

CHUYÊN ĐỀ: TỈ LỆ THỨC

DẠNG 1: TÌM X

Bài 1: Tìm x biết:

$$a, \frac{x-3}{x+5} = \frac{5}{7}$$

$$b, \frac{7}{x-1} = \frac{x+1}{9}$$

$$c, \frac{44-x}{3} = \frac{x-12}{5}$$

HD:

$$a, \Rightarrow 7(x-3) = 5(x+5) \Rightarrow 2x = 46 \Rightarrow x = 23$$

$$b, \Rightarrow (x-1)(x+1) = 7.9 = (8-1)(8+1) \Rightarrow x = 8$$

$$c, \Rightarrow 5(44-x) = 3(x-12) \Rightarrow 8x = 256 \Rightarrow x = 32$$

Bài 2: Tìm x biết:

$$a, \frac{x+4}{20} = \frac{5}{x+4}$$

$$b, \frac{x-y}{x+2y} = \frac{3}{4} \text{ (tìm } \frac{x}{y})$$

$$c, \frac{x-1}{x+2} = \frac{x-2}{x+3}$$

HD:

$$a, \Rightarrow (x+4)^2 = 100 = 10^2 \Rightarrow x+4 = \pm 10$$

$$b, \Rightarrow 4x - 4y = 3x + 6y \Rightarrow x = 10y \Rightarrow \frac{x}{y} = 10$$

$$c, \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+2} - 1 \right) = \left(\frac{x-2}{x+3} - 1 \right) \Rightarrow \frac{x-1-x-2}{x+2} = \frac{x-2-x-3}{x+3} \Rightarrow \frac{-3}{x+2} = \frac{-5}{x+3}$$
$$\Rightarrow 3(x+3) = 5(x+2) \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 3: Tìm x, y, z biết:

$$a, \frac{15}{x-9} = \frac{20}{y-12} = \frac{40}{z-24} \text{ và } x.y=1200$$

$$b, \frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21} \text{ và } x.y.z = 22400$$

HD:

$$a, \text{ Từ gt } \Rightarrow \frac{x-9}{15} = \frac{y-12}{20} = \frac{z-24}{40} = \frac{x}{15} - \frac{3}{5} = \frac{y}{20} - \frac{3}{5} = \frac{z}{40} - \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{40} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 15k \\ y = 20k \end{cases}, \text{ Mà } x.y = 1200 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$b, \text{ Từ gt } \Rightarrow \frac{x-30}{40} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-21}{28} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 40k \\ y = 20k \\ z = 28k \end{cases}$$

$$\text{Mà: } x.y.z = 22400 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 28 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm x, y, z biết:

$$a, \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ và } 2x+3y-z=50$$

$$b, \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ và } x-2y+3z=14$$

HD:

$$a, \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{2(x-1)+3(y-2)-(z-3)}{4+9-4} = \frac{(2x+3y-z)-5}{9} = 5$$

$$b, \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{(x-1)-2(y-2)+3(z-3)}{2-6+12} = \frac{(x-2y+3z)-6}{8} = 1$$

Bài 5: Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $5z - 3x - 4y = 50$

b, $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và $x + y - z = -10$

HD :

a, Từ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = \frac{5(z-5) - 3(x-1) - 4(y+3)}{30 - 6 - 16} = \frac{(5z - 3x - 4y) - 34}{8}$

b, Từ : $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$
 $= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y) + (6z-12x) + (8y-6z)}{27} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10$

Bài 6: Tìm ba số x, y, z biết : $\frac{7}{2x+2} = \frac{3}{2y-4} = \frac{5}{z+4}$ và $x + y + z = 17$

Bài 7: Tìm các số x,y,z biết chúng thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau : $3x + 2y + z = 169$ và $\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169}$

HD :

Từ : $\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169} = \frac{(3x+2y+z) + (25-169+144)}{338} = \frac{169}{338} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3x + 25 = \frac{144}{2} = 72 \Rightarrow x = \frac{47}{3}$, Tương tự cho y và z

Bài 8: Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - z^2 = 585$

b, $x:y:z=3:4:5$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

HD:

a, $\Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{49} = \frac{z^2}{9} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{25 + 49 - 9} = 9$

b, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{18 + 32 - 75} = \frac{-100}{-25} = 4$

Bài 9: Tìm x, y, z biết:

a, $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a^2 - b^2 + 2c^2 = 108$

b, $x : y : z = 3 : 4 : 5$ và $5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594$

HD:

a, $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{16} = \frac{a^2 - b^2 + 2c^2}{4 - 9 + 32} = \frac{108}{27} = 4$

b, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{5z^2 - 3x^2 - 2y^2}{125 - 27 - 32} = \frac{594}{66} = 9$

Bài 10: Tìm các số x, y, z biết:

a, $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{64} = \frac{z^3}{216}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

b, $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{27} = \frac{z^3}{64}$ và $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650$

HD :

a, Từ GT ta có : $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{y}{4}\right)^3 = \left(\frac{z}{6}\right)^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{36} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 16 + 36} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

$$b, \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-26} = \frac{-650}{-26} = 25$$

Bài 11: Tìm x, y biết: $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$

HD :

$$\text{Ta có : } GT = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6 - 4} = \frac{2(x^3 + y^3) + (x^3 - 2y^3)}{12 + 4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Leftrightarrow \frac{x^6}{64} = y^6 \Rightarrow \begin{cases} x^6 = 64k \\ y^6 = k \end{cases} \Rightarrow k = \pm 1$$

Bài 12: Tìm x, y, z biết: $\frac{3x}{8} = \frac{3y}{64} = \frac{3z}{216}$ và $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \frac{x}{8} = \frac{y}{64} = \frac{z}{216} \Rightarrow \frac{x^2}{64} = \frac{y^2}{4096} = \frac{z^2}{46656} = \frac{2x^2 + 2y^2 - z^2}{8320 - 46656} = \frac{1}{-38336} \text{ (Vô lý)}$$

Vậy không tồn tại x, y, z thỏa mãn :

Bài 13: Tìm x, y, z biết:

$$a, \frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \text{ và } x+y+z=49$$

$$b, \frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z \text{ và } -x+y+z=-120$$

HD:

$$a, \Rightarrow \frac{x}{3.6} = \frac{y}{4.4} = \frac{z}{5.3} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{49} = 1$$

$$b, \Rightarrow \frac{x}{11.3} = \frac{y}{2.2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{33} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{-x+y+z}{-24} = \frac{-120}{-24} = 5$$

Bài 14: Tìm x, y, z biết:

$$a, 2x=3y=5z \text{ và } |x+y-z|=95$$

$$b, \frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z \text{ và } -x+z=-196$$

HD :

$$a, \text{ Từ : } |x+y-z|=95 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=95 \\ x+y-z=-95 \end{cases}$$

$$\text{Nên } 2x=3y=5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y-z}{15+10-6} = \frac{\pm 95}{19}$$

$$b, \text{ Từ : } \frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z \Rightarrow \frac{x}{33} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{-x+z}{-33+5} = \frac{-196}{-28}$$

Bài 15: Tìm x,y,z biết: $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} = x+y+z$

HD :

$$\text{Từ : } \frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} \Rightarrow \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z}$$

$$= \frac{(y+z+1)+(x+z+2)+(x+y-3)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = x+y+z$$

$$\Rightarrow y+z+1 = 2x \Rightarrow x+y+z = 3x-1 = 2 \Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow x+z+2 = 2y \Rightarrow x+y+z = 3y-2 = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x+y-3 = 2z \Rightarrow x+y+z = 3z+3 = 2 \Rightarrow z = \frac{-1}{3}$$

Bài 16: Tìm x, y, z biết : $\frac{y+x+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{z+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

HD :

Từ giả thiết $\Rightarrow$ Cộng tử với tử ta được : $GT = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = \frac{1}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$

Khi đó : $x+z+2 = 2y \Rightarrow x+y+z = 3y-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{6}$

Và $z+y-3 = 2z \Rightarrow z = y-3 = \frac{5}{6}-3 = \frac{-13}{6} \Rightarrow x = \dots$

Bài 17: Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

HD :

Từ GT $\Rightarrow$ Tử + Tử + Tử = GT $= \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = 2 = \frac{1}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$

