

THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. BÀI GIẢNG Củng cố kiến thức nền

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

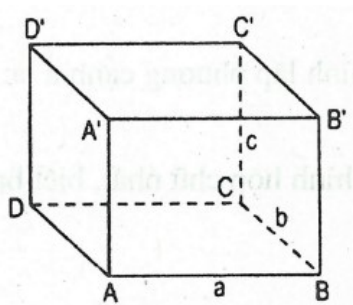
Ví dụ 1: Quan sát hình hộp chữ nhật ở hình 84:

- $A'A$ có vuông góc với AD hay không? Vì sao?
- $A'A$ có vuông góc với AB hay không? Vì sao?

Giải

Ta lần lượt có:

- $A'A$ có vuông góc với AD , bởi $ADD'A'$ là hình chữ nhật.
- $A'A$ có vuông góc với AB , bởi $ABB'A'$ là hình chữ nhật.



Hình 84

Tổng kết và mở rộng:

1. Khi đường thẳng $A'A$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB trong mặt phẳng $(ABCD)$ ta nói $A'A$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và kí hiệu $AA' \perp (ABCD)$.
2. Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì người ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau, ví dụ $(AA'B'B) \perp (ABCD)$ bởi mặt phẳng $(AA'B'B)$ chứa đường thẳng AA' vuông góc với $(ABCD)$.

Nhận xét: Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.

Ví dụ 2: Tìm trên hình 84:

- Các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Các mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Giải

Ta lần lượt có:

- Các đường thẳng $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Các mặt phẳng $(A'ABB')$, $(B'BCC')$, $(C'CDD')$, $(D'DAA')$ vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT.

Với hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c ta có:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2(a + b)c.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + b)c + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

- Thể tích:

$$V = abc.$$

Đặc biệt: Thể tích của hình lập phương cạnh a là:

$$V = a^3.$$

Ví dụ 3: Tính thể tích của hình hộp chữ nhật biết ba kích thước bằng 3cm, 4cm, 5cm.

Giải

Ta có ngay: $V = 3.4.5 = 60cm^3$.

Ví dụ 4: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó, biết:

a) $AB = 6cm$

b) $AC = 4\sqrt{2}cm$

c) $AC_1 = 3\sqrt{3}cm$

Giải

a) Ta có ngay:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.6^2 = 144cm^2$.

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.6^2 = 216cm^2$.

- Thể tích: $V = a^3 = 6^3 = 216cm^3$.

b) Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong $\triangle ABC$ vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 32 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 4cm.$$

Khi đó, hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.4^2 = 64cm^2$

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.4^2 = 96cm^2$

- Thể tích: $V = a^3 = 4^3 = 64cm^3$.

c) Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong $\triangle ACC_1$ vuông tại C, ta có:

$$C_1A^2 = AC^2 + C_1C^2 = AB^2 + BC^2 + C_1C^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 27 = 3a^2 \Leftrightarrow a = 3cm$$

Khi đó, hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có:

▪ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36cm^2$.

▪ Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54cm^2$

▪ Thể tích: $V = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng toán 1: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

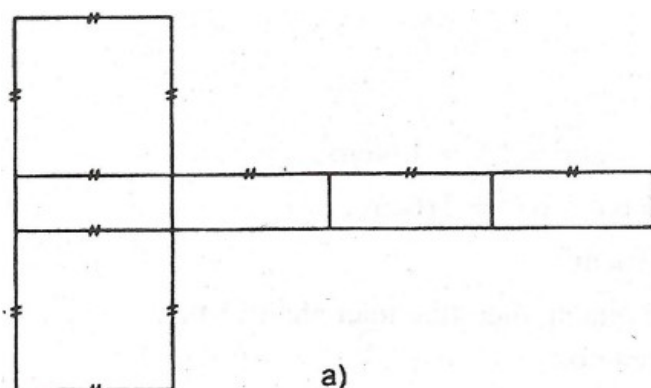
VÍ DỤ 1: Hình 87.

1. Gấp hình a) theo các nét đã chỉ ra thì có được một hình hộp chữ nhật hay không?

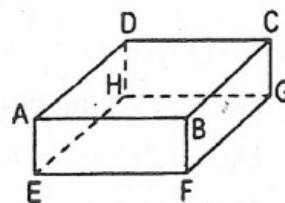
2. Kí hiệu các đỉnh hình hộp gấp được như hình b).

a) Đường thẳng BF vuông góc với mặt phẳng nào?

b) Hai mặt phẳng $(AEHD)$ và $(CGHD)$ vuông góc với nhau, vì sao?



a)



b)

Hình 87

👉 Hướng dẫn: Ta lần lượt:

▪ Với câu 2), sử dụng các định nghĩa về quan hệ vuông góc trong không gian.

