z = 4k$.

$$\text{Do đó: } 2x + 3y - 5z = 2.(2k) + 3.(3k) - 5.(4k) = -21$$

$$\Rightarrow 4k + 9k - 20k = -21 \Rightarrow -7k = -21 \Rightarrow k = 3$$

$$\text{Vì thế: } x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12$$

Cách 2: Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ suy ra $\frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{5z}{20}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{5z}{20} = \frac{2x+3y-5z}{4+9-20} = \frac{-21}{-7} = 3 \Rightarrow x=6; y=9; z=12$$

$$\text{b) Từ } 6x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{6x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{3z}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{5z}{20} = \frac{2x+3y-5z}{4+9-20} = \frac{14}{-7} = -2 \Rightarrow x=-4; y=-6; z=-8$$

★ **Thí dụ 2.** Tìm x, y, z biết rằng:

$$\text{a) } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \text{ và } a^2 - b^2 + 2c^2 = 108$$

$$\text{b) } x : y : z = 3 : 4 : 5 \text{ và } 2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{16}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{16} = \frac{a^2 - b^2 + 2c^2}{4 - 9 + 32} = \frac{108}{27} = 4$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$\frac{b^2}{9} = 4 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$$

$$\frac{c^2}{16} = 4 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = \pm 8$$

Vậy $a = 4, b = 6, c = 8$ hoặc $a = -4, b = -6, c = -8$.

$$\text{b) Ta có: } x : y : z = 3 : 4 : 5 \text{ nên } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{18 + 32 - 75} = \frac{-100}{-25} = 4$$

Do đó:

$$\frac{x^2}{9} = 4 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

$$\frac{y^2}{16} = 4 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow y = \pm 8$$

$$\frac{z^2}{25} = 4 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = \pm 10$$

Vậy $x = 6, x = 8, z = 10$ hoặc $x = -6, y = -8, z = -10$.

★ **Thí dụ 3.** Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $x.y.z = 648$ b) $\frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21}$ và $x.y.z = 22400$

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1:** Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ suy ra: suy ra: $x = 2k, y = 3k, z = 4k$.

Do đó: $xyz = (2k).(3k).(4k) = 648$

$$\Rightarrow 24k^3 = 648 \Rightarrow k^3 = \frac{648}{24} = 27 \Rightarrow k = 3$$

Vì thế: $x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12$

Cách 2: Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{4} = \frac{xyz}{24} = \frac{648}{24} = 27$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{8} = 27 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$$

Từ đó tìm được $y = 9; z = 12$.

b, Từ giả thiết suy ra: $\frac{x-30}{40} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-21}{28} \Rightarrow \frac{x}{40} - \frac{3}{4} = \frac{y}{20} - \frac{3}{4} = \frac{z}{28} - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$

$$\text{Đặt: } \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 40k \\ y = 20k \\ z = 28k \end{cases}$$

$$\text{Mà: } x.y.z = 22400 \Rightarrow (40k).(20k).(28k) = 22400 \Rightarrow 22400k = 22400 \Rightarrow k = 1$$

Do đó:
$$\begin{cases} x = 40k = 40 \\ y = 20k = 20 \Rightarrow x = 40, y = 20, z = 28 \\ z = 28k = 28 \end{cases}$$

★Thí dụ 4. Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\frac{x}{6} = \frac{y}{9}; x = \frac{z}{2}$ và $x + y + z = 27$

b) $3x = 2y; 4x = 2z$ và $x + y + z = 27$

Hướng dẫn giải

a) Do $\frac{x}{6} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; x = \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$. Suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12.$$

b) Từ $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; 4x = 2z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$. Suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow x = 2.3 = 6; y = 3.3 = 9; z = 4.3 = 12.$$

★Thí dụ 5. Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169}$ và $3x+2y+z=169$

b) $\frac{6x-3z}{5} = \frac{4y-6x}{7} = \frac{3z-4y}{9}$ và $2x+3y-5z=14$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169} = \frac{(3x+2y+z) + (25-169+144)}{338} = \frac{169}{338} = \frac{1}{2}$$

Do đó:

$$\frac{3x+25}{144} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x+25 = 72 \Rightarrow 3x = 47 \Rightarrow x = \frac{47}{3}.$$

$$\frac{2y-169}{25} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y-169 = \frac{25}{2} \Rightarrow y = \frac{363}{4}$$

$$\frac{z+144}{169} = \frac{1}{2} \Rightarrow z+144 = \frac{169}{2} \Rightarrow z = -\frac{119}{2}$$

b) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{6x-3z}{5} = \frac{4y-3z}{7} = \frac{3z-6x}{9} = \frac{6x-3z+4y-3z+3z-6x}{5+7-9} = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 3z; 4y = 3z; 3z = 6x$$

$$\text{Từ } 6x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{6x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{3z}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{5z}{20} = \frac{2x+3y-5z}{4+9-20} = \frac{14}{-7} = -2 \Rightarrow x = -4; y = -6; z = -8$$

Nhận xét: Các dạng toán vận dụng tỷ lệ thức và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau luôn rất phong phú và đa dạng, ở trên mình chỉ trình bày một số dạng thông thường được giao, ở nhiều bài toán chúng ta cần vận dụng kiến thức một cách linh hoạt để giải tốt các bài toán. Sau đây sẽ là một số bài toán hay và khó:

PHẦN 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài toán: Cho tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Cần chứng minh tỷ lệ thức $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, ta thường làm các phương pháp sau:

Phương pháp 1. Chứng tỏ rằng : $ad = bc$.

Phương pháp 2: Đặt k là giá trị chung của các tỷ số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$. Tính các tỷ số $\frac{x}{y}, \frac{m}{n}$ theo k .

Phương pháp 3: Dùng biến đổi đại số và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau để từ tỷ lệ thức đã cho biến đổi dần thành tỷ lệ thức phải chứng minh.

Phương pháp 1. Chứng tỏ rằng : $ad = bc$.

★**Thí dụ 1.** Cho a, b, c, d khác 0 từ tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hãy suy ra tỷ lệ thức: $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

Hướng dẫn giải

Xét tích: $(a-b)c = ac - bc$ (1); $a(c-d) = ac - ad$ (2)

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $(a-b)c = a(c-d)$ suy ra $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 = bc$:

a) Chứng minh: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$ ($a \neq b, a \neq c$)

b) Chứng minh: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + a^2} = \frac{c}{b}$ ($b \neq 0$)

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$(a+b)(c-a) = ac + bc - (a^2 + ab); \quad (c+a)(a-b) = ac + a^2 - (ab + bc)$$

Do đó:

$$(a+b)(c-a) - (c+a)(a-b) = ac + bc - (a^2 + ab) - ac - a^2 + (ab + bc) = 2(bc - a^2)$$

Mặt khác theo giả thiết: $a^2 = bc$ suy ra:

$$(a+b)(c-a) = (c+a)(a-b) \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} \text{ (dpcm)}$$

b) Ta có: $b(a^2 + c^2) - c(b^2 + a^2) = b(a^2 - bc) + c(bc - a^2) = (a^2 - bc)(b - c) = 0$

Ta có: $b(a^2 + c^2) = c(b^2 + a^2) \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + a^2} = \frac{c}{b}$ ($b \neq 0$)

Phương pháp 2. Đặt k là giá trị chung của các tỷ số $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$. Tính các tỷ số $\frac{x}{y}, \frac{m}{n}$ theo k .