Khi đó : $y+z+1 = 2x \Rightarrow x+y+z = 3x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Tương tự để tìm ra y, z

Bài 18: Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+3}{y} = \frac{x+y-5}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

HD :

Từ GT $\Rightarrow$ Tử + Tử + Tử $\Rightarrow GT = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = \frac{1}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$

Khi đó : $y+z+2 = 2x \Rightarrow x+y+z = 3x-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$. Làm tương tự cho y và z

Bài 19: Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{z+x+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$

HD :

Ta có : $GT = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2} = x+y+z$

Khi đó : $2x = y+z+1 \Rightarrow x+y+z = 3x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Tương tự cho y và z

Bài 20: Tìm x, y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

HD :

Từ $GT = \frac{(2x+1)+(3y-2)}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{3y-2}{7} \Rightarrow y = 3$

Bài 21: Tìm x, y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{4y-5}{9} = \frac{2x+4y-4}{7x}$

HD :

Từ $GT \Rightarrow \frac{(2x+1)+(4y-5)}{5+9} = \frac{2x+4y-4}{7x} \Rightarrow x = 2$, Thay vào tìm được y

Bài 22: Tìm x, biết: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

HD :

Ta có : $GT = \frac{2(1+2y)-1(1+4y)}{36-24} = \frac{(1+2y)+(1+4y)-(1+6y)}{18+24-6x} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{42-6x} \Rightarrow x = 5$,

Thay vào tìm được y

Bài 23: Tìm x biết $\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x-7y-7}{4x}$

HD:

$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x-7y-7}{8} = \frac{5x-7y-7}{4x} \Rightarrow$$

Nếu $5x-7y-7 \neq 0$ thì $x=2$, Thay vào ta được $y=3$. Nếu $5x-7y-7=0 \Rightarrow 5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}; y=\frac{6}{7}$

Bài 24: Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

HD :

$$\text{Ta có : } GT = \frac{(1+3y)-(1+5y)}{12-5x} = \frac{(1+5y)-(1+7y)}{5x-4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2y}{12-5x} = \frac{-2y}{x} \Leftrightarrow 12-5x = x \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2. \text{ Thay vào tìm được } y$$

Bài 25: Tìm x,y,z biết : $\frac{7x-3y+12}{2y} = \frac{y+2z}{z-3y+2} = \frac{x}{-y}$

Bài 26: Tìm x, y, z biết : $\frac{3x+y}{47} = \frac{x+y}{-17} = \frac{-2}{x^2} = \frac{-xz^2-yz^2}{z^2+1} (x \neq 0)$

Bài 27: Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0, a=2012$. Tính b, c

HD :

$$\text{Từ : } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a=b=c=2012$$

Bài 28: Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0, a=2017$. Tính b, c

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \Rightarrow a=b=c=2017$$

Bài 29: Tìm a, b biết: $\frac{a}{b} = \frac{b}{10} = \frac{10}{a}, a+b \neq -10$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{b}{10} = \frac{10}{a} = \frac{a+b+10}{a+b+10} = 1 \Rightarrow a=b=10$$

Bài 30: Tìm ba số thức x, y, z khác 0 biết : $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ và $x^{2018} - y^{2019} = 0$

Bài 31: Cho 3 số hữu tỉ bằng nhau: $\frac{a}{b+c}; \frac{b}{c+a}; \frac{c}{a+b}$ và $a+b+c \neq 0$, Tính giá trị của mỗi tỉ số đó

HD :

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Bài 32: Tìm x biết : $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, và các tỉ số đều có nghĩa

HD :

$$\text{Nếu } a+b+c=0 \text{ thì } b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c \text{ khi đó } x = \frac{a}{-a} = \frac{b}{-b} = \frac{c}{-c} = -1$$

$$\text{Nếu } a+b+c \neq 0 \text{ thì } x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Bài 33: Tìm x, biết: $\frac{x}{y^2} = 2$, $\frac{x}{y} = 16$

HD :

$$\text{Ta có : } \frac{x}{y^2} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow 16 \cdot \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 16 \cdot 8$$

Bài 34: Tìm x, y, z biết: $\begin{cases} x + y + z = 94 \\ 3x = 4y = 5z \end{cases}$

Bài 35: Tìm a, b, c biết: $\begin{cases} a + b + c = 260 \\ a = 3b = 0,3(b + c) \end{cases}$

HD:

$$\text{Từ } a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{1}, \text{ và } \frac{a}{0,3} = \frac{b+c}{1} = \frac{a+b+c}{1,3} = \frac{260}{1,3} = 200 \Rightarrow a = 60, b = \frac{60}{3} = 20 = c$$

Bài 36: Tìm a, b, c biết: $(a+b) : (8-c) : (b+c) : (10+c) = 2:5:3:4$

HD :

$$\text{Từ GT} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{8-c}{5} = \frac{b+c}{3} = \frac{10+c}{4} = t$$

$$\text{mà } 4(8-c) = 5(10+c) \Rightarrow c = -2 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2t \\ b+c = 3t \end{cases} \Rightarrow b = 8, a = -4$$

Bài 37: Tìm các số a, b, c $\in \mathbb{Z}$ biết: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = a + b + c = 3$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } GT &\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) = 6 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a} \right) = 6 \\ &\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{a} \right) + \left(\frac{a+b+c}{b} \right) + \left(\frac{a+b+c}{c} \right) = 9, \text{ Vì } a+b+c = 3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Do a,b,c nguyên nên } \frac{1}{a} \leq 1, \frac{1}{b} \leq 1, \frac{1}{c} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a = b = c = 1$$

Bài 38: Tìm x, y biết: $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$

HD:

$$GT = \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{(x-y) + (x+y)}{16} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{xy}{200}$$

$$\Rightarrow 8xy - 200x = 0 \Leftrightarrow x(8y - 200) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{TH2: } y = 25 \Rightarrow x = 40$$

Bài 39: Tìm ba số a, b, c biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c = -50$

HD :

$$\text{Ta có : } GT = \frac{5(3a-2b)}{25} = \frac{3(2c-5a)}{9} = \frac{6c-10b}{34} = \frac{-5b+3c}{17} = \frac{5b-3c}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10} = -5$$

Bài 40: Tìm x,y,z biết : $\frac{4z-10y}{3} = \frac{10x-3z}{4} = \frac{3y-4x}{10}$ và $2x+3y-z=40$

HD:

$$\text{Ta có: } GT \Rightarrow \frac{4z-10y}{3} = \frac{10x-3z}{4} = \frac{3(4z-10y)}{9} = \frac{4(10x-3z)}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{40x-30y}{13} = \frac{30y-40x}{100} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4z = 10y \\ 10x = 3z \\ 3y = 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{10} = \frac{2x+3y-z}{6+12-10} = \frac{40}{8} = 5$$

Bài 41: Tìm x, y, z biết: $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11}$ và $x+y+z=48$

HD:

$$\text{Ta có: } GT = \frac{(12x-15y) + (20z-12x) + (15y-20z)}{7+9+11} = 0$$

$$\Rightarrow 12x-15y=0 \Rightarrow 12x=15y \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$$

$$\text{làm tương tự ta được: } \frac{x}{5} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{48}{12}$$

Bài 42: Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$

Bài 43: Tìm x, y, z biết: $\frac{x+3y}{19} = \frac{3y+9z}{114} = \frac{5z+15x}{115}$ và $x+y+2z=-31$

Bài 44: Tìm các cặp số a, b thỏa mãn: $\frac{3b}{a^2-4} = \frac{1-125a-3b}{6a+13} = 1-125a$

HD:

$$\text{ĐKXD: } a \neq \pm 2, a \neq \frac{-13}{6}$$

$$\frac{3b}{a^2-4} = \frac{1-125a-3b}{6a+13} = \frac{1-125a}{1} = \frac{1-125a}{a^2+6a+9}$$

$$\text{Suy ra: } a^2+6a+8=0, \left(a \neq \frac{1}{125}\right)$$

$$a=-2(l), a=-4, \text{ Với } a=-4 \Rightarrow b=2004$$

Bài 45: Tìm x,y,z biết : $xy=z$; $yz=9x$; $xz=16y$

HD:

$$\text{Ta có: } GT \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{9} \text{ và } \frac{x}{y} = \frac{16}{z} \Rightarrow \frac{z}{9} = \frac{16}{z} \Rightarrow z^2 = 9.16 = 144 \Rightarrow z = \pm 12$$

$$\text{TH1: } z=12 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=4k \\ y=3k \end{cases} \Rightarrow 4k.3k=12 \Rightarrow k=\pm 1$$

$$\text{TH2: } z=-12 \text{ làm tương tự}$$

Bài 46: Tìm các số: $a_1; a_2; \dots; a_{100}$, biết: $\frac{a_1-1}{100} = \frac{a_2-2}{99} = \dots = \frac{a_{100}-100}{1}$ và $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}=10100$