✍ Giải

a) Ta có:

$ABFE$ và $BCGF$ là các hình chữ nhật.

Suy ra, $BF \perp AB$ và $BF \perp BC$.

Lại có:

AB và BC đều thuộc $(ABCD)$ và cắt nhau tại B .

Do đó:

$BF \perp (ABCD)$.

Tương tự $BF \perp (EFGH)$.

Vậy, BF vuông góc với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(EFGH)$.

b) Ta có:

$(AEHD) \perp (CGHD)$.

Lại có, AD cùng vuông góc với hai đường thẳng DC và $DH \subset (CGHD)$ và $AD \notin (CGHD)$.

Do đó:

$$AD \perp (CGHD).$$

Mà $AD \subset (AEHD)$.

Vậy, ta được $(AEHD) \perp (CGHD)$.

VÍ DỤ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Khi nối A_1 với C và A với C_1 thì hai đường thẳng A_1C và AC_1 có cắt nhau hay không? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không? Vì sao?

b) Đường thẳng AC song song với những mặt phẳng nào?

c) Đường thẳng AC vuông góc với những mặt phẳng nào?

👉 *Hướng dẫn:* Sử dụng định nghĩa về các mối quan hệ song song và vuông góc.

✍ *Giải*

a) Ta có:

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 = CC_1.$$

$$\Leftrightarrow AA_1C_1C \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow A_1C \text{ và } AC_1 \text{ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.}$$

Giả sử A_1C , AC_1 vuông góc với nhau, khi đó:

$$AA_1C_1C \text{ là hình thoi} \Leftrightarrow AA_1 = A_1C_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, A_1C và AC_1 không có thể vuông góc với nhau.

b) Ta có:

$$AC \parallel A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC \parallel (A_1B_1C_1D_1).$$

$$AC \parallel A_1C_1 \in (A_1C_1B) \Rightarrow AC \parallel (A_1C_1B).$$

$$AC \parallel A_1C_1 \in (A_1C_1D) \Rightarrow AC \parallel (A_1C_1D).$$

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, (A_1C_1B) , (A_1C_1D) song song với AC .

c) Ta có:

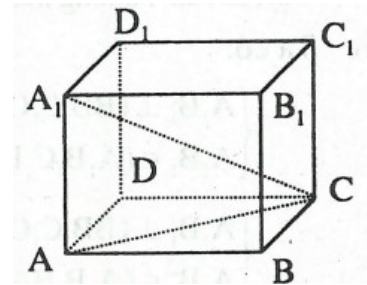
$$\begin{cases} AC \perp BB_1 \text{ (vì } BB_1 \perp (ABCD)) \\ AC \perp BD \text{ (vì } ABCD \text{ là hình vuông)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD_1B_1).$$

Vậy, có đúng mặt phẳng (BDD_1B_1) vuông góc với AC .

VÍ DỤ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

b) Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng (BB_1C_1C) .



c) Tứ giác B_1C_1DA là hình gì? Vì sao?

👉 *Hướng dẫn:* Sử dụng định nghĩa hình lập phương.

✍ *Giải*

a) Ta có:

$$\begin{cases} AA_1 \perp A_1B_1, \text{ vì } AA_1B_1B \text{ là hình chữ nhật} \\ AA_1 \perp A_1D_1, \text{ vì } AA_1D_1D \text{ là hình chữ nhật} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1).$$

Chúng minh tương tự, ta cũng có:

$$BB_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \quad CC_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \quad DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$$

Vậy tồn tại 4 đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$

b) Ta có :

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1C_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1BA) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1BA) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1CD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABC_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (ABC_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} CD \perp (BB_1C_1C) \\ CD \in (CDD_1C_1) \end{cases} \Rightarrow (CDD_1C_1) \perp (BB_1C_1C).$$

Vậy, tồn tại 6 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1), (A_1B_1BA), (A_1B_1CD), (ABCD), (ABC_1D_1), (CDD_1C_1)$ vuông góc với mặt phẳng (BB_1C_1C) .

