

CHUYÊN ĐỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H, CMR: $BH.BD + CH.CE = BC^2$

HD:

Từ H kẻ $HK \perp BC$

Khi đó:

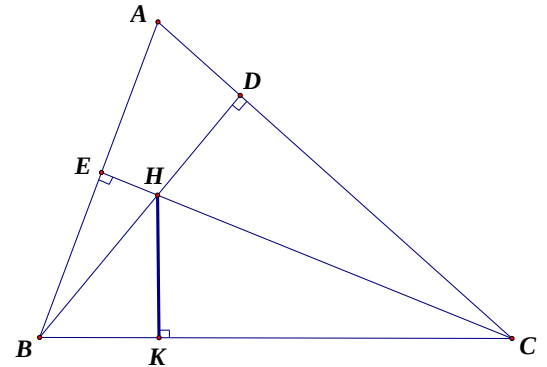
$$\triangle CKH \sim \triangle CEB (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CE} \Rightarrow CH.CE = CK.CB \quad (1)$$

Tương tự:

$$\triangle BKH \sim \triangle BDC (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BK}{BD} \Rightarrow BH.BD = BK.BC \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$VT = CK.BC + BK.BC = BC(BK + KC) = BC^2$$



Bài 2: Cho $\triangle BHC$ có $\angle BHC$ tù, Vẽ BE vuông góc với CH tại E và CD vuông góc với BH tại D

CMR: $BH.BD + CH.CE = BC^2$

HD:

Kẻ: $HG \perp BC \Rightarrow \triangle CGH \sim \triangle CEB (g.g)$

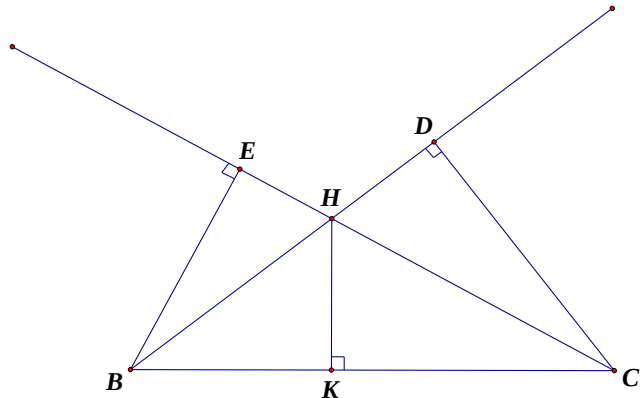
$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CG}{CE} \Rightarrow CH.CE = BC.CG \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\triangle BGH \sim \triangle BDC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BG}{BD} \Rightarrow BH.BD = BC.BG \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$VT = BC.CG + BC.BG = BC(CG + GB) = BC^2$$



Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có góc A bằng 120° , AD là đường phân giác. CMR: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$

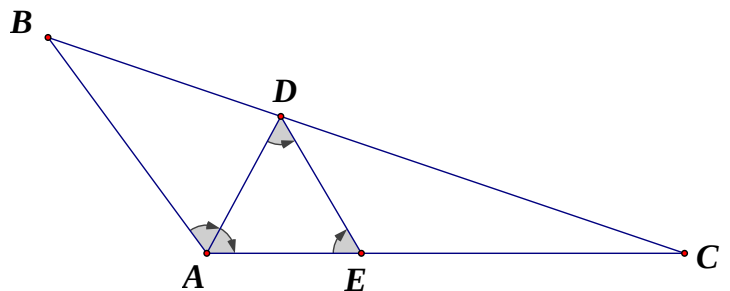
HD:

Kẻ $DE \parallel AB (E \in AC) \Rightarrow \triangle ADE$ là tam giác đều

$\triangle ABC$ có :

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC} = 1 - \frac{AE}{AC} = 1 - \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD} \text{ (đpcm)}$$



Bài 4: Cho A', B', C' nằm trên các cạnh BC, AC, AB của ΔABC , biết AA', BB', CC' đồng quy tại M , CMR: $\frac{AM}{A'M} = \frac{AB'}{CB'} + \frac{AC'}{BC'}$

HD:

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BB' tại D và cắt CC' tại E , Khi đó:

$$\Delta AME \text{ có } AE // A'C \Rightarrow \frac{AM}{A'M} = \frac{AE}{A'C} \quad (1)$$

$$\Delta AMD \text{ có } AD // A'B \Rightarrow \frac{AM}{A'M} = \frac{AD}{A'B} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{AM}{A'M} = \frac{AE}{A'C} = \frac{AD}{A'B} = \frac{AD + AE}{A'C + A'B} = \frac{DE}{BC} \quad (*)$$

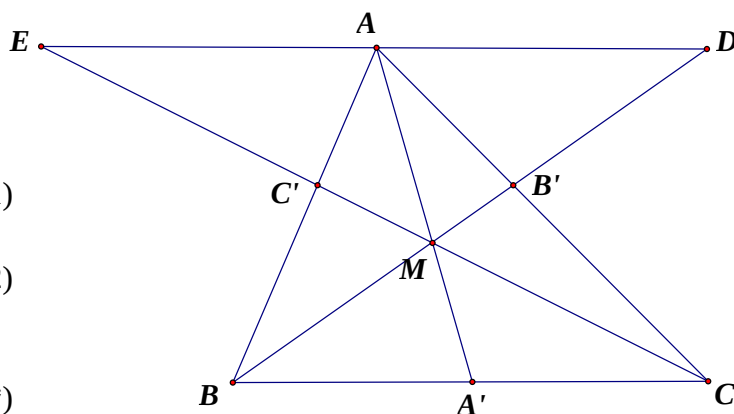
Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\Delta AB'D \text{ có } AD // BC \Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{AD}{BC} \quad (3)$$

$$\Delta AC'E \text{ có } AE // BC \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{AE}{BC}$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta có: } \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{BC'} = \frac{AD}{BC} + \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{BC} \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{AM}{A'M} = \frac{DE}{BC} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{BC'} \quad (\text{đpcm})$$



Bài 5: Cho ΔABC , M là điểm tùy ý nằm trong tam giác các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh BC, AC, AB tại A', B', C' , CMR:

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CM}{CC'} = 2$$

HD:

Từ A, M vẽ $AH, MK \perp BC \Rightarrow AH // MK$

$$\Delta A'AH \text{ có: } \frac{A'M}{A'A} = \frac{MK}{AH} = \frac{MK \cdot BC}{AH \cdot BC} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

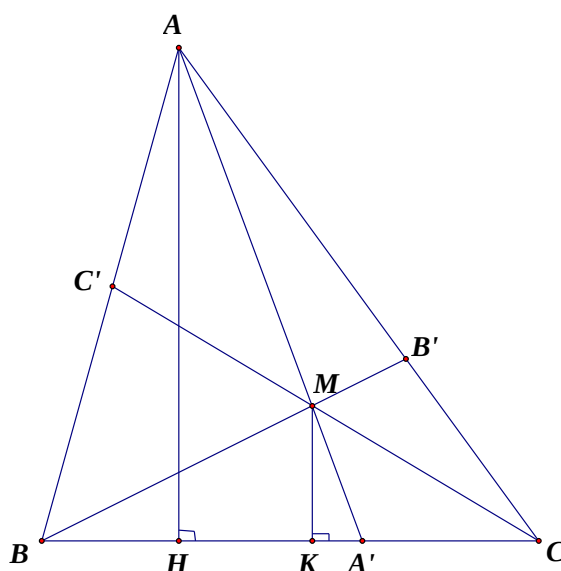
$$\text{Mặt khác: } \frac{A'M}{A'A} = \frac{AA' - AM}{AA'} = 1 - \frac{AM}{A'A} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{A'A} = 1 - \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{BM}{BB'} = 1 - \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{CM}{CC'} = 1 - \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$$

Cộng theo vế ta được đpcm



Bài 6: Cho ΔABC , M là điểm tùy ý nằm trong tam giác, đường thẳng đi qua M và trọng tâm G của tam giác cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C', CMR: $\frac{MA'}{GA'} + \frac{MB'}{GB'} + \frac{MC'}{GC'} = 3$

HD:

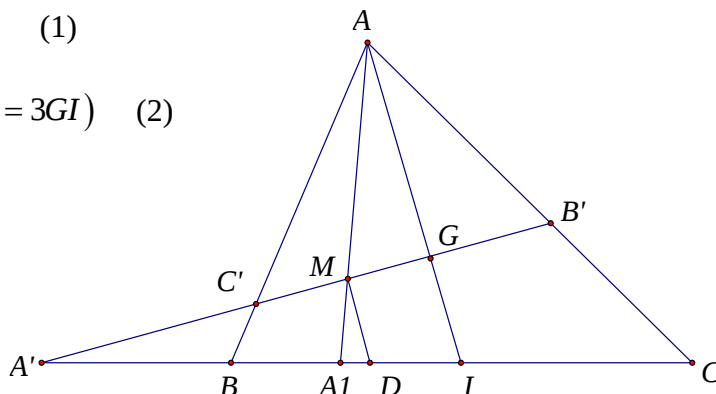
Gọi AM cắt BC tại A1, Từ M vẽ đường thẳng song song với AI cắt BC tại D, với I là trung điểm BC

$$\Delta A'GI \text{ có: } MD \parallel GI \Rightarrow \frac{A'M}{A'G} = \frac{MD}{GI} \quad (1)$$

$$\Delta A1AI \text{ có } MD \parallel GI \Rightarrow \frac{A1M}{A1A} = \frac{MD}{AI} = \frac{MD}{3GI} \quad (AI = 3GI) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{A'M}{A'G} = \frac{3A1M}{A1A}$$

Chứng minh tương tự ta có:



$$\frac{MB'}{GB'} = \frac{3.B1M}{B1B}, \frac{MC'}{GC'} = \frac{3.C1M}{C1C} \Rightarrow VT = 3 \left(\frac{A1M}{A1A} + \frac{B1M}{B1B} + \frac{C1M}{C1C} \right)$$

$$\text{mà ta có: từ bài 6} \Rightarrow \frac{A1M}{A1A} + \frac{B1M}{B1B} + \frac{C1M}{C1C} = 1 \Rightarrow VT = 3$$

Bài 7: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

a, CMR: ΔAEF đồng dạng ΔABC

b, H là giao các đường phân giác của ΔDEF

c, $BH.BE + CH.CF = BC^2$

HD:

$$\text{a, Ta có: } \Delta AEB \sim \Delta CFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c)$$

b, Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\Delta CED \sim \Delta CBA, (c.g.c) \text{ và } \Delta BFD \sim \Delta BCA (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \text{Do } \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC = \angle CED$$

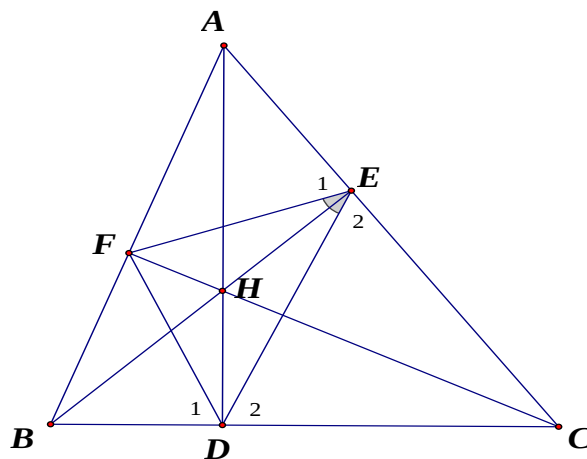
$$\text{Mà: } \angle BEF + \angle AEF = \angle BED + \angle CED (= 90^\circ) \Rightarrow \angle BED = \angle BEF \Rightarrow HE \text{ là phân giác góc E}$$

Chứng minh tương tự FH là phân giác góc F, HD là phân giác góc D

$$\text{c, } \Delta BHD \sim \Delta BCE (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BE = BD.BC \quad (1)$$

$$\text{và } \Delta CDH \sim \Delta CFB (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH.CF = CD.CB \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo về ta được đpcm



Bài 8: Cho $\triangle ABC$, AD là đường phân giác của tam giác, CMR : $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

HD:

Trên AD lấy điểm E sao cho:

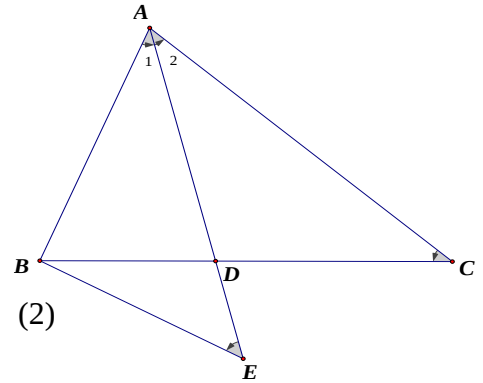
$$AEB = ACB \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{DC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE \quad (1)$$

lại có:

$$\triangle BDE \sim \triangle ADC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow BD.DC = AD.DE \quad (2)$$

Lấy (1) - (2) theo vế ta được: $AB.AC - BD.DC = AD(AE - DE) = AD^2$



Bài 10: Cho tứ giác ABCD, trong đó: $ABC = ADC$, $ABC + BCD < 180^\circ$, Gọi E là giao điểm của AB và CD, CMR: $AC^2 = CD.CE - AB.AE$

HD:

Trên nửa mặt phẳng bờ BE,

không chứa C vẽ tia Ex sao cho: $BEx = ACB$

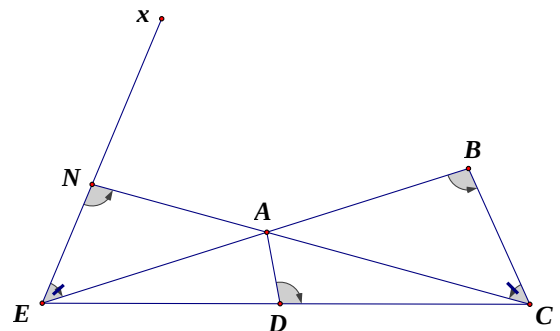
$\Rightarrow$ Ex cắt AC tại N $\Rightarrow N = B = D$

Ta có :

$$\triangle ABC \sim \triangle ANE (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AN \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \triangle CAD \sim \triangle CEN (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CN} = \frac{CA}{CE} \Rightarrow CD.CE = CACN \quad (2)$$

Lấy (2) - (1) theo vế ta được đpcm



Bài 11: Cho HBH ABCD đường chéo lớn AC, Từ C kẻ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD
CMR: Hệ thức: $AB.AE + AD.AF = AC^2$

HD:

Vì AC là đường chéo lớn $\Rightarrow D > 90^\circ \Rightarrow H \in AC$,
Kẻ $DH \perp AC$

$$\Rightarrow \triangle AHD \sim \triangle AFC (g.g)$$

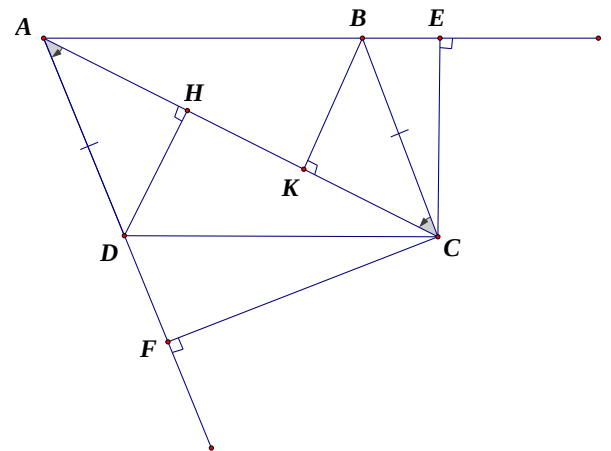
$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AD.AF = AC.AH \quad (1)$$

Tương tự kẻ $BK \perp AC \Rightarrow \triangle AKB \sim \triangle AEC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AK \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được: $AD.AF + AB.AE = AC(AH + AK) = AC.AC = AC^2$

Vì $\triangle ABK = \triangle CDH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AK = HC$



Bài 12: Cho ΔABC và 1 điểm O thuộc miền trong của tam giác, đường thẳng đi qua O và $\parallel$ với AB cắt BC tại D và cắt AC tại G , đường thẳng đi qua O và $\parallel BC$ cắt AB tại K và AC tại F , đường thẳng đi qua O và $\parallel AC$ cắt AB tại H và BC tại E

a, CMR: $\frac{KH}{AB} + \frac{DE}{BC} + \frac{GF}{AC} = 1$

b, CMR: $\frac{DG}{AB} + \frac{KF}{BC} + \frac{EH}{AC} = 2$

HD:

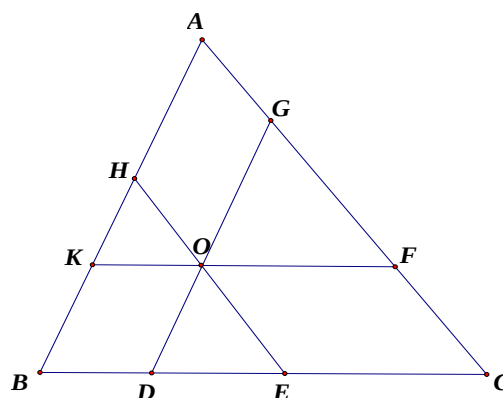
a, $\Delta HKO \sim \Delta ABC (g.g) \Rightarrow \frac{KH}{AB} = \frac{KO}{BC}$