HD:

Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{(a_1+a_2+\dots+a_{100})-(1+2+\dots+100)}{100+99+\dots+1} = \frac{(a_1+a_2+\dots+a_{100})}{100+99+\dots+1} - 1 = \frac{10100}{5050} - 1 = 1$$

Bài 47: Tìm $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$, biết rằng: $\frac{a_1-1}{9} = \frac{a_2-2}{8} = \frac{a_3-3}{7} = \dots = \frac{a_9-9}{1}$, và

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 90$$

Bài 48: Tìm số tự nhiên M nhỏ nhất có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện: $M = a + b = c + d = e + f$ biết: a, b,

$$c, d, e, f \text{ thuộc } N^* \text{ và } \frac{a}{b} = \frac{14}{22}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17}$$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{11}; \frac{c}{d} = \frac{11}{13}; \frac{e}{f} = \frac{13}{17} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{7+11} = \frac{M}{18}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{c}{11} = \frac{d}{13} = \frac{c+d}{24} = \frac{M}{24} \text{ và } \frac{e}{13} = \frac{f}{17} = \frac{e+f}{13+17} = \frac{M}{30} \text{ khi đó } M \in BC(18; 24; 30), \text{ và M}$$

là số tự nhiên nhỏ nhất có 4 chữ số nên M=1080

$$\text{Bài 49: Tìm x, y biết: } \frac{x+4}{7+y} = \frac{4}{7} \text{ và } x+y=22$$

HD :

$$\text{Ta có : } GT \Rightarrow 7x + 28 = 28 + 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{11} = 2$$

$$\text{Bài 50: Tìm x, y biết: } \frac{3}{5}x = \frac{2}{3}y \text{ và } x^2 - y^2 = 38$$

HD:

$$\text{Ta có: } Gt \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{9} = \frac{x^2 - y^2}{19} = 72$$

$$\text{Khi đó: } x^2 = 200 \Rightarrow x = \pm\sqrt{200} \text{ và } y^2 = 162 \Rightarrow y = \pm\sqrt{162}$$

$$\text{Bài 51: Tìm số hữu tỉ a, b biết : } a-b=a:b \text{ và } a-b=3(a+b)$$

HD:

$$\text{Ta có: } a-b=3(a+b) \Rightarrow 2a=-4b \Rightarrow a=-2b \Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b} = a-b \Rightarrow a-b=-2 \Rightarrow a=b-2 \text{ thay vào}$$

$$a-b=3(a+b) \Rightarrow -2=3(2b-2)=6b-6 \Rightarrow b=..$$

Bài 52: Hãy tìm tất cả các số có hai chữ số biết rằng tổng, hiệu, tích của các chữ số của số đó là ba số nguyên dương và tỉ lệ với 35: 210: 12

HD:

$$\text{Gọi số cần tìm là: } \overline{ab} (a \neq 0, a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}), \text{ Giả sử : } a > b$$

$$\text{Theo bài ra ta có : } \frac{a+b}{35} = \frac{a-b}{210} = \frac{ab}{12} \Rightarrow \frac{(a+b)6}{35.6} = \frac{a-b}{6.35} = \frac{a.b}{12}$$

$$\Rightarrow 6a+6b=a-b \Rightarrow 5a=-7b, \text{ Vô lý vì a, b cùng dấu.}$$

Bài 53: Tìm hai số hữu tỉ a, b biết hiệu a và b bằng thương của a và b và bằng 2 lần tổng của a và b,

HD:

$$\text{Theo bài ra ta có: } a-b=\frac{a}{b}=2(a+b) \Rightarrow a-b=2(a+b) \Rightarrow \frac{a}{b} = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=\frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-9}{4} \\ b=\frac{-3}{4} \end{cases}$$

Bài 54: Tìm x,y,z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}, x+z=2y$

HD :

Từ $x+y=2z$ ta có : $x-2y+z=0$ hay $2x-4y+2z=0$ hay $2x-y-3y+2z=0$ hay $2x-y=3y-2z$

Mà $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ nên $2x-y=3y-2z=0$. Từ $2x-y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

Từ $3y-2z=0$ và $x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0$ hay $\frac{1}{2}y + y - z = 0$ hay $\frac{3}{2}y - z = 0$ hay $y = \frac{2}{3}z$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}z$. Vậy các giá trị x,y,z cần tìm là $\left(x = \frac{1}{3}z, y = \frac{2}{3}z, z \in R \right)$

Bài 55: Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3:4:5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5:1:2

HD :

Gọi 3 phân số cần tìm là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ thì ta có: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}, \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ và $\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{71}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14} \text{ đó là ba phân số cần tìm}$$

Bài 56: Số M được chia làm 3 số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$, tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó bằng 4660

HD :

Ta có : $0,5 : 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} : \frac{5}{3} = \frac{9}{4} : \frac{9}{4}$ nên ta có : $\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 20 : 27$

Giả sử M được chia thành 3 số là x ;y ;z.

Theo bài ra ta có :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12, y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40, z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

$$\text{Vậy } M = 12 + 40 + 54 = 106 \text{ hoặc } M = -106$$

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Bài 1: Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

Tính giá trị biểu thức: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

HD:

Từ GT trừ đi 1 vào mỗi vế của tỉ số ta có:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

TH1: Nếu $a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M=4$

TH2: Nếu $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow M=-4$

Bài 2: Cho 3 số x, y, z khác 0 thỏa mãn: $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$. Tính $B = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$

HD:

Từ GT cộng thêm 2 vào mỗi vế của tỉ số ta được:

$$\left(\frac{y+z-x}{x} + 2\right) = \left(\frac{z+x-y}{y} + 2\right) = \left(\frac{x+y-z}{z} + 2\right) \Rightarrow \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{z}$$

TH1: $x+y+z \neq 0 \Rightarrow x=y=z \Rightarrow B=8$

TH2: $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z, y+z=-x, x+z=-y \Rightarrow B=-1$

Bài 2: Cho $\frac{a+b+c-d}{d} = \frac{b+c+d-a}{a} = \frac{c+d+a-b}{b} = \frac{d+a+b-c}{c}$, $(a+b+c+d) \neq 0$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{b+c}{a}\right) \left(1 + \frac{c+d}{b}\right) \left(1 + \frac{d+a}{c}\right) \left(1 + \frac{a+b}{d}\right)$

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ và dãy tỉ số: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$.

Tính: $P = \frac{(3a-2b)(3b-2c)(3c-2a)}{(3a-c)(3b-a)(3c-b)}$

Bài 4: Cho dãy tỉ số: $\frac{2012a+b+c+d}{a} = \frac{a+2012b+c+d}{b} = \frac{a+b+2012c+d}{c} = \frac{a+b+c+2012d}{d}$

Tính giá trị biểu thức: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

HD:

Trừ 2011 vào mỗi vế của tỉ số trong tỉ lệ thức ta được:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

TH1: $a+b+c+d \neq 0 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow M=8$

Th2: $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow M=-4$

Bài 5: Cho a, b, c thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

HD:

Từ GT ta cộng thêm 2 vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau có: $\frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$

TH1: $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow A=8$

TH2: $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, a+c=-b \Rightarrow A=-1$

Bài 6: Cho $a+b+c+d \neq 0$, và $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c}$

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{a+d} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

HD :

Từ GT nghịch đảo ta có $\Rightarrow \frac{b+c+d}{a} = \frac{a+c+d}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d}$

Cộng 1 vào các tỉ số ta được :