★**Thí dụ 1.** Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($c \neq 0$).CMR:

$$a, \left(\frac{a-b}{c-d} \right)^2 = \frac{ab}{cd} \quad (d, c \neq 0, c \neq d)$$

$$b, \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^3 = \frac{a^3 - b^3}{c^3 - d^3}$$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$

Ta có: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \left(\frac{bk-b}{dk-d}\right)^2 = \frac{b^2(k-1)^2}{d^2(k-1)^2} = \left(\frac{b}{d}\right)^2 \quad (1)$

$\frac{ab}{cd} = \frac{(bk).b}{(dk).d} = \frac{k.b^2}{k.d^2} = \left(\frac{b}{d}\right)^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd} \quad (d, c \neq 0, c \neq d)$

b) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$

Ta có: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \left(\frac{bk+b}{dk+d}\right)^3 = \frac{b^3(k+1)^3}{d^3(k+1)^3} = \left(\frac{b}{d}\right)^3 \quad (1)$

$\frac{a^3-b^3}{c^3-d^3} = \frac{(bk)^3-b^3}{(dk)^3-d^3} = \frac{b^3(k^3-1)}{d^3(k^3-1)} = \frac{b^3}{d^3} = \left(\frac{b}{d}\right)^3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$

★**Thí dụ 2.** Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Chứng minh rằng: $\frac{2a+5b}{3a-4b} = \frac{2c+5d}{3c-4d}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk$

Ta có: $\frac{2a+5b}{3a-4b} = \frac{2bk+5b}{3bk-4b} = \frac{b(2k+5)}{b(3k-4)} = \frac{2k+5}{3k-4} \quad (1)$

$\frac{2c+5d}{3c-4d} = \frac{2dk+5d}{3dk-4d} = \frac{d(2k+5)}{d(3k-4)} = \frac{2k+5}{3k-4} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{2a+5b}{3a-4b} = \frac{2c+5d}{3c-4d}$

Phương pháp 3. Dùng biến đổi đại số và tính chất của dãy tỷ số bằng nhau để từ tỷ lệ thức đã cho biến đổi dần thành tỷ lệ thức phải chứng minh.

★**Thí dụ 1.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. với $a, b, c, d \neq 0$. Chứng minh: $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$

Phân tích ngược tìm hướng giải:

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{ac}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (giả thiết bài toán)}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \quad (1)$$

$$\text{Mà theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau: } \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} \text{ (đpcm)}$$

★**Thí dụ 2.** Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. với $a, b, c, d \neq 0$ và $c \neq d$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{ab}{cd}$$

Phân tích ngược tìm hướng giải:

$$\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{ab}{cd} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 \Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

Hay $\frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{ab}{cd}$ (đpcm)

★**Thí dụ 3.** Biết $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{bz-cy}{a} &= \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-baz}{b^2} = \frac{cay-cbx}{c^2} \\ &= \frac{abz-acy+bcx-bay+cay-cbx}{a^2+b^2+c^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{abz-acy}{a^2} = 0 \Rightarrow abz = acy \Rightarrow bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (1)$$

$$\frac{bcx-baz}{b^2} = 0 \Rightarrow bcx = baz \Rightarrow cx = az \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{x}{a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

★**Thí dụ 4.** Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y+z} = \frac{c}{4x-4y+z} \quad (\text{với } abc \neq 0 \text{ và các mẫu đều khác } 0)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{2y}{4a+2b-2c} = \frac{x+2y+z}{a+2b+c+4a-4b+c+4a+2b-2c} = \frac{x+2y+z}{9a} \quad (1)$$

$$\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{2x}{2a+4b+c} = \frac{2x+y-b}{2a+4b-c+2a+b-c-(4a-4b+c)} = \frac{2x+y-z}{9b} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a+2b+c} &= \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{4x}{4a+8b+4c} = \frac{4y}{8a+4b-4c} \\ &= \frac{4x+4y+z}{4a+8b+4c-(8a+4b-4c)+4a-4b+c} = \frac{4x-4y+z}{9c} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c}$

Suy ra $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y+z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

★Thí dụ 5. Cho 4 số khác 0 là a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn $a_2^2 = a_1 a_3; a_3^3 = a_2 a_4$

Chúng ta: $\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$

Hướng dẫn giải

Từ

$$a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} \quad (1)$$

$$a_3^3 = a_2 a_4 \Rightarrow \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4} \quad (3)$

áp dụng t/c của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$

PHẦN 3: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

★Thí dụ 1. Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$

Tính $A = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{(a+b-c) + (a+c-b) + (b+c-a)}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-c=c \\ a+c-b=b \\ b+c-a=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ a+c=2b \\ b+c=2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2c \cdot 2a \cdot 2b}{abc} = 8$$

★Thí dụ 2. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

★Thí dụ 3. Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Hướng dẫn giải

+Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Nếu : $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, a+c=-b$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{a+c}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$$

★Thí dụ 4. Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \end{cases}$. Khi đó:

$$C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2} = \frac{5(3k)^2 + 3(5k)^2}{10(3k)^2 - 3(5k)^2} = \frac{45k^2 + 75k^2}{90k^2 - 75k^2} = \frac{120k^2}{15k^2} = 8$$

PHẦN 4: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

★Thí dụ 1. a) Nếu $b > 0, d > 0$ thì từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra được: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

b) Nếu $b > 0, d > 0$ thì từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra được: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ b > 0; d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ad < bc \quad (1)$

Thêm vào hai vế của (1) với ab ta có: $ad + ab < bc + ab$

$$\Rightarrow a(b+d) < b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad (2)$$

Thêm vào hai vế của (1) với dc ta có: $ad + dc < bc + dc$

$$\Rightarrow d(a+c) < c(b+d) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

b) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ b > 0; d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a.b}{b.b} < \frac{c.d}{d.d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$$

Theo câu a) ta có: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ (dpcm)

★Thí dụ 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Hướng dẫn giải

+) Do $a, b, c, d > 0$ nên: $a(a+b+c)+ad > a(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$;

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$; $\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$; $\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1 \quad (1)$$

+) Mặt khác cũng do $a, b, c, d > 0$ nên :

$$\begin{aligned} ad &< ad+d(b+c) \\ \Rightarrow ad+a(a+b+c) &< [ad+d(b+c)]+a(a+b+c) \\ \Rightarrow a(a+b+c+d) &< (a+b+c)(a+d) \\ \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} &< \frac{a+d}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c+d}; \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{c+b+c}; \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ra được:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{a+d}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{c+b}{a+b+c+d} + \frac{d+c}{a+b+c+d} = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

PHẦN 5: BÀI TOÁN VỀ TỶ LỆ THỨC VÀ CHIA TỶ LỆ

Phương pháp giải

Bước 1: Dùng các chữ cái để biểu diễn các đại lượng chưa biết

Bước 2: Thành lập dãy tỉ số bằng nhau và các điều kiện

Bước 3: Tìm các số hạng chưa biết

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** Cho tam giác ABC có các góc A, B, C tỉ lệ với 7: 5: 3. Các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với các số nào.