$\Delta GOF \sim \Delta ABC (g.g) \Rightarrow \frac{GF}{AC} = \frac{OF}{BC}$

Nên $\frac{KH}{AB} + \frac{DE}{BC} + \frac{GF}{AC} = \frac{KO}{BC} + \frac{DE}{BC} + \frac{OF}{BC} = 1$

b, Ta có:

$\frac{DG}{AB} = \frac{DC}{BC}$ và $\frac{EH}{AC} = \frac{BE}{BC}$,



Khi đó:

$\frac{DG}{AB} + \frac{KF}{BC} + \frac{EH}{AC} = \frac{DC}{BC} + \frac{KF}{BC} + \frac{BE}{BC} = \frac{DE + EC + BD + EC + DB + DE}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$

Bài 13: Cho ΔABC có đường trung tuyến BM cắt tia phân giác CD tại N , CMR: $\frac{NC}{ND} - \frac{AC}{BC} = 1$

HD:

Vẽ $DE \parallel BM (E \in AC)$

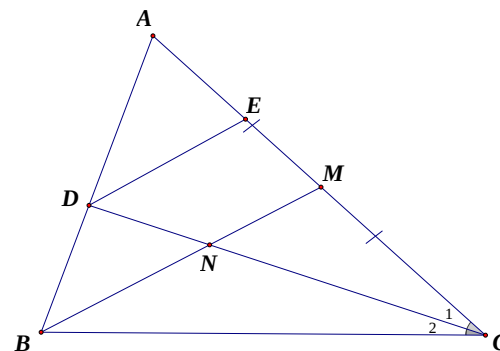
ΔQDE có $NM \parallel DE \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{MC}{ME} \quad (*)$

ΔABC có DC là tia phân giác nên: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$

và ΔABM có $DE \parallel BM \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EM} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ME} \quad (**)$

Lấy (*) - (**), ta có: $\frac{NC}{ND} - \frac{AC}{BC} = \frac{MC}{ME} - \frac{AE}{ME} = \frac{ME}{ME} = 1$



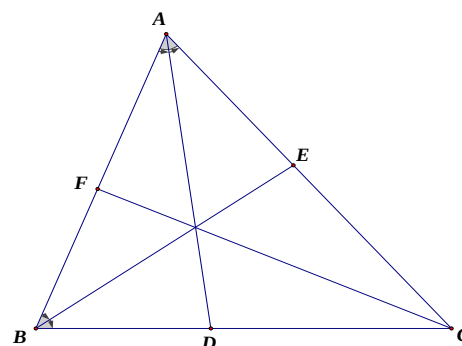
Bài 14: Cho ΔABC có các đường phân giác AD, BE, CF , CMR: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$

HD:

ΔABC có AD là tia phân giác nên: $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$,

Tương tự: $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}, \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$,

Nhân theo vế ta được đpcm



Bài 15: Cho HBH ABCD đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC tại E, K, G
CMR:

a, $AE^2 = EK.EG$

b, $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c, Khi a thay đổi thì tích $BK.DG$ có giá trị không đổi?

HD:

a, $\triangle ABE$ có $AM \parallel DG \Rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{EB}{ED}$ (1)

$\triangle ADE$ có $AD \parallel BK \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{EK}{EA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AE}{EG} = \frac{EK}{EA} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$

b, Từ: $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \Rightarrow \frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = 1$

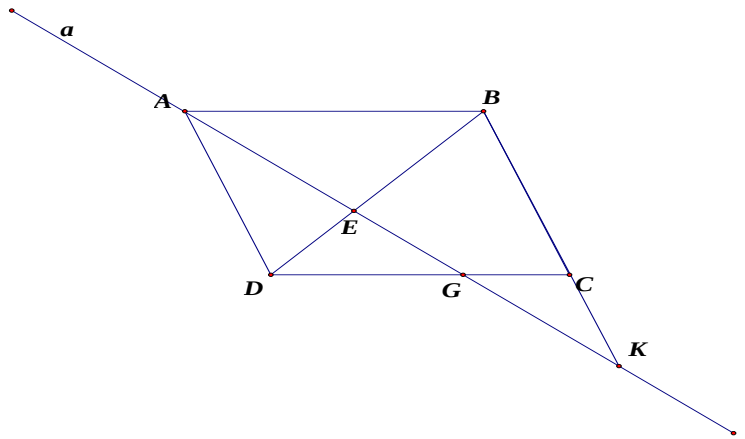
$\triangle ADE$ có $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow \frac{AE}{AE + EK} = \frac{ED}{ED + EB} \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{ED}{DB}$ (3)

Tương tự: $\triangle AEB$ có $AB \parallel DG \Rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED} \Rightarrow \frac{AE}{AE + EG} = \frac{BE}{BE + ED} \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ (4)

Khi đó: $\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{ED}{BD} + \frac{BE}{BD} = 1 \Rightarrow$ đpcm

c, ta có: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow BK = \frac{KC.AB}{CG}$ và $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow DG = \frac{AD.CG}{KC}$

Nhân theo vế ta được $\Rightarrow BK.DG = AB.AD$ không đổi



Bài 16: Cho $\triangle ABC$ nhọn, H là trực tâm, CMR: $\frac{BH.CH}{AB.AC} + \frac{CH.AH}{BC.BA} + \frac{AH.BH}{CA.CB} = 1$

HD:

Ta có: $\triangle BC'H \sim \triangle BB'A(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'}$

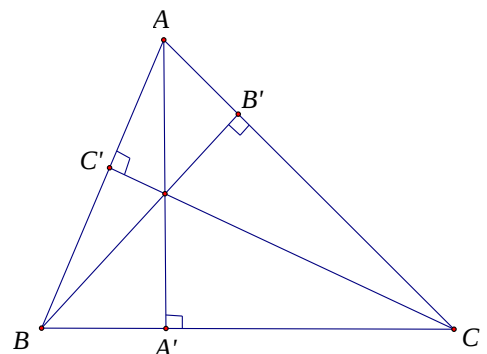
$\Rightarrow \frac{BH.CH}{AB.AC} = \frac{BC'.CH}{BB'.AC} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$ (1)

Tương tự: $\triangle CA'H \sim \triangle CC'B(g.g) \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{CA'}{CC'}$

$\Rightarrow \frac{CH.AH}{BC.BA} = \frac{CA'.AH}{CC'.BA} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$ (2)

$\triangle AHB' \sim \triangle ACA'(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB'}{AA'} \Rightarrow \frac{AB.BH}{CA.CB} = \frac{AB'.BH}{AA'.CB} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được: đpcm



Bài 17: Cho ΔABC , M là điểm nằm trong ΔABC , Gọi D là giao điểm của AM và BC, E là giao điểm của BM và CA, F là giao điểm của CM và AB, đường thẳng đi qua M và // với BC cắt DE, DF lần lượt tại K và I, CMR : MI=MK

HD:

Gọi IK cắt AB, AC lần lượt tại N và Q

$$\Delta ABD \text{ có } MN // BC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BD}$$

$$\Delta ABC \text{ có } NQ // BC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{NQ}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{NQ}{BC} \quad (1)$$

$$\Delta FDC \text{ có } IM // DC \Rightarrow \frac{IM}{DC} = \frac{FM}{FC},$$

$$\Delta FBC \text{ có } NM // BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{FM}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{DC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{IM}{MN} = \frac{DC}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) và (2) theo vế ta được: } \frac{IM}{BD} = \frac{DC \cdot NQ}{BC^2} \Rightarrow IM = \frac{DC \cdot NQ \cdot BD}{BC^2} \quad (*)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\Delta ADC \text{ có } MQ // DC \Rightarrow \frac{MQ}{DC} = \frac{AQ}{AC} \text{ và } \Delta ABC \text{ có } NQ // BC \Rightarrow \frac{NQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$$

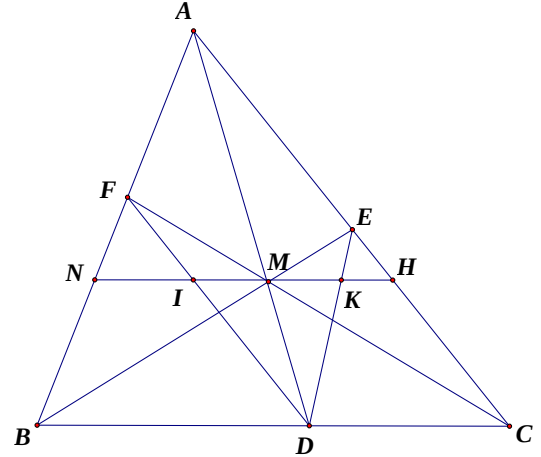
$$\text{Do đó: } \frac{MQ}{DC} = \frac{NQ}{BC} \quad (3)$$

$$\text{Và: } \Delta EBD \text{ có } MK // BD \Rightarrow \frac{MK}{BD} = \frac{EM}{EB}, \Delta EBC \text{ có } MQ // BC \Rightarrow \frac{MQ}{BC} = \frac{ME}{EB}$$

$$\text{Do đó: } \frac{MK}{BD} = \frac{MQ}{BC} \Rightarrow \frac{MK}{MQ} = \frac{BD}{BC} \quad (4)$$

$$\text{Nhân (3) với (4) ta được: } \frac{MK}{DC} = \frac{NQ \cdot BD}{BC^2} \Rightarrow MK = \frac{DC \cdot NQ \cdot BD}{BC^2} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có MI = MK



Bài 18: Cho ΔABC , các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G, K là điểm trên cạnh BC, đường thẳng qua K và // CN cắt AB ở D, đường thẳng qua K và // với BM cắt AC ở E, Gọi I là giao điểm của KG và DE, CMR: I là trung điểm của DE

HD:

Gọi DK cắt BG tại H, KE cắt GC tại O và GK cắt HO tại J

Tứ giác HGOK có: $\begin{cases} HK // GO \\ HG // KO \end{cases} \Rightarrow$ HGOK là hình bình hành

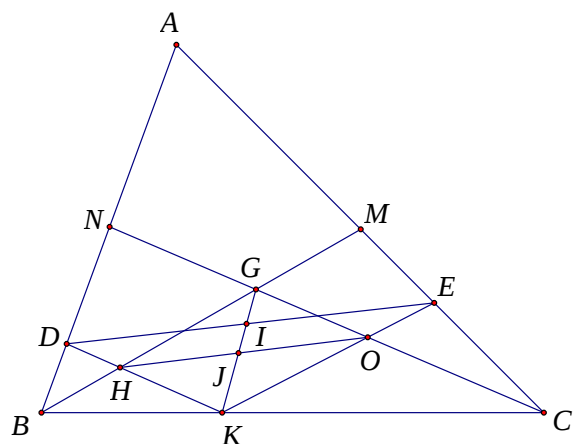
$\Rightarrow$ J là trung điểm của HO $\Rightarrow$ HJ=OJ

$$\Delta BNG \text{ có } DH // NG \Rightarrow \frac{DH}{NG} = \frac{BH}{BG} \quad (1)$$

$$\Delta BGC \text{ có } HK // GC \Rightarrow \frac{HK}{GC} = \frac{BH}{BG} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{DH}{NG} = \frac{HK}{GC} \Rightarrow \frac{DH}{HK} = \frac{NG}{GC} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\text{CMTT ta có: } \Delta CMG \text{ có } OE // GM \Rightarrow \frac{OE}{GM} = \frac{OC}{CG} \quad (3)$$



$$\triangle CBG \text{ có } OK // BG \Rightarrow \frac{OK}{GB} = \frac{OC}{CG} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{OE}{GM} = \frac{OK}{GB} \Rightarrow \frac{OE}{OK} = \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2} \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{DH}{HK} = \frac{OE}{OK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle DKE \text{ có } OH // DE$$

Lại có J là trung điểm HO $\Rightarrow$ I là trung điểm DE

Bài 19: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) có $BC = BD$, Gọi H là trung điểm của CD, đường thẳng đi qua H cắt AC, AD lần lượt tại E và F, CMR: $DBF = EBC$

HD:

Gọi BF cắt DC tại K, BE cắt DC tại I, và EF cắt AB tại G

$$\triangle FAB \text{ có } DK // AB \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{FD}{FA} \quad (1)$$

$$\triangle FAG \text{ có } DH // AG \Rightarrow \frac{DH}{AG} = \frac{FD}{FA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DH}{AG} \Rightarrow \frac{DK}{DH} = \frac{AB}{AG} \quad (*)$$

Tương tự:

$$\triangle EIC \text{ có } AB // IC \Rightarrow \frac{IC}{AB} = \frac{EC}{EA} \quad (3)$$

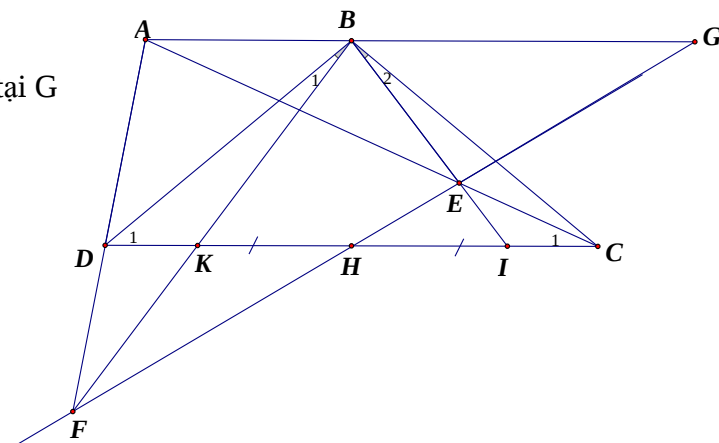
$$\triangle EHC \text{ có } HC // AB \Rightarrow \frac{HC}{AG} = \frac{EC}{EA} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) ta có: } \Rightarrow \frac{IC}{AB} = \frac{HC}{AG} \Rightarrow \frac{IC}{HC} = \frac{AB}{AG} \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow \frac{DK}{DH} = \frac{IC}{HC}, \text{ Mà } DH = HC \text{ (gt)} \Rightarrow DK = IC$$

Mặt khác: $BD = BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle BDC$ cân $\Rightarrow \angle BDK = \angle BCI$

$\Rightarrow \triangle BDK = \triangle BCI$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DBK = \angle CBI$ đpcm



Bài 20: Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, một đường thẳng bất kỳ qua G, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N, CMR: $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$

$$\text{M và N, CMR: } \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$$

HD:

Gọi O là trung điểm của BC,

Kẻ BH, CK lần lượt $//$ MN ($H, K \in AO$)

$$\triangle BOH = \triangle COK \text{ (g.c.g)} \Rightarrow OH = OK$$

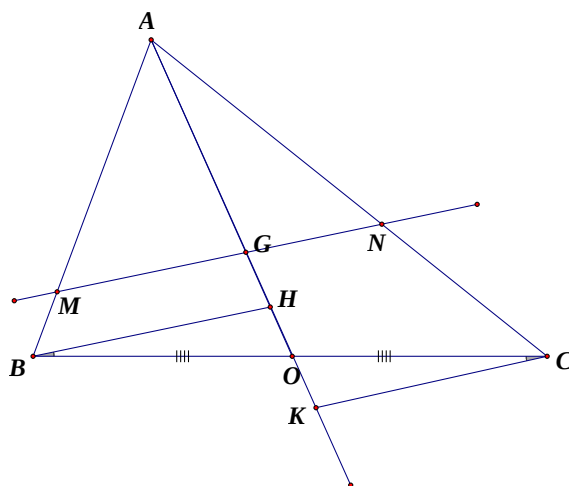
$$\triangle ABH \text{ có } MG // BH \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AH}{AG} \quad (1)$$

$$\triangle AKC \text{ có } GN // KC \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo về ta được:

(1)

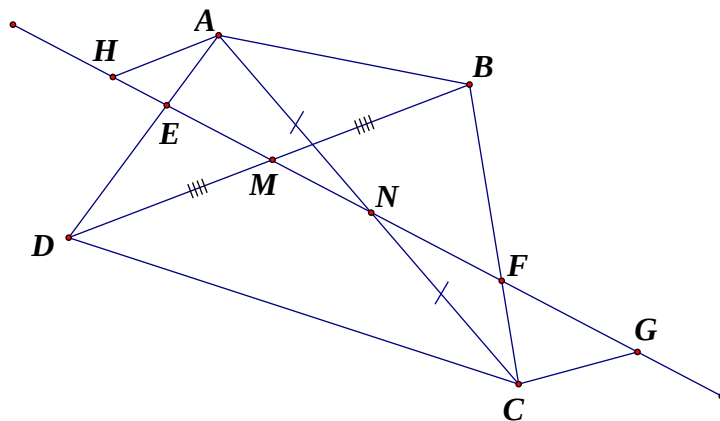
(2)



$$VT = \frac{AH}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AG + GH + AG + GH + HK}{AG} = \frac{2AG + 2GO}{AG} = \frac{3AG}{AG} = 3$$

Bài 21: Cho tứ giác ABCD, có M, N lần lượt là trung điểm của các đường chéo BD và AC (M ≠ N) đường thẳng MN cắt AD, BC lần lượt tại E và F, CMR: AE.BF=DE.CF

HD:



Từ A kẻ đường thẳng song song với BD cắt EF tại H

Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt EF tại G

$$\Delta AEH \text{ có } HA // DM \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AH}{DM} \quad (1)$$

$$\Delta CGF \text{ có } CG // BM \Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{BM}{CG} \Rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{CG}{BM} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác: } \Delta NAH = \Delta NCG (g.c.g) \Rightarrow AH = CG \quad (3) \text{ và } DM = BM$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có: } \frac{AE}{ED} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow AE.BF = ED.CF$$

Bài 22: Cho tam giác ABC, AD là đường trung tuyến, M là điểm nằm trên đoạn AD, gọi E là giao điểm của BM và AC, F là giao điểm của CM và AB, CMR: EF // BC

HD:

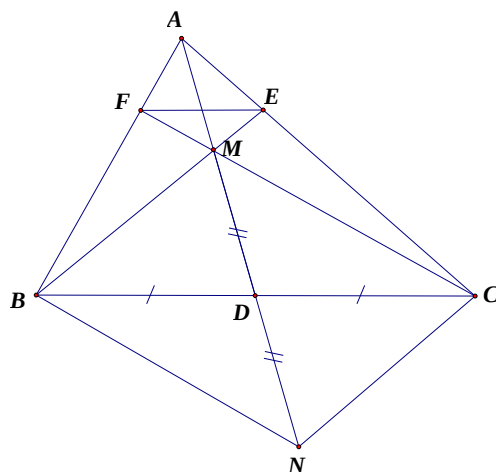
Lấy N trên tia đối của tia DM sao cho MD = ND

$$\Rightarrow \text{Tứ giác BMCN là hình bình hành} \Rightarrow \begin{cases} BM // NC \\ BN // MC \end{cases}$$

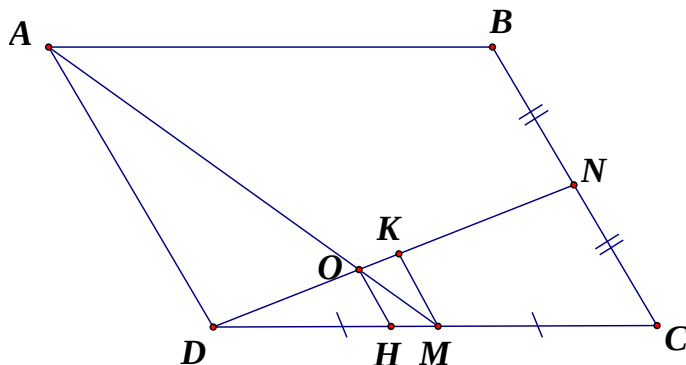
$$\Delta ABN \text{ có } FM // BN \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AN} \quad (1)$$

$$\Delta ANC \text{ có } ME // NC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow EF // BC$$



Bài 23: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CB, O là giao điểm của AM và DN, biết $\frac{OA}{OM} = 4, \frac{OD}{ON} = \frac{2}{3}$, CMR: ABCD là hình bình hành



HD:

Vẽ đường thẳng đi qua O và $\parallel AD$ cắt DC tại H

Vẽ đường thẳng đi qua M và $\parallel BC$ cắt DN tại K

Vì M là trung điểm của DC nên K là trung điểm DN

$$\Delta MAD \text{ có } OH \parallel AD \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{MH}{MD} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{DH}{DM} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{OA}{OM} = 4 \Rightarrow \frac{OA}{OM} + 1 = 5 \Rightarrow \frac{OA+OM}{OM} = \frac{AM}{OM} = 5 \Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \Delta DNC \text{ có } KM \parallel NC, \text{ mà } \frac{OD}{ON} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OD}{DN} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{DO}{DK} = \frac{4}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \parallel KM \Rightarrow AD \parallel BC$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow AB \parallel DC \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành

Bài 24: Cho tứ giác ABCD, có E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, đường thẳng EF cắt các đường thẳng AB, CD lần lượt tại M và N, CMR: MA.NC = MB.ND

HD:

Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt ME tại G

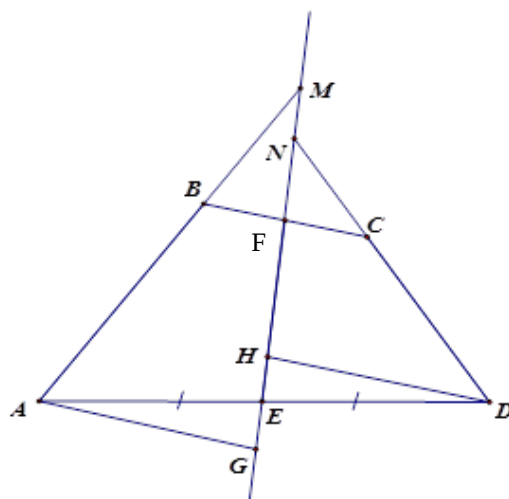
Từ D kẻ đường thẳng song song BC cắt EF tại H

$$\Rightarrow \Delta MAG \text{ có } BF \parallel AG \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MG} = \frac{BF}{AG}$$

$$\Delta NHD \text{ có } FC \parallel HD \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{FC}{HD} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } \Delta AEG = \Delta DEH (g.c.g) \Rightarrow HD = AG$$

Thay vào (1) ta được:



$$\Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{FC}{AG} = \frac{BF}{AG} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA \cdot NC = MB \cdot ND \text{ đpcm}$$

Bài 25: Cho tam giác ABC đều, gọi M, N lần lượt là các điểm trên AB, BC sao cho BM = BN, gọi G là trọng tâm của tam giác BMN, I là trung điểm của AN, P là trung điểm của MN

a/ CMR: $\triangle GPI$ và $\triangle GNC$ đồng dạng

b/ CMR: IC vuông góc với GI

HD:

a, Vì G là trọng tâm nên $GP \perp MN$,

$$\text{Lại có : } MA = NC \Rightarrow PI = \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}NC \text{ và } GP = \frac{1}{2}.GN$$

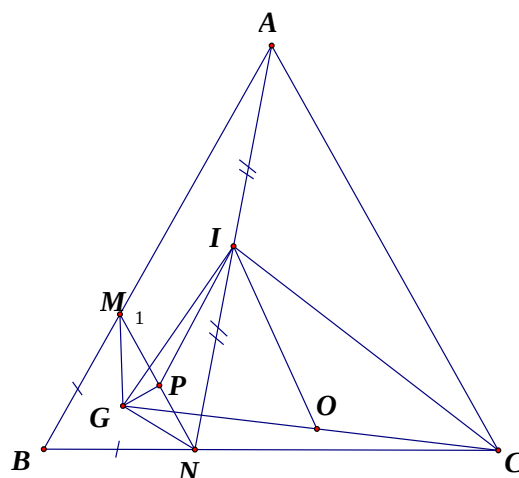
Vì $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \triangle BMN$ đều

$$\Rightarrow M_1 = 120^\circ \Rightarrow MIP = 60^\circ \Rightarrow GPI = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\text{Và } GNB = 30^\circ \Rightarrow GNC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle GPI \sim \triangle GNC (c.g.c)$$

b, $\triangle GIC$ có $GI = \frac{1}{2}.GC$ theo câu a $\Rightarrow \triangle GIC$ vuông tại I $\Rightarrow IC \perp GI$



Bài 26: Cho tam giác ABC nhọn, trên các đường cao BE, CF lấy các điểm theo thứ tự I, K sao cho $AIC = 90^\circ, AKB = 90^\circ$

a, CMR: $AI = AK$

b, Cho $A = 60^\circ, S_{ABC} = 120cm^2$, Tính diện tích tam giác AEF

HD:

$$a, \triangle AIE \sim \triangle ACI (g.g) \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AE}{AI} \Rightarrow AI^2 = AE \cdot AC \quad (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$\triangle AIK \sim \triangle AKB (g.g) \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AF}{AK} \Rightarrow AK^2 = AB \cdot AF \quad (2)$$

Lại có

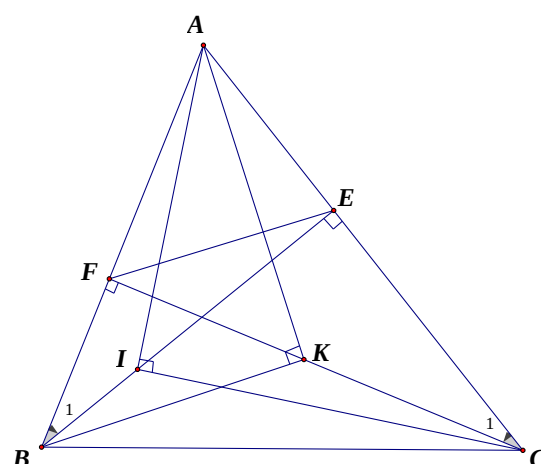
$$\triangle ABE \sim \triangle ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$AI^2 = AK^2 \Rightarrow AI = AK$$

$$B, \text{ Vì } A = 60^\circ \Rightarrow B_1 = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB, C_1 = 30^\circ \Rightarrow AF = \frac{1}{2}AC$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30cm^2$$



Bài 27: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm của AC, F là hình chiếu của I trên BC, trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng chứa AC, vẽ tia Cx vuông góc với AC cắt IF tại E, Gọi giao của AH, AE với BI theo thứ tự tại G và K

- a/ $\triangle IHE$ và $\triangle BHA$ đồng dạng
 b, $\triangle BHI$ và $\triangle AHE$ đồng dạng
 c, AE vuông góc với BI

HD:

a, Ta có: $\triangle AHC$ vuông cân tại H,

có I là trung điểm AC $\Rightarrow HI = IC$

$\Rightarrow$ I nằm trên đường trung trực của HC

$\Rightarrow IF$ là đường trung trực

$\Rightarrow EH = EC \Rightarrow \triangle IHE = \triangle ICE$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle IHE = \angle ICE = 90^\circ$

Mặt khác: $\angle E_1 = \angle C_1 = \angle A_1 \Rightarrow \triangle IHE = \triangle BHA$ (g.g)

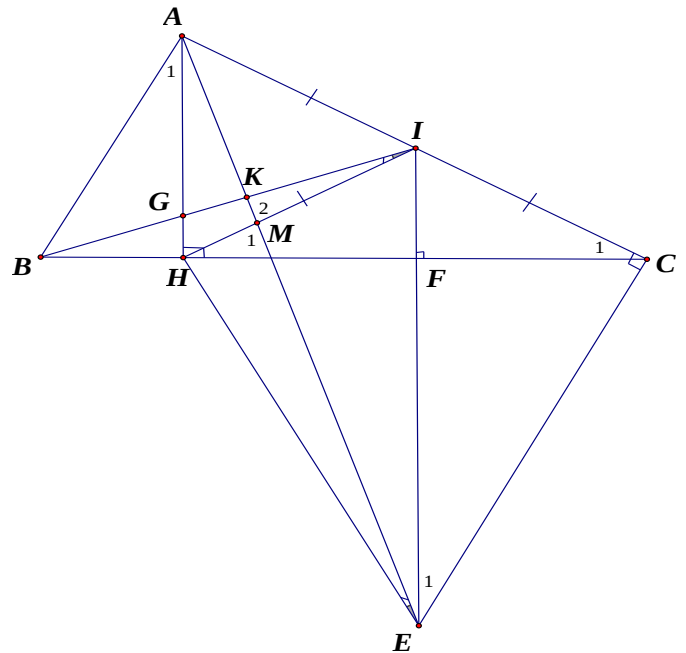
b, Theo câu a ta có: $\triangle IHE \sim \triangle BHA$

$\Rightarrow \frac{HI}{HB} = \frac{HE}{HA}$ và $\angle BHI = 90^\circ + \angle AHI = \angle AHE$

$\Rightarrow \triangle BIH \sim \triangle AHE$ (c.g.c)

c, Giả sử: AE giao với HI tại M $\Rightarrow M_1 = M_2$

Từ câu b $\Rightarrow \hat{I} = \hat{E} \Rightarrow \angle K = \angle H = 90^\circ \Rightarrow AE \perp BI$



Bài 28: Cho HCN ABCD, nối AC, kẻ DE vuông góc với AC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AE, DE, nối MN, ND, CP, CMR:

a, $\triangle AND$ và $\triangle DPC$ đồng dạng

b, ND và MN vuông góc với nhau

HD:

a, Ta có: $\angle A_1 = \angle D_1$ (cùng phụ $\angle ADE$)

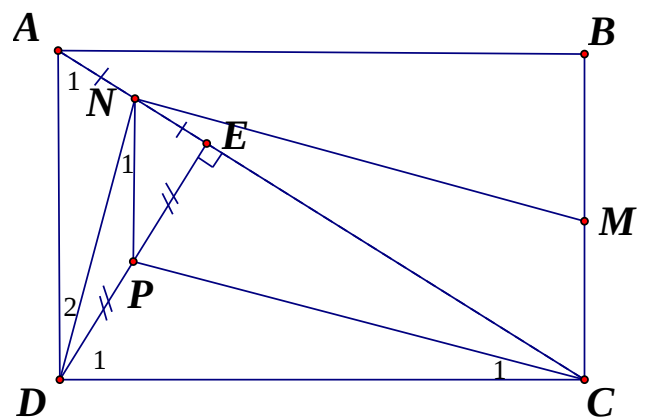
và $\triangle AED \sim \triangle DEC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AD}{DC}$

mà $AE = 2 \cdot AN$ và $DE = 2 \cdot DP$

$\Rightarrow \frac{AN}{DP} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \triangle AND \sim \triangle DPC$ (c.g.c)

b, Ta có: $ND \parallel \frac{1}{2} AD = MC$

$\Rightarrow$ Tứ giác NPCM là hình bình hành $\Rightarrow \angle PNM = \angle PCM$



$$\text{Lại có: } \begin{cases} D_2 = C_1 (cmt) \\ D_2 = N_1 (sole) \end{cases} \Rightarrow DNM = N_1 + PNM = C_1 + PCM = C = 90^\circ$$

$\Rightarrow DN \perp NM$

Bài 29: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, Gọi P và Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, AH, CMR:

a, $\triangle ABP$ và $\triangle ACQ$ đồng dạng

b, AP vuông góc với CQ

HD:

a, Ta có: $B_1 = A_1$ (Phụ BAH)

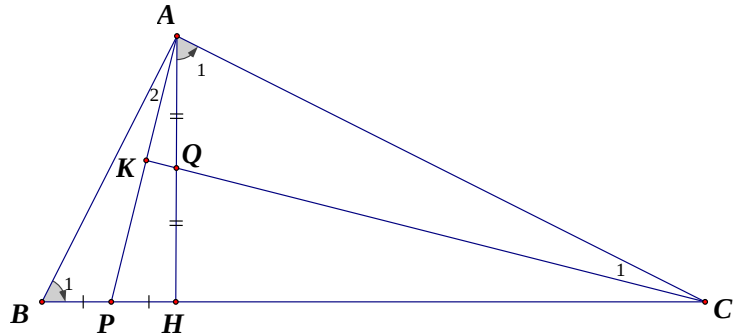
$$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$$

mà $AH = 2 \cdot AQ$, và $BH = 2 \cdot BP$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{2BP}{2AQ} = \frac{BP}{AQ} \Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle CAQ (c.g.c)$$

b, Gọi AP cắt CQ tại K, Vì $\triangle ABP \sim \triangle CAQ (cmt) \Rightarrow A_2 = C_1$

mà $A_2 + KAC = 90^\circ \Rightarrow KAC + C_1 = 90^\circ \Rightarrow AK \perp KC$



Bài 30: Cho $\triangle ABC$ cân tại A, H là trung điểm của BC, I là hình chiếu của H trên AC và O là trung điểm của HI

a, CMR: $\triangle BIC$ và $\triangle AOH$ đồng dạng

b, AO vuông góc với IC

HD:

a, Ta có: $H_1 = C_1$ (Cùng phụ IHC) (1)

$$\text{lại có: } \triangle AHC \sim \triangle HIC (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{HI} = \frac{HC}{IC} = \frac{AC}{HC}$$

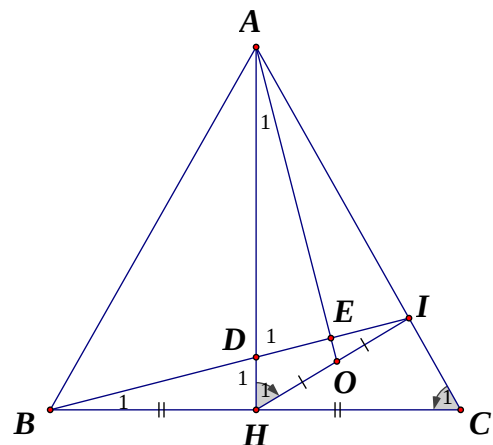
$$\text{Mà } HI = 2 \cdot HO, HC = \frac{BC}{2}$$

$$\text{Thay vào ta được: } \frac{AH}{2HO} = \frac{BC}{2IC} \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{HO}{IC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\triangle BIC \sim \triangle AOH (c.g.c)$

b, Vì $\triangle BIC \sim \triangle AOH (c.g.c)$ theo câu a nên

$$B_1 = A_1 \text{ và } D_1 = D_2 (d^2) \Rightarrow E = H = 90^\circ \Rightarrow BI \perp AE$$



