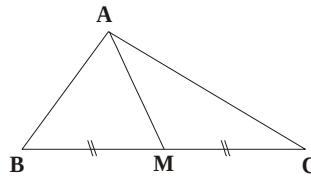


CHUYÊN ĐỀ 34.1. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN,

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Đường trung tuyến của một tam giác



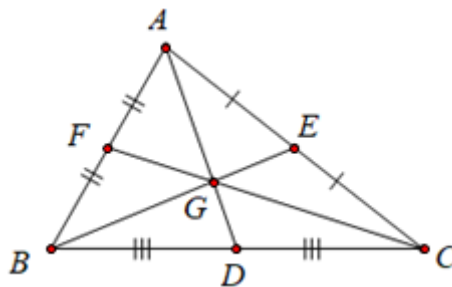
– Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của $\triangle ABC$ với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của $\triangle ABC$.

– Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

– Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác đó.



3. Vị trí của trọng tâm:

Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi

qua đỉnh ấy: $\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan đến trọng tâm tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Chọn câu sai:

- A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
- B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.
- C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
- D. Một tam giác có hai trọng tâm.

Lời giải

Một tam giác chỉ có một trọng tâm nên D sai.

Chọn đáp án D.

Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống: “Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng ... độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy”

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 3.

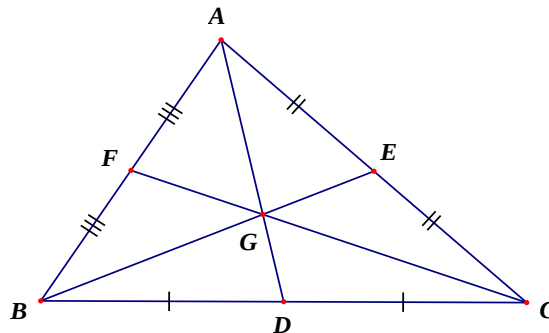
D. 2.

Lời giải

Chọn đáp án A.

Theo tính chất trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Số cần điền là $\frac{2}{3}$.

Bài 3. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{BG}{BE}$?

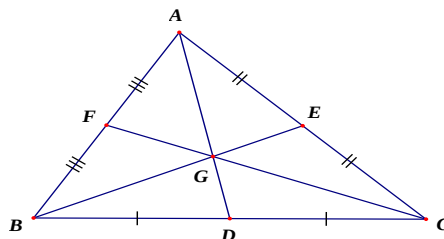


Lời giải

Ta có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC .

Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} BE$.

Bài 4. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{AG}{GD}$?



Lời giải

Ta có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC .

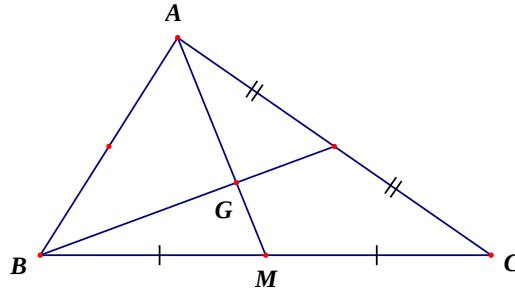
Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AD \Rightarrow GD = AD - AG = AD - \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}AD$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{\frac{2}{3}AD}{\frac{1}{3}AD} = 2 \Rightarrow AG = 2GD.$$

Bài 5. Tam giác ABC có trung tuyến $AM = 9\text{cm}$ và trọng tâm G . Tính độ dài đoạn AG ?

Lời giải

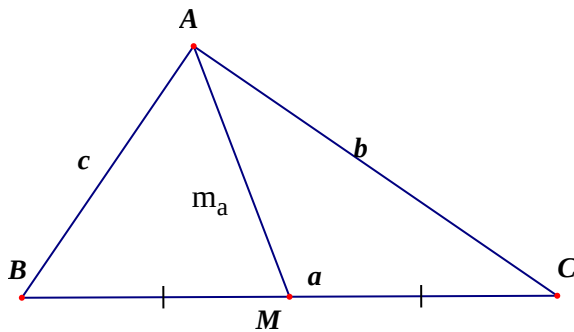


Vì G là trọng tâm của tam giác ABC và AM là đường trung tuyến, nên $AG = \frac{2}{3}AM$ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác), do đó: $AG = \frac{2}{3}.9 = 6\text{cm}$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Kẻ trung tuyến AM . Đặt $AM = m_a$.

Chứng minh rằng $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Lời giải



Với $\triangle AMB$ ta có: $AM + MB > AB$ (1)

Với $\triangle AMC$ ta có: $AM + MC > AC$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được: $2AM + (MB + MC) > AB + AC$

$$\text{Hay } 2m_a + a > b + c \Rightarrow m_a > \frac{b+c-a}{2}$$

Chứng minh tương tự ta có $m_a < \frac{b+c}{2}$

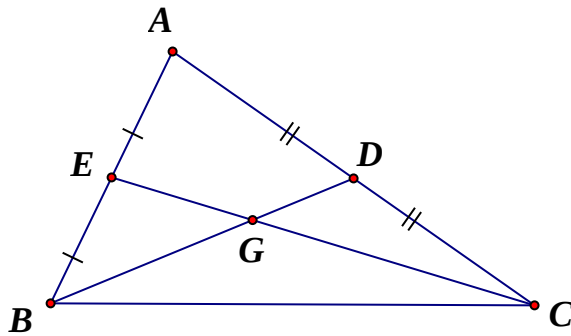
Khi đó ta có: $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BD, CE

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD}, \frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Lời giải



Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến BD, CE là G .

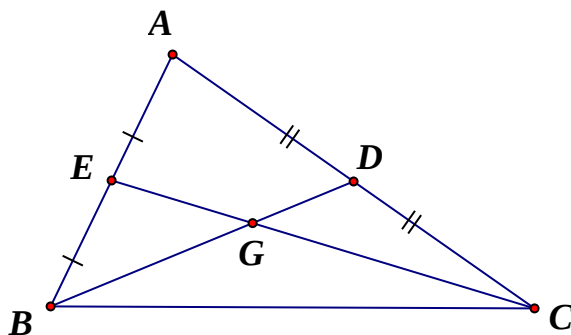
$\triangle GBC$ có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 8\text{ cm}$, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G . Chứng minh $BD + CE > 12\text{ cm}$.

Lời giải



$\triangle GBC$ có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

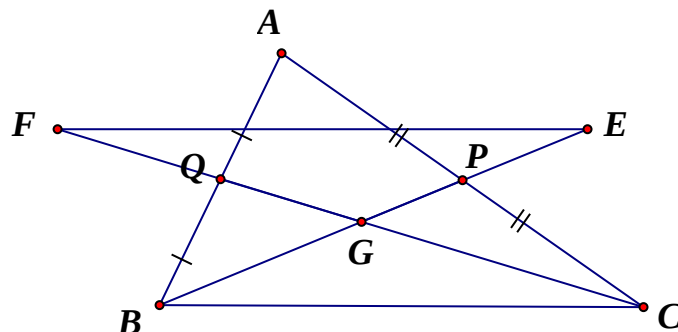
Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP , CQ cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia GP , lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của tia GQ lấy điểm F sao cho $QF = QG$. Chứng minh:

a) $GB = GE$, $GC = GF$;

b) $EF = BC$ và $EF \parallel BC$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $BG = 2GP$, $CG = 2GQ$.

Lại có $PE = PG$, $QF = QG$ nên $GE = 2GP$, $GF = 2GQ$.

Do đó $BG = GE$, $CG = GF$.

b) Suy ra $\triangle GBC = \triangle GEF$ (c.g.c)

Từ đó ta có $EF = BC$ và $\angle GEF = \angle GBC$

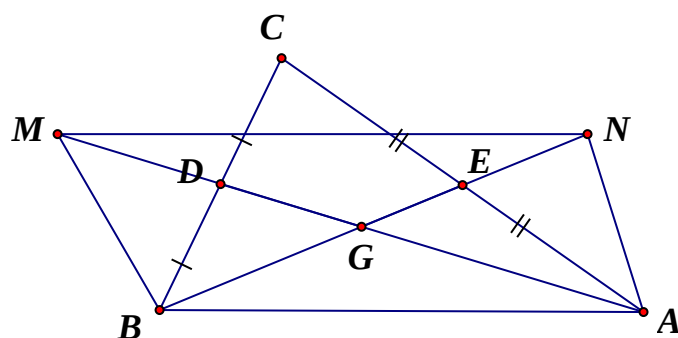
$\Rightarrow EF \parallel BC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD , BE cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG . Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm của GN . Chứng minh:

a) $GN = GB$, $GM = GA$;

b) $AN = MB$ và $AN \parallel MB$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $BG = 2GE$, $AG = 2GD$.

Lại có $GN = 2GE$, $GM = 2GD$. (D , E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng MG , GN)

Do đó $GN = GB$, $GM = GA$;

b) Suy ra $\triangle GMB = \triangle GNA$ (c.g.c)

Từ đó ta có $AN = MB$ và $GMB = GAN$

$\Rightarrow AN \parallel MB$.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

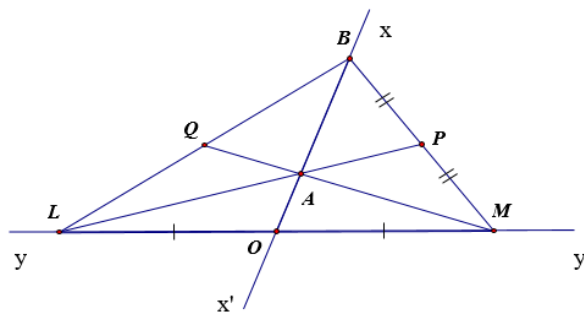
Để chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

- + Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.
- + Chứng minh điểm đó thuộc một đường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâm của tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O . Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho A nằm giữa O và $B, AB = 2OA$. Trên yy' lấy hai điểm L và M sao cho O là trung điểm của LM . Nối B với L, B với M và gọi P là trung điểm của đoạn MB, Q là trung điểm của đoạn LB . Chứng minh rằng các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A .