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \text{ vì } a+b+c+d \neq 0$$

nên $a=b=c=d \Rightarrow A=4$

Bài 7: Cho a, b, c thỏa mãn : $\frac{1}{a+b+c} = \frac{a+4b-c}{c} = \frac{b+4c-a}{a} = \frac{c+4a-b}{b}$,

Tính $P = \left(2 + \frac{a}{b}\right) \left(3 + \frac{b}{c}\right) \left(4 + \frac{c}{a}\right)$

Bài 8: Cho $a, b, c \neq 0$ và $a+b+c = \frac{a+2b-c}{c} = \frac{b+2c-a}{a} = \frac{c+2a-b}{b}$, Tính $P = \left(2 + \frac{a}{b}\right) \left(2 + \frac{b}{c}\right) \left(2 + \frac{c}{a}\right)$

HD:

Từ GT ta có : $GT = \frac{(a+2b-c) + (b+2c-a) + (c+2a-b)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

$$TH1 : a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+2b-c=0 \\ b+2c-a=0 \\ c+2a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=c \\ b+2c=a \\ c+2a=b \end{cases} \Rightarrow P=1$$

$$TH2 : a+b+c \neq 0 \Rightarrow GT = 2 \Rightarrow \begin{cases} a+2b-c=2c \\ b+2c-a=2a \\ c+2a-b=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=3c \\ b+2c=3a \\ c+2a=3b \end{cases} \Rightarrow P=27$$

Bài 9: Cho a,b,c đôi 1 khác nhau và $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(a + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Bài 10: Cho a, b, c khác nhau và khác 0, t/m: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$$

HD:

Từ GT ta nghịch đảo $\Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$

Cộng 1 vào các tỉ số ta được : $\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$

TH1 : $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow A=6$

TH2 : $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c \Rightarrow A=-3$

Bài 11: Cho 3 số x,y,z,t thỏa mãn: $\frac{y+z+t-nx}{x} = \frac{z+t+x-ny}{y} = \frac{t+x+y-nz}{z} = \frac{x+y+z-nt}{t}$

Và $x+y+z+t = 2012$. Tính giá trị $P = x+2y-3z+t$

HD:

Từ GT ta có: Cộng (n+1) vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{x+y+z+t}{y} = \frac{x+y+z+t}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{2012}{x} = \frac{2012}{y} = \frac{2012}{z} = \frac{2012}{t} \Rightarrow x = y = z = t = \frac{2012}{4} = 503$$

Thay vào ta tính được $P = x + 2x - 3x + x = x = 503$

Bài 12: Cho $x, y, z \neq 0$ & $x - y - z = 0$, Tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$

HD :

$$\text{Ta có : } B = \left(\frac{x-z}{x}\right) \left(\frac{y-x}{y}\right) \left(\frac{y+z}{z}\right) = \frac{y \cdot (-z) \cdot x}{x \cdot y \cdot z} = -1$$

Bài 13: Cho $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$ ($a, b, c, d > 0$)

$$\text{Tính } A = \frac{2011a - 2010b}{c + d} + \frac{2011b - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010d}{a + b} + \frac{2011d - 2010a}{b + c}$$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a+b+c+d}{2a+2b+2c+2d} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = d$$

Thay vào A ta được $A = 2$

Bài 14: Cho a, b, c là các số hữu tỉ khác 0, sao cho: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$

$$\text{Tính } M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

HD :

$$\text{Cộng thêm 2 vào GT ta được : } \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$$

$$\text{TH1 : } a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow M=8$$

$$\text{TH2 : } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b \Rightarrow M=-1$$

Bài 15: Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$, Tính $M = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$

HD :

Từ GT nghịch đảo ta được :

$$\frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\text{Cộng thêm 1 vào các tỉ số ta được : } \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$$

$$= \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{x+y+z+t}{y} = \frac{x+y+z+t}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

$$\text{TH1 : } x+y+z+t \neq 0 \Rightarrow x=y=z=t \Rightarrow M=8$$

$$\text{TH2 : } x+y+z+t=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-(z+t) \\ y+z=-(t+x) \\ z+t=-(x+y) \\ t+x=-(y+z) \end{cases} \Rightarrow M=-4$$

Bài 16: Tính A biết $A = \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+a}$

HD:

$$\text{Ta có : } A = \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{c+a} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Bài 17: Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ và $a+b+c+d \neq 0$. Tính: $A = \frac{2a-b}{c+d} + \frac{2b-c}{d+a} + \frac{2c-d}{a+b} + \frac{2d-a}{b+c}$

HD:

Từ GT ta lấy Tử + Tử + Tử + Tử ta được :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow a = b = c = d$$

Thay vào A ta được : $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Bài 18: Cho a,b,c khác 0, thỏa mãn : $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$, Tính $P = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3}$

HD:

Với a, b, c khác 0, nghịch đảo giả thiết ta được :

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c$$

khi đó : $P = \frac{a^3 + a^3 + a^3}{3a^3} = 1$

Bài 19: Cho x,y,z là 3 số dương phân biệt, Tìm tỉ số $\frac{x}{y}$, biết: $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$

HD:

Từ GT ta có : $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = \frac{y+x+y+x}{x-z+z+y} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$

Bài 20: Cho $\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b-7}{4c} = \frac{b+c+3}{4a} = \frac{a+c+4}{4b}$, Tính $A = 20a + 11b + 2018c$

Bài 21: Cho $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$, Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{3a-2b}{2a-3b}$

HD :

Từ GT ta có :

$$6a = 5b \Rightarrow \frac{2}{3}A = \frac{2(3a-2b)}{3(2a-3b)} = \frac{6a-4b}{6a-9b} = \frac{5b-4b}{5b-9b} = \frac{b}{-4b} = \frac{-1}{4}$$

Bài 22: Cho a-b=13, Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{3a-b}{2a+13} - \frac{3b-a}{2b-13}$

HD :

Từ GT ta có : $a = b+13$ thay vào B ta được :

$$B = \frac{(3b+39)-b}{(2b+26)+13} - \frac{3b-b-13}{2b-13} = \frac{2b+39}{2b+39} - \frac{2b-13}{2b-13} = 0$$

Bài 23: Cho 3 số a,b,c có tổng khác 0 và thỏa mãn: $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$,

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a+b+3c}{a+b-2c}$ (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

Bài 24: Cho x: y: z = 5: 4: 3, Tính $P = \frac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$

HD :

Từ GT ta có :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+2y-3z}{5+8-9} = \frac{(x+2y-3z)}{4} = \frac{x-2y+3z}{5-8+9} = \frac{(x-2y+3z)}{6}$$

Khi đó : $\frac{x+2y-3z}{x-2y+3z} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P$

Bài 25: Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} & \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$, Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

HD :

$$\text{Từ GT} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} \quad \text{Và } (1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\text{Nên } \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} = 1 \Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{186}{245}$$

Bài 26: Cho $P = \frac{x+2y-3z}{x-2y+3z}$, Tính P biết x,y,z tỉ lệ với 5 : 4 : 3

HD:

$$\text{Từ GT : } \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x, z = \frac{3}{5}x \text{ thay vào ta được : } P = \frac{x+2 \cdot \frac{4}{5}x - 3 \cdot \frac{3}{5}x}{x - 2 \cdot \frac{4}{5}x + 3 \cdot \frac{3}{5}x} = \frac{2}{3}$$

Bài 27: Cho $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{a}{b}$ Hãy tính: $A = \frac{x-3y+2a}{y-3t+2b}$

HD:

$$\text{Từ GT ta có : } GT = \frac{x-3z+2a}{y-3t+2b} \Rightarrow A = \frac{x-3z+2a}{y-3t+2b} = \frac{x}{y} = \frac{z}{t} = \frac{a}{b}$$

Bài 28: Cho $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 4$, Tính $A = \frac{a-3b+2c}{a'-3b'+2c'}$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a-3b+2c}{a'-3b'+2c'} = 4 \Rightarrow A = 4$$

Bài 29: Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} & \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ Tính $A = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+2z}$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} = \frac{3x+4y+2z}{45+80+48} \Rightarrow A = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+2z} = \frac{186}{173}$$

Bài 30: Cho x:y:z=5:4:3 và 2x-3y+5z khác 0 Tính giá trị $A = \frac{2x+3y-5z}{2x-3y+5z}$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{2x+3y-5z}{10+12-15} = \frac{2x-3y+5z}{10-12+15} \Rightarrow A = \frac{2x+3y-5z}{2x-3y+5z} = \frac{7}{13}$$