Phân tích đề bài:

Nếu gọi ba góc của tam giác ABC lần lượt là: A, B, C .

Vì ba góc A, B, C tỉ lệ với 7: 5: 3 nên ta có $\frac{A}{7} = \frac{B}{5} = \frac{C}{3}$

Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° nên ta có: $A + B + C = 180^\circ$

Từ đó ta tìm được số đo các góc của tam giác,

Mà tổng của góc ngoài và góc trong tại một đỉnh của tam giác bù nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi ba góc trong và góc ngoài của tam giác ABC lần lượt là: A, B, C và

$$A_1; B_1; C_1 \quad (0^\circ < A, B, C < 180^\circ)$$

Theo bài ra ta có: $\frac{A}{7} = \frac{B}{5} = \frac{C}{3}$ và $A + B + C = 180^\circ$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{5} = \frac{C}{3} = \frac{A+B+C}{7+5+3} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ$$

$$\Rightarrow A = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ \Rightarrow A_1 = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$$

$$B = 5 \cdot 12^\circ = 60^\circ \Rightarrow B_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$C = 3 \cdot 12^\circ = 36^\circ \Rightarrow C_1 = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

$$\Rightarrow A_1 : B_1 : C_1 = 96^\circ : 120^\circ : 144^\circ = 4 : 5 : 6$$

Vậy các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với: $4:5:6$.

★**Thí dụ 2.** Ba đội công nhân I, II, III phải vận chuyển tổng cộng 1530 kg hàng từ kho theo thứ tự đến ba địa điểm cách kho 1500m, 2000m, 3000m. Hãy phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỉ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển.

Phân tích đề bài:

Vì phân chia số hàng cho mỗi đội sao cho khối lượng hàng tỉ lệ nghịch với khoảng cách cần chuyển nên ta có: $1500a = 2000b = 3000c$

Tổng số hàng cần chuyển đến ba kho là 1530 nên ta có: $a + b + c = 1530$.

Hướng dẫn giải

Gọi số lượng hàng chuyển tới ba kho lần lượt là a, b, c ($a, b, c > 0$).

Theo bài ra ta có: $1500a = 2000b = 3000c$ và $a + b + c = 1530$

$$\text{Từ: } 1500a = 2000b = 3000c \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{4+3+2} = \frac{1530}{9} = 170$$

$$\Rightarrow a = 4.170 = 680;$$

$$b = 3.170 = 510;$$

$$c = 2.170 = 340$$

Vậy số hàng cần chuyển tới ba kho A, B, C lần lượt là: 680 tạ, 510 tạ, 340 tạ.

★**Thí dụ 3.** Chu vi của hình chữ nhật bằng 28 dm. Tính độ dài mỗi cạnh, biết rằng chúng tỉ lệ với 3; 4.

Phân tích đề bài:

Trong hình chữ nhật có hai kích thước là chiều dài và chiều rộng (còn được gọi là hai cạnh của hình chữ nhật) chiều rộng thì ngắn hơn chiều dài. Hai cạnh của chúng tỉ lệ với 3; 4 vậy cạnh ngắn tỉ lệ với 3 còn cạnh dài tỉ lệ với 4.

Nếu gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($0 < a < b$). Vì hai cạnh hình chữ nhật tỉ

lệ với 3 và 4 nên ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$.

Chu vi hình chữ nhật là $2(a + b)$ nên ta có: $2(a + b) = 28 \Rightarrow a + b = 14$

Như vậy ta đã đưa bài toán về dạng bài áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là a và b ($0 < a < b$)

Theo bài ra ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ và $2(a+b) = 28$

Từ $2(a+b) = 28 \Rightarrow a+b = 14$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{3+4} = \frac{14}{7} = 2$

$\Rightarrow a = 3.2 = 6$; $\Rightarrow b = 4.2 = 8$

Vậy độ dài hai cạnh hình chữ nhật là 6cm và 8cm.

★**Thí dụ 4.** Có 16 tờ giấy bạc loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng, trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi mỗi loại có mấy tờ.

Phân tích đề bài:

Gọi số tờ tiền loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng lần lượt là a, b, c

Vì giá trị mỗi loại tiền đều bằng nhau nên ta có: $2000a = 5000b = 10000c$

Có 16 tờ giấy bạc các loại nên: $a + b + c = 16$

Hướng dẫn giải

Gọi số tờ tiền của loại 2000 đồng, 5000 đồng và 10000 đồng lần lượt là a, b, c

Theo bài ra ta có: $2000a = 5000b = 10000c$ và $a + b + c = 16$

Từ: $2000a = 5000b = 10000c \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} = \frac{a+b+c}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

$\Rightarrow a = 5.2 = 10$; $b = 2.2 = 4$ $c = 1.2 = 2$

Vậy số tiền loại 2000 đồng, 5000 đồng, 10000 đồng lần lượt là 10 tờ, 4 tờ và 2 tờ.

★**Thí dụ 5.** Cho tam giác ABC có số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3. tính số đo các góc của tam giác ABC.

Phân tích đề bài:

Ở bài này cho các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3.

Vậy ta lấy luôn A, B, C là số đo ba góc cần tìm.

Vì số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với 1; 2; 3 nên ta có: $\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3}$

Áp dụng định lí tổng ba góc của một tam ta có: $A + B + C = 180^\circ$

Hướng dẫn giải

Gọi ba góc trong và góc ngoài của tam giác ABC lần lượt là: A, B, C

$$(0^\circ < A, B, C < 180^\circ)$$

Theo bài ra ta có: $\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3}$ và $A + B + C = 180^\circ$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{A+B+C}{1+2+3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow A = 1 \cdot 30^\circ = 30^\circ; B = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ; C = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

Vậy số đo ba góc A, B, C của tam giác ABC lần lượt là: $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$

PHẦN 6: MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG GIẢI TOÁN VỀ TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỶ SỐ BẰNG NHAU.

Sai lầm thường gặp 1:

Áp dụng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{xy}{ab}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{xyz}{abc}$

★Thí dụ 1. Tìm 2 số x, y biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $x \cdot y = 10$

Sai lầm thường gặp:

Ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{x \cdot y}{2 \cdot 5} = \frac{10}{10} = 1 \text{ suy ra } x = 2, y = 5$$

Lời giải đúng:

Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x.x}{2} = \frac{x.y}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{10}{5} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ từ đó suy ra $y = \pm 5$
 vậy $x = 2, y = 5$ hoặc $x = -2, y = -5$

★Thí dụ 2. Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x.y.z = 648$

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x.y.z}{2.3.4} = \frac{648}{24} = 27$

Suy ra $a = 54, b = 81, c = 108$

Lời giải đúng:

Ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{z}{4}\right)^3 = \frac{xyz}{2.3.4} = \frac{648}{24} = 27 \Rightarrow x = 6, y = 9, z = 12$$

Sai lầm thường gặp 2: Sai lầm khi bỏ qua điều kiện khác 0

★Thí dụ 1. Cho 3 tỉ số bằng nhau là $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$.