Lời giải



Ta có O là trung điểm của đoạn LM . Suy ra BO là đường trung tuyến của $\triangle BLM$ (1)

Mặt khác $BO = BA + AO$ vì A nằm giữa O và B hay $OB = 2OA + OA = 3OA$

Suy ra $BA = \frac{2}{3}BO$ (2)

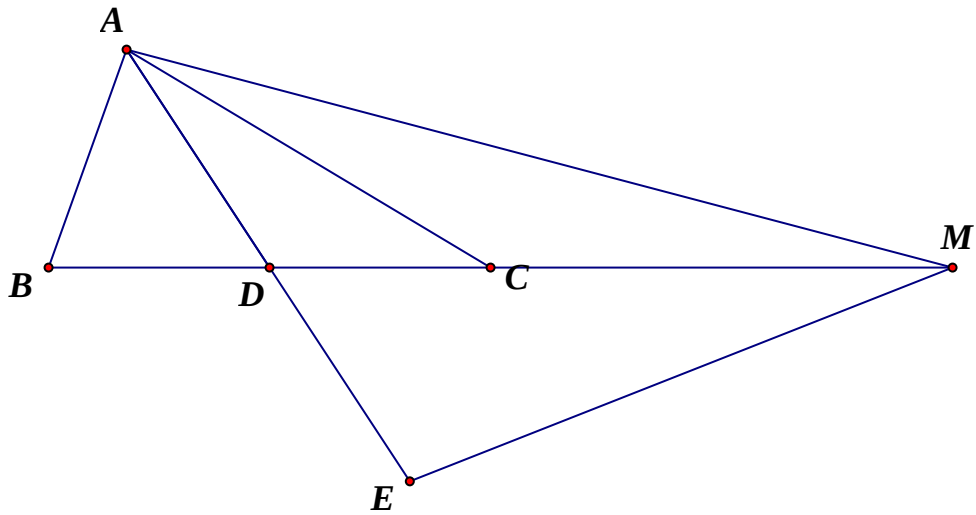
Từ (1), (2) suy ra A là trọng tâm của $\triangle BLM$

Mà LP và MQ là các đường trung tuyến của $\triangle BLM$ (vì P là trung điểm MB và O là trung điểm của đoạn LM)

Suy ra các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A (theo tính chất ba đường trung tuyến)

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AD . Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AD = DE$, trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC = CM$. Chứng minh C là trọng tâm của $\triangle AEM$.

Lời giải



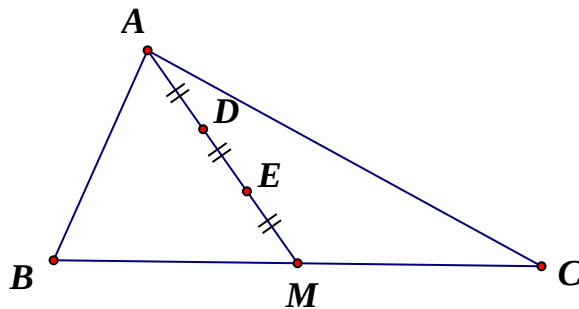
Theo đề bài ta có $AD = DE$ nên C thuộc MD là đường trung tuyến của tam giác AEM (1)

Mặt khác ta có $BC = 2CD$ và $BC = CM$ nên $CM = 2CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra C là trọng tâm của $\triangle AEM$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EM$. Chứng minh E là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Lời giải

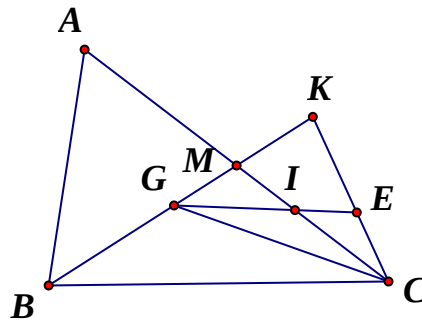


Từ giả thiết $AD = DE = EM$ ta có $AE = \frac{2}{3}AM$.

Mà E thuộc trung tuyến AM nên E là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$. Vẽ trung tuyến BM . Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho $BG = \frac{2}{3}BM$ và G là trung điểm của BK . Gọi E là trung điểm CK ; GE cắt AC tại I . Chứng minh: I là trọng tâm của $\triangle KGC$.

Lời giải



Theo đề bài $BG = \frac{2}{3} BM$. Suy ra $BG = 2GM \Rightarrow GK = 2GM$

$\Rightarrow M$ là trung điểm GK .

Do đó I là giao điểm ba đường trung tuyến trong ΔKGC .

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

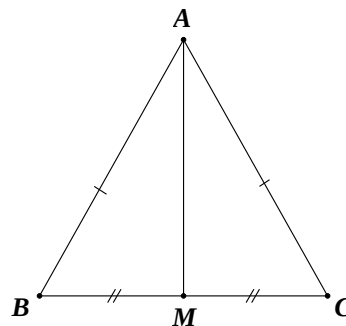
I. Phương pháp giải:

Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Chứng minh rằng AM vuông góc với BC .

Lời giải



Xét ΔABM và ΔACM có:

$$AB = AC (GT)$$

$$BM = CM (GT)$$

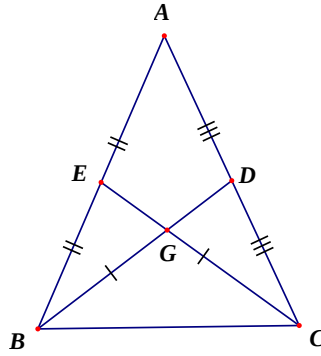
AM : cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM (c - c - c) \Rightarrow \angle AMB = \angle AMC \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

Mà $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ nên $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$ hay $AM \perp BC$

Bài 2. Cho ΔABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của BD và $CE \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD$; $CG = \frac{2}{3}CE$

Do $BD = CE$ nên $BG = CG$; $GD = GE \Rightarrow \triangle BGE = \triangle CGD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$

Ta lại có: $BE = \frac{1}{2}AB$; $CD = \frac{1}{2}CA$

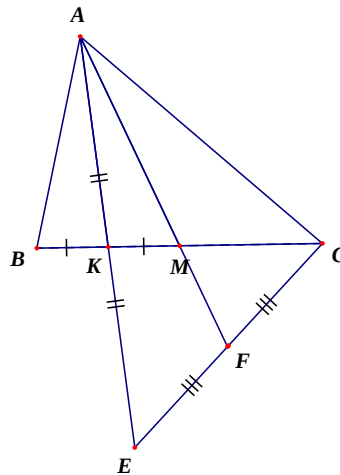
Do đó $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

Bài 3. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến. Gọi K là trung điểm của BM . Trên tia đối của tia lấy KA điểm E sao cho $KE = KA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?

b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Lời giải



Xét $\triangle ACE$, ta có: $KA = KE$ (gt) $\Rightarrow CK$ là đường trung tuyến

Mà $CM = \frac{2}{3}CK$ nên M là trọng tâm $\triangle ACE$.

Do F là trung điểm của EC (gt) nên AF là đường trung tuyến thứ ba của $\triangle ACE$

Mà M là trọng tâm nên AF đi qua M

Hay ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Tính $\angle ABD$

b) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle BAC$.

c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$

Lời giải

a) $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle DAC \Rightarrow BD \parallel AC$ Mà $AB \perp AC$ nên $AB \perp BD$

$\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$.

b) $\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c).

c) $\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$.

Mà $AM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

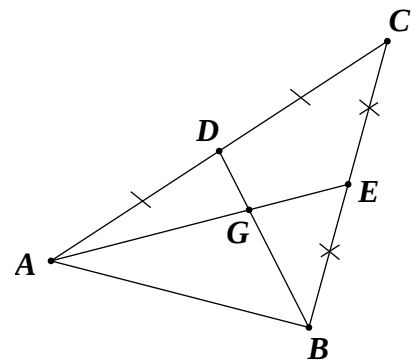
Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$GD = \dots BD; AG = \dots GE;$

$GD = \dots BG; AE = \dots AG;$

$AE = \dots GE.$



Hình 1

Bài 2. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G . Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB .

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm BM . Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm AC . Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E .

a) Chứng minh I là trọng tâm của $\triangle HKC$ và E là trung điểm của HC .

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 3. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K . Chứng minh:

a) I là trọng tâm của $\triangle ABC$ và K là trọng tâm của $\triangle ADC$;

b) $BI = IK = KD$.

Bài 4. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến BD . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE .

b) $CP \parallel AQ$ và $CQ \parallel AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD$. Chứng minh rằng $DAE = ECB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ là tam giác cân.

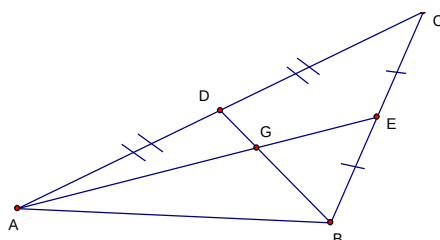
Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AM = BN = CP$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1.



$$GD = \frac{1}{3}BD; AG = 2GE;$$

$$GD = \frac{1}{2}BG; AE = \frac{3}{2}AG;$$

$$AE = 3GE.$$

Hình 1

Bài 2. Hình 2.

Xét $\triangle ABC$ có

BD và CE là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD; CG = \frac{2}{3}CE \text{ (Tính chất ba}$$

đường trung tuyến của tam giác).

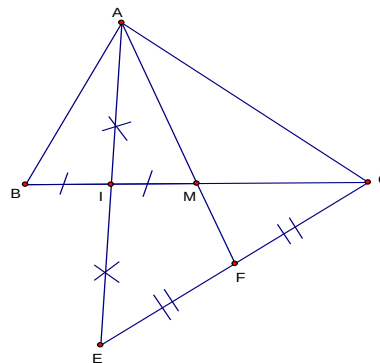
Mà $BD < CE$ (gt) $\Rightarrow BG < CG$.

Xét $\triangle CGB$ có $BG < CG$ (cmt) $\Rightarrow GBC > GCB$ (Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác).

Vậy $GBC > GCB$.

Dạng 2 . Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Hình 4.



Hình 4

a) Vì AM là đường trung tuyến của BC (gt)

$\Rightarrow BM = CM$ (Tính chất đường trung tuyến).

Mà $BI = IM = \frac{1}{2}BM$ (vì I là trung điểm của BM)

$$\Rightarrow CM = 2IM \Rightarrow CM = 2(CI - IM) \Rightarrow CM = \frac{2}{3}CI .$$

Xét $\triangle ACE$ có

CI là đường trung tuyến (vì $AI = IE$);

$$CM = \frac{2}{3}CI$$

Vậy M là trọng tâm của $\triangle ACE$ (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

b) Xét $\triangle ACE$ có

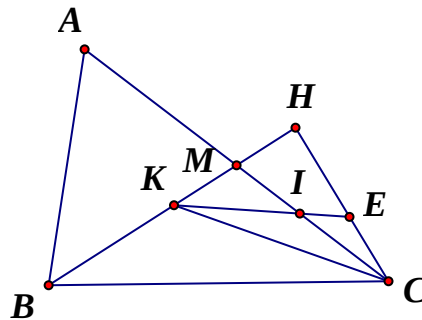
AF là đường trung tuyến của CE (vì F là trung điểm của CE);

M là trọng tâm của $\triangle ACE$

$\Rightarrow AF$ đi qua điểm M (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

Vậy A, F, M thẳng hàng

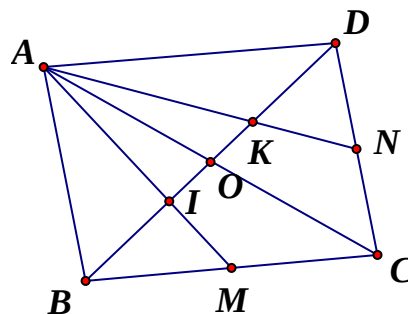
Bài 2.



a) M là trung điểm KH . Suy ra I là trọng tâm của $\triangle HKC$. Suy ra KI là trung tuyến $\triangle HKC$.

b) $\frac{IE}{IK} = \frac{1}{2}, \frac{IC}{MC} = \frac{2}{3}$. Suy ra HI cũng là trung tuyến $\triangle HKC$.