Bài 31: Cho ΔABC có ba góc nhọn, các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, Gọi H, O G theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm ΔABC

a, Tìm các Δ đồng dạng với ΔAHB

b, CMR: ΔHAG đồng dạng với ΔOMG

c, 3 điểm H, O, G thẳng hàng

HD:

a, Dự đoán $\Delta AHB \sim \Delta MON (g.g)$,

Chứng minh:

$$\text{Vì } MN \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} BAG = GMN \text{ (sole)} \\ ABG = GNM \text{ (sole)} \end{cases}$$

Mặt khác: $AH \parallel OM$ (cùng vuông góc BC)

$$\Rightarrow A_1 = M_1 \Rightarrow A_2 = M_2$$

Tương tự ta có:

$BH \parallel ON$ vì cùng vuông góc với AC

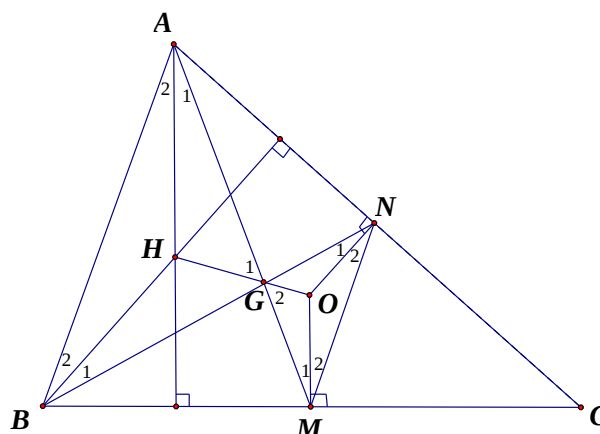
$$\Rightarrow N_1 = B_1 \text{ (sole)} \Rightarrow N_2 = B_2 \Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta MON (g.g)$$

$$\text{b, ta có: } \Delta AHB \sim \Delta MON (g.g) \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{AH} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \text{ và } A_1 = M_1 \Rightarrow \Delta AHG = \Delta MOG (c.g.c)$$

$$\text{c, Vì } \Delta AHG \sim \Delta MOG (c.g.c) \Rightarrow G_1 = G_2$$

$$\text{Mà } G_1 + HGM = 180^\circ \Rightarrow G_2 + HGM = 180^\circ \Rightarrow H, G, O \text{ thẳng hàng}$$



Bài 32: Cho ΔABC vuông cân đỉnh A, BD là đường trung tuyến, Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E, CME: $BE=2EC$

HD:

Vẽ đường cao AH ($H \in BC$)

ΔABC vuông cân nên AH là đường trung trực

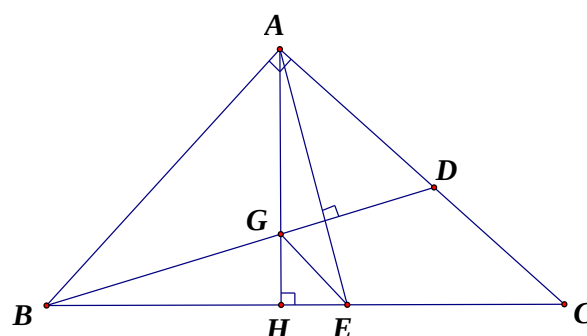
$$\Rightarrow G \text{ là trọng tâm} \Rightarrow BG = 2 \cdot GD$$

Cần chứng minh $GE \parallel DC$

ΔABE có G là giao 2 đường cao

$$\Rightarrow G \text{ là trực tâm} \Rightarrow \begin{cases} GE \perp AB \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow GE \parallel DC$$

$$\Delta BDC \text{ có } GE \parallel DC \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BE}{EC} = 2 \Rightarrow BE = 2EC$$



Bài 33: Cho $\triangle ABC$, trên AC lấy 2 điểm D và E sao cho $AD=DE=EC$, trung tuyến AM cắt BD tại P và trung tuyến CN cắt BE tại Q

a, CMR: Q là trung điểm của CN

b, $PQ \parallel AC$

c, $PQ = \frac{1}{2}MN, PQ = \frac{3}{4}DE$

HD :

a, Vì $ND = \frac{1}{2}BE$ và $ND \parallel BE \Rightarrow QE \parallel ND$

mà E là trung điểm DC nên Q là trung điểm NC

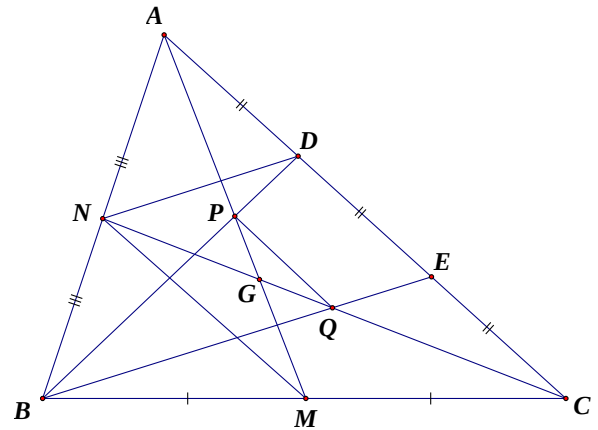
b, Chứng minh tương tự $\Rightarrow P$ là trung điểm của AM,

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow PG = AG - AP =$

$$\frac{2}{3}AM - \frac{1}{2}AM = \frac{1}{6}AM \Rightarrow \frac{PG}{AG} = \frac{\frac{1}{6}AM}{\frac{2}{3}AM} = \frac{1}{4}$$

Tương tự $\frac{GQ}{GC} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ \parallel AC$

c, Tự chứng minh



Bài 34 : Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường thẳng vuông góc với BC tại B, cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C là điểm D, vẽ BE vuông góc với CD tại E, Gọi M là giao của AD và BE, vẽ EN vuông góc với BD tại N, CMR : $MN \parallel AB$, M là trung điểm của BE

HD :

ta có : $AC \parallel BE \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{DE}{DC}$ (1)

lại có : $NE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DN}{DB}$ (2)

từ (1) và (2) ta có : $\Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} \Rightarrow MN \parallel AB$

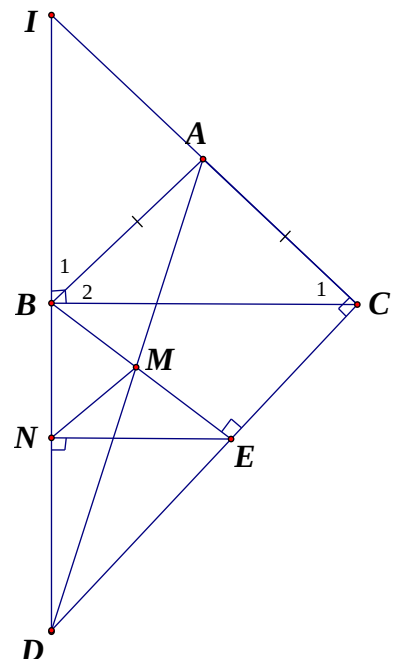
Giả sử : AC cắt BD tại I

Ta có: $C_1 = B_2 \Rightarrow B_1 + C_1 = 90^\circ$

mà $C_1 + \hat{I} = 90^\circ \Rightarrow \hat{I} = B_1 \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại A

$\Rightarrow BA$ là đường trung trực $\Rightarrow AI = AC$

Dễ dàng chứng minh được M là trung điểm BE



Bài 35 : Cho hình vuông ABCD, Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, AD và P là giao điểm của BN, CM

a, CMR : BN vuông góc với CM

b, CMR: DP=DC

c, DP cắt AB tại F, CMR: F là trung điểm của MB

HD:

a, Ta có: $\triangle BAN = \triangle CBM$ (c.g.c) $\Rightarrow B_1 = C_1$ mà

$$C_1 + M_1 = 90^\circ \Rightarrow M_1 + B_1 = 90^\circ \Rightarrow MPB = 90^\circ \Rightarrow BN \perp CM$$

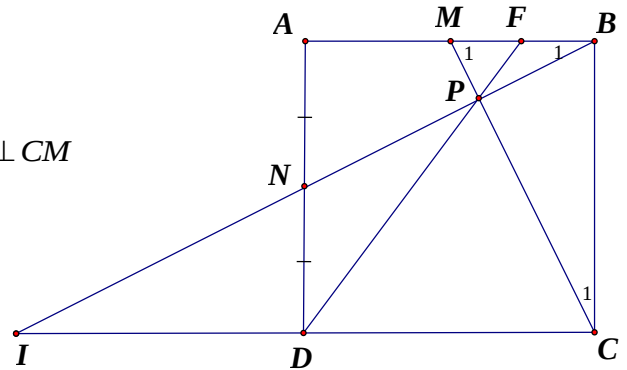
b, Kéo dài BN cắt DC tại I

$$\Rightarrow \triangle IDC \text{ có } ND \parallel BC \Rightarrow \frac{ND}{BC} = \frac{ID}{IC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow I$ là trung điểm IC,

$\triangle PIC$ vuông có D là trung điểm IC $\Rightarrow PD = PC$

c, Tự chứng minh



Bài 36: Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) qua trung điểm M của cạnh BC, kẻ đường thẳng // với đường phân giác góc A, đường thẳng này cắt đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại D và E, CMR: BD=CE

HD:

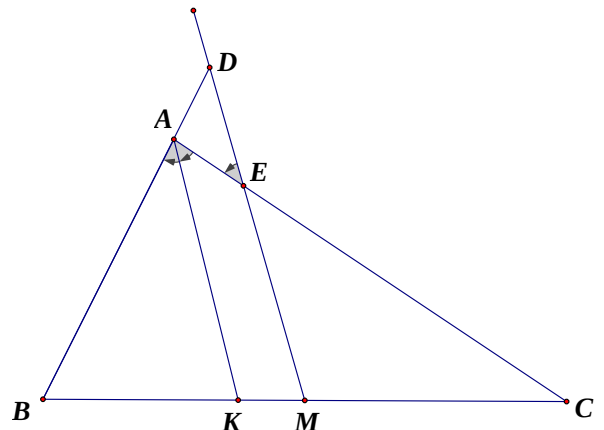
Giả sử AK là tia phân giác góc A

$\triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow AD = AE$

$$\text{Ta có: } \triangle BDM \text{ có } AK \parallel DM \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BM}{KM},$$

$$\text{Mặt khác } \triangle CAK \text{ có } ME \parallel AK \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{CM}{KM}$$

$$\text{Mà } BM = CM \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} \text{ và } AD = AE \Rightarrow BD = CE$$



Bài 37: Cho HCN có $AD = 2 \cdot DC$, M là điểm trên AB, tia phân giác của góc CDM cắt BC tại E, CMR: $CM = AM + 2EC$

HD:

Lấy N trên tia đối tia CB sao cho $AM = 2CM$

$$\Rightarrow \triangle DAM \sim \triangle DCN \text{ (c.g.c)}$$

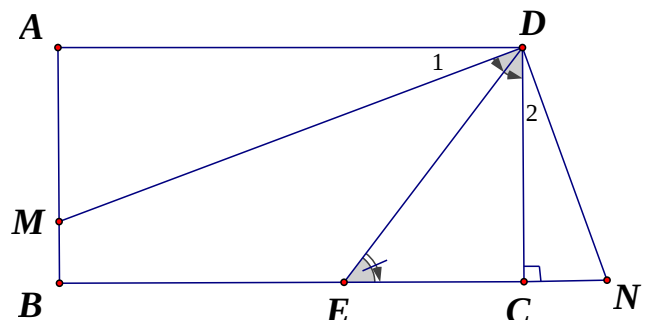
$$\text{Lại có: } DM = 2 \cdot DN \quad (1)$$

$$\text{và } \angle ADE = \angle EDN \Rightarrow \triangle EDN \text{ cân tại N}$$

$$\Rightarrow ND = EN = EC + CN$$

$$\Rightarrow AM + 2 \cdot EC = 2CN + 2 \cdot EC = 2 \cdot ND \quad (2)$$

từ (1) và (2) ta có : $DM = 2 \cdot DN = AM + 2EC$



Bài 38: Cho hình vuông ABCD, gọi O là giao của hai đường chéo, lấy G trên BC, H trên CD sao cho

$\angle GOH = 45^\circ$, Gọi M là trung điểm của AB, CMR:

a, $\triangle HOD$ đồng dạng với $\triangle OGB$

b, $MG \parallel AH$

HD:

a, ta có: $D = B = 45^\circ$, Mặt khác:

$$\left. \begin{aligned} O_1 + O_2 &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \\ O_2 + G_1 &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow O_1 = G_1$$

$$\Rightarrow \triangle HOD \sim \triangle OGB (g.g)$$

b, Theo câu a, $\triangle HOD \sim \triangle OGB (g.g)$

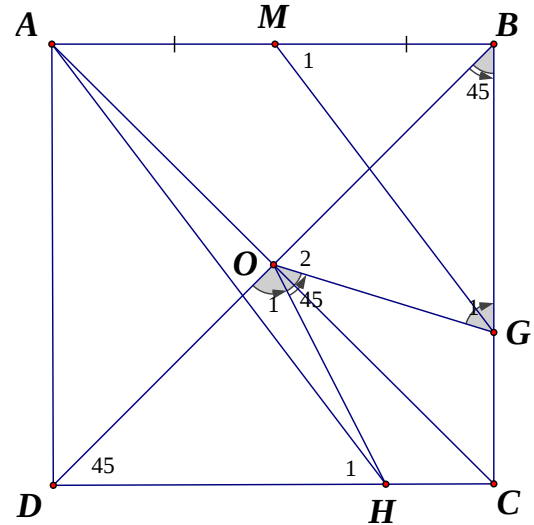
$$\Rightarrow \frac{HD}{OB} = \frac{OD}{GB}, \text{ Đặt } MB = a, AD = 2a$$

$$\Rightarrow HD \cdot GB = OB \cdot OD = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2 = AD \cdot BM$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{BM}{BG} \Rightarrow \triangle BMG \sim \triangle DHA (c.g.c)$$

$$\Rightarrow M_1 = H_1, \text{ mà}$$

$$H_1 = \angle BAH (\text{sole}) \Rightarrow M_1 = \angle BAH (\text{đồng vị}) \Rightarrow AH \parallel MG$$



Bài 39: Cho HCN ABCD, từ 1 điểm P thuộc đường chéo AC, dựng HCN AEPF ($E \in AB, F \in AD$), CMR:

a, $EF \parallel DB$

b, BF và DE cắt nhau tại Q nằm trên AC

HD:

$$\text{a, Ta có: } EP \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AC} \text{ và}$$

$$FP \parallel DC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{FA}{AD} = EF \parallel BD$$

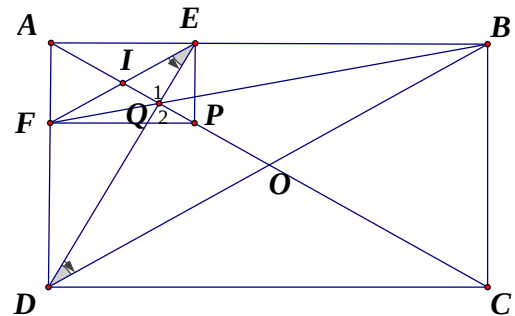
b, Gọi I, O lần lượt là tâm của 2 HCN

$$EF \parallel DC \Rightarrow \frac{QE}{QD} = \frac{EF}{DB},$$

$$\text{Mà } 2 \cdot IE = EF, 2 \cdot DO = DB \Rightarrow \frac{QE}{QD} = \frac{IE}{DO}$$

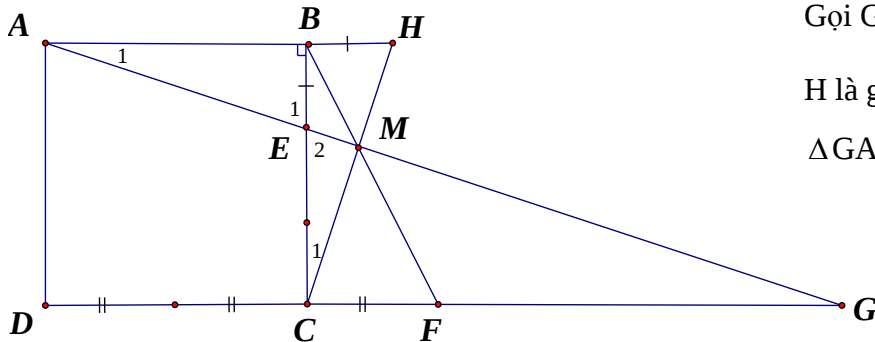
$$\text{và } E = D \Rightarrow \triangle IEQ \sim \triangle ODQ \Rightarrow Q_1 = Q_2$$

$$\text{Mà } Q_2 + \angle OQE = 180^\circ \Rightarrow Q_1 + \angle OQE = 180^\circ \Rightarrow A, Q, O \text{ thẳng hàng} \Rightarrow Q \text{ nằm trên AC}$$



Bài 40: Cho hình vuông ABCD, trên BC lấy E sao cho $BE = \frac{BC}{3}$, trên tia đối của CD lấy điểm F sao cho $CF = \frac{BC}{2}$, M là giao AE và BF, CMR: AM vuông góc với CM

HD:



Gọi G là giao AM và DC,

H là giao của AB và CM

$$\Delta GAD \text{ có } CE \parallel AD \Rightarrow \frac{GC}{GD} = \frac{CE}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{GC}{GC + DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DC}{GC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = FG$$

$$\text{Lại có: } AB \parallel DG \Rightarrow \frac{BH}{CF} = \frac{AB}{GF} = \frac{2}{3} \Rightarrow BH = \frac{2}{3} \cdot CF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{BC}{3} = BE$$

$$\text{Khi đó: } \Delta ABE = \Delta CBH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = C_1 \\ E_1 = E_2 \end{cases} \Rightarrow AM \perp MC$$

Bài 41: Cho tứ giác lồi ABCD, từ 1 điểm E thuộc cạnh AD và G thuộc cạnh AB, ta kẻ các đường thẳng song song với đường chéo AC, các đường thẳng này cắt CD, BC lần lượt tại F và H

a, So sánh các tỉ số các đoạn thẳng do BD định ra trên EF và GH

b, CMR: EG và HF cắt nhau tại I nằm trên BD

HD:

a, Gọi O là giao điểm 2 đường chéo AC, BD

BD cắt EF, GH lần lượt tại N và M

$$\Rightarrow \frac{EN}{AO} = \frac{BN}{BO} = \frac{NF}{OC} \Rightarrow \frac{EN}{NF} = \frac{AO}{OC}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{GM}{AO} = \frac{DM}{DO} = \frac{MH}{OC} \Rightarrow \frac{GM}{MH} = \frac{AO}{OC}$$

$$\text{Từ hai điều trên ta có: } \frac{EN}{NF} = \frac{GM}{GH} \left(= \frac{AO}{OC} \right)$$

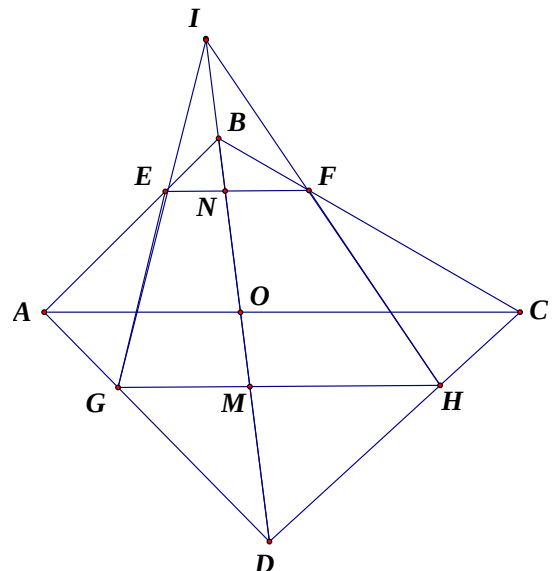
b, Giả sử : GE cắt BD tại I'

$$\Rightarrow \frac{EN}{GM} = \frac{I'N}{I'M} \quad (1),$$

$$\text{Tương tự Giả sử HF cắt BD tại I': } \frac{NF}{MH} = \frac{I'N}{I'M} \quad (2)$$

$$\text{Theo câu a ta có: } \frac{EN}{NF} = \frac{GM}{GH} = \frac{EN}{GM} = \frac{NF}{GH} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{I'N}{I'M} \Rightarrow I \equiv I', \text{ hay I là giao điểm GE, HF, DB}$$



Bài 42: Cho hình vuông ABCD, trên AB lấy điểm M, vẽ BH vuông góc với CM, nối DH, vẽ HN vuông góc với DH (N ∈ BC)

a, CMR: ΔDHC và ΔNHB đồng dạng

b, CMR: AM.NB=NC.MB

HD:

$$\text{a, Ta có: } \left. \begin{array}{l} H_1 + NHC = 90^\circ \\ H_2 + NHC = 90^\circ \end{array} \right\} H_1 = H_2$$

lại có: $B_1 = M_1$ (Phụ HBM)

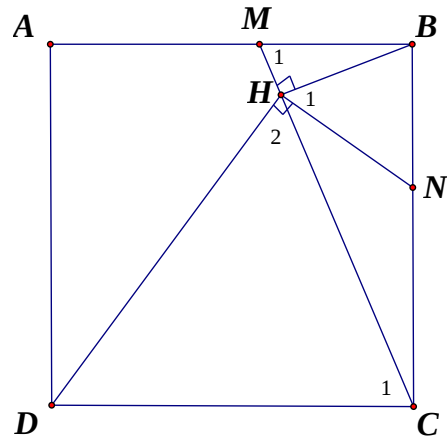
và $M_1 = C_1$ (sole) $\Rightarrow \Delta DHC \sim \Delta NHB (g.g)$

$$\text{b, Ta có: } \Delta MBH \sim \Delta BCH (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BH}{CH},$$

$$\text{Mà } \frac{BH}{CH} = \frac{BN}{DC} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BN}{DC}$$

mà BC=DC $\Rightarrow MB = NB$

$\Rightarrow AM = NC \Rightarrow AM.NB=NC.MB$ đpcm



Bài 43: Cho hình vuông ABCD cạnh a, một đường thẳng d bất kỳ đi qua C cắt AB tại E và AC tại F

a, CMR tích BE.DF không đổi khi d di chuyển

$$\text{b, CMR: } \frac{BE}{BF} = \frac{AE^2}{AF^2}$$

c, Xác định vị trí của d để DF=4.BE

HD:

$$\text{a, } \Delta EBC \sim \Delta CDF (g.g) \Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{BC}{DF} \Rightarrow BE.DF = BC.CD = a^2$$

$\Rightarrow BE.DF$ không đổi

b, Ta có:

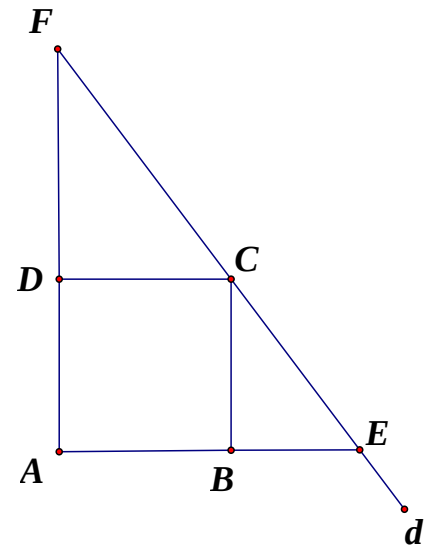
$$\Delta EBC \sim \Delta EAF (g.g) \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{BC}{FA} \Rightarrow \frac{AE}{FA} = \frac{BE}{BC} \quad (1)$$

$$\Delta FCD \sim \Delta FEA (g.g) \Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{DC}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{FA} = \frac{DC}{FD} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) và (2) theo vế ta được: } \frac{AE^2}{FA^2} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{DC}{DF} = \frac{BE}{DF},$$

Vì BC=DC

$$\text{c, Để } DF = 4BE \Rightarrow \frac{BE}{DF} = \frac{1}{4} = \frac{AE^2}{FA^2} \Rightarrow \frac{AE}{FA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BE = \frac{a}{2}$$



Bài 44: Cho $\triangle ABC$ có $AB=4\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, hai tia phân giác trong AD và BE cắt nhau tại O , CMR đoạn nối điểm O với trọng tâm G của $\triangle ABC$ thì song song với BC

HD:

$\triangle ABC$ có AD là đường phân giác nên:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB+DC}{AB+AC} = \frac{6}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{BC}{AB+AC} \Rightarrow DB = 2\text{cm}$$

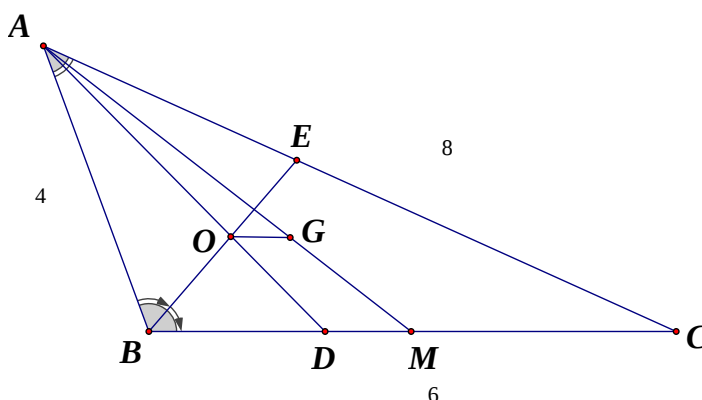
$\triangle ABD$ có OB là tia phân giác nên:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{BD} = 2 \quad (1)$$

Gọi AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$,

G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AG}{GM} = 2$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow OG \parallel DM$$

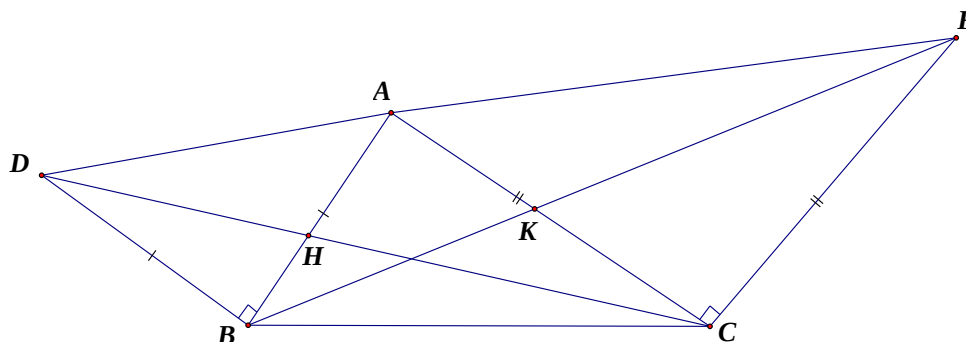


Bài 45: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , vẽ ra phía ngoài tam giác đó các $\triangle ABD$ vuông cân ở B , $\triangle ACF$ vuông cân ở C , Gọi H là giao điểm của AB và CD , K là giao của AC và BF , CMR :

a, $AH=AK$

b, $AH^2 = BH \cdot CK$

HD:



a, Ta có: $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AH}{AH+BH} = \frac{AC}{BD+AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AB+AC} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC} \quad (1)$$

Tương tự:

$AB \parallel CF$ (cùng vuông góc với AC)

$$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} \Rightarrow \frac{AK}{AK+KC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $AH=AK$

b, ta có :

$$\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BD} \quad (3)$$

$$\text{Và } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow \frac{KC}{AK} = \frac{AC}{BD} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow AH \cdot AK = BH \cdot KC, \text{ mà } AH=AK \Rightarrow đpcm$$

Bài 46: Cho tam giác ABC nhọn, Các đường cao AD, BE, CF, Gọi I, K, M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA, CMR: 4 điểm I, K, M, N thẳng hàng

HD:

Ta có:

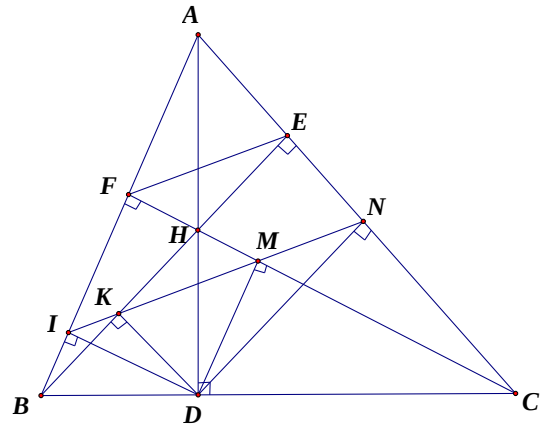
$$\frac{BI}{FI} = \frac{BD}{DC} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow KI // EF$$

Tương tự:

$$\frac{CN}{NE} = \frac{CD}{DB} = \frac{CM}{MF} \Rightarrow MN // FE$$

Mặt khác: $\frac{FA}{AI} = \frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow FE // IN$,

Khi đó I, K, M, N thẳng hàng



Bài 47: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, E là điểm bất kỳ trên AB, kẻ HF vuông góc với HE (F trên AC)

a, CMR: ΔBEH và ΔAFH đồng dạng

b, CMR: $HE \cdot BC = EF \cdot AB$

c, Cho $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, diện tích $\Delta HEF = 6\text{cm}^2$, Tính các cạnh của ΔHEF

HD:

a, Ta có: $B = A_1$ và $H_1 = H_2 \Rightarrow \Delta BEH \sim \Delta AFH (g.g)$

b, Theo câu a ta có:

$$\Delta BEH \sim \Delta AFH (g.g)$$

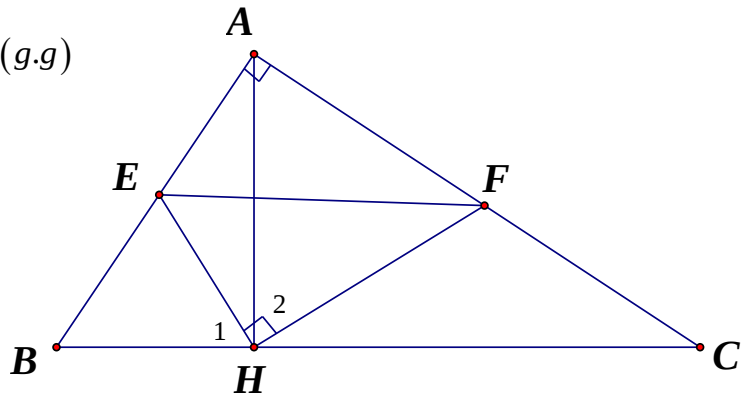
$$\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\Delta ABH \sim \Delta CAH (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{AB}{AC}$



và $A = H = 90^\circ \Rightarrow \Delta HEF \sim \Delta ABC (c.g.c) \Rightarrow \frac{HE}{AB} = \frac{FE}{BC} \Rightarrow HE \cdot BC = FE \cdot AB$

c, $S_{abc} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\text{cm}^2$

mặt khác: $\frac{S_{HEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$

Mà $BC = 10 \Rightarrow EF = 5 \Rightarrow HE = 3, HF = 4$

Bài 48: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AD, đường phân giác BE, giả sử AD cắt BE tại F, CMR:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{FD}{FA}$$

HD:

ΔABD có BF là tia phân giác

$$\Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA} \quad (1)$$

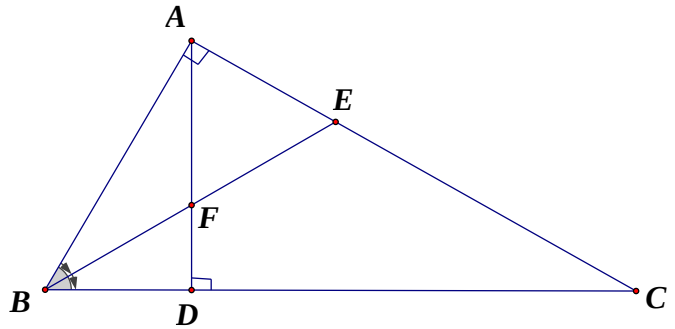
ΔABC có BE là phân giác :

$$\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{BC} \quad (2)$$

Mà $\Delta ADB \sim \Delta CAB$ (g . g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{EA}{EC} = \frac{FD}{FA}$



Bài 49: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC của hình chữ nhật, E là điểm trên tia DC, K là giao EM và AC, CMR: MN là tia phân giác $\angle KNE$

HD:

Gọi H là giao KN với DC

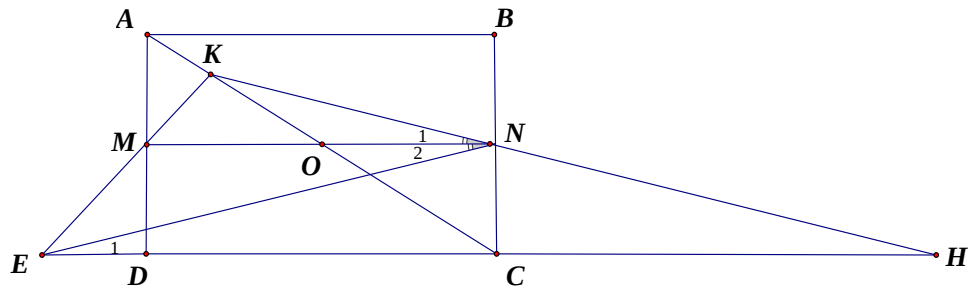
O là giao MN với AC

Khi đó $MO = ON$

$$\Rightarrow \frac{MO}{EC} = \frac{ON}{CH} \left(= \frac{KO}{OC} \right)$$

$$\Rightarrow EC = CH$$

$$\Rightarrow \Delta NEH \text{ cân tại } N \Rightarrow \angle ENH = \angle E_1 = H$$



$$\text{mà } \angle KNE = 2H \text{ (Góc ngoài)} = 2.N_1 \Rightarrow N_1 = N_2 \Rightarrow \text{dpcm}$$

Bài 50: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, D, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, đường thẳng vuông góc AB tại D cắt CE ở F, CMR ΔBCF vuông

HD:

Lấy M là giao của DE với AC $\Rightarrow M$ là trung điểm AC

ta có :

$$\begin{cases} DE = \frac{1}{2} BH \\ EM = \frac{1}{2} HC \end{cases} \Rightarrow \frac{DE}{EM} = \frac{BH}{HC}$$