Tìm giá trị của mỗi tỉ số đó

Sai lầm thường gặp:

Ta có $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Lời giải đúng:

Ta có $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$

+ Nếu $a + b + c \neq 0$. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì $b + c = -a; c + a = -b; a + b = -c$

nên mỗi tỉ số $\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}$ đều bằng -1

★**Thí dụ 2.** Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Sai lầm thường gặp:

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Lời giải đúng:

+Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Nếu : $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, a+c=-b$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{a+c}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$$

★**Thí dụ 3.** Tìm x, y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$ (1)

Từ hai tỷ số đầu ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{2x+3y-1}{6x} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (3)

$\rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào 2 tỷ số đầu ta được $y = 3$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $x = 2$ và $y = 3$ là các giá trị cần tìm

Lời giải đúng:

Ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$ (1)

Từ hai tỷ số đầu ta có: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{2x+3y-1}{6x} = \frac{2x+3y-1}{12}$ (3)

TH 1 : $2x + 3y - 1 \neq 0$. Khi đó ta mới suy ra $6x = 12$ nên $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào 2 tỷ số đầu ta được $y = 3$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $x = 2$ và $y = 3$ là các giá trị cần tìm

TH2: $2x + 3y - 1 = 0$. Suy ra $2x = 1 - 3y$, thay vào hai tỉ số đầu, ta có

$$\frac{1-3y+1}{5} = \frac{1-3y+1+3y-2}{5+7} = 0$$

Suy ra $2 - 3y = 3y - 2 = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3}$. Từ đó tìm tiếp $x = -\frac{1}{2}$

Sai lầm thường gặp 3: Sai lầm khi xét lũy thừa bậc chẵn.

★Thí dụ 1. Tìm x biết $\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$

Sai lầm thường gặp:

$$\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1} \Rightarrow (x-1)^2 = (-15) \cdot (-60) \Rightarrow (x-1)^2 = 900 \text{ nên } x-1 = 30 \text{ do đó } x = 31.$$

Lời giải đúng:

$$\Rightarrow (x-1)^2 = (-15) \cdot (-60) \Rightarrow (x-1)^2 = 900 \text{ nên } x-1 = 30$$

hoặc $x - 1 = -31$, do đó $x = 31$ hoặc $x = 29$.

★**Thí dụ 2.** Tìm các số x, y, z biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ biết rằng $2x^2 + 3y^2 - 5z^2 = -405$

Sai lầm thường gặp:

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ suy ra $x = 2k, y = k, z = 4k$

Từ $2x^2 + 3y^2 - 5z^2 = -405$ suy ra $2(2k)^2 + 3(3k)^2 - 5(4k)^2 = -405$

$$8k^2 + 27k^2 - 80k^2 = -405$$

$$-45k^2 = -405$$

$$k^2 = 9$$

Học sinh thường mắc sai lầm suy ra $k = 3$, mà phải suy ra $k = \pm 3$

C/ BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Cho $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1}$. Và $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0; a_1 = -\sqrt{5}$

Tính $a_2; a_3; \dots; a_n = ?$

Câu 2. Cho $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ($a; b; c \neq 0; b \neq c$)

Chứng minh: $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{c-b}$

Câu 3. Cho 4 số dương $a; b; c; d$. Biết rằng $b = \frac{a+c}{2}; c = \frac{2bd}{b+d}$

Chứng minh rằng 4 số này lập thành 1 tỉ lệ thức.

Câu 4. Tìm các số $x; y; z$ biết rằng: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Câu 5. Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y, 5y = 6z$ và $xyz = 30$.

Câu 6. Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b-a}{a}$

Câu 7. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng ta có các tỉ lệ thức sau (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

$$a, \frac{4a-3b}{a} = \frac{4c-3d}{c}$$

$$b, \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2} = \frac{3a^2+2b^2}{3c^2+2d^2}$$

Câu 8. a) Tìm ba số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

b) Cho $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$ ($a, b, c, d > 0$)

$$\text{Tính } A = \frac{2011a-2010b}{c+d} + \frac{2011b-2010c}{a+d} + \frac{2011c-2010d}{a+b} + \frac{2011d-2010a}{b+c}$$

Câu 9. Cho dãy tỷ số bằng nhau:

$$\frac{2012a+b+c+d}{a} = \frac{a+2012b+c+d}{b} = \frac{a+b+2012c+d}{c} = \frac{a+b+c+2012d}{d}$$

$$\text{Tính } M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Câu 10. Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$ và $x+y+z = 50$

Câu 11. Ba bạn An, Bình và Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Câu 12. Tìm các số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$ và $a-b+c = -49$.

Câu 13. Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Câu 14.

a. Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x-2y+z = 32$.

b. Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Câu 15.

1) Biết $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

2) Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

Câu 16. Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh: $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Câu 17. Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng: Biểu thức sau có giá trị nguyên

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

Câu 18. Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Câu 19. Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24 cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Câu 20. Cho 4 số a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c đồng thời $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$. Chứng minh bốn số đó lập thành tỉ lệ thức.

Câu 21. Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính: $x - 2y + 3z$

Câu 22. Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{15}{x-9} = \frac{20}{y-12} = \frac{40}{z-24}$ và $x \cdot y = 1200$

Câu 23. Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $5z - 3x - 4y = 50$

b, $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và

$x + y - z = -10$

Câu 24. Tìm các số x, y, z biết:

a, $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{64} = \frac{z^3}{216}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

b, $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{27} = \frac{z^3}{64}$ và $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650$

Câu 25. Tìm x, y biết: $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$

Câu 26. Tìm x, y, z biết:

a, $2x = 3y = 5z$ và $|x + y - z| = 95$

b, $\frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z$ và $-x + z = -196$

Câu 27. Tìm x , biết: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

Câu 28. Tìm x biết $\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x-7y-7}{4x}$

Câu 29. Tìm x, y biết: $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$

Câu 30. Tìm ba số a, b, c biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a + b + c = -50$

Câu 31. Tìm các cặp số a, b thỏa mãn: $\frac{3b}{a^2 - 4} = \frac{1 - 125a - 3b}{6a + 13} = 1 - 125a$

Câu 32. Tìm x, y, z biết: $xy = z$; $yz = 9x$; $xz = 16y$

Câu 33. Tìm các số: $a_1; a_2; \dots; a_{100}$, biết: $\frac{a_1 - 1}{100} = \frac{a_2 - 2}{99} = \dots = \frac{a_{100} - 100}{1}$ và

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 10100$$

Câu 34. Tìm số tự nhiên M nhỏ nhất có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện:

$M = a + b = c + d = e + f$ biết: a, b, c, d, e, f thuộc N^* và $\frac{a}{b} = \frac{14}{22}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17}$

Câu 35. Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3:4:5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5:1:2

Câu 36. Cho dãy tỉ số:

$$\frac{2012a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2012b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2012c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2012d}{d}$$

Tính giá trị biểu thức: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Câu 37. Cho a, b, c khác nhau và khác 0, t/m: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị của biểu

thức: $A = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

Câu 39. Cho 3 số x, y, z, t thỏa mãn:

$$\frac{y+z+t-nx}{x} = \frac{z+t+x-ny}{y} = \frac{t+x+y-nz}{z} = \frac{x+y+z-nt}{t}$$