Bài 3.



a) $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BO, AM cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

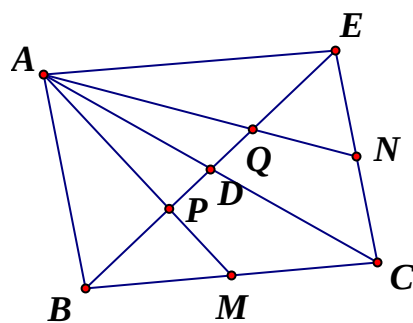
Tương tự ta có K là trọng tâm của $\triangle ADC$.

b) Từ ý a) suy ra ta có: $BI = \frac{2}{3}BO, DK = \frac{2}{3}DO$

Mặt khác $BO = DO \Rightarrow BI = DK = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD \Rightarrow IK = \frac{1}{3}BC$.

Do đó $BI = IK = KD$.

Bài 4.

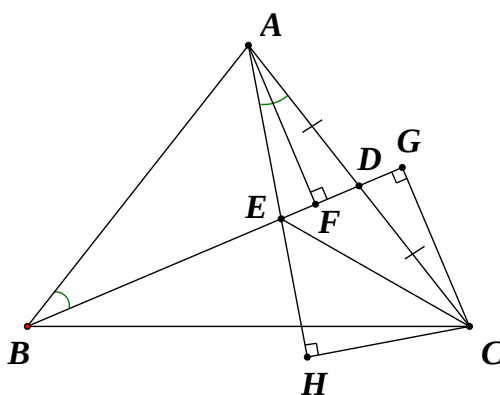


a) Chứng minh được P, Q lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle AEC$. Suy ra ĐPCM.

b) Chú ý $\triangle ADP = \triangle CQD$ và $\triangle ADQ = \triangle CDP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Hình 5.



Vẽ $AF \perp BD, CG \perp BD, CH \perp AE$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A (gt) nên $AB = AC, \angle ABC = \angle ACB$.

Xét $\triangle ABF$ vuông và $\triangle CAH$ vuông có

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle ABF = \angle CAH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABF = \triangle CAH \text{ (cạnh huyền – góc nhọn),}$$

Suy ra $AF = CH$ (hai cạnh tương ứng) (1).

Do BD là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ nên $AD = CD$.

Xét $\triangle ADF$ vuông và $\triangle CDG$ vuông có

$$\left. \begin{array}{l} AD = CD \\ \angle ADF = \angle CDG \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADF = \triangle CDG \text{ (cạnh huyền – góc nhọn),}$$

Suy ra $AF = CG$ (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CH = CG$.

Xét $\triangle CEH$ vuông và $\triangle CEG$ vuông có

$CH = CG$ (cmt); EC chung

$\Rightarrow \triangle CEH = \triangle CEG$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông),

Suy ra $CEH = CEG$ (hai góc tương ứng).

Ta có $CEG = EBC + ECB$ (vì CEG là góc ngoài của $\triangle BEC$),

$CEH = EAC + ECA$ (vì CEH là góc ngoài của $\triangle AEC$),

Do đó $EBC + ECB = EAC + ECA$ (3).

Mặt khác, $EBA + EBC = ECB + ECA$ (vì $ABC = ACB$) (4)

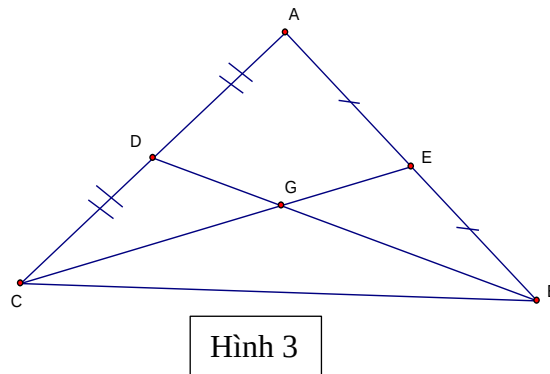
Lấy (3) trừ (4) theo từng vế và do $EAC = EBA$ (gt), ta được :

$$ECB - EBA = EBA - ECB \Rightarrow EBA = ECB.$$

Mà $DAE = ABD$ (gt)

Vậy $DAE = ECB$.

Bài 2. Hình 3.



Gọi G là giao điểm của BD và CE nên $EGB = DGC$ (Hai góc đối đỉnh).

Xét $\triangle ABC$ có BD và CE là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD, CG = \frac{2}{3}CE \text{ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).}$$

Do $BD = CE$ nên $BG = CG, GD = GE$

Xét $\triangle BGE$ và $\triangle CGD$ có :

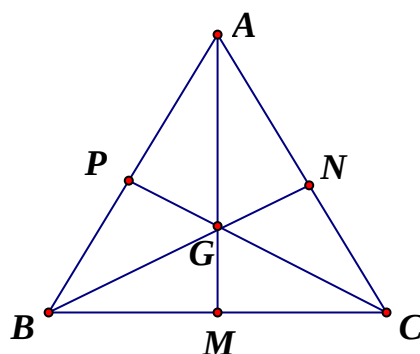
$$\left. \begin{array}{l} GE = GD \\ EGB = DGC \\ BG = CG \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BGE = \triangle CGD \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow BE = CD$ (Hai cạnh tương ứng)

Ta có $BE = \frac{1}{2}AB, CD = \frac{1}{2}AC$ (vì BD và CE là 2 đường trung tuyến)

$\Rightarrow AB = AC$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Bài 3.



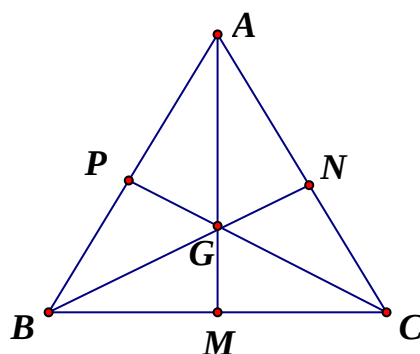
Ta có $BN = CP$ nên $GB = GC, GP = GN$.

Ta chứng minh $AB = AC$. Tương tự, ta có $AB = BC$.

Vậy $AB = BC = CA$.

Suy ra $\triangle ABC$ đều.

Bài 4.



Ta có $AG = BG = CG$ và $AG = \frac{2}{3}AM$, $BG = \frac{2}{3}BN$, $CG = \frac{2}{3}CP$

$\Rightarrow AM = BN = CP$. Tương tự Bài 3 suy ra ĐPCM.

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

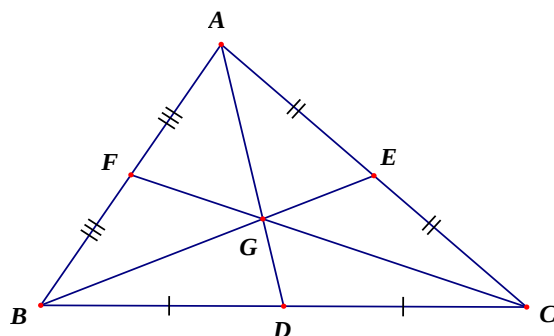
Bài 1. Chọn câu sai:

- A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
- B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.
- C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
- D. Một tam giác có hai trọng tâm.

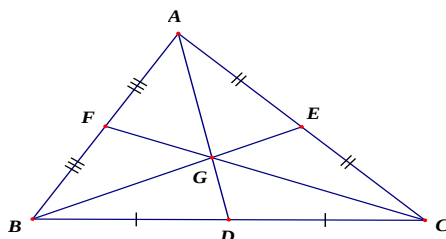
Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống: “Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng ... độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy”

- A. $\frac{2}{3}$.
- B. $\frac{3}{2}$.
- C. 3.
- D. 2.

Bài 3. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{BG}{BE}$?



Bài 4. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{AG}{GD}$?



Bài 5. Tam giác ABC có trung tuyến $AM = 9\text{cm}$ và trọng tâm G . Tính độ dài đoạn AG ?

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Kẻ trung tuyến AM . Đặt $AM = m_a$.

Chứng minh rằng $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BD , CE

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD}$, $\frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh $BD + CE > \frac{3}{2}BC$

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 8\text{cm}$, các đường trung tuyến BD , CE cắt nhau tại G . Chứng minh $BD + CE > 12\text{cm}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP , CQ cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho $QF = QG$. Chứng minh:

a) $GB = GE$, $GC = GE$;

b) $EF = BC$ và $EF \parallel BC$.

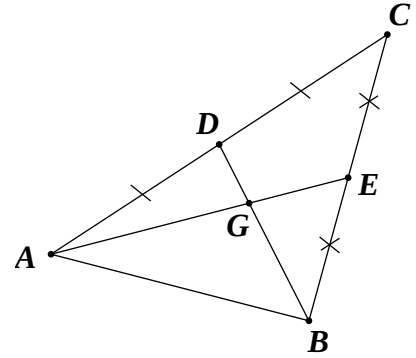
Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD , BE cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG . Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm GN . Chứng minh:

a) $GN = GB$, $GM = GA$;

b) $AN = MB$ và $AN \parallel MB$.

Bài 11. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$$\begin{aligned}GD &= \dots BD; AG = \dots GE; \\GD &= \dots BG; AE = \dots AG; \\AE &= \dots GE.\end{aligned}$$



Hình 1

Bài 12. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G . Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB .

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O . Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho A nằm giữa O và $B, AB = 2OA$. Trên yy' lấy hai điểm L và M sao cho O là trung điểm của LM . Nối B với L, B với M và gọi P là trung điểm của đoạn MB, Q là trung điểm của đoạn LB . Chứng minh rằng các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A .

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ với đường trung tuyến AD . Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AD = DE$, trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC = CM$. Chứng minh C là trọng tâm của $\triangle AEM$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EM$. Chứng minh E là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$. Vẽ trung tuyến BM . Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho $BG = \frac{2}{3}BM$ và G là trung điểm của BK . Gọi E là trung điểm $CK; GE$ cắt AC tại I . Chứng minh: I là trọng tâm của $\triangle KGC$.

Bài 5. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm BM . Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm AC . Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E .

a) Chứng minh I là trọng tâm của $\triangle HKC$ và E là trung điểm của HC .

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 7. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K . Chứng minh:

- a) I là trọng tâm của $\triangle ABC$ và K là trọng tâm của $\triangle ADC$;
- b) $BI = IK = KD$.

Bài 8. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến BD . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

- a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE .
- b) $CP \parallel AQ$ và $CQ \parallel AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , trung tuyến AM . Chứng minh rằng AM vuông góc với BC .

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Gọi K là trung điểm của BM . Trên tia đối của tia AK lấy điểm E sao cho $KE = KA$.