Bài 31: Tính giá trị của các biểu thức sau: $A = \frac{2a-5b}{a-3b} - \frac{4a+b}{8a-2b}$ biết: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Từ GT} \Rightarrow 4a &= 3b \Rightarrow \frac{1}{2}A = \frac{2(2a-5b)}{4(a-3b)} - \frac{4a+b}{2(8a-2b)} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}A &= \frac{4a-10b}{4a-12b} - \frac{4a+b}{16a-4b} = \frac{3b-10b}{3b-12b} - \frac{3b+b}{12b-4b} = \frac{-7b}{-9b} - \frac{4b}{8b} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Bài 32: Cho $2a-b = \frac{2}{3}(a+b)$, Tính $M = \frac{a^4+5^4}{b^4+4^4}$

HD:

$$\text{Từ } 2a - b = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b \Rightarrow \frac{4a}{3} = \frac{5b}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a^4}{b^4} = \frac{5^4}{4^4} \Rightarrow M = \frac{625}{256}$$

Bài 33: Tính $A = \frac{abc}{a+b+c}$, biết a, b, c có quan hệ: $(a+b):(8-c):(b+c):(10+c) = 2:5:3:4$

HD:

$$\text{Từ GT ta có: } \frac{a+b}{2} = \frac{8-c}{5} = \frac{b+c}{3} = \frac{10+c}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} a+b=2t \\ 8-c=5t \\ b+c=3t \\ 10+c=4t \end{cases} \Rightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \\ c=-2 \end{cases}$$

Bài 34: Cho $\frac{3x-y}{x+y} = \frac{3}{4}$, Tính $\frac{x}{y}$

Bài 35: Tính $P = \frac{x+y}{x-y}$ biết: $\frac{x}{y} = a (x, y \neq 0)$

HD :

$$\text{Vì } \frac{x}{y} = a \Rightarrow x = ay \Rightarrow P = \frac{ay+y}{ay-y} = \frac{a+1}{a-1}$$

Bài 36: Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{16}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $A = x+y+z$

HD :

$$\text{Từ GT} \Rightarrow 2x^3 - 1 = 15 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} \Rightarrow y = 57 \Rightarrow z = 23$$

Thay vào A ta được : $A = 2 + 57 + 23 = 82$

Bài 37: Tính $A = \frac{a+b}{b+c}$ biết: $\frac{b}{a} = 2, \frac{c}{b} = 3$

HD :

Từ GT $\Rightarrow b = 2a, c = 3b$ Thay vào A ta được :

$$A = \frac{a+2a}{b+3b} = \frac{3a}{4b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Bài 38: Cho $x = by + cz, y = ax + cz, z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$. Tính giá trị : $Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

HD :

Cộng theo vế của GT ta được : $x + y + z = 2(ax + by + cz)$, Thay x, y, z trở lại ta có :

$$\Rightarrow x + y + z = 2(z + cz) = 2z(1+c) \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{a+1} = \frac{2x}{x+y+z}, \frac{1}{b+1} = \frac{2y}{x+y+z}$, Khi đó ta có : $Q = 2$

Bài 39: Cho $a+b+c=2015$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{5}$, Tính $Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

HD :

$$\text{Ta có : } Q = \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3$$

$$Q = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = 2015 \cdot \frac{1}{5} - 3$$

Bài 40: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2010} = \frac{c}{2011}$

Tính giá trị của biểu thức: $M = 4(a-b)(b-c) - (c-a)^2$

HD:

$$\text{Từ GT ta có: } GT = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} a-b = -k \\ b-c = -k \\ c-a = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = 4.(-k).(-k) - (2k)^2 = 4k^2 - 4k^2 = 0$$

Bài 41: Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016}$, Tính giá trị của biểu thức:

$$M = 4(a-b)(b-c) - (c-a)^2$$

HD :

$$\text{Từ GT ta có: } GT = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} a-b = -k \\ b-c = -k \\ c-a = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = 4.(-k).(-k) - (2k)^2 = 4k^2 - 4k^2 = 0$$

Bài 42: Tính giá trị của: $B = (x+y)(y+z)(z+x)$, biết: $xyz = 2$ & $x+y+z = 0$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \begin{cases} x+y = -z \\ y+z = -x \\ z+x = -y \end{cases} \Rightarrow B = -x.y.z = -2$$

Bài 43: Tính biểu thức: $C = \frac{(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) \cdot (x^2 + y^2)(x^3 + y^3)(x^4 + y^4)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2}$ Với $x = -0, (3); y = \frac{1}{3}$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } x^3 = \frac{-1}{27}, y^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow C = 0$$

Bài 44: Cho a, b, c khác 0 và đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2013$,

Tính $A = c^2(a+b)$

DẠNG 3: CHỨNG MINH RẰNG

Bài 1: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b, $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$

c, $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

HD:

a, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + a\right) = \left(\frac{c}{d} + 1\right)$

b, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{c} - 1\right) = \left(\frac{b}{d} - 1\right) \Rightarrow \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$

c, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \left(1 - \frac{b}{a}\right) = \left(1 - \frac{d}{c}\right)$

Bài 2: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a, $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

b, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

c, Với $a^2 = b \cdot c$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$

HD:

a, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

b, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

c, GT $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{a+b}{c+a} = \frac{a-b}{c-a} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$

Bài 3: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a, $\frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$

b, với $b^2 = ac$ thì $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

c, $\frac{a}{b} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$

HD:

a, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2}$

b, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

c, GT $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3a+2c}{3b+2d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$

Bài 4: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Chứng minh rằng:

a, $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b, $\frac{2a+5b}{3a-4b} = \frac{2c+5d}{3c-4d}$

c, $\frac{2018a - 2019b}{2019c + 2020d} = \frac{2018c - 2019d}{2019a + 2020b}$

Bài 5: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$

HD:

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$

Bài 6: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Chứng minh rằng: $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

HD:

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{5a+3b}{5c+3d} = \frac{5a-3b}{5c-3d} \Rightarrow \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

Bài 7: Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

HD:

$$\text{Từ: } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} = \frac{a}{b}$$

Bài 8: Chứng minh rằng : nếu $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ Thì $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + d^2} = \frac{a}{d}$

HD :

$$\text{Từ GT } \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + d^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{d}$$

Bài 9: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Các số x, y, z, t thỏa mãn : $xa + yb \neq 0, zc + td \neq 0$. CMR : $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$

HD :

$$\text{Từ GT } \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{ax}{cx} = \frac{by}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy} = \frac{az}{cz} = \frac{tb}{td} = \frac{az + tb}{cz + td} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 10: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, Chứng minh rằng: $\frac{a.d}{c.d} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2}$ và $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a.b}{c.d} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \\ \text{và } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} &\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Bài 11: Cho a, b, c $\in \mathbb{R}$, và a, b, c $\neq 0$, thỏa mãn: $b^2 = a.c$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{(a + 2012b)^2}{(b + 2012c)^2}$

HD:

$$b^2 = a.c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a + 2012b}{b + 2012c} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{(a + 2012b)^2}{(b + 2012c)^2} = \frac{a}{c}$$

Bài 12: Cho: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$$

Bài 13: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{a^2 + ac}{c^2 - ac} = \frac{b^2 + bd}{d^2 - bd}$

Bài 14: Cho 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn: $a_2^2 = a_1.a_3$, $a_3^2 = a_2.a_4$, Chứng minh : $\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$

HD:

$$\text{Từ GT } \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_2^3 + a_3^3 + a_4^3} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4}$$

Bài 15: Cho $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{2018}}{a_{2019}}$, CMR: $\frac{a}{a_{2019}} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}}{a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}}\right)^{2018}$

HD :

$$\text{Từ GT ta có : } \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2018}}{a_{2019}} = \left(\frac{a_1}{a_{2018}} \right)^{2018} = \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2018}}{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2019}} \right)^{2018}$$

Bài 16: Cho $a, b, c \neq 0$, t/m $b^2 = ac$ khi đó $\left(\frac{a + 2014b}{b + 2014c} \right)^n = \frac{a}{c}$, Khi đó $n = ?$