Và $x + y + z + t = 2012$. Tính giá trị $P = x + 2y - 3z + t$

Câu 40. Cho $x, y, z \neq 0$ & $x - y - z = 0$, Tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

Câu 41. Cho a, b, c khác 0, thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$, Tính $P = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3}$

Câu 42. Cho x, y, z là 3 số dương phân biệt, Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết: $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$

Câu 43. Cho $a-b=13$, Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{3a-b}{2a+13} - \frac{3b-a}{2b-13}$

Câu 44. Cho $x:y:z = 5:4:3$, Tính $P = \frac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$

Câu 45. Cho $2a-b = \frac{2}{3}(a+b)$, Tính $M = \frac{a^4+5^4}{b^4+4^4}$

Câu 46. Tính $A = \frac{abc}{a+b+c}$, biết a, b, c có quan hệ: $(a+b):(8-c):(b+c):(10+c) = 2:5:3:4$

Câu 47. Cho $x = by + cz$, $y = ax + cz$, $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$. Tính giá trị:

$$Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

Câu 48. Cho $a + b + c = 2015$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{5}$, Tính $Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Câu 50. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2010} = \frac{c}{2011}$

Tính giá trị của biểu thức: $M = 4(a-b)(b-c) - (c-a)^2$

Câu 52. Tính giá trị của: $B = (x+y)(y+z)(z+x)$, biết: $xyz = 2$ & $x + y + z = 0$

Câu 53. Tính biểu thức: $C = \frac{(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) \cdot (x^2 + y^2) \cdot (x^3 + y^3) \cdot (x^4 + y^4)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2}$ Với

$$x = -0, (3); y = \frac{1}{3}$$

Câu 54. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, và $a, b, c \neq 0$, thỏa mãn: $b^2 = ac$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{(a+2012b)^2}{(b+2012c)^2}$

Câu 55. Cho $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{2018}}{a_{2019}}$, CMR: $\frac{a}{a_{2019}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}} \right)^{2018}$

Câu 56. Cho $a, b, c \neq 0$, t/m $b^2 = ac$ khi đó $\left(\frac{a+2014b}{b+2014c} \right)^n = \frac{a}{c}$, Khi đó $n = ?$

Câu 57. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(a+c)^{1994}}{(b+d)^{1994}}$

Câu 58. Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$, Với điều kiện mẫu thức xác định.

Câu 59. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2}$

Câu 60. Cho $\frac{2a+13b}{3a-7b} = \frac{2c+13d}{3c-7d}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Câu 61. Cho tỉ lệ thức: $\frac{\overline{ab}}{bc} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$, CMR: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

Câu 62. Chứng minh rằng: $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$, Thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

Câu 63. Cho $a+d = b+c$, và $a^2 + d^2 = b^2 + c^2 (b, d \neq 0)$, CMR 4 số a, b, c, d có thể lập thành 1 tỉ lệ thức:

Câu 64. Cho $M = \frac{ax+by}{cx+dy} = k (c, d \neq 0)$, Chứng minh rằng, Giá trị của M không phụ thuộc vào x, y thì 4 số a, b, c, d lập thành 1 tỉ lệ thức:

Câu 65. Cho dãy $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013}$, Chứng minh rằng: $\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$

Câu 66. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{1998} = \frac{y}{1999} = \frac{z}{2000}$, CMR: $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$

Câu 67. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $by+cz=a$, $ax+cz=b$, $ax+by=c$, với a, b, c là các số dương cho trước thì $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a, b, c

Câu 68. Cho $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$, Chứng minh: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Câu 69. Cho a, b dương thỏa mãn: $a^{2006} + b^{2006} = a^{2004} + b^{2004}$, Chứng minh $\frac{a^2 + b^2}{32} \leq 2^{-4}$

Câu 70. Cho a, b, c $\neq 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, chứng minh rằng: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq 0$

Câu 71. Cho $x^2 + y^2 = 1$ và $b.x^2 = a.y^2$ Chứng minh rằng: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Câu 72. Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$ Thì

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

Câu 73. Biết $a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15$ và $c^2 + \frac{b^2}{3} = 6$ và $a^2 + ac + c^2 = 9$ và $a, c \neq 0; a \neq -c$, CMR :

$$\frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$$

Câu 74. Cho $3^x = 9^{y-1}$ và $8^y - 2^{x+8} = 0$ Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

Câu 75. Cho các số hữu tỉ: $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}; z = \frac{a+c}{b+d}$ với a, b, c, d số nguyên và $b, d > 0$.

CMR: nếu $x < y$ thì $x < z < y$

Câu 76. Cho 3 số a, b, c đôi 1 khác nhau, CMR:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Câu 77. Cho $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = 1, \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1$, CMR: $abc + a'b'c' = 0$

Câu 78. Chứng minh rằng nếu: $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, và a, b, c khác nhau và khác

0, thì: $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$

Câu 79. Cho $P = \frac{ax^2 + bc + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$, CMR: Nếu $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, thì P không phụ thuộc vào x

Câu 80. Cho A, B, C tỉ lệ với a, b, c, CMR: $Q = \frac{Ax + By + C}{ax + by + c}$ không phụ thuộc vào x, y

Câu 81. Cho các số thực a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ (Các mẫu đều khác 0)

Câu 82. Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $xy + yz + zx = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 1 \Rightarrow a_2 = -\sqrt{5}$$

Tương tự $a_3 = \dots = a_n = -\sqrt{5}$

Câu 2.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ \Rightarrow \frac{2}{c} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{a-c}{ca} - \frac{c-b}{bc} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c} \left(\frac{a-c}{a} - \frac{c-b}{b} \right) &= 0 \text{ Mà } c \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{a-c}{a} - \frac{c-b}{b} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{a}{b} &= \frac{a-c}{c-b} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 3. Ta có: $c = \frac{2bd}{b+d} \Rightarrow 2bd = c(b+d)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \cdot \frac{a+c}{2} \cdot d &= c(b+d) \\ \Rightarrow (a+c)d &= c(b+d) \\ \Rightarrow ad + cd &= cb + cd \\ \Rightarrow ad &= cb \end{aligned}$$

Vậy 4 số dương $a; b; c; d$ lập được 1 tỉ lệ thức.