- a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?
- b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

- a) Tính $\angle ABD$
- b) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle BAC$.
- c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = \angle ABD$. Chứng minh rằng $\angle DAE = \angle ECB$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng : $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AM = BN = CP$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

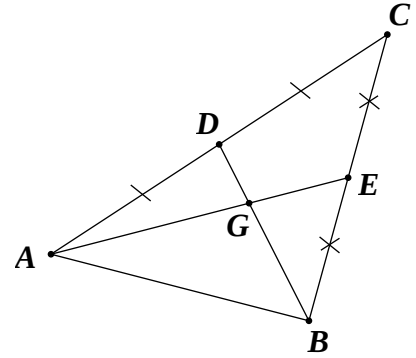
Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$$\begin{aligned}GD &= \dots BD; AG = \dots GE; \\GD &= \dots BG; AE = \dots AG; \\AE &= \dots GE.\end{aligned}$$



Hình 1

Bài 2. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G . Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB .

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm BM . Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE . Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm AC . Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E .

a) Chứng minh I là trọng tâm của $\triangle HKC$ và E là trung điểm của HC .

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 3. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K . Chứng minh:

a) I là trọng tâm của $\triangle ABC$ và K là trọng tâm của $\triangle ADC$;

b) $BI = IK = KD$.

Bài 4. Cho tam giác ABC , đường trung tuyến BD . Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE .

b) $CP \parallel AQ$ và $CQ \parallel AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD$. Chứng minh rằng $DAE = ECB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ là tam giác cân.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AM = BN = CP$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

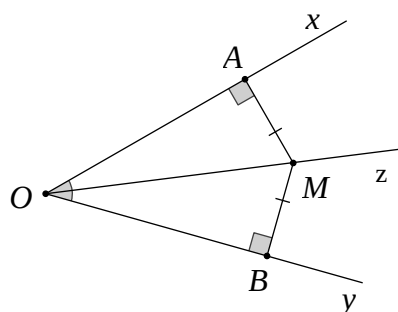
Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G . Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

CHUYÊN ĐỀ 34.2. BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC

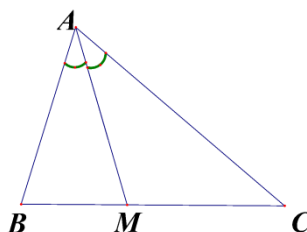
PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Tia phân giác của một góc

- + Định nghĩa tia phân giác của góc: Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.
- + Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó.
- + Mọi điểm trên tia phân giác của một góc cách đều hai cạnh của góc đó. Ngược lại, mọi điểm nằm bên trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



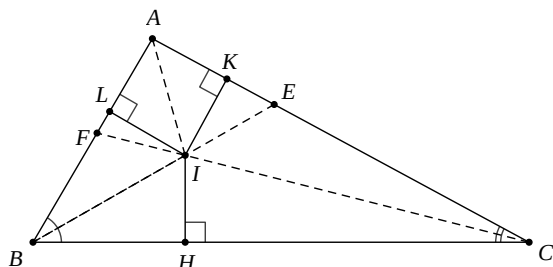
2. Đường phân giác của tam giác



- Trong tam giác ABC , tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M thì đoạn thẳng AM gọi là đường phân giác xuất phát từ đỉnh A của $\triangle ABC$
- Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

3. Tính chất ba đường phân giác của tam giác:

* **Định lý:** Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

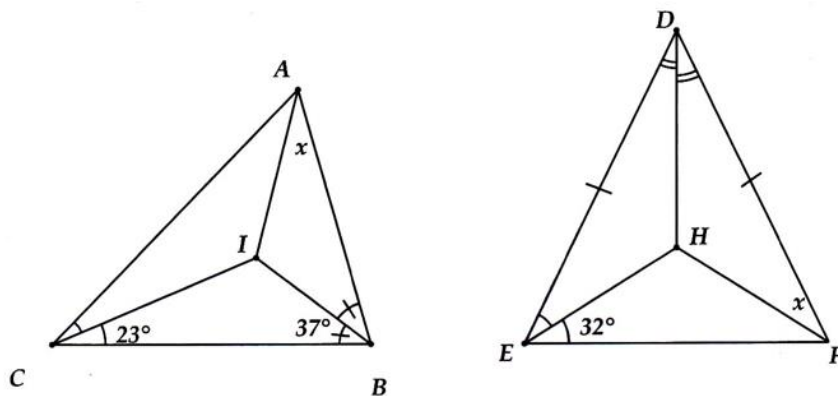
I. Phương pháp giải:

Sử dụng các tính chất:

- + Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.
- + Giao điểm của các đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác
- + Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180°

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết CI và BI là hai phân giác của ACB và ABC , EH và FH là hai phân giác của DEF và DFE .



Lời giải

a) Ta có $B + C = 2IBC + 2ICB = 2(IBC + ICB) = 120^\circ$

$$= A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Mà BI , CI lần lượt là tia phân giác của B và C nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$.

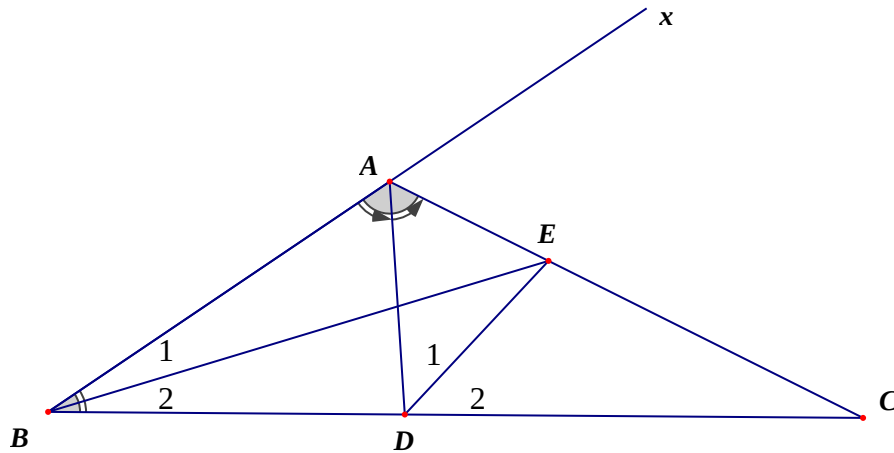
$$\Rightarrow AI \text{ là tia phân giác của } A \Rightarrow x = \frac{A}{2} = 30^\circ.$$

b) Ta có $\triangle DEF$ cân tại $D \Rightarrow F = E = 2HEF = 64^\circ$.

$$\Rightarrow FH \text{ là tia phân giác của } DFE \Rightarrow x = \frac{DEF}{2} = 32^\circ$$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ$. Các đường phân giác AD, BE . Tính số đo góc BED .

Lời giải



Gọi Ax là tia đối của AB

Ta có: $BAD = DAC = \frac{1}{2} BAC = 60^\circ$ (vì AD là tia phân giác BAC) nên $CAx = 60^\circ$

Xét $\triangle ABD$ có AE là tia phân giác góc ngoài đỉnh A , BE là tia phân giác của góc B và chúng cắt nhau tại E , nên DE là tia phân giác góc ngoài của góc D .

Mà EDC là góc ngoài tại đỉnh D của $\triangle BED$, nên $BED + B_2 = EDC$.

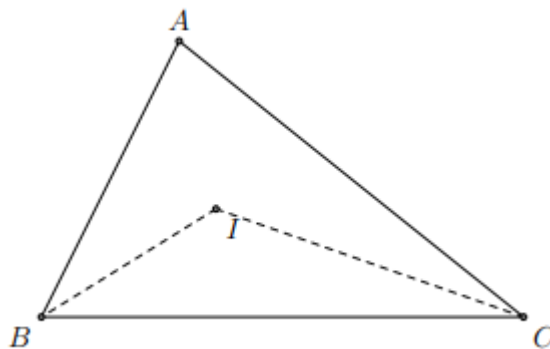
$$\text{Do đó } BED = D_2 - B_2 = \frac{ADC - ABC}{2} = \frac{ABD + BAD - ABC}{2} = \frac{BAD}{2} = 30^\circ$$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác kẻ từ góc B và C . Tính số đo góc BIC trong các trường hợp:

a) $BAC = 80^\circ$

b) $BAC = 120^\circ$

Lời giải



a) $BAC = 80^\circ$

Ta có BI là phân giác của ABC . Suy ra $IBC = \frac{1}{2}ABC$

Ta có CI là phân giác của ACB . Suy ra $ICB = \frac{1}{2}BCA$

Xét $\triangle IBC$ có : $BIC + IBC + BCI = 180^\circ$

Suy ra $BIC + \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BCA = 180^\circ$

Suy ra $BIC + \frac{1}{2}(ABC + BCA) = 180^\circ$

Suy ra $BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(ABC + BCA)$

Suy ra $BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - BAC)$

Suy ra $BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}BAC$

Suy ra $BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}a$

Suy ra $BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}.80^\circ$

Suy ra $BIC = 130^\circ$

b) $BAC = 120^\circ$

Ta có $BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}.120^\circ$

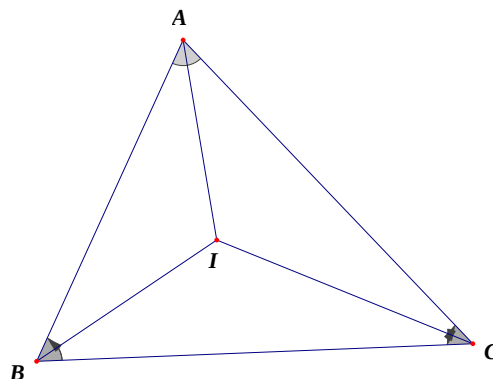
Suy ra $BIC = 150^\circ$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 70^\circ$, tính số đo góc BIC .

b) Biết $BIC = 140^\circ$, tính số đo góc A .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$, ta tính được $B + C = 110^\circ$.

Do đó, $IBC + ICB = 55^\circ$.

Vậy $BIC = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

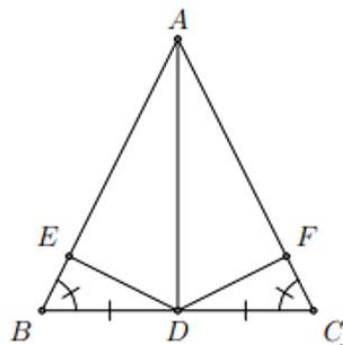
b) Xét $\triangle BIC$, từ giả thiết suy ra $IBC + ICB = 40^\circ$.

Do đó, ta có: $ABC + ACB = 80^\circ$.

Vậy $BAC = 100^\circ$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi D là trung điểm của BC ; E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC . Chứng minh rằng $DE = DF$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ cân tại A có AD là đường trung tuyến đồng thời cũng là đường phân giác của góc A

Ta có $DE \perp AB; DF \perp AC$ (gt)

Mà AD là đường phân giác của góc A (chứng minh trên)

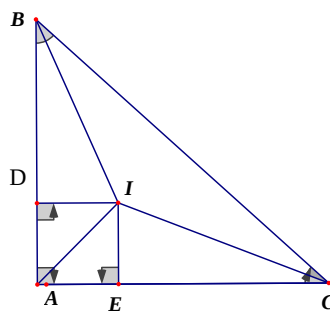
Suy ra $DE = DF$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB và AC .

a) Biết $ID = 2\text{cm}$. Tính IE ?

b) Biết $ID = x + 3$, $IE = 2x - 3$. Tìm x ?