HD:

$$\text{Từ: } b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a + 2014b}{b + 2014c} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^n = \left(\frac{b}{c} \right)^n = \frac{a}{c}$$

$$\text{Mà } \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \Rightarrow n = 2$$

Bài 17: Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} = \frac{b}{d}$, CMR: $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{c^3 + b^3 - d^3} = \frac{a}{d}$

HD :

$$\text{Ta có : } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{c^3} = \frac{c^3}{b^3} = \frac{b^3}{d^3} = \frac{a}{d}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau : } \frac{a^3}{c^3} = \frac{c^3}{b^3} = \frac{b^3}{d^3} = \frac{a}{d} = \frac{a^3 + c^3 - b^3}{c^3 + b^3 - d^3}$$

Bài 18: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR : $\frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(a + c)^{1994}}{(b + d)^{1994}}$

HD :

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a^{1994} + c^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = \frac{(k.b)^{1994} + (k.d)^{1994}}{b^{1994} + d^{1994}} = k^{1994}$$

$$\text{và } \frac{(a + c)^{1994}}{(b + d)^{1994}} = \frac{(kb + kd)^{1994}}{(b + d)^{1994}} = k^{1994}$$

Bài 19: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$, Với điều kiện mẫu thức xác định

HD:

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k.b \\ c = k.d \end{cases}, \text{ Thay vào biểu thức ta có:}$$

$$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} \quad \text{và} \quad \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$$

Bài 20: Cho các số a, b, c, x, y, z t/m $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, Chứng minh rằng: $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$

HD:

$$\text{Đặt: } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{bz - cy}{a} = \frac{bck - bck}{a} = 0, \text{ và } \frac{cx - az}{b} = 0, \text{ và } \frac{ay - bx}{c} = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 21: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR : $\frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2}$

HD :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \left(\frac{c}{d} \right)^2 \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{2010c^2}{2010d^2} = \frac{2009a^2}{2009b^2}$$

Bài 22: CMR : nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

HD:

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

Bài 23: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, c, d, c+d \neq 0$), CMR: $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

HD :

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Bài 24: Cho $b^2 = a.c, c^2 = b.d$, Chứng minh rằng:

a, $\frac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$ b, $\frac{a}{d} = \frac{a^3+8b^3+125c^3}{b^3+8c^3+125d^3}$

HD:

a, Từ GT ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{b+c-d} \Rightarrow \dots$

Bài 25: Cho a,b,c,d là các số hữu tỉ dương và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR : $(a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)$

HD :

Từ GT $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (1) và $\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{a+2c}{b+2d}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow$ Nhân chéo

Bài 26: Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, cmr: $\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$

HD:

Từ gt $\Rightarrow c^2 = a.b$, Khi đó: $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$ hay $\frac{b^2+c^2-a^2-c^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$

Bài 27: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{a^2+ac}{c^2-ac} = \frac{b^2+bd}{d^2-bd}$

HD:

Từ gt $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c-a}{d-b} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b} \cdot \frac{c}{d}$

$\Rightarrow \frac{a^2+ac}{b^2+bd} = \frac{c^2-ac}{d^2-ad} \Rightarrow \frac{a^2+ac}{c^2-ac} = \frac{b^2+bd}{d^2-bd}$

Bài 28: Cho $\frac{a}{k} = \frac{x}{a}, \frac{b}{k} = \frac{y}{b}$, CMR: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{y}$

HD :

Từ GT $\Rightarrow a^2 = kx, b^2 = ky \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$

Bài 29: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} (c \neq 0)$. CMR:

$$\text{a, } \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd} \qquad \text{b, } \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$$

HD:

$$\text{a, Vì } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{ab}{cd} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$$

$$\text{b, } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a^3}{c^3} = \frac{b^3}{d^3} = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3$$

Bài 30: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, CMR: $\frac{3a+5b}{3a-5b} = \frac{3c+5d}{3c-5d}$ và $\frac{ab}{cd} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$

HD:

$$\text{Từ GT } \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3a+5b}{3c+5d} = \frac{3a-5b}{3c-5d}$$

Bài 31: Cho $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} (a \neq b, c \neq a)$, Chứng minh rằng: $a^2 = b.c$

HD:

$$\text{Ta có: GT } \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} = \frac{2a}{2c} = \frac{2b}{2a} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 = bc$$

Bài 32: CMR: Nếu $\frac{a+2009}{a-2009} = \frac{b+2010}{b-2010}$ thì $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2010}$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a+2009}{b+2010} = \frac{a-2009}{b-2010} = \frac{2a}{2b} = \frac{2.2009}{2.2010} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2009}{2010} \Rightarrow \frac{a}{2009} = \frac{b}{2010}$$

Bài 33: Cho $\frac{a+5}{a-5} = \frac{b+6}{b-6}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$

HD:

$$\text{Từ GT } \Rightarrow \frac{a-5+10}{a-5} = \frac{b-6+12}{b-6} \Rightarrow \frac{10}{a-5} = \frac{12}{b-6} \Rightarrow \text{Nhân chéo} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 34: Cho $\frac{2a+13b}{3a-7b} = \frac{2c+13d}{3c-7d}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

HD:

$$\text{GT} \Rightarrow \frac{2a+13b}{2c+13d} = \frac{3a-7b}{3c-7d} = \frac{3(2a+13b)-2(3a-7b)}{3(2c+13d)-2(3c-7d)} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bài 35: Cho $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Bài 36: CMR: Nếu $\frac{u+2}{u-2} = \frac{v+2}{v-3}$ thì $\frac{u}{2} = \frac{v}{3}$

Bài 37: Cho $a = b+c$ và $c = \frac{bd}{b-d}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

HD:

$$\text{Từ GT } \Rightarrow (b-d)c = b.d \Rightarrow bc - cd = bd \Rightarrow bc = bd + cd = d(b+c) = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bài 38: Cho $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd}$, Với a, b, c, d $\neq 0$, Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{(a-b)^2}{(c-d)^2}$$

$$\text{TH1: } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Leftrightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{2b}{2d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{TH2: } \frac{a+b}{c+d} = \frac{b-a}{c-d} = \frac{2b}{2c} = \frac{2a}{2d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bài 39: Cho $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-2b}{c-2d}$, $\forall b, d \neq 0$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

HD:

Từ GT, Ta nhân chéo rồi rút gọn:

$$\text{Hoặc : } GT \Rightarrow \frac{a+b}{a-2b} = \frac{c+d}{c-2d}, \text{ Trừ 1 vào 2 vế ta được : } \frac{b}{d} = \frac{a-2b}{c-2d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bài 40: Cho $c \neq 0$ và $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c}$, CMR: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Bài 41: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$, $b \neq 0$, Chứng minh rằng: $c = 0$

HD:

$$\text{Ta có: } GT = \frac{(a+b+c)-(a-b+c)}{(a+b-c)-(a-b-c)} = \frac{2b}{2b} = 1 \Rightarrow a+b+c = a+b-c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Bài 42: Cho tỉ lệ thức: $\frac{a-b+c}{-a-b+c} = \frac{a+b+c}{-a+b+c}$ ($b \neq 0$), CMR: $a=0$

HD:

$$\text{Từ } \frac{a-b+c}{-a-b+c} = \frac{a+b+c}{-a+b+c} \Rightarrow \frac{a-b+c}{-a-b+c} - 1 = \frac{a+b+c}{-a+b+c} - 1 \Rightarrow \frac{2a}{-a-b+c} = \frac{2a}{-a+b+c}$$

Nếu $a \neq 0$ ta có $-a-b+c = -a+b+c \Rightarrow -b = b \Rightarrow b = 0$ vô lý $\Rightarrow a=0$

Bài 43: Cho a, b, c, d t/m: $\frac{a}{3b} = \frac{b}{3c} = \frac{c}{3d} = \frac{d}{3a}$, và $a+b+c+d \neq 0$, Chứng minh rằng: $a=b=c=d$

HD:

$$\text{Từ GT ta có: } GT = \frac{a}{3b} = \frac{b}{3c} = \frac{c}{3d} = \frac{d}{3a} = \frac{a+b+c+d}{3(a+b+c+d)} = \frac{1}{3} \Rightarrow a=b=c=d$$

Bài 44: Cho $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_9}{a_1}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_9 \neq 0$, CMR: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_9$