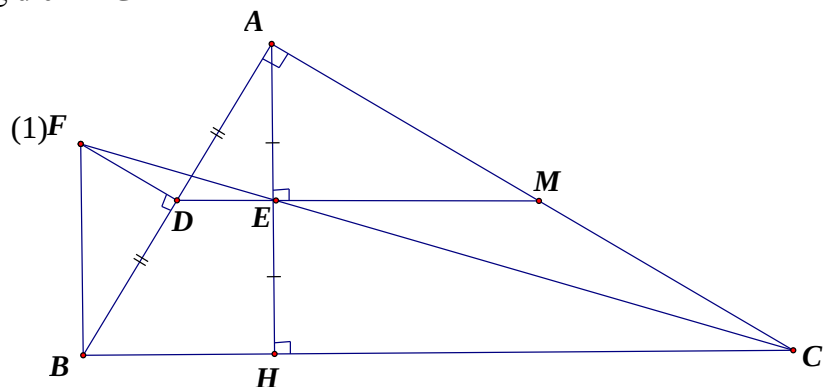
Mặt khác :

$FD \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{DE}{EM} = \frac{FE}{EC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{BH}{HC} = \frac{EH}{EC} \Rightarrow EH \parallel BF, \text{ Mà } EH \perp BC \Rightarrow BF \perp BC \Rightarrow \Delta BCF \text{ vuông}$$



Bài 51: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), D và E lần lượt trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$

Gọi K là giao điểm của DE và BC, CMR: $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$

HD:

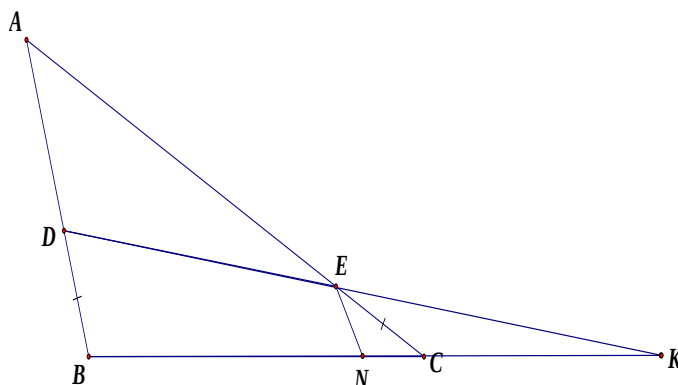
Từ E vẽ $EF \parallel AB$ (F nằm trên BC)

ΔKBD có $EF \parallel BD \Rightarrow \frac{KE}{KD} = \frac{FE}{BD}$ (1)

tương tự ta có: ΔABC có $EF \parallel AB$

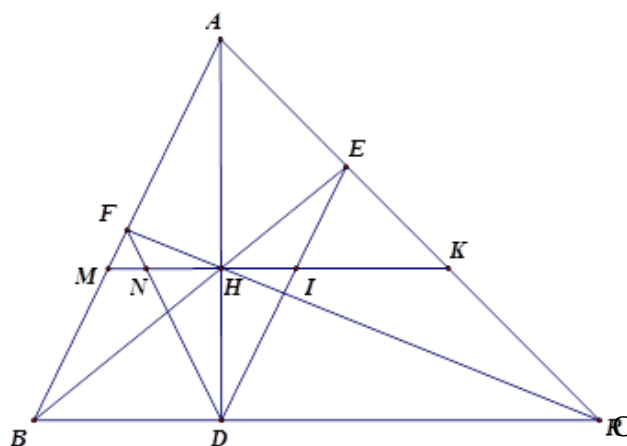
$\Rightarrow \frac{FE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{FE}{CE} = \frac{FE}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm



Bài 52: Cho ΔABC nhọn, AD là đường cao, H là điểm trên đoạn AD, Gọi E là giao điểm của BH và AC, F là giao điểm của CH và AB,

CMR: DA là tia phân giác của $\angle EDF$



Qua H vẽ đường thẳng $\parallel BC$ cắt AB tại M, Cắt DF tại N, DE tại I, AC tại K

$\Rightarrow NI \parallel BC, AD \perp BC \Rightarrow DH \perp NI$

Xét các $\Delta FDC, \Delta FBC, \Delta EBC, \Delta EBD, \Delta ABD, \Delta ADC, \Delta ABC$ ta có :

$$\frac{NH}{DC} = \frac{FH}{FC}, \frac{MH}{BC} = \frac{FH}{FC}, \frac{NH}{DC} = \frac{MH}{BC}, \frac{HI}{BD} = \frac{EH}{EB}, \frac{HK}{BC} = \frac{EH}{EB}$$

$$\frac{HI}{BD} = \frac{HK}{BC}, \frac{MH}{BD} = \frac{AH}{AD}, \frac{HK}{DC} = \frac{AH}{AD}, \frac{MK}{BC} = \frac{AH}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{BD} = \frac{HK}{DC} = \frac{MK}{BC} \Rightarrow \frac{NH}{CD} \cdot \frac{HK}{BC} \cdot \frac{MH}{BD} = \frac{MH}{BC} \cdot \frac{HI}{BD} \cdot \frac{HK}{DC}$$

$\Rightarrow NH = HI \Rightarrow \Delta NDI$ có HD vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\Rightarrow \Delta NDI$ cân
Vậy DH là tia phân giác

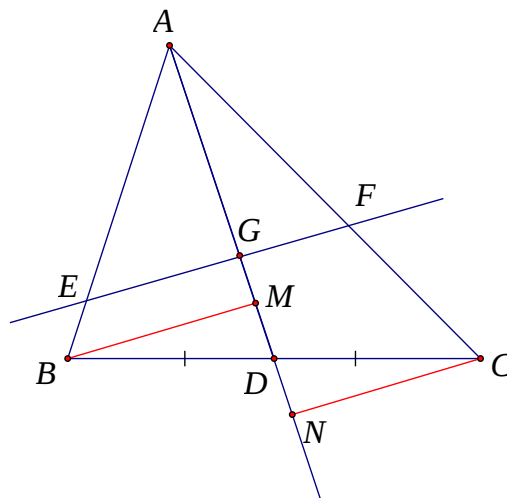
Bài 53 : Cho $\triangle ABC$ có AD là đường trung tuyến, Trọng tâm là điểm G, một đường thẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm E, và F, CMR : $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$

HD :

Kẻ $BM \parallel EF$, $CN \parallel EF$

Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} \frac{BE}{AE} &= \frac{GN}{AG}; \frac{CF}{AF} = \frac{GM}{AG} \Rightarrow \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{GM + GN}{AG} \\ &= \frac{GD + DN + GD - MD}{AG} = \frac{2GD}{AG} = \frac{AG}{AG} = 1 \end{aligned}$$



Bài 54 : Cho hình thang ABCD, đáy lớn CD và O là giao điểm của hai đường chéo, đường thẳng qua B và $\parallel AD$ cắt AC tại E, đường thẳng qua C $\parallel AD$ cắt BD tại F, CMR :

a, $OA^2 = OC.OE$

b, $OD^2 = OB.OF$

HD :

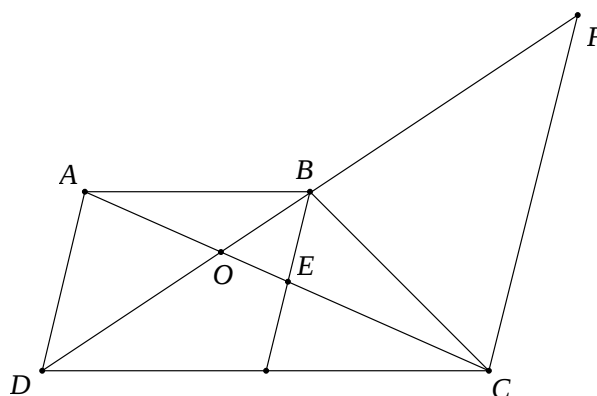
a, Ta có : $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (1)

$BE \parallel AD \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OD}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OA} \Rightarrow OA^2 = OE.OC$

b, $AD \parallel FC \Rightarrow \frac{OD}{OF} = \frac{OA}{OC}$ (3)

và $\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OF} \Rightarrow OD^2 = OB.OF$



Bài 55 : Cho $\triangle ABC$, Lấy E trên BC sao cho $EC=2.BE$, Lấy điểm F trên AB sao cho $AF=2BF$

a, CMR : $EF \parallel AC$ và $EF = \frac{1}{3} AC$

b, Gọi I là giao điểm của AE và CF, CMR: $\frac{IE}{AE} = \frac{IF}{CF} = \frac{1}{4}$

c, Thay điều kiện $EC=2BE$ và $AF=2.BF$ bằng điều kiện AE, CF thứ tự là hai tia phân giác của góc A và C của $\triangle ABC$ thì $\triangle ABC$ cần có điều kiện gì để $EF \parallel BC$

HD:

a, Ta có: $\frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FA} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF \parallel AC$, Do đó:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{1}{3} AC$$

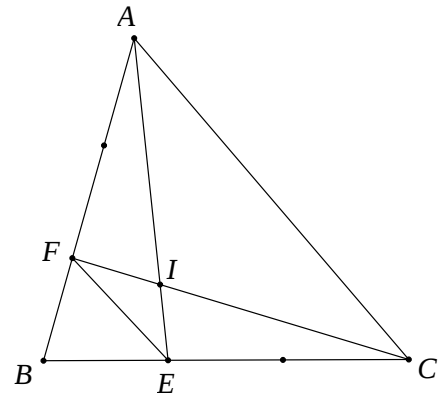
b, Vì $EF \parallel AC \Rightarrow \frac{IE}{IA} = \frac{IF}{IC} = \frac{EF}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IE}{AE} = \frac{IF}{CF} = \frac{1}{4}$

c, $EF \parallel AC$ Khi $\frac{EC}{EB} = \frac{FA}{FB}$ (1)

Mà AE là tia phân giác góc A $\Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{AC}{AB}$ (2)

CF là tia phân giác góc C $\Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B



Bài 56 : Cho $\triangle ABC$, kẻ tia phân giác AD, trên tia đối của tia BA, lấy điểm E sao cho $BE=BD$ và trên tia đối của tia CA, lấy điểm F sao cho $CF=CD$

a, CMR : $EF \parallel BC$

b, CMR : ED là tia phân giác góc BEF , FD là tia phân giác góc CFE

HD :

a, Vì AD là tia phân giác góc A nên: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

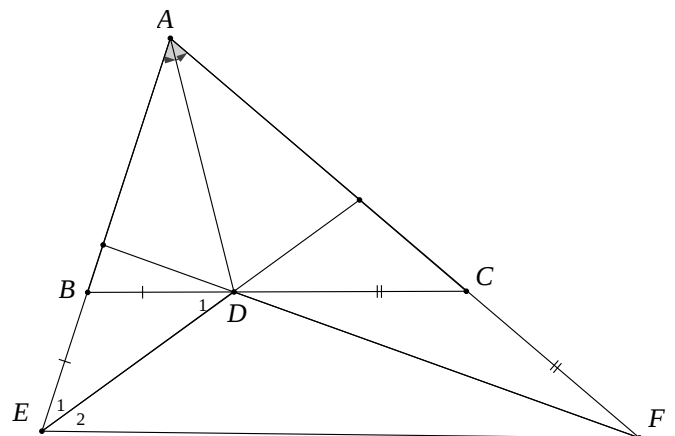
Theo gt ta lại có: $BD=BE$, $DC=CF$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

b, $\triangle BDE$ cân $\Rightarrow E_1 = D_1$,

mà $D_1 = E_2$ (sole) $\Rightarrow E_1 = E_2$

vậy ED là tia phân giác góc BEF



Chứng minh tương tự cho FD là tia phân giác góc CFE

Bài 57 : Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, Gọi D và E theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua AB và AC

a, CMR : Tứ giác BCED là hình thang

b, CMR: $BD \cdot CE = \left(\frac{DE}{2}\right)^2$

c, Cho AB = 3cm, AC = 4cm, Tính DE và Diện tích ΔDHE

HD:

a, Dễ dàng chứng minh 3 điểm D, A, E thẳng hàng và $BD \perp DE, CE \perp DE \Rightarrow BD \parallel EC$

Vậy BCED là hình thang

b, $\Delta ADB \sim \Delta CEA \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow AD \cdot AE = DB \cdot CE$

A là trung điểm DE

nên $AD = AE = \frac{1}{2} DE \Rightarrow DB \cdot CE = \left(\frac{DE}{2}\right)^2$

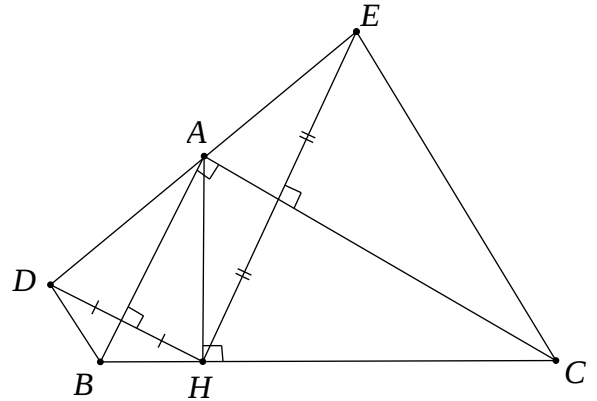
c, Theo định lý Pi ta có thì :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 2,4 \text{ Vì } DE = 2 \cdot AH \Rightarrow DE = 4,8$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HDE \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{4,8}{5} \Rightarrow \frac{S_{HDE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4,8}{5}\right)^2, \text{ Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \Rightarrow S_{HDE}$$



Bài 58: Cho HCN ABCD, Trên tia đối của tia AD lấy điểm F sao cho AF = AB, Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = AD, Gọi N là giao điểm FC với AB và M là giao điểm EC và AD

CMR: MD = BN

HD:

ta có:

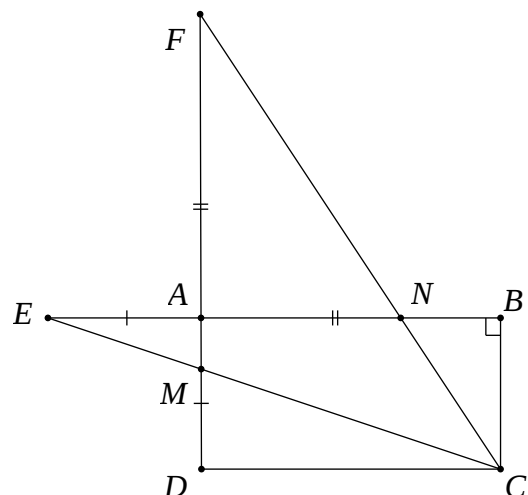
$$\Delta NBC \sim \Delta CDF \Rightarrow \frac{NB}{CD} = \frac{BC}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{NB}{BC} = \frac{CD}{DF} \Rightarrow NB = \frac{DC \cdot BC}{AB + AD} \quad (1)$$

$$\Delta MDC \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{MD}{CB} = \frac{DC}{BE}$$

$$\Rightarrow MD = \frac{DC \cdot BC}{AB + AD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow NB = MD$



Bài 59: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm AC, F là hình chiếu của I trên BC, Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng chứa AC vẽ tia Cx vuông góc AC cắt IF tại E, Gọi giao điểm AH, AE với BI theo thứ tự là G, K, CMR:

- $\Delta IHE \sim \Delta BHA$
- $\Delta BHI \sim \Delta AHE$
- AE vuông góc với BI

HD:

a, Chứng minh $\Delta IHE \sim \Delta BHA$

Ta có: $\begin{cases} HI = IC = \frac{1}{2} AC \\ IF \perp HC \end{cases} \Rightarrow IF \text{ là trung trực HC}$

$E \in IF \Rightarrow EC = EH \Rightarrow \Delta IHE = \Delta ICE (c.c.c)$

$\Rightarrow IHE = ICE = 90^\circ$ (1)

ta lại có: $BHA = ACH$ (Cùng phụ góc A)

$\Rightarrow BAH = IEH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta IHE \sim \Delta BHA (g.g)$

b, Từ câu a, $\Delta IHE \sim \Delta BHA \Rightarrow \frac{IH}{BH} = \frac{EH}{AH} \Rightarrow \frac{IH}{EH} = \frac{BH}{AH}$

Mà $IHE = BHA = 90^\circ \Rightarrow IHE + AHI = BHA + AHI \Rightarrow AHE = BHI \Rightarrow \Delta BHI \sim \Delta AHE (c.g.c)$

c, Vì $\Delta BHI \sim \Delta AHE \Rightarrow IBH = EAH \Rightarrow GBH = GAK$

Xét $\Delta AKG, \Delta BHG$ có $\begin{cases} GBH = GAK (cmt) \\ AGK = BGH (cmt) \end{cases} \Rightarrow AKG = BHG = 90^\circ \Rightarrow AK \perp GK \text{ tại K} \Rightarrow AE \perp BI$

Bài 60 : Cho HCN ABCD (AB < BC), kẻ $DE \perp AC$, Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AE, DE

a, Tứ giác MNPC là hình gì ?

b, CMR : $MN \perp ND$

c, CMR : $NA.PC = ND.PD$

d, Khi ABCD là hình vuông hãy xác định hình dạng của ΔMND

e, Tính diện tích của HCN ABCD biết đường chéo là 4cm và góc nhọn tạo bởi hai đường chéo là