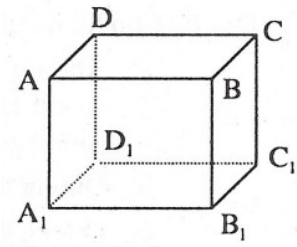
c) Vì ADD_1A_1 là hình chữ nhật nên:

$$\overset{//}{AD} = \overset{//}{A_1D_1} = \overset{//}{B_1C_1} \Rightarrow AD = B_1C_1 \Leftrightarrow B_1C_1DA \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác, ta có:

$$B_1C_1 \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow B_1C_1 \perp C_1D \Leftrightarrow \widehat{B_1C_1D} = 90^\circ.$$

Vậy, hình bình hành B_1C_1DA có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.



VÍ DỤ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, biết $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$. Tìm mối liên hệ giữa các đại lượng a, b, c để tứ giác AA_1C_1C là hình vuông.

👉 *Hướng dẫn:* Trước tiên, cần đi chứng tỏ AA_1C_1C là hình chữ nhật. Từ đó, thiết lập điều kiện $AA_1 = AC$, trong đó AC được tính bằng việc sử dụng hai lần định lý Py-ta-go.

✍ *Giải*

Ta có:

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1.$$

$$\Leftrightarrow AA_1C_1C \text{ là hình bình hành.}$$

Ta lại có:

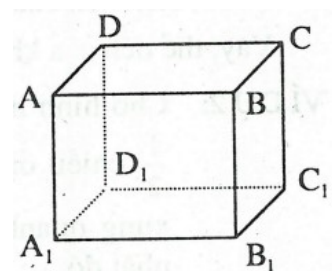
$$AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1 \Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^\circ.$$

Khi đó, hình bình hành AA_1C_1C có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là:

$$AA_1 = AC \Leftrightarrow AA_1^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy, để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là $c^2 = a^2 + b^2$.



Dạng toán 2: DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP

VÍ DỤ 1: a) Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là 480m^3 .

b) Diện tích toàn phần của một hình lập phương là 486m^2 . Thể tích của nó là bao nhiêu?

👉 *Hướng dẫn:* Ta lần lượt:

- Với câu a), sử dụng tính chất tỉ lệ thức và công thức tính thể tích của hình hộp.
- Với câu b), trước tiên sử dụng công thức tính diện tích toàn phần của hình lập phương để tính độ dài cạnh của nó.

✍ *Giải*

a) Gọi a, b, c là các kích thước của hình chữ nhật (đơn vị: cm).

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow k^3 = \frac{a.b.c}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8 \Rightarrow k = 2.$$

Suy ra $a = 6$; $b = 8$; $c = 10$.

Vậy các kích thước của hình hộp chữ nhật là:

$$a = 6\text{cm}, b = 8\text{cm}, c = 10\text{cm}.$$

b) Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông bằng nhau.

Gọi a là cạnh của hình vuông (đơn vị: mét).

Ta có, diện tích của hình vuông là: $a^2 = 486 : 6 = 81(\text{m}^2) \Rightarrow a = 9(\text{m})$.

Vậy, thể tích của khối lập phương là : $V = a^3 = 9^3 = 729m^3$.

VÍ DỤ 2: Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài và chiều cao gấp 3 lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

👉 *Hướng dẫn*: Sử dụng các công thức có sẵn sau khi có được độ dài của ba kích thước hình hộp chữ nhật.

✍ *Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài*, *chiều rộng*, *chiều cao*, từ giả thiết ta có:

$$a = 6cm, b = \frac{1}{2}a = 3cm, c = 3b = 9cm.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 162cm^2$$

- Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 162 + 2.6.3 = 198cm^2$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = a.b.c = 162cm^3.$$

VÍ DỤ 3: Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm, và chiều cao 0,5dm và thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu đêximet? (Giả sử toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể)

✍ *Giải*

Thể tích của 25 viên gạch là: $V = (2.1.0,5).25 = 25(dm^3)$.

Diện tích đáy thùng là $7.7 = 49(dm^2)$.

Chiều cao của nước dâng lên thêm khi bỏ gạch vào thùng là:

$$h = \frac{V}{S} = \frac{25}{49} \approx 0,51(dm).$$

Vậy, mực nước trong thùng cách miệng thùng là:

$$7 - (4 + 0,51) = 2,49(dm).$$

VÍ DỤ 4: Một bể nước hình chữ nhật có chiều dài 2m. Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể 120 thùng nước, mỗi thùng chứa 20 lít thì mực nước của bể cao 0,8m.

a) Tính chiều rộng của bể nước.

b) Người ta đổ thêm vào bể 60 thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu mét?