Câu 4.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y+z+1}{x} &= \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} \\ &= \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \end{aligned}$$

(Vì $x+y+z \neq 0$). Do đó $x+y+z = 0,5$. Thay kết quả này vào đề bài ta có:

$$\frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \text{ tức là } \frac{1,5-x}{x} = \frac{2,5-y}{y} = \frac{-2,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Câu 5.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{4} = \frac{y}{3}; \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$$

$$\Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k.6k.5k = 30 \Rightarrow 240k^3 = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

Câu 6.

$$\text{a) Từ } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \text{ suy ra } c^2 = a.b, \text{ khi đó } \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+a.b}{b^2+a.b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

$$\text{b) Theo câu a) ta có: } \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} = \frac{b}{a}$$

$$\text{từ } \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$$

$$\text{hay } \frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}. \text{ Vậy } \frac{b^2-a^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$$

Câu 7

a, Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{4a}{4c} = \frac{3b}{3d} = \frac{4a-3b}{4c-3d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a-3b}{a} = \frac{4c-3d}{c}$$

b, Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{3a^2}{3c^2} = \frac{2b^2}{2d^2} = \frac{3a^2+2b^2}{3c^2+2d^2}$$

Câu 8.

a) Ta có:

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ta có: $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$

$$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ x = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$$

b) Ta có:

$$\text{Ta có } \frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a+b+c+d}{2b+2c+2d+2a} = \frac{1}{2}$$

(do $a, b, c, d > 0 \Rightarrow a + b + c + d > 0$)

suy ra $a = b = c = d$

Thay vào tính được $P = 2$

Câu 9.

$$\frac{2012a+b+c+d}{a} = \frac{a+2012b+c+d}{b} = \frac{a+b+2012c+d}{c} = \frac{a+b+c+2012d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2012a+b+c+d}{a} - 2011 = \frac{a+2012b+c+d}{b} - 2011 = \frac{a+b+2012c+d}{c} - 2011 = \frac{a+b+c+2012d}{d} - 2011$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

+ Nếu $a + b + c + d$ khác 0 Từ (*) suy ra $a = b = c = d$

$$\text{Vậy } M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

+ Nếu $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d); a + c = -(b + d);$

$a + d = -(b + c)$. Vậy $M = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$

Câu 10.

$$\text{Từ } \frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \Rightarrow \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x - 10y = 0 \\ 6z - 15x = 0 \\ 10y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 5x \\ 5y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\Rightarrow x = 10, y = 15, z = 25$$

Câu 11.

+ Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a + b + c = 74$

+ Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

+ Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

+ Từ đó ta có $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$

+ Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$

Câu 12.

Vì $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}$; $\frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$ nên $\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{a-b+c}{10-15+12} = \frac{-49}{7} = -7$$

Suy ra: $a = 10 \cdot (-7) = -70$; $b = 15 \cdot (-7) = -105$; $c = 12 \cdot (-7) = -84$

Câu 13.

Do x, y, z khác 0 nên $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{zxy}{ayz+bxz} = \frac{xyz}{bzx+cyx} = \frac{yzx}{cxy+azy}$

Suy ra $ayz+bxz = bzx+cyx = cxy+azy \Rightarrow az = cx, bx = ay$

Do đó $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t \Rightarrow x = at, y = bt, z = ct, t \neq 0$

Ta có $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{at \cdot bt}{abt+bat} = \frac{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}{a^2+b^2+c^2}$

Suy ra $\frac{t}{2} = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ (do } t \neq 0)$

Vậy $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}$

Câu 14.

a) Ta có $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14}$ (1); $5x = 7z \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$

Tìm được: $x = 84; y = 56; z = 60$

b) Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k \Rightarrow 7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7}$ (1)

Tương tự: $7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Câu 15.

1) Với $a, b, c \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{bz-cy}{a} &= \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = \frac{bza-cya}{a^2} = \frac{bcx-baz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2} \\ &= \frac{bza-cya+bcx-baz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = \frac{0}{a^2+b^2+c^2} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{bz-cy}{a} = 0$, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)

$$\frac{cx-az}{b} = 0, \text{ do đó } cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

2) Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z , ta được $x + y + z = M$

Theo đề bài ta có $x:y:z = \frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$ (1)

Hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$

Suy ra $x^3 = 10^3 \cdot k^3; y^3 = 6^3 \cdot k^3; z^3 = 5^3 \cdot k^3$

Thay vào (1), được $1341k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

suy ra $x = 20; y = 12; z = 10$ Vậy $M = 42$.

Câu 16.

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013}$ (1)

Mà: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$ (đpcm)

Câu 17.

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 3x = y+z+t; 3y = z+t+x; 3z = t+x+y; 3t = x+y+z$$

$$\Rightarrow x+y = z+t; y+z = t+x; z+t = x+y; t+x = y+z$$

$$\Rightarrow A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z} = 1+1+1+1 = 4 \in \mathbb{Z}$$

Vậy biểu thức A có giá trị nguyên. (đpcm)

Câu 18.

Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c

Theo bài ra ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$

Ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 24:45:10 \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$$

Câu 19. Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1; d_2, r_2; d_3, r_3$ theo đề bài ta có

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3, d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12cm, r_2 = 15cm$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21cm$$

Vậy diện tích hình thứ hai $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315 cm^2$

Diện tích hình thứ nhất $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 cm^2$

Diện tích hình thứ ba $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 cm^2$

Câu 20.

Vì $b = \frac{a+c}{2}$ nên $2b = a + c$

Mặt khác: $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right) = \frac{b+d}{2bd}$ hay $2bd = bc + cd$

hay $ad + cd = bc + cd$ do đó $ad = bc$ hay bốn số lập thành tỉ lệ thức

Câu 21.

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Thay vào tỷ lệ thức ta được: $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$

$\Rightarrow y = -7, z = 1$.

Vậy $x - 2y + 3z = 2 - 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 1 = 19$

Câu 22.

$$\text{Từ giả thiết} \Rightarrow \frac{x-9}{15} = \frac{y-12}{20} = \frac{z-24}{40} = \frac{x}{15} - \frac{3}{5} = \frac{y}{20} - \frac{3}{5} = \frac{z}{40} - \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{40} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 15k \\ y = 20k \end{cases}, \text{ Mà } x \cdot y = 1200 \Rightarrow k = \pm 2$$

Câu 23.

$$\text{a, Từ: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = \frac{5(z-5) - 3(x-1) - 4(y+3)}{30 - 6 - 16} = \frac{(5z - 3x - 4y) - 34}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{b, Từ: } \frac{4}{3x-2y} &= \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \\ &= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y) + (6z-12x) + (8y-6z)}{27} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10$$

Câu 24.

$$\begin{aligned} \text{a, Từ GT ta có: } \left(\frac{x}{2}\right)^3 &= \left(\frac{y}{4}\right)^3 = \left(\frac{z}{6}\right)^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{36} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+16+36} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{b, } \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-26} = \frac{-650}{-26} = 25$$

Câu 25.

$$\text{Ta có: } GT = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6 - 4} = \frac{2(x^3 + y^3) + (x^3 - 2y^3)}{12 + 4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Leftrightarrow \frac{x^6}{64} = y^6 \Rightarrow \begin{cases} x^6 = 64k \\ y^6 = k \end{cases} \Rightarrow k = \pm 1$$

Câu 26.

$$\text{a, Từ: } |x + y - z = 95| \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 95 \\ x + y - z = -95 \end{cases}$$

$$\text{Nên } 2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y-z}{15+10-6} = \frac{\pm 95}{19}$$

$$\text{b, Từ: } \frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z \Rightarrow \frac{x}{33} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{-x+z}{-33+5} = \frac{-196}{-28}$$

Câu 27.

$$\text{Ta có: } GT = \frac{2(1+2y) - 1(1+4y)}{36 - 24} = \frac{(1+2y) + (1+4y) - (1+6y)}{18 + 24 - 6x} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{42 - 6x} \Rightarrow x = 5,$$

Thay vào tìm được y

Câu 28.