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$ có các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$, suy ra AI là đường phân giác của góc A và I cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$ nên $IE = ID = 2\text{cm}$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác)

b) Ta có: $IE = ID$ (chứng minh phần a)

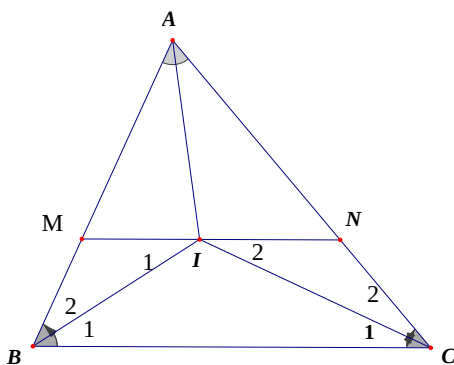
$$\Rightarrow 2x - 3 = x + 3$$

$$\Rightarrow 2x - x = 3 + 3$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ gọi I là giao điểm của hai tia phân giác góc A và góc B . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB tại M , cắt AC tại N . Chứng minh rằng $MN = BM + CN$

Lời giải



Ba phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên CI là tia phân giác của góc C

Vì $MN \parallel BC$ nên $C_1 = I_2$ (so le trong)

Mà $C_1 = C_2$ nên $C_2 = I_2$

Do đó $\triangle NIC$ cân nên $NC = NI$ (1)

Tương tự, ta có: $MB = MI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MI + IN = BM + CN$ hay $MN = BM + CN$.

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

I. Phương pháp giải:

Sử dụng các tính chất:

+ Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.

+ Giao điểm của các đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác

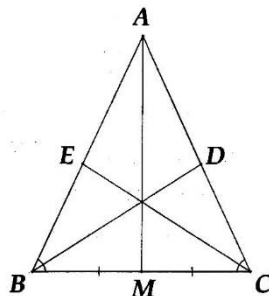
II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ các tia phân giác BD , CE . Lấy M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Ba đường thẳng AM , BD , CE đồng quy.

Lời giải



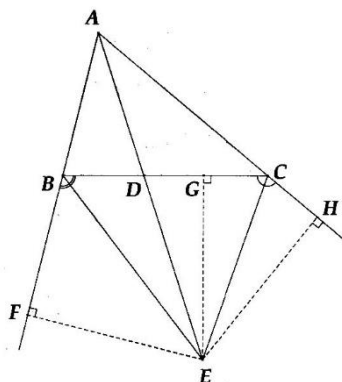
a) Chứng minh được $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.c.c).

Từ đó suy ra AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Xét $\triangle ABC$ có AM, BD, CE là các tia phân giác. Từ tính chất ba đường phân giác trong tam giác, suy ra ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC , tia phân giác AD . Các tia phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E . Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Lời giải



Gọi F, H, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E xuống các đường thẳng AB, AC, BC .

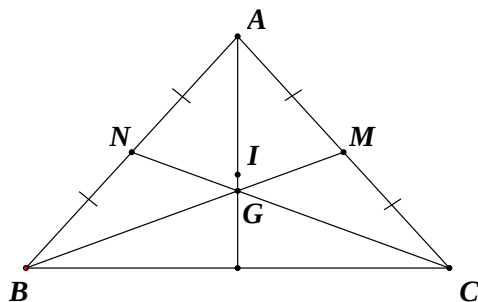
Từ giả thiết suy ra $EF = EG$ và $EH = EG$.

$\Rightarrow EF = EH$ nên E thuộc tia phân giác của góc BAC . Mà AD là tia phân giác của góc BAC .

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Lời giải



Gọi M, N là trung điểm CA và BA

$\triangle ABC$ cân tại A có BM, CN là đường trung tuyến ứng với cạnh $AC, AB \Rightarrow BM = CN$

Mà $GB = \frac{2}{3} BM ; GC = \frac{2}{3} CN$ (Tính chất trọng tâm của tam giác) $\Rightarrow GB = GC$

Xét $\triangle AGB$ và $\triangle AGC$ có

AG chung

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A)

$GB = GC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle AGB = \triangle AGC$ ($c - c - c$)

$\Rightarrow \angle BAG = \angle CAG$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow G$ thuộc tia phân giác của BAC

Theo đề bài I cách đều ba cạnh của tam giác $\Rightarrow I$ là điểm chung của ba đường phân giác

$\Rightarrow I$ thuộc tia phân giác của BAC .

Vì G, I cùng thuộc tia phân giác của BAC nên A, G, I thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G .

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC .

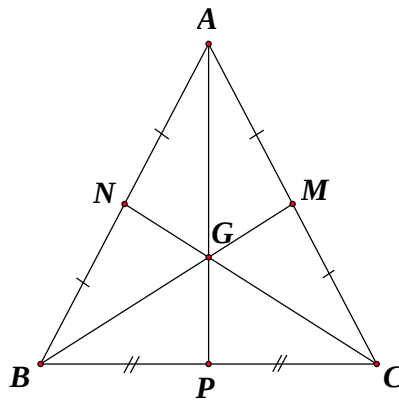
b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

e) Gọi P là trung điểm BC . CMR: A, G, P thẳng hàng.

Lời giải



a) $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \begin{cases} ABM = ACN \\ BG = GC \end{cases}$$

Xét $\triangle ABG$ và $\triangle ACG$ có:

$$AB = AC$$

$$ABG = ACG$$

$$BG = CG$$

$$\Rightarrow \triangle ABG = \triangle ACG \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BAG = CAG$$

AG là phân giác của BAC

b) $\triangle AGN = \triangle AGM$ (c.g.c) vì: AG : chung; $AN = AM$; $NAG = MAG$

$$\Rightarrow GN = GM$$

c) $\begin{cases} AN = AM \\ GN = GM \end{cases} \Rightarrow AG \text{ là đường trung trực của } MN$

d) $\begin{cases} AB = AC \\ GB = GC \end{cases} \Rightarrow AG \text{ là đường trung trực của } BC$

Xét $\triangle APB$ và $\triangle APC$ có:

$$AB = AC$$

AP chung

$$BP = PC$$

$$\Rightarrow \triangle APB = \triangle APC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow BAP = CAP \text{ (hai góc tương ứng)}$$

AP là phân giác của BAC

Mà AG là phân giác của BAC

Suy ra tia AP trùng với tia AG

Hay A, P, G thẳng hàng.

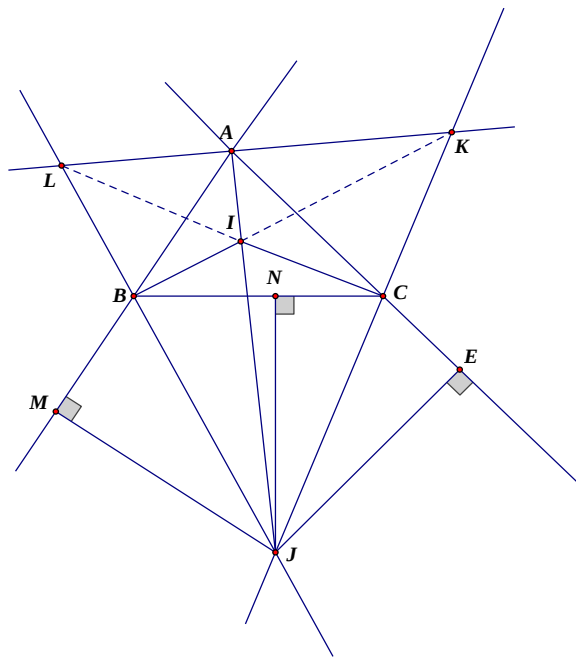
Bài 5. Cho tam giác ABC . Phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I . Phân giác các góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại J , phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh C cắt nhau tại K , phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh B cắt nhau tại L .

a) Chứng minh $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

b) Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng

c) Chứng minh AJ, BK, CL cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



a) BI là tia phân giác của góc $B \Rightarrow \angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC$

CI là tia phân giác của góc $C \Rightarrow \angle ICB = \frac{1}{2} \angle ACB$

$$\Rightarrow \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} (180^\circ - A) = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

Xét $\triangle IBC$ có:

$$\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180^\circ \Rightarrow \angle BIC + 90^\circ - \frac{A}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

b) Kẻ $JM \perp AB, JN \perp BC, JE \perp AC$

J thuộc tia phân giác của $\angle CBx \Rightarrow JM = JN$

J thuộc tia phân giác của $\angle BCy \Rightarrow JN = JE$

$\Rightarrow JM = JE \Rightarrow J$ thuộc tia phân giác của BAC (1)

Phân giác trong của góc B và góc C của tam giác ABC cắt nhau tại $I \Rightarrow$ Tia AI là phân giác của BAC hay điểm I thuộc tia phân giác của BAC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ba điểm A, I, J là ba điểm thẳng hàng.

c) Theo câu b ta có ba điểm A, I, J thẳng hàng nên đường thẳng AJ đi qua điểm I

Chứng minh tương tự đường thẳng BK đi qua I và đường thẳng CL đi qua I

Vậy ba đường thẳng AJ, BK, CL cắt nhau tại điểm I

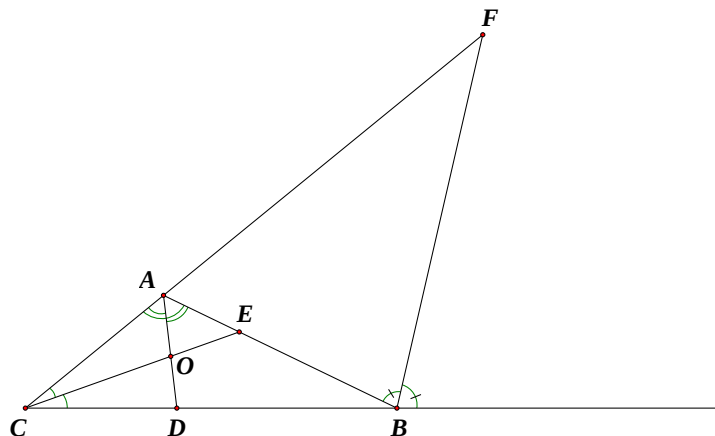
Bài 6. Cho tam giác ABC có $A=120^\circ$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O , cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì O là giao điểm của hai đường phân giác nên BO cũng là đường phân giác của tam giác.

Mà BF là đường phân giác ngoài nên $FBO = 90^\circ$

$\Rightarrow BO \perp BF$

b) $BAC = 120^\circ$ nên $BAF = DAC = DAB = 60^\circ$

$\Rightarrow$ Phân giác trong của DAB vuông góc với AF

$\Rightarrow AF$ là phân giác ngoài của DAB .