✍ *Giải*

a) Lượng nước đổ vào bể lúc đầu là: $V_1 = 120.20 = 2400 \text{ (lít)} = 2,4 \text{ (m}^3\text{)}.$

Diện tích đáy của bể là: $S = \frac{V_1}{h} = \frac{2,4}{0,8} = 3 \text{ (m}^2\text{)}.$

Đáy bể là hình chữ nhật nên $S_{\text{đáy}} = \text{dài} \times \text{rộng}.$

Suy ra, chiều rộng của đáy bể là: $\frac{S_{\text{đáy}}}{\text{chiều dài}} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (m)}.$

b) Lượng nước đổ vào bể cả hai lần là:

$$V = (120 + 60).20 = 3600 \text{ (lít)} = 3,6 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Vậy, chiều cao của bể là: $h = \frac{V}{S} = \frac{3,6}{3} = 1,2 \text{ (m)}.$

VÍ DỤ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, biết $AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình đó.

✍ Giải

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a .

Trong $\triangle ABC$ vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 8 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ cm}.$$

Khi đó, hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có:

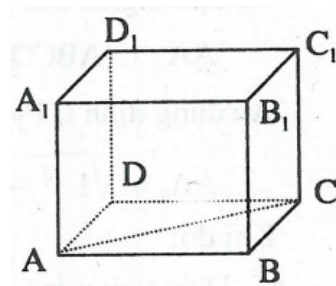
▪ Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 4a^2 = 4.2^2 = 16 \text{ cm}^2.$$

▪ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 6a^2 = 6.2^2 = 24 \text{ cm}^2.$$

▪ Thể tích: $V = a^3 = 2^3 = 8 \text{ cm}^3.$



VÍ DỤ 6: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có diện tích mặt chéo ACC_1A_1 bằng $9\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.

✍ Giải

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a .

Trong $\triangle ABC$ vuông cân tại B , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Diện tích mặt chéo ACC_1A_1 được cho bởi:

$$S = AA_1 \cdot AC \Leftrightarrow 9\sqrt{2} = a \cdot a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3 \text{ cm}.$$

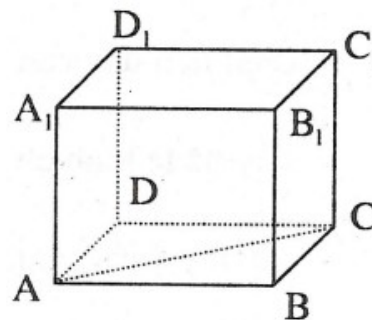
Khi đó, hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có:

▪ Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 4a^2 = 4 \cdot 3^2 = 36 \text{ cm}^2.$$

▪ Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$.

▪ Thể tích: $V = a^3 = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$.



VÍ DỤ 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Biết $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ và $A_1C = 13 \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

✍ Giải

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài*, *chiều rộng*, *chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và AA_1 .

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$, ta được:

$$BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 (\text{cm}).$$

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC \Leftrightarrow \triangle AA_1C \text{ vuông tại } A.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle AA_1C$, ta được:

$$AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 (\text{cm}).$$

Khi đó:

▪ Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

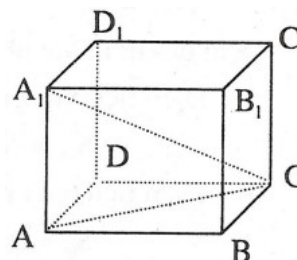
$$S_{xq} = 2(AB + BC) \cdot AA_1 = 168 \text{ cm}^2$$

▪ Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 168 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 192 \text{ cm}^2$$

▪ Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB \cdot BC \cdot AA_1 = 144 \text{ cm}^3.$$



VÍ DỤ 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Biết $AB = 3 \text{ cm}$, $AA_1 = 6 \text{ cm}$ và $S_{AA_1C_1C} = 30 \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

✍ Giải

Ta có:

$$AA_1 \parallel BB_1 = CC_1 \Rightarrow AA_1 \parallel CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C \text{ là hình bình hành.}$$

Ta lại có:

$$AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1 \Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^\circ.$$

Khi đó, hình bình hành AA_1C_1C có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Gọi S là diện tích của hình chữ nhật AA_1C_1C , ta có:

$$S = AA_1 \cdot AC \Leftrightarrow 30 = 6 \cdot AC \Leftrightarrow AC = 5 \text{ cm}.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$, ta được:

$$BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}.$$

Khi đó:

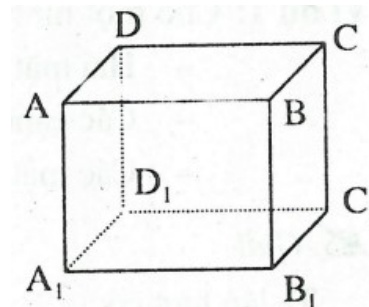
- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC) \cdot AA_1 = 84 \text{ cm}^2$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

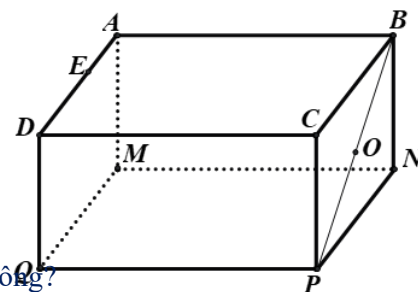
$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 84 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 108 \text{ cm}^2$$

- Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V = AB \cdot BC \cdot AA_1 = 72 \text{ cm}^3$.



PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ (hình vẽ)

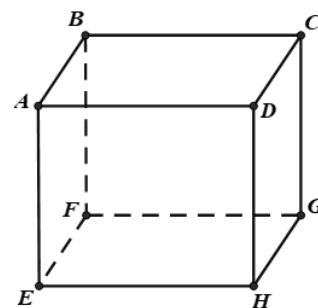


- Kể tên những cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật.
- Kể tên ba đường thẳng nào cắt nhau tại điểm A ?
- Nếu O là trung điểm của đoạn thẳng BP thì O có là điểm thuộc đoạn thẳng NC không?
- Nếu E là điểm thuộc cạnh AD thì E có thể là điểm thuộc cạnh BN không?
- Kể tên các đường thẳng song song với:
 - AM
 - AD
 - PQ
- Kể tên các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(MNPQ)$.
- Đường thẳng BC song song với những mặt phẳng nào?
- Đường thẳng DP song song với những mặt phẳng nào? Tại sao?
- Hai mặt phẳng nào cắt nhau theo đường thẳng AM ?
- Mặt phẳng $(ABNM)$ và mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt nhau theo đường thẳng nào?
- Các cặp mặt phẳng nào song song với nhau?
- Mặt phẳng (BMP) song song với mặt phẳng nào? Tại sao?
- Đường thẳng AM vuông góc với những mặt phẳng nào?
- Hai mặt phẳng $(ABNM)$ và $(ADQM)$ có vuông góc với nhau không? Tại sao?

o) Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $BN = 4\text{ cm}$, $MQ = 5\text{ cm}$. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp chữ nhật và độ dài CM .

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ (hình vẽ)

- Đường thẳng AB và đường thẳng HG có song song với nhau không?
- Đường thẳng BH và đường thẳng AG có cắt nhau không?
- Đường thẳng AG và đường thẳng CE có cắt nhau không?
- Đường thẳng CE và đường thẳng DF có cắt nhau không?
- Đường thẳng DF và đường thẳng BH có cắt nhau không?
- Đường thẳng BH và đường thẳng AE có cắt nhau không?
- Đường thẳng CH có song song với mặt phẳng (ABE) không?
- Đường thẳng BF có vuông góc với mặt phẳng (EGH) không?
- Đường thẳng BC có vuông góc với đường thẳng AF không?
- Mặt phẳng $(ABCD)$ có vuông góc với mặt phẳng (DHG) không?



k) Cho biết cạnh của hình lập phương bằng $\sqrt{5}\text{ cm}$. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình lập phương và độ dài đoạn BH

Bài 3: Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là 480 cm^3

Bài 4: Diện tích toàn phần của một hình lập phương là 486 cm^3 . Thể tích của nó là bao nhiêu?

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA' , DD' , BB' , CC' lần lượt lấy

các điểm E, F, G, H sao cho $AE = DF = \frac{2}{3}DD'$; $BG = CH = \frac{1}{3}CC'$. Chứng minh rằng mp(ADHG)

// mp(EFC'B').

Bài 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- Chứng minh rằng tứ giác $ADC'B'$ là hình chữ nhật.
- Tính diện tích của hình chữ nhật $ADC'B'$ biết: $AB = 12$, $AC' = 29$, $DD' = 16$.