HD :

Từ GT cộng tử với tử, mẫu với mẫu

Bài 45: Cho tỉ lệ thức: $\frac{ab}{bc} = \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$), CMR: $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$

HD:

$$GT = \frac{a.10+b}{b.10+c} = \frac{b}{c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a.b}{b.c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$$

Bài 46: CMR: nếu $a+c=2b$ và $2bd=c(b+d)$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với b, d khác 0

HD:

$$\text{Vì } a+c=2b \text{ nên từ } 2bd=c(b+d) \text{ ta có: } (a+c)d=c(b+d) \text{ hay } a.d=b.c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Bài 47: Chứng minh rằng: $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$, Thì $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$

HD:

Ta có: $\frac{x+y}{3}=\frac{z+x}{2}=\frac{x+y-z-x}{3-2}=y-z$ và $\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{5}=\frac{-y-z+z+x}{-3+5}=\frac{x-y}{5}$
 và $\frac{x-y}{2}=\frac{z+x}{5} \Rightarrow x-y=\frac{2(z+x)}{5} \Rightarrow \frac{x-y}{4}=\frac{z+x}{10}$ (1) và $\frac{z+x}{2}=y-z \Rightarrow \frac{y-z}{5}=\frac{z+x}{10}$ (2)
 Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$

Bài 48: Cho $a+d=b+c$, và $a^2+d^2=b^2+c^2$ ($b, d \neq 0$), CMR 4 số a, b, c, d có thể lập thành 1 tỉ lệ thức:

HD :

Vì $a+d=b+c \Rightarrow (a+d)^2=(b+c)^2 \Rightarrow 2ad=2bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Bài 49: Cho $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a}$, Chứng minh rằng 3 số a,b,c $\neq 0$, thì có thể lập thành 1 tỉ lệ thức

HD :

Vì: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+a}{c-a} \Rightarrow \frac{a+b}{c-a}=\frac{a-b}{c-a}=\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$

Bài 50: Chứng minh rằng : Nếu có a, b, c, d thỏa mãn :

$[ab(ab-2cd)+c^2d^2][ab(ab-2)+2(ab+1)]=0$ thì chúng lập thành 1 tỉ lệ thức :

HD :

Từ GT $\Rightarrow TH1: ab(ab-2cd)+c^2d^2=0 \Rightarrow (ab-cd)^2=0 \Rightarrow ab=cd \Rightarrow$ đpcm

TH2 : $[ab(ab-2)+2(ab+1)]=0 \Rightarrow a^2b^2-2ab+2ab+2=0 \Leftrightarrow a^2b^2=-2$ (Vô lý)

Bài 51: Cho $M=\frac{ax+by}{cx+dy}=k$ ($c, d \neq 0$), Chứng minh rằng, Giá trị của M không phụ thuộc vào x,y thì 4 số a,b,c,d lập thành 1 tỉ lệ thức :

HD :

Đặt $\frac{ax+by}{cx+dy}=k$, Chọn $x=0, y=1 \Rightarrow \frac{b}{d}=k$

Chọn $x=1, y=0 \Rightarrow \frac{a}{c}=k \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Bài 52: Chứng minh rằng : Nếu $a+c=2b$ và $2bd=c(b+d)$ thì $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

HD :

Từ GT $\Rightarrow (a+c)d=c(b+d)$, Nhân vào $\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 53: Cho x,y,z là các số khác 0 và $x^2=yz; y^2=xz; z^2=xy$ CMR : $x=y=z$

HD :

Từ gt $\Rightarrow$ 3 cặp phân số bằng nhau

Bài 54: Cho a,b,c,d,e,g $\in \mathbb{Z}$, Biết rằng b,d,g>0 và a.d - b.c=2009 và c.g - d.e =2009

a, So sánh $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ & $\frac{e}{g}$ b, So sánh: $\frac{c}{d}$ & $\frac{a+e}{b+g}$

HD :

a, Từ GT ta có : $a.d > b.c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $c.g > d.e \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{e}{g} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{g}$

b, Từ GT ta có :

$a.d - b.c = c.g - d.e \Rightarrow a.d + d.e = c.g + b.c \Rightarrow d(a+e) = c(b+g) \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+g}$

Bài 55: Chứng minh rằng : Nếu $a^2 = bc$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$, Đảo lại có đúng không ?

HD :

$$\text{Từ GT} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a+c} = \frac{a-b}{c-a}$$

$$\text{Ngược lại : } \frac{a+b}{c+a} = \frac{a-b}{c-a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{a}{c} , \text{ vẫn đúng}$$

Bài 56: Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$,

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ GT} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} &= \frac{2a+b-c}{y} = \frac{4a-4b+c}{z} \\ &= \frac{(a+2b+c)+2(2a+b-c)+(4a-4b+c)}{x+2y+z} = \frac{a}{x+2y+z} \\ &= \frac{2(a+2b+c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)}{2x+y-z} = \frac{b}{2x+y-z} \\ &= \frac{4(a+2b+c)-4(2a+b-c)+(4a-4b+c)}{4x-4y+z} = \frac{c}{4x-4y+z} \\ \Rightarrow \frac{a}{x+2y+z} &= \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 57: Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$, Chứng minh : $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Từ GT} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} &= \frac{2a+b-c}{y} = \frac{4a-4b+c}{z} \\ &= \frac{(a+2b+c)+2(2a+b-c)+(4a-4b+c)}{x+2y+z} = \frac{9a}{x+2y+z} \\ &= \frac{2(a+2b+c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)}{2x+y-z} = \frac{9b}{2x+y-z} \\ &= \frac{4(a+2b+c)-4(2a+b-c)+(4a-4b+c)}{4x-4y+z} = \frac{9c}{4x-4y+z} \end{aligned}$$

Bài 58: Cho $\frac{2y+2z-x}{a} = \frac{2z+2x-y}{b} = \frac{2x+2y-z}{c}$, CMR: $\frac{x}{2b+2c-a} = \frac{y}{2c+2a-b} = \frac{z}{2a+2b-c}$

Bài 59: Cho $\frac{x}{a-2b+c} = \frac{y}{2a-b-c} = \frac{z}{4a+4b+c}$, CMR: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{z-y-2x} = \frac{c}{4x-4y+z}$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Nghịch đảo GT ta được: } \frac{a-2b+c}{x} &= \frac{2a-b-c}{y} = \frac{4a+4b+c}{z} \\ &= \frac{(a-2b+c)+2(2a-b-c)+(4a+4b+c)}{x+2y+z} = \frac{9a}{x+2y+z} \\ &= \frac{(4a+4b+c)-(2a-b-c)-2(a-2b+c)}{z-y-2x} = \frac{9b}{z-y-2x} \\ &= \frac{4(a-2b+c)-4(2a-b-c)+(4a+4b+c)}{4x-4y+z} = \frac{9c}{4x-4y+z} \end{aligned}$$

Bài 60: Cho dãy tỉ số: $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$, Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

HD:

$$\text{Từ GT} \Rightarrow \frac{bxz-cxy}{ax} = \frac{cxy-ayz}{by} = \frac{ayz-bxz}{cz} = \frac{(bxz-cxy) + (cxy-ayz) + (ayz-bxz)}{ax+by+cz} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bz=cy \\ cx=az \\ ay=bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Bài 61: Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$, CMR: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

HD:

$$GT = \frac{4(3x-2y) + 3(2z-4x) + 2(4y-3z)}{16+9+4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2z-4x=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Bài 62: Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$, Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{3c}$

HD :

Từ GT ta có :

$$\frac{2abz-3acy}{a^2} = \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2} = \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz-3cy=0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \text{ và } 3cx-az=0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Bài 63: Cho dãy $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013}$, Chứng minh rằng: $\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$

HD:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013} = \frac{a-c}{-4} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=-4k \\ a-b=-2k \\ b-c=-2k \end{cases} \Rightarrow \frac{(a-c)^2}{4} = \frac{(-4k)^2}{4} = 4k^2 \text{ và } (a-b)(b-c) = 4k^2 \Rightarrow VT=VP$$

Bài 64: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn: $\frac{x}{1998} = \frac{y}{1999} = \frac{z}{2000}$, CMR : $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$