$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x-7y-7}{8} = \frac{5x-7y-7}{4x} \Rightarrow$$

Nếu $5x-7y-7 \neq 0$ thì $x=2$, Thay vào ta được $y=3$. Nếu $5x-7y-7=0 \Rightarrow 5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}; y=\frac{6}{7}$

Câu 29.

$$GT = \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{(x-y) + (x+y)}{16} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{xy}{200}$$

$$\Rightarrow 8xy - 200x = 0 \Leftrightarrow x(8y - 200) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{TH2: } y = 25 \Rightarrow x = 40$$

Câu 30.

$$\text{Ta có: } GT = \frac{5(3a-2b)}{25} = \frac{3(2c-5a)}{9} = \frac{6c-10b}{34} = \frac{-5b+3c}{17} = \frac{5b-3c}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10} = -5$$

Câu 31.

$$\text{ĐKXĐ: } a \neq \pm 2, a \neq \frac{-13}{6}$$

$$\frac{3b}{a^2-4} = \frac{1-125a-3b}{6a+13} = \frac{1-125a}{1} = \frac{1-125a}{a^2+6a+9}$$

$$\text{Suy ra: } a^2 + 6a + 8 = 0, \left(a \neq \frac{1}{125} \right)$$

$$a = -2(l), a = -4, \text{ Với } a = -4 \Rightarrow b = 2004$$

Câu 32.

$$\text{Ta có: } GT \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{9} \text{ và } \frac{x}{y} = \frac{16}{z} \Rightarrow \frac{z}{9} = \frac{16}{z} \Rightarrow z^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow z = \pm 2$$

$$\text{TH1: } z = 12 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \end{cases} \Rightarrow 4k \cdot 3k = 12 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{TH2: } z = -12 \text{ làm tương tự}$$

Câu 33.

Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{100}) - (1 + 2 + \dots + 100)}{100 + 99 + \dots + 1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{100})}{100 + 99 + \dots + 1} - 1 = \frac{10100}{5050} - 1 = 1$$

Câu 34.

$$\text{Từ gt} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{11}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{7+11} = \frac{M}{18}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{c}{11} = \frac{d}{13} = \frac{c+d}{24} = \frac{M}{24} \text{ và } \frac{e}{13} = \frac{f}{17} = \frac{e+f}{30} = \frac{M}{30} \text{ khi đó } M \in BC(18; 24; 30), \text{ và}$$

M là số tự nhiên nhỏ nhất có 4 chữ số nên M=1080

Câu 35.

$$\text{Gọi 3 phân số cần tìm là } \frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z} \text{ thì ta có: } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \frac{1}{70}, \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ và } \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{5}{1}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{1}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{1}{1}}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{70}{71}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14} \text{ đó là ba phân số cần tìm}$$

Câu 36.

Trừ 2011 vào mỗi vế của tỉ số trong tỉ lệ thức ta được:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\text{TH1: } a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M=8$$

$$\text{Th2: } a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow M=-4$$

Câu 37.

$$\text{Từ GT ta nghịch đảo } \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$$

$$\text{Cộng 1 vào các tỉ số ta được: } \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$$

$$\text{TH1: } a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow A=6$$

$$\text{TH2: } a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c \Rightarrow A=-3$$

Câu 39.

Từ GT ta có: Cộng (n+1) vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{x+y+z+t}{y} = \frac{x+y+z+t}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{2012}{x} = \frac{2012}{y} = \frac{2012}{z} = \frac{2012}{t} \Rightarrow x=y=z=t = \frac{2012}{4} = 503$$

$$\text{Thay vào ta tính được } P = x + 2x - 3x + x = x = 503$$

Câu 40.

$$\text{Ta có: } B = \left(\frac{x-z}{x} \right) \left(\frac{y-x}{y} \right) \left(\frac{y+z}{z} \right) = \frac{y \cdot (-z) \cdot x}{x \cdot y \cdot z} = -1$$

Câu 41.

Với a, b, c khác 0, nghịch đảo giả thiết ta được:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a=b=c$$

$$\text{khi đó: } P = \frac{a^3 + a^3 + a^3}{3a^3} = 1$$

Câu 42.

Từ GT ta có : $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = \frac{y+x+y+x}{x-z+z+y} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

Câu 43.

Từ GT ta có : $a = b + 13$ thay vào B ta được :

$$B = \frac{(3b+39)-b}{(2b+26)+13} - \frac{3b-b-13}{2b-13} = \frac{2b+39}{2b+39} - \frac{2b-13}{2b-13} = 0$$

Câu 44.

Từ GT ta có :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+2y-3z}{5+8-9} = \frac{(x+2y-3z)}{4} = \frac{x-2y+3z}{5-8+9} = \frac{(x-2y+3z)}{6}$$

Khi đó : $\frac{x+2y-3z}{x-2y+3z} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P$

Câu 45.

Từ $2a - b = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b \Rightarrow \frac{4a}{3} = \frac{5b}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a^4}{b^4} = \frac{5^4}{4^4} \Rightarrow M = \frac{625}{256}$

Câu 46.

Từ GT ta có : $\frac{a+b}{2} = \frac{8-c}{5} = \frac{b+c}{3} = \frac{10+c}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} a+b=2t \\ 8-c=5t \\ b+c=3t \\ 10+c=4t \end{cases} \Rightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \\ c=-2 \end{cases}$

Câu 47.

Cộng theo vế của GT ta được : $x+y+z = 2(ax+by+cz)$, Thay x, y, z trở lại ta có :

$$\Rightarrow x+y+z = 2(z+cz) = 2z(1+c) \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{a+1} = \frac{2x}{x+y+z}, \frac{1}{b+1} = \frac{2y}{x+y+z}$, Khi đó ta có : $Q = 2$

Câu 48. Ta có : $Q = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$

$$Q = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = 2015 \cdot \frac{1}{5} - 3$$

Câu 50.

Từ GT ta có : $GT = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} a-b = -k \\ b-c = -k \\ c-a = 2k \end{cases}$

$$\Rightarrow M = 4 \cdot (-k) \cdot (-k) - (2k)^2 = 4k^2 - 4k^2 = 0$$

Câu 52.

Từ GT ta có :
$$\begin{cases} x + y = -z \\ y + z = -x \Rightarrow B = -x.y.z = -2 \\ z + x = -y \end{cases}$$

Câu 53.

Từ GT ta có : $x^3 = \frac{-1}{27}, y^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow C = 0$

Câu 54.

$$b^2 = a.c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a + 2012b}{b + 2012c} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{(a + 2012b)^2}{(b + 2012c)^2} = \frac{a}{c}$$

Câu 55.

Từ GT ta có : $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \dots \frac{a_{2018}}{a_{2019}} = \left(\frac{a_1}{a_{2018}} \right)^{2018} = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2018}}{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2019}} \right)^{2018}$

Câu 56.

Từ: $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a + 2014b}{b + 2014c} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^n = \left(\frac{b}{c} \right)^n = \frac{a}{c}$

Mà $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \Rightarrow n = 2$

Câu 57.