Bài 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- Chứng minh rằng $\text{mp}(DCC'D') \perp \text{mp}(CBB'C')$
- Trong số sáu mặt của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp mặt phẳng vuông góc với nhau?

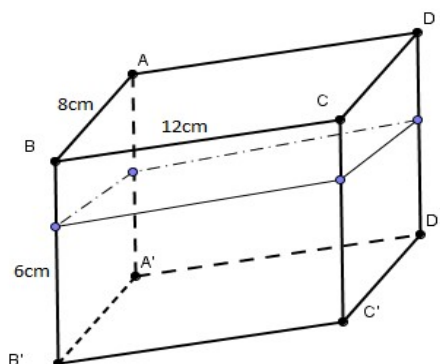
Bài 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Diện tích các mặt $ABCD$, $BCC'B'$ và $DCC'D'$ lần lượt là 108 cm^2 , 72 cm^2 và 96 cm^2 .

- Tính thể tích của hình hộp.
- Tính độ dài đường chéo của hình hộp.

Bài 9: Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật

(xem hình vẽ). Mức nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của

bình. Nếu ta đập bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt $(ADD'A')$ làm đáy) thì chiều cao của mức nước là bao nhiêu?



Bài 10: Một bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng 4cm, chiều dài bằng 8cm, chiều cao

bằng 5cm. Mức nước hiện tại bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bình. Nếu ta đổ nước trong bình vào một bình khác

hình lập phương có cạnh bằng 5cm thì chiều cao mức nước là bao nhiêu?

Bài 11: Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 60cm^3 và diện tích toàn phần bằng 94cm^2 . Tính chiều rộng, chiều dài của hình hộp chữ nhật biết chiều cao bằng 4cm.

LỜI GIẢI PHIẾU TỰ LUYỆN

Bài 1:

a) Các cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật là :

$$AB = DC = QP = MN; AM = BN = CP = DQ; AD = BC = NP = MQ$$

b) Ba đường thẳng cắt nhau tại điểm A là AD, AM, AB .

c) O là điểm thuộc đoạn thẳng NC .

Do tính chất của hình bình hành $BCPN$.

d) E là điểm thuộc cạnh AD thì E không thuộc cạnh BN

vì hai đường AD, BN chéo nhau.

e) • Các đường thẳng song song với AM là BN, CP, DQ .

• Các đường thẳng song song với AD là BC, NP, MQ .

• Các đường thẳng song song với PQ là AB, CD, MN .

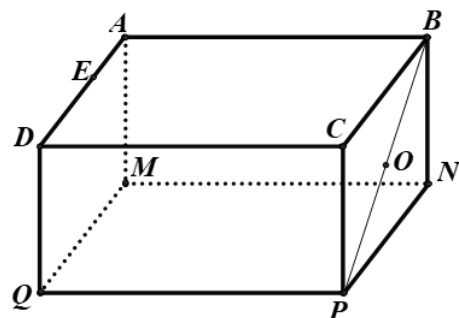
f) Các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(MNPQ)$ là mặt phẳng $(ABCD)$.

g) Đường thẳng BC song song với các mặt phẳng: $\text{mp}(NPQM)$, $\text{mp}(ADPN)$, $\text{mp}(ADQM)$.

h) Đường thẳng DP song song với $\text{mp}(ABNM)$ vì
$$\begin{cases} DP \parallel AN \\ DP \not\subset \text{mp}(ABNM) \\ AN \subset \text{mp}(ABNM) \end{cases}$$

i) Hai mặt phẳng cắt nhau theo đường thẳng AM là $\text{mp}(ABNM)$, $\text{mp}(ADQM)$.

j) Mặt phẳng $(ABNM)$ và mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt nhau theo đường thẳng MN .



k) Các mặt phẳng song song với nhau là : $mp(ADQM)$ và $mp(DCPN)$; $mp(ABNM)$ và $mp(DCPQ)$; $mp(ABCD)$ và $mp(MNPQ)$.

l) Mặt phẳng (BMP) song song song song với mặt phẳng (AQC) vì

$$\begin{cases} BM, BP \subset mp(BMP) \text{ và } BM \cap BP \\ AQ, QC \subset mp(AQC) \text{ và } AQ \cap QC \\ BM \parallel CQ, BP \parallel AQ \end{cases}$$

m) Đường thẳng AM vuông góc với hai mặt phẳng: $mp(ABCD)$; $mp(MNPQ)$.