30°

HD:

a, Ta có:

MNPC là hình bình hành vì $NP \parallel MC$ (do cùng $\parallel AD$)

và $NP = MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$

b, Gọi F là trung điểm AD

$\Rightarrow NF$ là đường trung bình $\Rightarrow NF \parallel ED$

Mà $DE \perp AC \Rightarrow NF \perp AC$

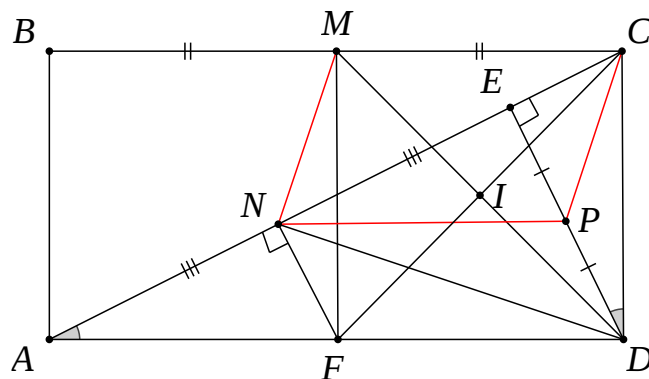
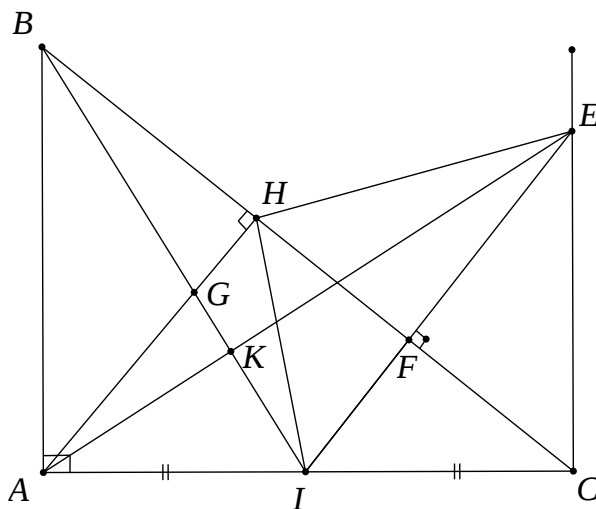
$\Rightarrow \Delta NFC$ vuông có I là trung tuyến

$\Rightarrow NI = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{2} MD \Rightarrow \Delta MND$ vuông tại N

$\Rightarrow MN \perp ND$

c, $\Delta AND \sim \Delta DPC (g.g) \Rightarrow \frac{AN}{DP} = \frac{ND}{CP} \Rightarrow AN.PC = ND.PD$

d, ABCD là hình vuông thì ΔNMD là vuông cân tại N



e, Diện tích ABCD bằng 4cm^2

Bài 61 : Cho hình vuông ABCD có cạnh a, Gọi I là trung điểm AB, Trên tia đối của tia CD đặt điểm M sao cho $CM=a$, Trên tia đối của tia CB đặt điểm N sao cho $CN=2a$, trên tia đối của tia DC đặt điểm P sao cho $DP=2a$, trên tia đối của tia AD đặt Q sao cho $AQ=3a$, Gọi E,F, R lần lượt là trung điểm PN, QM, PQ, Gọi S là giao điểm QM và PN

a, CMR : $\triangle AID \sim \triangle DPQ$

b, $\triangle MPQ$ là tam giác gì ? Tứ giác MNPQ là tứ giác gì ?

c, CMR : 4 điểm E, D, I, F thẳng hàng

d, CMR: I là trung điểm NQ

e, CMR: 3 đường thẳng SR, QN, CD đồng quy

HD:

a, $\triangle AID \sim \triangle DPQ$ (c.g.c)

b, $\triangle MPQ$ cân tại Q

(vì QD vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến)

=> Tứ giác MNPQ là hình thang

c, $\triangle AID \sim \triangle DPQ \Rightarrow ADI = DQP \Rightarrow DI // PQ$ (1)

EF là đường trung bình của hình thang MNPQ

=> $EF // PQ$ (2)

DF là đường trung bình của $\triangle MPQ$

=> $DF // PQ$ (3)

Từ (1), (2) và (3) => E, D, I, F thẳng hàng

d, Do $AQ=BN$ và $AQ // BN$

Nên AQBN là hình bình hành,

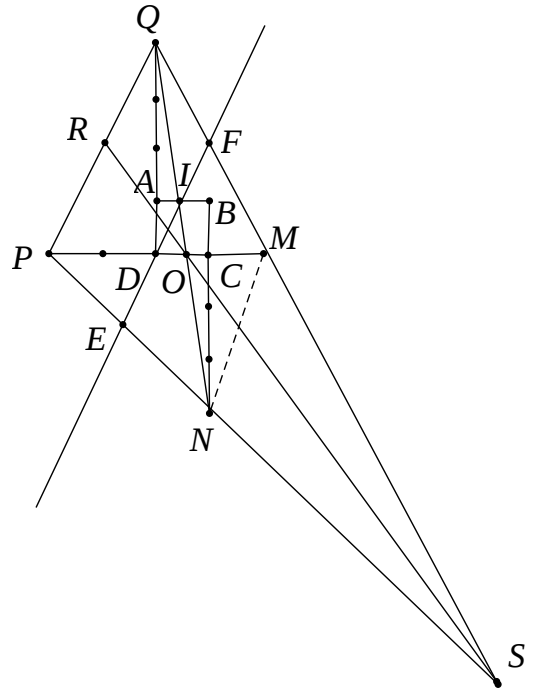
=> AB và QN cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường mà I là trung điểm của AB

=> I là trung điểm QN

e, Theo cmt ta có: MNPQ là hình thang, Gọi O là giao điểm MP và NQ

Ta lại có NP giao MQ tại S => S, O, R thẳng hàng

=> SR, Qn, CD đồng quy tại O



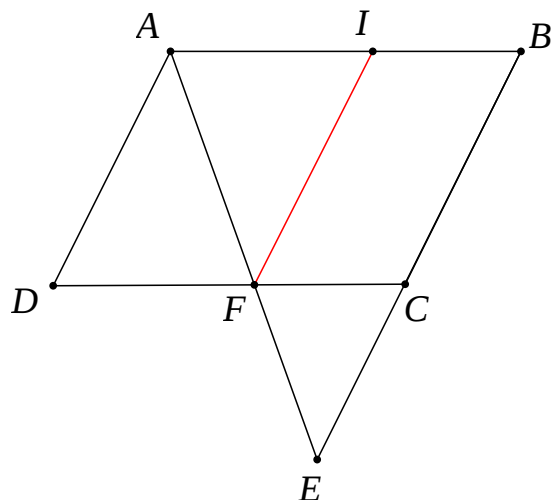
Bài 62: Cho HBH ABCD, một đường thẳng d quay quanh A, cắt BC, CD lần lượt tại E và F, CMR: tích BE.DF không đổi

HD:

Từ F vẽ đường thẳng song song với AD cắt AB tại I

$$\triangle ABE \text{ có } IF // BE \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{IF}{BE}$$

$$\Rightarrow AI \cdot BE = AB \cdot IF \Rightarrow DF \cdot BE = AB \cdot AD \text{ (không đổi)}$$



Bài 63: Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) trên AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC: CMR: $CMN = \frac{1}{2} \cdot \angle BAC$

HD:

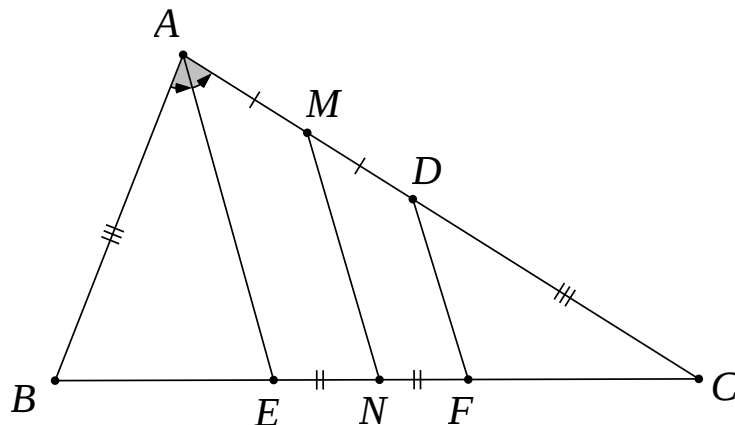
Vẽ tia phân giác góc A cắt BC tại E

Lấy F đối xứng với E qua N

AE là tia phân giác $\Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{EC}{AC}$,

$$\text{Mà } \begin{cases} BE = FC \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{DC} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow DF \parallel AE$$



$\Rightarrow$ ADFE là hình thang có MN là đường trung bình $\Rightarrow CMN = \angle_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle BAC$

Bài 64 : Cho Tứ giác ABCD, O là giao điểm của AC và BD, CMR : $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{OB}{OD}$

HD :

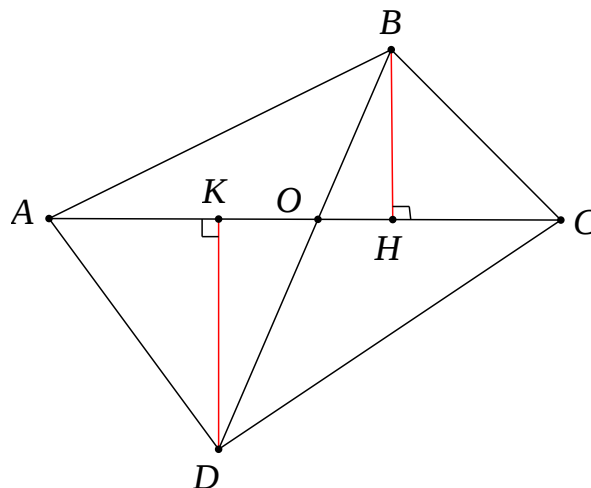
$$\text{Vẽ } \begin{cases} BH \perp AC \\ DK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel DK$$

ta có :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot DK \cdot AC} = \frac{BH}{DK} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \triangle OBH \sim \triangle ODK (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{DK} = \frac{OB}{OD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm



Bài 65 : Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), Có $AB = a$, $CD = b$, M, N trên các cạnh AD và BC sao cho

$MN \parallel CD$ và $\frac{MA}{MD} = m$, cmr : $MN = \frac{a + m \cdot b}{m + 1}$

HD :

Qua M vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, CD lần lượt tại N và I

Khi đó MNCI là hình bình hành

$\Rightarrow DI = b - MN$

Tương tự : $NA = MN - a$

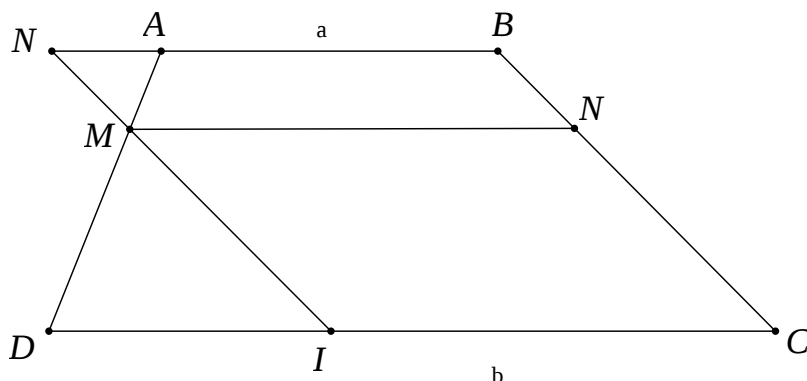
Xét $\triangle MDI$ có $DI \parallel AN$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AN}{DI} \Rightarrow m = \frac{MN - a}{b - MN}$$

$$\Rightarrow mb - m \cdot MN = MN - a$$

$$\Rightarrow MN + m \cdot MN = mb + a$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a + mb}{m + 1} \text{ đpcm}$$



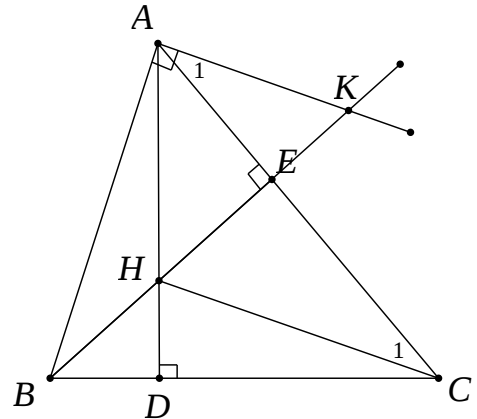
Bài 66 : Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD , BE cắt nhau tại H , đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt BE ở K , CMR : $\Delta EAK \sim \Delta ECH$

HD :

Vì AD cắt BE tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm

$$\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel AK$$

$$\angle A_1 = \angle C_1 \Rightarrow \Delta EAK \sim \Delta ECH (g.g)$$



Bài 67: Chứng minh rằng ΔABC vuông nếu các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I thỏa mãn:

$$\frac{BI}{BD} \cdot \frac{CI}{CE} = \frac{1}{2}$$

HD:

Nối $AI \Rightarrow AI$ là tia phân giác góc A

ΔABD có AI là tia phân giác

$$\Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BI}{ID + BI} = \frac{AB}{AB + AD} = \frac{BI}{BD}$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC}$$

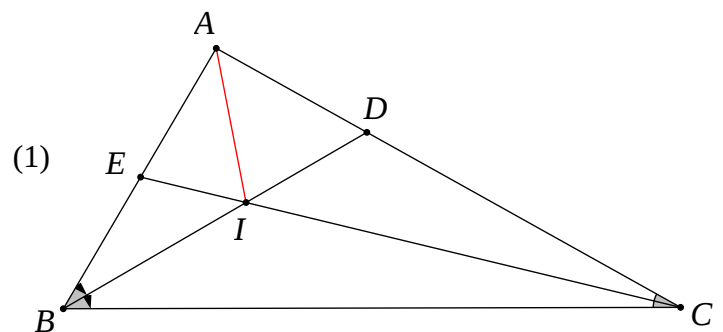
Thay vào (1) ta được :

$$\frac{BI}{BD} = \frac{AB}{AB + \frac{AB \cdot AC}{AB + BC}} = \frac{AB + BC}{AB + BC + CA}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{CI}{CE} = \frac{AC + BC}{AB + BC + CA} \text{ Với gt } \frac{BI}{BD} \cdot \frac{CI}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(AB + BC)(AC + BC) = (AB + BC + CA)^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Vậy ΔABC vuông tại A



Bài 68 : Cho hình thoi $ABCD$ có $A = 60^\circ$, P là 1 điểm thuộc cạnh AB , N là giao điểm của hai đường thẳng AD và CP

a, CMR : $AB^2 = BP \cdot DN$

b, Gọi M là giao điểm của Bn và DP , Tính $\angle BMD = ?$

c, CMR : $PA \cdot PB = PD \cdot PM$

HD :

a, Ta có

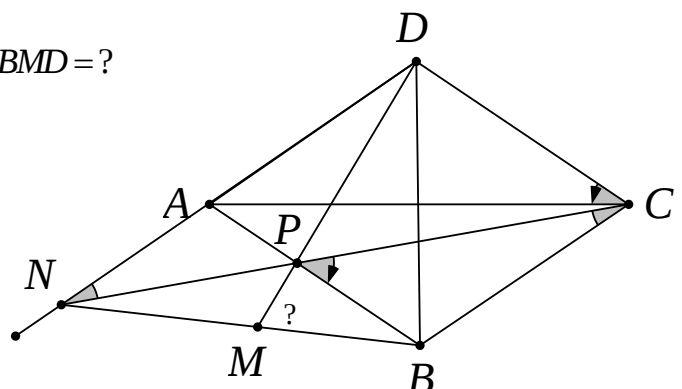
$$\Delta PBC \sim \Delta CDN \Rightarrow CD \cdot BC = BP \cdot DN$$

$$\text{Do } AB = BC = CD \Rightarrow AB^2 = BP \cdot DN$$

b, Ta chứng minh được $\angle BMD = 60^\circ$

$$\text{c, } \Delta PAD \sim \Delta PMB \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PM}{PB}$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PD \cdot PM \text{ đpcm.}$$



Bài 69: Cho ΔABC nhọn có $AB=AC$, và hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H , CH cắt DE tại I

a) CMR : $\Delta HIE \sim \Delta DIC$

b) Đường thẳng đi qua E song song với BC cắt CH ở F , CMR : $\frac{IH}{IC} = \frac{FH}{FC}$ và $F \in AB$

Bài 70: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , $AB=6cm$, $BC=8cm$, Kẻ AE vuông góc với BD , Tia AE cắt BC tại F

a) Tính BD , AE , BE , BF và diện tích ΔBEE

b) CMR: $CD.AB=BE.BD=BF.BC$

c) Kẻ EH vuông góc với AB , EK vuông góc với AD , CMR: $AE=HK$ và $AH.AB=AK.AD$

d) Tia KH cắt DB ở T , CM AC vuông góc với HK và $TH.TK=TD.TB$

HD:

a) Xét ΔADB và ΔBAF có :

$$\angle DAB = \angle ABF = 90^\circ$$

$$\angle ADB = \angle BAF$$

$$\angle ADB + \angle ABD = 90^\circ, \angle BAF + \angle FAD = \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta BAF \text{ (g.g)} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{BA} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{6}{BF} \Rightarrow BF = 4,5cm$$

$$\text{Xét } \Delta ABD \text{ vuông tại A: } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10cm$$