Vậy F là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác ABD

$\Rightarrow DF$ là phân giác của ADB .

Vậy $BDF = ADF$

c) Chứng minh tương tự, AE là phân giác ngoài của $\triangle ACD$ mà CE là phân giác trong của tam giác. Nên E thuộc đường phân giác ngoài của ADC . Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

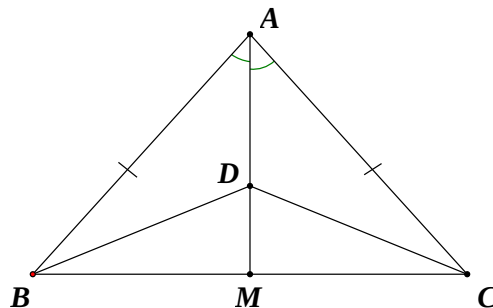
I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: trong tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh cũng đồng thời là đường trung tuyến, đường cao.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường phân giác AM . Gọi D là một điểm nằm giữa A và M . Khi đó $\triangle BDC$ là tam giác gì?

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle A_1 = \angle A_2 \text{ (AM là đường phân giác)}$$

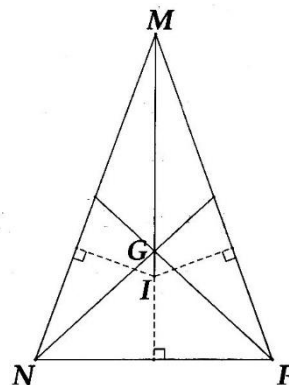
AD là cạnh chung

Nên $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Do đó $\triangle BDC$ cân tại D .

Bài 2. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm. I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm M, G, I thẳng hàng.

Lời giải



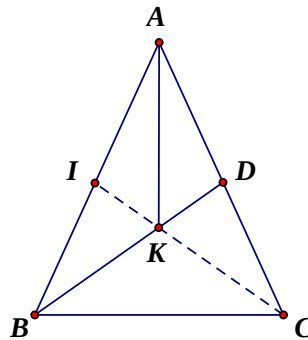
I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác nên MI là tia phân giác của góc M .

Do $\triangle MNP$ cân tại M nên đường phân giác MI cũng là đường trung tuyến.

G là trọng tâm của $\triangle MNP$ nên G nằm trên MI . Từ đó, suy ra M, G, I thẳng hàng.

Bài 3. Tam giác ABC cân tại A . Tia phân giác của góc A cắt đường trung tuyến BD tại K . Gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng ba điểm I, K, C thẳng hàng.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A có:

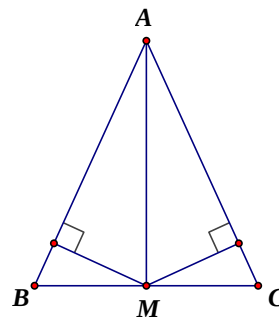
AK là tia phân giác của góc ở đỉnh nên đường thẳng AK là đường trung tuyến (1). BD là đường trung tuyến của tam giác ABC (2).

Từ (1) và (2) suy ra K là trọng tâm của tam giác ABC .

Do đó C, K, I thẳng hàng.

Bài 4. Chứng minh rằng trong tam giác cân, trung điểm của cạnh đáy cách đều hai cạnh bên.

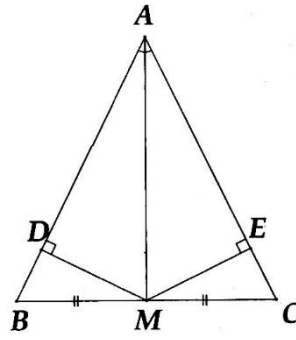
Lời giải



Xét tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC . AM là tia phân giác của góc A nên M cách đều hai cạnh AB, AC .

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM là đường phân giác của góc A . Chứng minh tam giác ABC cân tại A .

Lời giải



Hạ $MD \perp AB, ME \perp AC$.

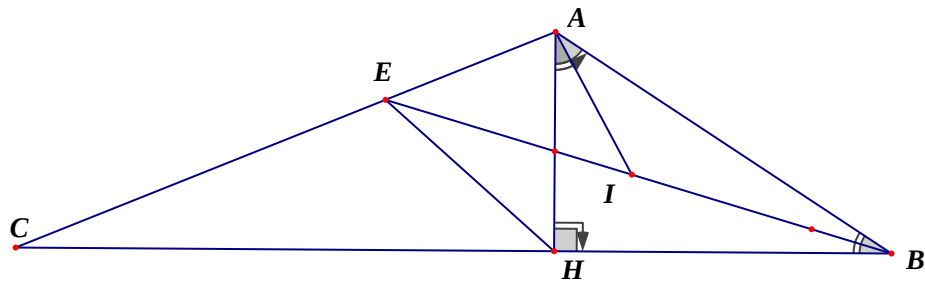
Vì AM là tia phân giác của A nên $MD = ME$.

Do đó $\triangle BDM = \triangle CEM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $B = C$. Vậy $\triangle ABC$ cân tại A .

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $AH \perp BC$ và $BAH = 2C$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E . Tia phân giác của góc BAH cắt BE ở I . Chứng minh $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân tại E

Lời giải



Xét $\triangle AHB$ vuông ta có: $BAH + ABH = 90^\circ$ mà $BAH = 2C$ và $ABH = 2IBH$

$$\Rightarrow 2C + 2IBH = 90^\circ \Rightarrow 2(C + IBH) = 90^\circ \Rightarrow C + EBH = 45^\circ$$

Xét $\triangle BEC$ có AEI là góc ngoài tại đỉnh E nên $AEI = ECB + EBC = 45^\circ$

Xét $\triangle AHB$ có: $ABH + HAB = 90^\circ \Rightarrow 2IBA + 2IAB = 90^\circ$

$$\Rightarrow IBA + IAB = 45^\circ$$

Xét $\triangle AIB$ có AIE là góc ngoài tại đỉnh I nên $AIE = IAB + IBA = 45^\circ$

Xét $\triangle IAE$ có: $AIE = 45^\circ = AEI$

$$\Rightarrow EAI = 180^\circ - (AEI + AIE) = 90^\circ \text{ (tổng ba góc trong một tam giác)}$$

Vậy $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân tại E

Bài 7. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I .

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB .

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

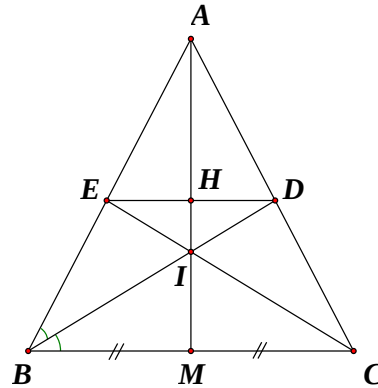
c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB . Chứng minh rằng: $ED \parallel BC$

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED . CMR: H là trung điểm của ED .

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Lời giải



a) Vì $\triangle ABC$ cân tại A , có AM là đường trung tuyến nên AM là phân giác
 Có AM và BD giao nhau ở điểm I nên I là giao của 3 đường phân giác
 $\Rightarrow CI$ là đường phân giác của tam giác ABC

b) Ta có $\angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC$ (I nằm trên tia phân giác BD của ABC)

$$\angle ICB = \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (} CI \text{ là tia phân giác của } \angle ACB \text{)}$$

Mà $\angle ABC = \angle ACB$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow \angle IBC = \angle ICB$$

$$\Rightarrow \triangle IBC \text{ cân tại } I$$

c) Xét $\triangle IEB$ và $\triangle IDC$, có

$$\angle EBI = \angle DCI$$

$$\angle EIB = \angle DIC \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$IB = IC \text{ (do } \triangle IBC \text{ cân tại } I \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle IEB = \triangle IDC \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BE = DC$$

$$\Rightarrow AE = AD$$

$$\Rightarrow \triangle AED \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow \angle AED = \frac{180^\circ - A}{2}$$

$$\text{Mà } \angle ABC = \frac{180^\circ - A}{2} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle ABC$$

Mà 2 góc ở vị trí so le trong của ED và BC

$$\Rightarrow ED \parallel BC$$

$$d) \triangle AHE = \triangle AHD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow HE = HD$$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của ED

e) Có:

$$\left. \begin{array}{l} AE = AD \\ HE = HD \end{array} \right\} \Rightarrow AH \text{ là đường trung trực của } ED$$

$$\Rightarrow AH \perp ED \text{ hay } AM \perp ED$$

f) I và trọng tâm G của $\triangle ABC$ trùng nhau $\Rightarrow \triangle ABC$ đều

Dạng 4. Chứng minh mối quan hệ giữa các góc

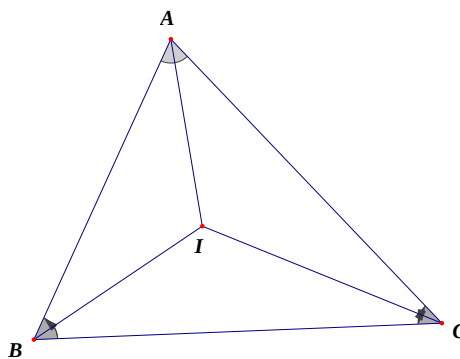
I. Phương pháp giải:

- Vận dụng các tính chất tia phân giác của một góc để tìm mối liên hệ giữa các góc.
- Dùng định lý tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I . Chứng minh rằng:
 $\angle IAB + \angle IBC + \angle ICA = 90^\circ$

Lời giải



Vì AI là phân giác $\angle BAC$ nên ta có: $\angle IAB = \frac{1}{2} \angle BAC$

BI là phân giác $\angle ABC$ nên ta có: $\angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC$

CI là phân giác $\angle BCA$ nên ta có: $\angle ICA = \frac{1}{2} \angle BCA$

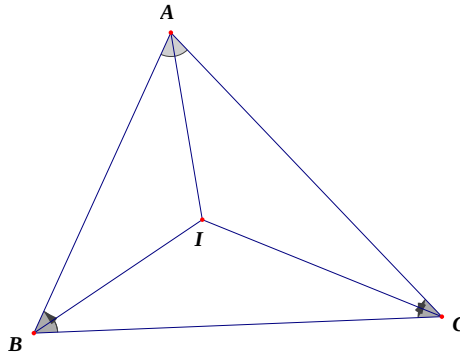
$$\text{Do đó: } \angle IAB + \angle IBC + \angle ICA = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I và $AB < AC$.

a) Chứng minh rằng: $CBI > ACI$

b) So sánh IB và IC

Lời giải



Vì BI là phân giác ABC nên ta có: $CBI = \frac{1}{2} ABC$

CI là phân giác BCA nên ta có: $ACI = \frac{1}{2} BCA$

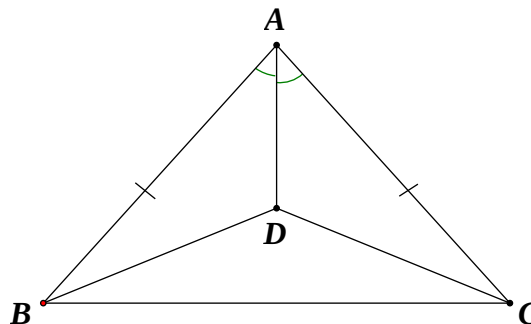
Mà $AB < AC$ nên $ABC > BCA$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

$\Rightarrow CBI > ACI$

Bài 3. Cho hình vẽ.

a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ACD$

b) So sánh góc DBC và góc DCB .