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(k.b)^{1994} + (k.d)^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = k^{1994}$

và $\frac{(a+c)^{1994}}{(b+d)^{1994}} = \frac{(kb+kd)^{1994}}{(b+d)^{1994}} = k^{1994}$

Câu 58.

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k.b \\ c = k.d \end{cases}$, Thay vào biểu thức ta có:

$$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} \quad \text{và} \quad \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$$

Câu 59.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \left(\frac{c}{d} \right)^2 \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{2010c^2}{2010d^2} = \frac{2009a^2}{2009b^2}$$

Câu 60.

$$GT \Rightarrow \frac{2a+13b}{2c+13d} = \frac{3a-7b}{3c-7d} = \frac{3(2a+13b)-2(3a-7b)}{3(2c+13d)-2(3c-7d)} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Câu 61.

$$GT = \frac{a \cdot 10 + b}{b \cdot 10 + c} = \frac{b}{c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$$

Câu 62.

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{3} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y-z-x}{3-2} = y-z \text{ và } \frac{y+z}{3} = \frac{z+x}{5} = \frac{-y-z+z+x}{-3+5} = \frac{x-y}{5}$$

$$\text{và } \frac{x-y}{2} = \frac{z+x}{5} \Rightarrow x-y = \frac{2(z+x)}{5} \Rightarrow \frac{x-y}{4} = \frac{z+x}{10} \quad (1) \text{ và } \frac{z+x}{2} = y-z \Rightarrow \frac{y-z}{5} = \frac{z+x}{10} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$$

Câu 63.

$$\text{Vì } a+d=b+c \Rightarrow (a+d)^2 = (b+c)^2 \Rightarrow 2ad = 2bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Câu 64.

$$\text{Đặt } \frac{ax+by}{cx+dy} = k, \quad \text{Chọn } x=0, y=1 \Rightarrow \frac{b}{d} = k$$

$$\text{Chọn } x=1, y=0 \Rightarrow \frac{a}{c} = k \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Câu 65.

$$\text{Ta có: } \frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013} = \frac{a-c}{-4} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = -4k \\ a-b = -2k \\ b-c = -2k \end{cases} \Rightarrow \frac{(a-c)^2}{4} = \frac{(-4k)^2}{4} = 4k^2 \text{ và } (a-b)(b-c) = 4k^2 \Rightarrow VT = VP$$

Câu 66.

$$\text{Từ gt } \Rightarrow \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2} \right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1} \right) \Rightarrow \frac{(x-z)^3}{8} = (x-y)^2 (y-z)$$

Câu 67.

$$\text{Cộng theo vế các GT ta được: } a+b+c = 2(ax+by+cz) = 2(ax+a) = 2a(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{1}{y+1} = \frac{2b}{a+b+c}, \frac{1}{z+1} = \frac{2c}{a+b+c}$$

Khi đó: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$

Câu 68.

Đặt: $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k \Rightarrow a = \frac{x^2 - yz}{k}, b = \frac{y^2 - zx}{k}, c = \frac{z^2 - xy}{k}$

$$\Rightarrow a^2 - bc = \frac{(x^4 - 2x^2yz + y^2z^2)}{k^2} - \frac{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz}{k^2} \Rightarrow \frac{a^2 - bc}{x} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^2 - ca}{y} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ và $\frac{c^2 - ab}{z} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \Rightarrow \text{đpcm}$

Câu 69.

Giả sử: $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} = 2^{-4}$. Nếu: $a, b \neq 1$, Giả sử:

$$a \geq b \Rightarrow a^{2004}(a^2 - 1) = b^{2004}(1 - b^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2004}}{b^{2004}} = \frac{1 - b^2}{1 - a^2}, \text{ Vì } a \geq b \Rightarrow 1 - b^2 \geq a^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} \leq \frac{2}{32} = 2^{-4}$$

Câu 70.

Từ GT $\Rightarrow \frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \leq 0, \text{ Tương tự: } \frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \leq 0, \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq 0$$

Cộng theo vế ta được: $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \leq 0$

Câu 71.

Từ $bx^2 + ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$

$$\frac{x^{2000}}{a^{1000}} = \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{1}{(a+b)^{1000}} \Rightarrow \frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$$

Câu 72.

Xét $x+1 = \frac{a-b}{a+b} + 1 = \frac{2a}{a+b}$, Tương tự: $y+1 = \frac{2b}{b+c}, z+1 = \frac{2c}{c+a}$

Khi đó $VT = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự: $1-x = 1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}, 1-y = \frac{2c}{b+c}, 1-z = \frac{2a}{c+a}$

Khi đó: $VP = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VT$

Câu 73.

Ta có: $a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15 = 6 + 9 = (a^2 + ac + c^2) + \left(c^2 + \frac{b^2}{3}\right)$

$\Rightarrow 2c^2 = ab - ac \Rightarrow 2c^2 = ab + ac - 2ac \Rightarrow 2c^2 + 2ac = ab + ac$

$\Rightarrow 2c(c+a) = a(b+c) \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

Câu 74.

Từ $8^y = 2^{x+8} \Leftrightarrow 2^{3y} = 2^{x+8} \Rightarrow 3y = x+8 \quad (1)$

Và $3^x = 9^{y-1} = 3^{2(y-1)} \Rightarrow x = 2y-2$ thay vào (1) ta được:

$3y = 2y-2+8 \Leftrightarrow y = 6 \Rightarrow x = 10$

Câu 75.

Vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow a.d < b.c$ Xét tích $\begin{cases} a(b+d) = ab+ad \\ b(a+c) = ab+bc \end{cases} \Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

Cmtt ta có: $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Câu 76.

Ta có: $\frac{2}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{-1}{b-a}$

Tính tương tự ta có: $\frac{2}{b-c} = \frac{1}{b-c} + \frac{-1}{c-b}$, và $\frac{2}{c-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{-1}{a-c}$

Cộng theo vế:

$\frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}\right) + \left(\frac{1}{b-c} + \frac{-1}{b-a}\right) + \left(\frac{1}{c-a} + \frac{-1}{c-b}\right) = VT$

Câu 77.

Từ GT ta có: $ab + a'b' = a'b \Rightarrow abc + a'b'c = a'bc$

Và $bc + b'c' = b'c \Rightarrow a'bc + a'b'c' = a'b'c$

Nên $(abc + a'b'c') + (a'b'c' + a'bc) = (a'bc + a'b'c) \Rightarrow đpcm$

Câu 78.

Vì $a, b, c \neq 0$, chia giả thiết cho

$abc \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac} = \frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab} = \frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc} \Rightarrow ĐPCM$

Câu 79.

Đặt $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$ rút ra rồi thay vào P

Câu 80.

Ta có : $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \Rightarrow A = ka, B = kb, C = kc \Rightarrow Q = \frac{k(ax + by + c)}{ax + by + c} = k$

Câu 81.

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x^2}{ax} = \frac{y^2}{by} = \frac{z^2}{cz} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz} \right)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Do đó:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz} \right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 82.

Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = x + y + z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = (x + y + z)^2$$

Mặt khác cũng theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

Do đó:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 0$$