n) Hai mặt phẳng $mp(ABNM)$ và $mp(ADQM)$ có vuông góc với nhau vì $\begin{cases} AB \subset mp(ABNM) \\ AB \perp mp(ADQM) \end{cases}$

o) Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là $S_p = 2(ab + bc + ca) = 2(6.5 + 5.4 + 4.6) = 148 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $AB.BN.MQ = 6.4.5 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$

Độ dài $CM = \sqrt{AB^2 + BN^2 + CP^2} = \sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{77} \text{ (cm)}$

Bài 2:

a) Xét $mp(ABCD)$ có $AB \parallel CD$

Xét $mp(CDHG)$ có $CD \parallel HG$

$$\Rightarrow AB \parallel HG$$

b) Xét $mp(ABGH)$ có BH, AG là hai đường chéo $\Rightarrow BH \cap AG$

c) AG và CE có cắt nhau vì nằm trong $(ACGE)$

d) CE và DF có cắt nhau vì cùng nằm trên mặt phẳng $(CDEF)$

e) DF và BH có cắt nhau vì cùng nằm trên $(BDHF)$

f) BH và AE không đồng phẳng vì không cùng nằm trên một mặt phẳng. (không cắt nhau)

g) Ta có $BCHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BE \\ BE \subset (ABE) \end{cases} \Rightarrow CH \parallel (ABE)$

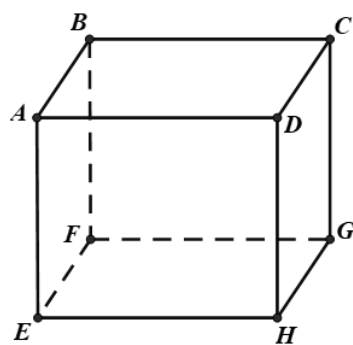
h) $\begin{cases} BF \perp (EFGH) \\ (EGH) \subset (EFGH) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (EGH)$

i) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (ABFE) \\ AF \subset (ABFE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AF$

j) $\begin{cases} BC \perp CG \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (CDHG) \Rightarrow (BCDA) \perp (CDHG) \Rightarrow (BCDA) \perp (DHG)$

$$k) S_p = 6.(\sqrt{5})^2 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = \sqrt{5}.\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}$$



Xét $\triangle EFH$ có $EF \perp EH$

$$FH = \sqrt{EF^2 + EH^2} = \sqrt{5+5} = \sqrt{10} (cm)$$

Xét $\triangle BFH$ có $BF \perp FH$ suy ra $BH = \sqrt{BF^2 + FH^2} = \sqrt{5+10} = \sqrt{15} (cm)$

Bài 3: Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ và $V = abc = 480 cm^3$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $k^3 = \frac{abc}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8 \Rightarrow k = 2$

Vậy các kích thước của hình hộp là $a = 6 cm$, $b = 8 cm$, $c = 10 cm$.

Bài 4: Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là $486 : 6 = 81 cm^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng $a = 9 cm$. Thể tích hình lập phương là

$$V = 9.9.9 = 729 cm^3$$

Bài 5: HD:

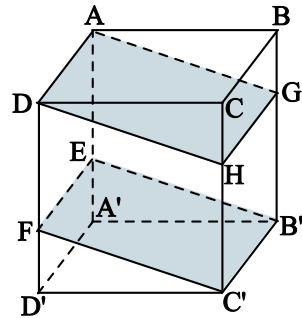
Tứ giác $BCHG$ có $BG = CH$; $BG \parallel CH$ nên là hình bình hành, suy ra $HG \parallel BC$.

Mặt khác $BC \parallel B'C'$ nên $HG \parallel B'C'$. Tứ giác $DHC'F$ có $DF \parallel HC'$ và $DF = HC'$ nên là hình bình hành, suy ra $DH = FC'$.

Xét $mp(ADHG)$ có HG và DH cắt nhau tại H.

Xét $mp(EFC'B')$ có $B'C'$ và FC' cắt nhau tại C' .

Từ đó suy ra $mp(ADHG) \parallel mp(EFC'B')$.



Bài 6:

a) Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật, suy ra $AD \parallel A'D'$ và $AD = A'D'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, suy ra $B'C' \parallel A'D'$ và $B'C' = A'D'$.