Lời giải

a) Căn cứ vào các kí hiệu đã cho trên hình vẽ ta có:

$\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có: $AB = AC$; $BAD = CAD$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c)

b) Vì $\triangle ABD = \triangle ACD$ (chứng minh câu a)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

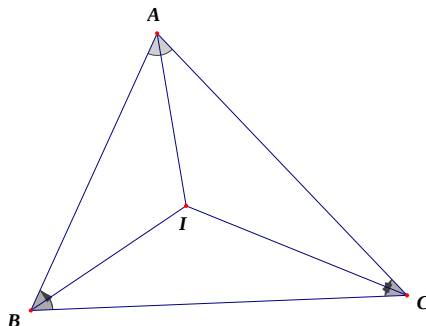
$\Rightarrow \triangle BCD$ cân tại D

$\Rightarrow DBC = DCB$ (Tính chất tam giác cân)

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ hai đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I . Chứng minh rằng:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

Lời giải



I là giao điểm của hai đường phân giác góc B và góc $C \Rightarrow$ Phân giác góc A là AI .

$$\text{Ta có: } A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\text{Trong } \triangle BIC \text{ có } \angle BIC = 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right)$$

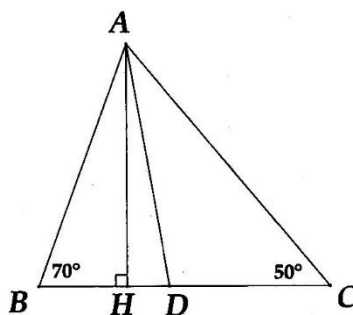
$$\text{Vậy } \angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $B > C$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và tia phân giác AD .

a) Biết $B = 70^\circ, C = 50^\circ$, tính số đo $\angle HAD$.

$$\text{b) Chứng minh } \angle HAD = \frac{B - C}{2}$$

Lời giải



a) Từ giả thiết, ta tính được: $\angle BAC = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle DAC = \frac{\angle BAC}{2} = 30^\circ = \angle DAB$$

$$\Rightarrow \angle ADH = \angle DAC + C = 80^\circ$$

Do đó, xét $\triangle AHD$ ta tính được:

$$\text{Có thể tính } \angle BAH = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

Vậy $HAD = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$

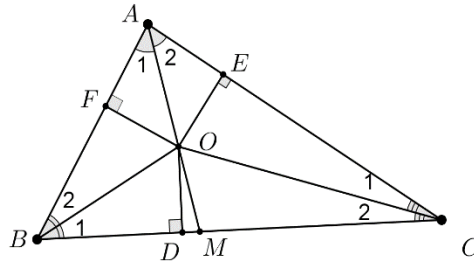
b) $HAD = 90^\circ - HDA = 90^\circ - \left(\frac{A}{2} + C \right) = \frac{180^\circ - A - 2C}{2} = \frac{B - C}{2}$

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở O . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC, CA, AB ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Tia AO cắt BC ở M .

a) Chứng minh: $OD = OE = OF$

b) So sánh DOB và MOC ? MOB và DOC ?

Lời giải



a) Vì O là giao điểm các tia phân giác góc B và góc C của $\triangle ABC$

$\Rightarrow O$ cách đều 3 cạnh của $\triangle ABC$

$\Rightarrow OD = OE = OF$ (Tính chất ba đường phân giác trong tam giác)

b) Có $A_1 = A_2$ (AO là tia phân giác BAC)

$MOC = A_2 + C_1$ (MOC là góc ngoài $\triangle AOC$)

$$= \frac{BAC + ACB}{2} = \frac{180^\circ - ABC}{2} = 90^\circ - \frac{ABC}{2} \quad (1)$$

Xét $\triangle BOD$ vuông ở D ta có $BOD = 90^\circ - B_2 = 90^\circ - \frac{ABC}{2} \quad (2)$

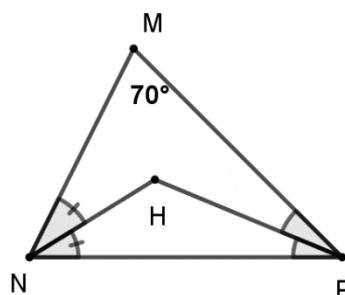
Từ (1), (2) $\Rightarrow BOD = MOC$

Chứng minh tương tự ta cũng có $MOB = DOC (= 90^\circ - \frac{ACB}{2})$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Cho hình vẽ:



H là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ N và P của tam giác MNP .

a) Chứng minh rằng điểm H cách đều hai cạnh MN, MP

b) Tính số đo HMN, NHP ?

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A

Các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở I . Gọi D, E, F là hình chiếu của điểm I xuống AB, AC, BC

a) Chứng minh rằng $AD = AE$

b) Trong trường hợp $\triangle ABC$ cân ở A . Chứng minh $\triangle DEF$ cân

Bài 3. Cho $\triangle ABC$, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 80^\circ$, tính số đo góc BIC .

b) Biết $BIC = 120^\circ$, tính số đo góc A .

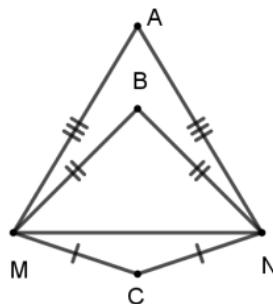
Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB và AC .

a) Biết $ID = 3\text{cm}$. Tính IE ?

b) Biết $ID = x + 2, IE = 2x - 4$. Tìm x ?

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho hình vẽ :



CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G .

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC .

b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

e) Gọi P là trung điểm BC . CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ các tia phân giác góc B và C cắt nhau tại I . Các đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O , cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

- a) $BO \perp BF$
- b) $BDF = ADF$
- c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Chứng minh rằng:

- a) Trong tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng là đường trung trực của cạnh đáy.
- b) Nếu tam giác có 1 đường vừa là đường trung trực của 1 cạnh, vừa là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I .

- a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB .
- b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.
- c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB . Chứng minh rằng: $ED \parallel BC$.
- d) Gọi H là giao điểm của AM và ED . CMR: H là trung điểm của ED .
- e) CMR: $AM \perp ED$
- f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A có đường phân giác AD ($D \in BC$) và đường trung tuyến BE ($E \in AC$) cắt nhau tại O .

- a) Chứng minh: O là trọng tâm $\triangle ABC$
- b) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để O cũng là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC ?

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ cân ở A . Gọi G là trọng tâm tam giác, I là giao điểm các phân giác của tam giác, K là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C . Chứng minh rằng bốn điểm A, G, I, K thẳng hàng.

Dạng 4. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.

Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 120^\circ$ các phân giác AD, BE, CF

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D của $\triangle ABD$

b) Chứng minh rằng $\angle EDF = 90^\circ$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, $\angle A = 120^\circ$. Các tia phân giác góc A ; C cắt nhau ở O , cắt các cạnh BC ; AB lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$ cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $\angle BDF = \angle ADF$

c) $\angle DEA + \angle FEA = 180^\circ$

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

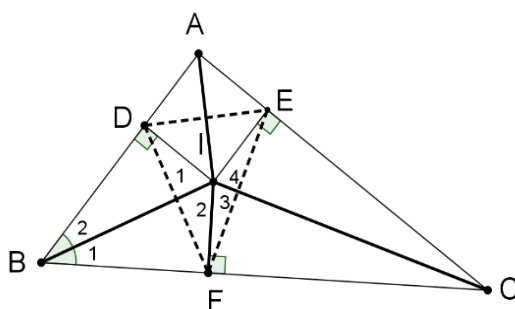
Bài 1.

a) Vì H là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc N, P nên MH là phân giác góc M .
Do đó, H cách đều hai cạnh MN, MP .

$$b) \angle HMN = \frac{1}{2} \angle NMP = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle NHP &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle MNP + \frac{1}{2} \angle MPN \right) = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle MNP + \angle MPN) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle NMP) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - 70^\circ) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 110^\circ = 125^\circ \end{aligned}$$

Bài 2.



a) AI là phân giác góc A

nên $\angle IAD = \angle IAE = 45^\circ$

Hai $\triangle AIE$ và $\triangle AID$ là hai tam giác cân ở E và ở D nên $AE = EI$ và $AD = DI$

Vì AI là phân giác góc A nên $IE = ID$

$$\Rightarrow AD = AE$$

b) Nếu $\triangle ABC$ vuông cân ở A thì

$$B = C \text{ nên } \angle B_1 = \angle B_2 = \angle C_1 = \angle C_2$$

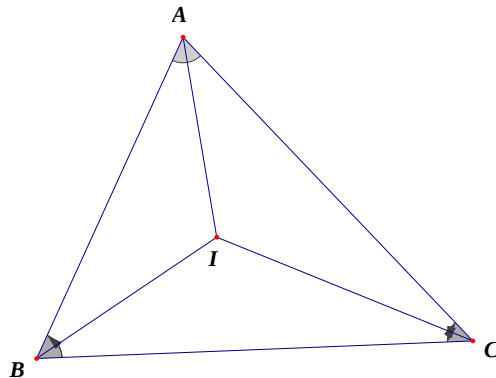
$$\Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 = \angle D_3 = \angle D_4. \text{ Do đó}$$

$$DIF = EIF$$

$$\triangle DIF = \triangle EIF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow FD = FE$$

Vậy $\triangle EDF$ cân ở F

Bài 3.



a) Xét $\triangle ABC$, ta tính được $B + C = 100^\circ$.

Do đó, $IBC + ICB = 50^\circ$.

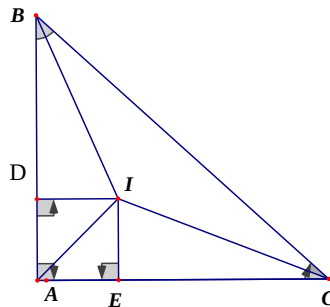
Vậy $BIC = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

b) Xét $\triangle BIC$, từ giả thiết suy ra $IBC + ICB = 60^\circ$.

Do đó, ta có: $ABC + ACB = 120^\circ$.