HD:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow \frac{x-z}{-2} = \frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \Rightarrow \left(\frac{x-z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x-y}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{y-z}{-1}\right) \Rightarrow \frac{(x-z)^3}{8} = (x-y)^2(y-z)$$

Bài 65: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn: $by+cz=a$, $ax+cz=b$, $ax+by=c$, với a,b,c là các số dương cho trước thì

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$ không phụ thuộc vào a,b,c

HD:

$$\text{Cộng theo về các GT ta được: } a+b+c = 2(ax+by+cz) = 2(ax+a) = 2a(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{1}{y+1} = \frac{2b}{a+b+c}, \frac{1}{z+1} = \frac{2c}{a+b+c}$$

Khi đó: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$

Bài 66: Cho $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$, Chứng minh: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

HD:

Đặt: $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k \Rightarrow a = \frac{x^2 - yz}{k}, b = \frac{y^2 - zx}{k}, c = \frac{z^2 - xy}{k}$

$\Rightarrow a^2 - bc = \frac{(x^4 - 2x^2yz + y^2z^2)}{k^2} - \frac{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz}{k^2} \Rightarrow \frac{a^2 - bc}{x} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^2 - ca}{y} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ và $\frac{c^2 - ab}{z} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \Rightarrow \text{đpcm}$

Bài 67: Cho a, b dương thỏa mãn: $a^{2006} + b^{2006} = a^{2004} + b^{2004}$, Chứng minh $\frac{a^2 + b^2}{32} \leq 2^{-4}$

HD:

Giả sử: $a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} = 2^{-4}$. Nếu: $a, b \neq 1$, Giả sử: $a \geq b \Rightarrow a^{2004}(a^2 - 1) = b^{2004}(1 - b^2)$

$\Rightarrow \frac{a^{2004}}{b^{2004}} = \frac{1 - b^2}{1 - a^2}$, Vì $a \geq b \Rightarrow 1 - b^2 \geq a^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} \leq \frac{2}{32} = 2^{-4}$

Bài 68: Cho a, b, c $\neq 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, chứng minh rằng: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq 0$

HD:

Từ GT $\Rightarrow \frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \leq 0$, Tương tự: $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \leq 0, \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq 0$

Cộng theo vế ta được: $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \leq 0$

Bài 69: Cho $x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{b-c}{b+c}, z = \frac{c-a}{c+a}$, Chứng minh $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

HD:

Xét $x+1 = \frac{a-b}{a+b} + 1 = \frac{2a}{a+b}$, Tương tự: $y+1 = \frac{2b}{b+c}, z+1 = \frac{2c}{c+a}$

Khi đó $VT = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự: $1-x = 1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}, 1-y = \frac{2c}{b+c}, 1-z = \frac{2a}{c+a}$

Khi đó: $VP = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VT$

Bài 70: Cho $x^2 + y^2 = 1$ và $b.x^2 = a.y^2$ Chứng minh rằng: $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

HD:

Từ $bx^2 + ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$

$$\frac{x^{2000}}{a^{1000}} = \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{1}{(a+b)^{1000}} \Rightarrow \frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$$

Bài 71: Chứng minh rằng nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{b-c}{b+c}, z = \frac{c-a}{c+a}$ Thì $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

HD:

$$\text{Xét } x+1 = \frac{a-b}{a+b} + 1 = \frac{2a}{a+b}, \text{ Tương tự: } y+1 = \frac{2b}{b+c}, z+1 = \frac{2c}{c+a}$$

$$\text{Khi đó } VT = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\text{Tương tự: } 1-x = 1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}, 1-y = \frac{2c}{b+c}, 1-z = \frac{2a}{c+a}$$

$$\text{Khi đó: } VP = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VT$$

Bài 72 : Biết $a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15$ và $c^2 + \frac{b^2}{3} = 6$ và $a^2 + ac + c^2 = 9$ và $a, c \neq 0; a \neq -c$, CMR : $\frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

HD:

$$\text{Ta có: } a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15 = 6 + 9 = (a^2 + ac + c^2) + \left(c^2 + \frac{b^2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2c^2 = ab - ac \Rightarrow 2c^2 = ab + ac - 2ac \Rightarrow 2c^2 + 2ac = ab + ac$$

$$\Rightarrow 2c(c+a) = a(b+c) \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$$

Bài 73: Cho $3^x = 9^{y-1}$ và $8^y - 2^{x+8} = 0$ Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

HD:

$$\text{Từ } 8^y = 2^{x+8} \Leftrightarrow 2^{3y} = 2^{x+8} \Rightarrow 3y = x+8 \quad (1)$$

$$\text{Và } 3^x = 9^{y-1} = 3^{2(y-1)} \Rightarrow x = 2y-2 \text{ thay vào (1) ta được: } 3y = 2y-2+8 \Leftrightarrow y = 6 \Rightarrow x = 10$$

Bài 73: Cho các số hữu tỉ: $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}; z = \frac{a+c}{b+d}$ với a, b, c, d số nguyên và $b, d > 0$.

CMR: nếu $x < y$ thì $x < z < y$

HD:

$$\text{Vì } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow a.d < b.c \text{ Xét tích } \begin{cases} a(b+d) = ab+ad \\ b(a+c) = ab+bc \end{cases} \Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

$$\text{Cmтт ta có: } \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Bài 74: Cho 3 số a, b, c đôi 1 khác nhau, CMR:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

HD :

$$\text{Ta có: } \frac{2}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{-1}{b-a}$$

$$\text{Tính tương tự ta có: } \frac{2}{b-c} = \frac{1}{b-c} + \frac{-1}{c-b}, \text{ và } \frac{2}{c-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{-1}{a-c}$$

$$\text{Cộng theo vế: } \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}\right) + \left(\frac{1}{b-c} + \frac{-1}{b-a}\right) + \left(\frac{1}{c-a} + \frac{-1}{c-b}\right) = VT$$

Bài 75: Cho $\frac{a}{a'} + \frac{b'}{b} = 1, \frac{b}{b'} + \frac{c'}{c} = 1$, CMR: $abc + a'b'c' = 0$

HD:

Từ GT ta có: $ab + a'b' = a'b \Rightarrow abc + a'b'c = a'bc$

Và $bc + b'c' = b'c \Rightarrow a'bc + a'b'c' = a'b'c$

Nên $(abc + a'b'c') + (a'b'c' + a'bc) = (a'bc + a'b'c) \Rightarrow \text{đpcm}$

Bài 76: Chứng minh rằng nếu: $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, và a, b, c khác nhau và khác 0, thì:

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

HD:

Vì a, b, c $\neq 0$, chia giả thiết cho

$$abc \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab} = \frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac} = \frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab} = \frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 77: Cho 4 số nguyên dương a, b, c, d trong đó b là trung bình cộng của a và c và $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)$,

Chứng minh rằng : 4 số đó hợp nên 1 tỉ lệ thức :

HD :

$$\text{Vì } b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a+c \text{ và } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right) \Rightarrow 2bd = c(b+d), \text{ Chuyển về bài trên 66}$$

Bài 78: Cho $P = \frac{ax^2 + bc + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$, CMR: Nếu $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, thì P không phụ thuộc vào x

HD :

$$\text{Đặt } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k \text{ rút ra rồi thay vào P}$$

Bài 79: Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

Chứng minh rằng : $P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$ Có giá trị nguyên

HD:

$$\text{Từ GT ta có: } \Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{x+y+z+t}{y} = \frac{x+y+z+t}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

$$\text{TH1: } x+y+z+t=0 \Rightarrow P=-4$$

$$\text{TH2: } x+y+z+t \neq 0 \Rightarrow P=4$$

Bài 80: Cho A, B, C tỉ lệ với a, b, c, CMR : $Q = \frac{Ax + By + C}{ax + by + c}$ không phụ thuộc vào x, y

HD :

$$\text{Ta có: } \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k \Rightarrow A=ka, B=kb, C=kc \Rightarrow Q = \frac{k(ax + by + c)}{ax + by + c} = k$$

Bài 81: Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn : $a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (Các tỉ số đều có

nghĩa), CMR : $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2$

Bài 82: Cho a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{12ab+1}{4b} = \frac{4bc+1}{c} = \frac{3ac+1}{3a}$, CMR: $3a = 4b = c$