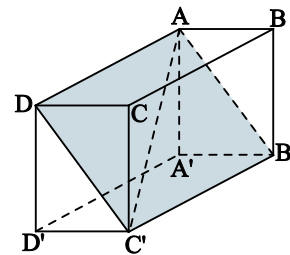
Do đó $AD \parallel B'C'$ và $AD = B'C'$.

Vậy tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành.

Ta có $AD \perp DD'$ và $AD \perp DC$ nên $AD \perp mp(DCCD')$

Suy ra $AD \perp DC'$

Do đó hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật.



b) Xét $\triangle DD'C'$ vuông tại D' có $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Xét $\triangle ADC'$ vuông tại D có $AD = \sqrt{AC'^2 - DC'^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$.

Vậy diện tích hình chữ nhật $ADC'B'$ là: $S = DC'.AD = 20.21 = 420$ (đvdt).

Bài 7: a) Vì $DD'C'C$ là hình chữ nhật nên $DC' \perp CC'$

Vì $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp B'C'$

Vậy $D'C'$ vuông góc với hai đường giao nhau của $mp(CBB'C')$ do đó

$$D'C' \perp mp(CBB'C')$$

Mặt khác, $D'C' \subset mp(DCC'D')$ nên $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta được các cặp mặt có chung một cạnh thì vuông góc với nhau. Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh nên có 12 cặp mặt vuông góc với nhau.

Bài 8: a) Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CC' lần lượt là a, b, c .

Ta có: $ab = 108$ (1); $bc = 72$ (2); $ca = 96$ (3)

$$\text{Suy ra } ab \cdot bc \cdot ca = 108 \cdot 72 \cdot 96 \text{ hay } (abc)^2 = 746496.$$

$$\text{Do đó } abc = \sqrt{746496} = 864(cm^3).$$

$$\text{Vậy thể tích của hình hộp là } V = 864 (cm^3). \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) và (1) ta có } c = \frac{abc}{ab} = \frac{864}{108} = 8(cm).$$

$$\text{Từ (4) và (2) ta có } a = \frac{abc}{bc} = \frac{864}{72} = 12(cm).$$

$$\text{Từ (4) và (3) ta có } b = \frac{abc}{ac} = \frac{864}{96} = 9(cm).$$

$$\text{Vậy đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài là: } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = 17(cm).$$

Bài 9: Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là

$$V_1 = 8 \cdot 12 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right) = 384cm^3$$

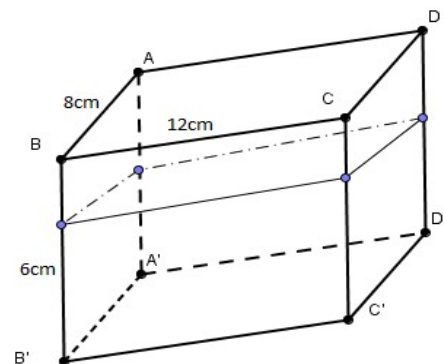
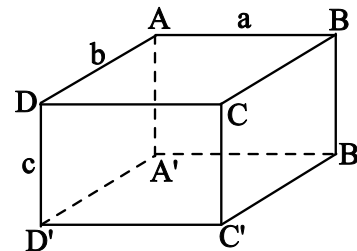
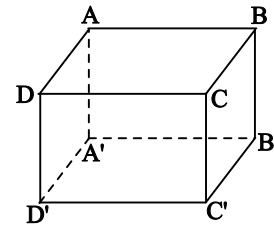
Nếu chọn $(ADD'A')$ làm đáy. Gọi h là chiều cao mực nước

$$\text{mới, ta có thể tích } V_1 = 12 \cdot 6 \cdot h \Rightarrow 384 = 72h \Rightarrow h = 5,3cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 5,3 cm

Bài 10: Thể tích nước có trong hình hộp là

$$V = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 = 120cm^3$$



Gọi h là chiều cao của mực nước mới ở bình hình lập phương có cạnh là 5cm, ta có

$$h = \frac{V}{25} = \frac{120}{25} = 4,8\text{cm}$$

Bài 11: Gọi hai kích thước của hình hộp lần lượt là a, b

$$\text{Ta có } V = 4ab = 60\text{cm}^3 \Rightarrow ab = 15 \quad (1)$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2ph + 2ab$$

$$S_{tp} = 2(a + b) \cdot 4 + 2ab = 94$$

Hay $a + b = 8 \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 3$ hoặc $a = 3; b = 5$

Vậy hai kích thước của hình hộp chữ nhật là 3 cm và 5 cm

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====