Xét ΔABF vuông tại B: có $BE \perp AF$

$$\Rightarrow \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BF^2} \Rightarrow \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4,5^2} \Rightarrow BE = 3,6cm$$

Chứng minh tương tự: $\Delta ABE \sim \Delta AFB \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{FB} \Rightarrow \frac{6}{AF} = \frac{AE}{6} = \frac{3,6}{4,5} \Rightarrow AE = 4,8cm, AF = 7,5cm$$

$$\text{Và } S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} BE.EF = \frac{1}{2} .3,6.(AF - AE) = \frac{1}{2} .3,6.(7,5 - 4,8) = 4,86cm^2$$

b) ΔABD vuông tại A có AE vuông góc với BD tại $E \Rightarrow AB^2 = BE.BD \Rightarrow AB.CD = BE.BD$
Vì ($AB=CD$)

Có: $BF.BC=4,5.8=36=AB^2 \Rightarrow AB.CD=BF.BC=BE.BD$ (đpcm)

c) Ta có: $\angle HAK = \angle AKE = \angle AHE = 90^\circ$ (1)

$$\text{Mà: } \angle AKE + \angle KEH + \angle EHA + \angle HAK = 360^\circ \Rightarrow \angle KEH = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $AHEK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AE=HK$

Xét ΔAKH vuông và ΔHEA vuông có:

$$AK=HE$$

AH cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta AKH = \Delta HEA \text{ (Hai cạnh góc vuông)} \Rightarrow \angle AKH = \angle AEH$$

$$\text{Vì } EH \perp AB, BC \perp AB \Rightarrow EH \parallel BC \Rightarrow \angle AEH = \angle AFB$$

$$\text{Mà } \angle AFB = \angle ABD \text{ (Cùng phụ } \angle BDC) \Rightarrow \angle AKH = \angle ABD$$

Xét ΔHAK và ΔBAD có:

Góc A chung

$$\angle AKH = \angle ABD$$

$$\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta DAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow AH.AB = AD.AK \text{ (đpcm)}$$

d) Ta có: $\angle AKH = \angle ABD$ (cmt) (3)

Xét ΔBDA vuông và ΔCAD vuông có:

AD cạnh chung

$$AB=DC$$

$$\Rightarrow \triangle BDA = \triangle CAD \Rightarrow \angle ABD = \angle ACD \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được: $\angle AKH = \angle ACD$

$$\text{Mà } \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle AKH + \angle CAD = 90^\circ$$

Gọi M là giao điểm của HK và AC.

$$\triangle AMK \text{ có: } \angle AKH + \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle AMK = 90^\circ \Rightarrow AC \perp HK$$

Ta có: $\angle THB = \angle AHK$ (đối đỉnh)

$$\angle AHK = \angle ADB \quad (\angle HAK = \angle ADB) \Rightarrow \angle THB = \angle ADB \text{ hay } \angle THB = \angle KDT$$

Xét $\triangle THB$ và $\triangle TDK$ có:

Góc T chung

$$\angle THB = \angle KDT \Rightarrow \triangle THB \sim \triangle TDK (g.g) \Rightarrow \frac{TH}{TD} = \frac{TB}{TK} \Rightarrow TH.TK = TD.TB \quad (\text{đpcm})$$

Bài 71: Cho $\triangle ABC$ nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

a) CMR: $\triangle BDH \sim \triangle BEC$ suy ra $BH.BE + CH.CF = BC^2$

b) Chứng minh H cách đều ba cạnh của $\triangle DEF$

c) Tính tổng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$

d) Trên các đoạn thẳng HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. CMR đường trung trực của MN luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài 72: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

a) CMR: $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ đồng dạng

b) CMR: $BH.HD = CH.HE$

c) Nối D với E, Biết $BC = a$, $AB = AC = b$, Tính DE theo a và b

HD:

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$

Có A là góc chung

$$\angle ABD = \angle AEC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE (g.g)$$

b) Xét $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có :

$$\angle BHE = \angle CHD \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$\angle BEH = \angle CDH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle CHD (g.g) \Rightarrow \frac{HB}{CH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow BH.HD = CH.HE$$

c) Khi $AB = AC = b$, thì $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DE = \frac{AD.BC}{AC}$

Gọi giao điểm của AH và BC là F

$$= AF \perp BC, FB = FC = \frac{a}{2}, \Rightarrow \triangle DBC \sim \triangle FAC \Rightarrow \frac{DC}{FC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC.FC}{AC} = \frac{a^2}{2b}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{AD.BC}{AC} = \frac{(AC - DC).BC}{AC} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{2b}\right)a}{b} = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}$$

Bài 73: Từ ba đỉnh A, B, C của $\triangle ABC$ ta vẽ ba đường thẳng song song với nhau, Chúng lần lượt cắt BC và các đường thẳng CA, AB tại D, E, F, Chứng minh rằng:

$$a) \frac{1}{AD} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}$$

$$b) S_{\triangle DEF} = 2.S_{\triangle ABC}$$

HD:

a) Theo hệ quả của định lý ta có:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CE}; \frac{AD}{CF} = \frac{BD}{CB}, \text{ Cộng từng vế ta được:}$$

$$\frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} = \frac{CD}{CB} + \frac{BD}{CB} = 1, \text{ chỉ hai vế cho AD ta được:}$$

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF}$$

b) Từ $AD \parallel BE \parallel CF$, lập luận chứng minh được:

$$S_{ADE} = S_{ADB}, S_{ADF} = S_{ADC}, S_{AEF} = S_{ACB}$$

$$\text{Suy ra } S_{ADE} + S_{ADF} + S_{AEF} = S_{ADB} + S_{ADC} + S_{ACB} \Rightarrow S_{DEF} = 2.S_{ABC}$$

Bài 74: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A, CM là đường trung tuyến (M nằm trên AB), Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H, Tính tỉ số $\frac{BH}{HC}$

HD:

Giả sử: AH cắt MC tại I

Gọi trung điểm của BH là K thì $MK \parallel AH$

Dễ thấy ba tam giác vuông $\triangle AMC$, $\triangle IAC$, $\triangle IMA$ đồng dạng mà $AC = 2 \cdot AM$

Nên $IC = 2 \cdot IA = 4 \cdot IM$

$$\text{Suy ra: } \frac{HK}{HC} = \frac{IM}{IC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{2 \cdot HK}{HC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{1}{2}$$

Bài 75: Cho hình thang ($AD \parallel BC$). Một điểm M di động trên đường chéo AC, Chứng minh : $MB \cdot AC \leq MC \cdot AB + MA \cdot BC$

HD:

Kẻ $Cx \parallel AB$ cắt tia BM tại P $\Rightarrow AB \cdot MC = MA \cdot CP$

$$\text{Ta có: } MC \cdot AB + MA \cdot BC = MA \cdot CP + MA \cdot BC = MA(CP + BC) \geq MA \cdot BP$$

Ta lại có: $MB \cdot AC = BP \cdot AM$,

$$\text{Vậy } MB \cdot AC \leq MC \cdot AB + MA \cdot BC$$

Bài 76: Cho $\triangle ABC$ đều, Gọi M là trung điểm của BC, Dựng góc $\angle xMy = 60^\circ$, quay quanh điểm M sao cho hai cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E, CMR:

$$a) BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác góc: $\angle BDE, \angle CED$

c) Chu vi $\triangle ADE$ không đổi

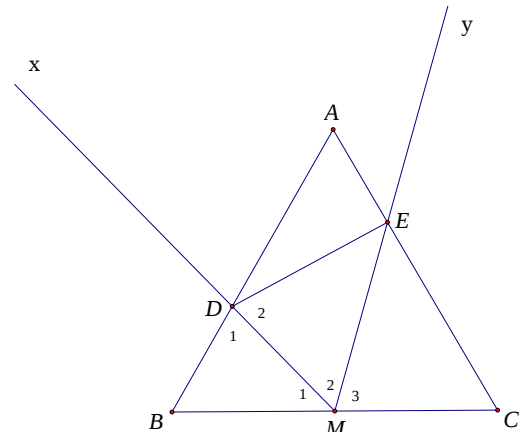
HD:

a) Trong $\triangle BDM$, ta có: $D_1 = 120^\circ - M_1$

$$\text{Vì } M_2 = 60^\circ \Rightarrow M_3 = 120^\circ - M_1 \Rightarrow D_1 = M_3$$

Ta chứng minh được: $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM \quad (1)$$



$$\text{Vì } BM = CM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{b) Từ (1) suy ra: } \frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}, \text{ Mà } BM=CM \text{ nên ta có: } \frac{BD}{BM} = \frac{MD}{EM}$$

Ta chứng minh được: $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow D_1 = D_2$. do đó: DM là phân giác BDE

Chứng minh tương tự ta có: EM là phân giác góc CED

b) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC,

Chứng minh DH=DI, EI=EK

Tính chu vi $\triangle ADE$ bằng 2. AH không đổi

Bài 77: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$, Qua A vẽ đường thẳng $AK \parallel BC$ ($K \in CD$), Qua B vẽ đường thẳng $BI \parallel AD$ ($I \in CD$), BI cắt AC ở F, AK cắt BD ở E, CMR:

a) $EF \parallel AB$

b) $AB^2 = CD \cdot EF$

HD:

$$\text{a) } \triangle AEB \sim \triangle KED \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{KD}$$

$$\triangle AFB \sim \triangle CFI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CI}, \text{ Mà } KD = CI (= CD - AB)$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC \Rightarrow EF \parallel AB$$

Bài 78: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của AD với BC, Gọi M và N là trung điểm của AB và CD

$$\text{a) CMR: } \frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$$

b) Chứng tỏ rằng: I, M, O, N thẳng hàng

c) Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang ABCD bằng a. Hãy tính diện tích của tứ giác IAOB

theo a

HD :

$$\text{a) } \triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{OA + OB}{OC + OD}$$

$$\triangle IAB \sim \triangle IDC \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$$

$$\Rightarrow \frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$$

$$\text{b) } \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AM}{NC} \text{ và } \angle BAC = \angle ACD \Rightarrow \triangle OAM \sim \triangle OCN$$

$\Rightarrow \angle AOM = \angle CON \Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng

$$\frac{IA}{ID} = \frac{B}{CD} \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{M}{DN} \text{ và } \hat{I} \text{ là góc chung} \Rightarrow \triangle IAM \sim \triangle IDN \Rightarrow I, M, N \text{ thẳng hàng}$$

$\Rightarrow AMI = DNI$, Vậy I, M, O, N thẳng hàng

$$\text{c) Vì } \frac{OB}{OD} = \frac{B}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOD} + S_{AOB}} = \frac{1}{3+1} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABD}$$

$$\text{Lại có: } \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{BDC} + S_{ABD}} = \frac{1}{3+1} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABCD} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{16} S_{ABCD}$$

$$\frac{S_{IAB}}{S_{ICD}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{ICD} - S_{IAB}} = \frac{1}{9-1} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{8} \cdot S_{ABCD}$$

$$S_{IAOC} = S_{IAB} + S_{AOB} = \frac{1}{8} S_{ABCD} + \frac{1}{16} S_{ABCD} = \frac{3}{16} S_{ABCD} = \frac{3a}{16}$$

Bài 79: Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD, Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC, Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống AB và AD

- Tứ giác BEDF là hình gì?
- CMR: $CH \cdot CD = CB \cdot CK$
- Chứng minh rằng: $AB \cdot AH + AD \cdot AK = AC^2$

HD:

- Ta có: $BE \perp AC, DF \perp AC \Rightarrow BE \parallel DF$
 Để thấy $\triangle BEO = \triangle DFO$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = DF$
 Suy ra BEDF là hình bình hành
- Ta có: $ABC = ADC \Rightarrow HBC = KDC \Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle CDK$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH \cdot CD = CK \cdot CB$
- Chứng minh: $\triangle AFD \sim \triangle AKC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD \cdot AK = AF \cdot AC$
 Lại có: $\triangle CFD \sim \triangle AHC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$, Mà $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB \cdot AH = CF \cdot AC$
 $\Rightarrow AB \cdot AH + AD \cdot AK = CF \cdot AC + AF \cdot AC = (CF + AF) \cdot AC = AC^2$

Bài 80: Cho $\triangle ABC$ có $BAC = 120^\circ$, Các phân giác trong lần lượt là AD, BE, CF

- Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

- Tính FDE

HD:

- Từ B kẻ $BK \parallel AC$, cắt AD tại K, ta có: $\triangle ABK$ đều, đó đó: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK}{DA} = \frac{AB - AD}{AD}$
 $\Rightarrow AB \cdot AD = AC(AB - AD) \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$
- Áp dụng tính chất đường phân giác: ta có: $BD = \frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$,
 Từ câu a $\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{EA}{EB}$, Nên DE là phân giác BDA

Chứng minh tương tự DF là phân giác ADC , từ đó suy ra: $BDA = 90^\circ$

Bài 81: Cho $\triangle ABC$, trên các cạnh AB và AC lấy các điểm M và N sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$, Gọi D là giao điểm của Bn và Cm, E là giao điểm của MN và BC

- Tính $\frac{EB}{EC}$
- Tính tỉ số diện tích tứ giác AMDN và $\triangle ABC$

HD:

a) Kẻ $CK \parallel AB$ cắt ME tại K

Chứng minh $\frac{CK}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CK}{BM} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = 4$

b) Chứng minh được: $S_{AMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{2}{9} S_{ABC}$

Từ M kẻ $MF \parallel AC$ cắt BN tại F

Ta chứng minh được: $\frac{MF}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MF}{CN} = \frac{4}{3}$, Từ đó suy ra: $\frac{MD}{DC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{4}{7}$

Ta cũng có: $S_{MDN} = \frac{4}{7} S_{MNC} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{9} S_{ABC} = \frac{4}{63} S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{AMDN} = \frac{4}{63} S_{ABC} + \frac{2}{9} S_{ABC} = \frac{2}{7} S_{ABC}$

Bài 82: Cho hình thoi $ABCD$, Có $\angle BAD = 120^\circ$, Gọi M là 1 điểm nằm trên cạnh AB , Hia đường thẳng DM và BC cắt nhau tại N , CM cắt AN tại E , chứng minh rằng:

a) $\triangle AMD$ và $\triangle CDN$ đồng dạng và $AC^2 = AM \cdot CN$

b) $\triangle AME$ và $\triangle CMB$ đồng dạng

HD:

a) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CDN$ có:

$AMD = CDN$ (so le trong)

$ADM = CND$ (so le trong) $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CDN$ (g.g)

$\Rightarrow AM \cdot CN = AD \cdot CD$, Vì $\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle CAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ đều $\Rightarrow AD = CD = AC$

$\Rightarrow AM \cdot CN = AC^2$

b) Vì $AM \cdot CN = AC^2 \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CN}$

Chứng minh $\angle MAC = \angle ACN = 60^\circ \Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle CAN \Rightarrow \angle ACM = \angle CNA$

Mà $\angle ACM + \angle ECN = 60^\circ \Rightarrow \angle CNA + \angle ECN = 60^\circ \Rightarrow \angle AEC = 60^\circ$

Xét $\triangle AME$ và $\triangle CMB$ có:

$\angle AEM = \angle BMC$ (đối đỉnh)

$\angle AEM = \angle BMC = 60^\circ \Rightarrow \triangle AME \sim \triangle CMB$ (g.g)

Bài 83: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , Cho biết $AB = 15\text{cm}$ và $AC = 20\text{cm}$

a) Chứng minh rằng: $AB \cdot BC = AB \cdot AC$, Tính BC và AH

b) Kẻ $HM \perp AB, HN \perp AC$, Chứng minh rằng $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$ đồng dạng

c) Trung tuyến AK của $\triangle ABC$ cắt MN tại I , Tính diện tích $\triangle AMI$

HD:

a) Ta có: $\triangle ABH \sim \triangle CBH \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$

Từ đó ta có: $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 12\text{cm}$

b) Chứng minh $\triangle ACB \sim \triangle HCA, \triangle HCA \sim \triangle NHA$

$\triangle NHA = \triangle AMN \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB$

c) Ta có: $N_1 = B$ ($\triangle AKC$ cân tại K)

Và $A_1 = C$, mà $B + C = 90^\circ \Rightarrow N_1 + A_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AIN$ vuông cân tại I , và $\triangle NHA \sim \triangle ACB$ (cmt)

$\Rightarrow \frac{NH}{AC} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow NH = \frac{AC \cdot AH}{BC} = 9,6\text{cm}$

$$\Rightarrow AM = NH = 9,6cm$$

$$\text{Và } \triangle IMA \sim \triangle AMN \Rightarrow \triangle IMA \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{IM}{AC} = \frac{AI}{AB} = \frac{9,6}{25} \Rightarrow IM = \frac{192}{15}, AI = \frac{144}{25}$$

$$\Rightarrow S_{AMI} = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot IM = \frac{1}{2} \cdot \frac{192}{25} \cdot \frac{144}{25} = \frac{13824}{625}$$