Vậy $BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Bài 4.



a) Xét $\triangle ABC$ có các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$, suy ra AI là đường phân giác của góc A và I cách đều ba cạnh của $\triangle ABC$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$ nên $IE = ID = 3\text{cm}$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác)

b) Ta có: $IE = ID$ (chứng minh phần a)

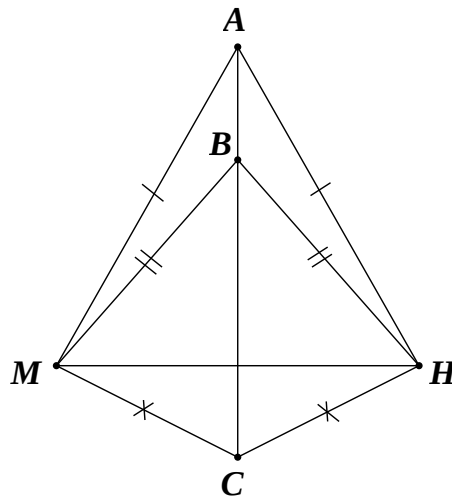
$$\Rightarrow 2x - 4 = x + 2$$

$$\Rightarrow 2x - x = 2 + 4$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Dạng 2 . Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1:



Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ABN$ có

AB chung

$AM = AN$ (gt)

$BM = BN$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ABN$ (c-c-c)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle NAB$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow AB$ là phân giác của $\angle MAN$ (1)

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ANC$, có

AC chung

$AM = AN$ (gt)

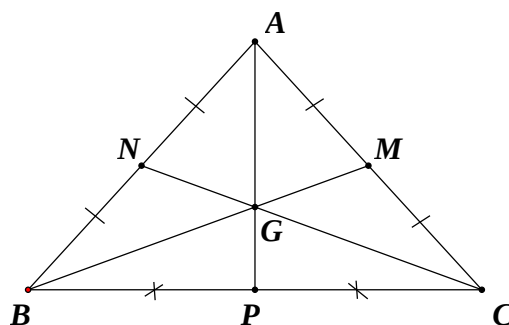
$MC = NC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ANC$ (c-c-c)

$\Rightarrow \angle MAC = \angle NAC$ (2 góc tương ứng) $\Rightarrow AC$ là phân giác của $\angle MAN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB$ trùng AC

Bài 2.



a) $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \begin{cases} ABM = ACN \\ BG = GC \end{cases}$$

Xét $\triangle ABG$ và $\triangle ACG$ có

$$AB = AC$$

$$\angle ABG = \angle ACG$$

$$BG = CG$$

$$\Rightarrow \triangle ABG = \triangle ACG \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BAG = \angle CAG \text{ (hai góc tương ứng)}$$

AG là phân giác của BAC

b) $\triangle AGN = \triangle AGM$ (c.g.c) vì AG chung; $AN = AM$; $\angle NAG = \angle MAG$

$$\Rightarrow GN = GM \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{c) } \left. \begin{matrix} AN = AM \\ GN = GM \end{matrix} \right\} \Rightarrow AG \text{ là đường trung trực của } MN$$

$$\text{d) } \left. \begin{matrix} AB = AC \\ GB = GC \end{matrix} \right\} \Rightarrow AG \text{ là đường trung trực của } BC$$

Xét $\triangle APB$ và $\triangle APC$ có:

$$AB = AC$$

AP chung

$$BP = PC$$

$$\Rightarrow \triangle APB = \triangle APC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BAP = \angle CAP$$

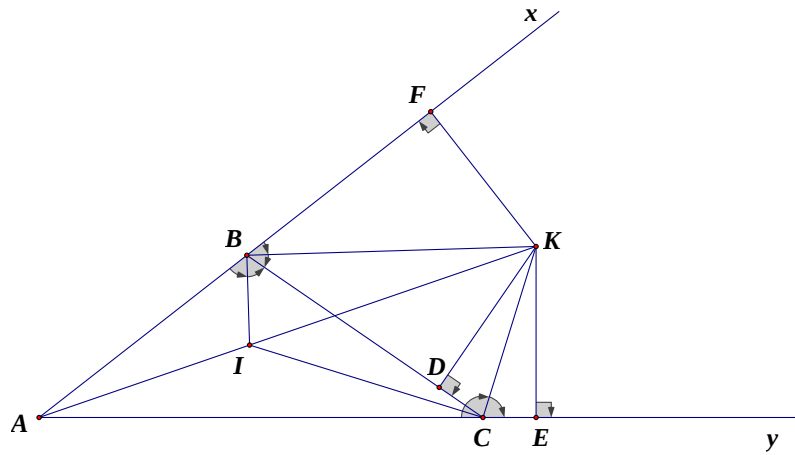
AP là phân giác của BAC

Mà AG là phân giác của BAC

$$\Rightarrow AP \equiv AG$$

$$\Rightarrow A, P, G \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 3.



Vì I là giao điểm các phân giác của tam giác ABC nên I thuộc tia phân giác BAC (1)

Hạ $KD \perp BC, KE \perp AC, KF \perp AB$.

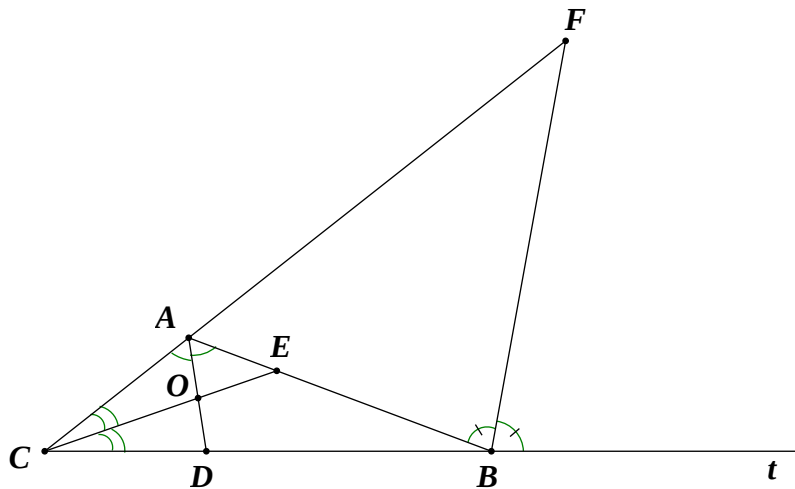
Vì K thuộc tia phân giác của CBx nên

$KB = KF$, K lại thuộc tia phân giác BCy

Nên $KD = KE$. Suy ra $KE = KF$. Điều này chứng tỏ K thuộc tia phân giác BAC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I$ và K cùng thuộc tia phân giác BAC . Vậy ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Bài 4.



a) Gọi Bt là tia đối của tia BC

Vì O là giao điểm của hai đường phân giác nên BO cũng là đường phân giác của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \angle OBA = \frac{1}{2} \angle CBA$$

Mà BF là đường phân giác ngoài nên $\angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABt$

$$\Rightarrow \angle OBA + \angle ABF = \frac{1}{2} (\angle CBA + \angle ABt) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

Hay $\angle FBO = 90^\circ$

$$\Rightarrow BO \perp BF$$

b) $BAC = 120^\circ$ nên $BAF = DAC = DAB = 60^\circ$

$\Rightarrow$ phân giác trong của DAB vuông góc với AF

$\Rightarrow AF$ là phân giác ngoài của DAB .

Vậy F là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác ABD

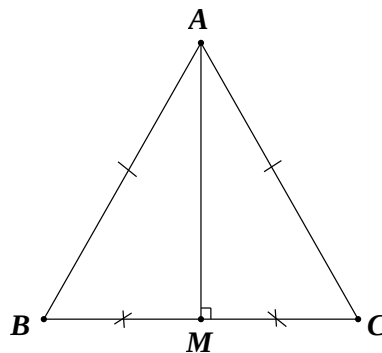
$\Rightarrow DF$ là phân giác của ADB .

Vậy $BDF = ADF$

c) Chứng minh tương tự, AE là phân giác ngoài của $\triangle ACD$ mà CE là phân giác trong của tam giác. Nên E thuộc đường phân giác ngoài của ADC . Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3 . Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.



a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$, có

$$AB = AC$$

$$B = C$$

$$BM = MC$$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC$$

$$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$$

$\Rightarrow AM \perp BC$ mà AM là đường trung tuyến nên AM là đường trung trực của tam giác.

b) Cũng chứng minh $\triangle AMB = \triangle AMC$, chỉ ra $AB = AC$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân}$$

Bài 2.

a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC \text{ (GT)}$$

$$BM = CM \text{ (GT)}$$

AM : cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \text{ (c-c-c)}$$

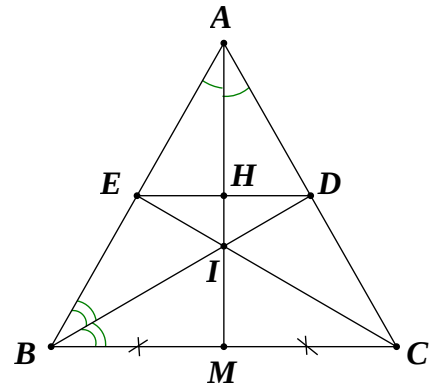
$$\Rightarrow \angle ABM = \angle ACM \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

$\Rightarrow AM$ là đường phân giác

Có I là giao điểm của BD và AM

$\Rightarrow I$ là giao của 3 đường phân giác

$\Rightarrow CI$ là phân giác của $\triangle ABC$



b) Ta có $\angle IBC = \frac{1}{2} \angle ABC$ (t/c phân giác)

$$\angle ICB = \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (t/c phân giác)}$$

$$\text{Mà } \angle ABC = \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle IBC = \angle ICB$$

$\Rightarrow \triangle IBC$ cân tại I (dnhb)

c) Xét $\triangle IEB$ và $\triangle IDC$, có

$$\angle EBI = \angle DCI$$

$$\angle IEB = \angle IDC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$IB = IC \text{ (do } \triangle IBC \text{ cân tại } I)$$

$$\Rightarrow \triangle IEB = \triangle IDC \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow BE = DC$$

$$\Rightarrow AE = AD$$

$\Rightarrow \triangle AED$ cân tại A

$$\Rightarrow \angle AED = \frac{180^\circ - A}{2}$$

$$\text{Mà } \angle ABC = \frac{180^\circ - A}{2} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle ABC$$

Mà 2 góc ở vị trí so le trong của hai đường thẳng ED và BC

$$\Rightarrow ED \parallel BC$$

d) $\triangle AHE = \triangle AHD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow HE = HD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của ED

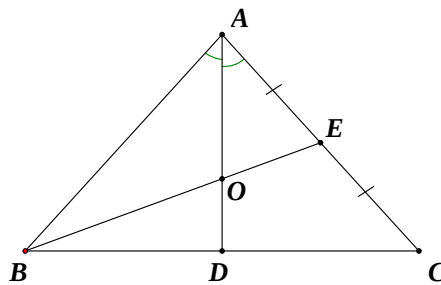
e) Có:

$$\left. \begin{array}{l} AE = AD \\ HE = HD \end{array} \right\} \Rightarrow AH \text{ là đường trung trực của } ED$$

$\Rightarrow AH \perp ED$ hay $AM \perp ED$

f) I và trọng tâm G của $\triangle ABC$ trùng nhau $\Rightarrow \triangle ABC$ đều

Bài 3.



a) $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c)

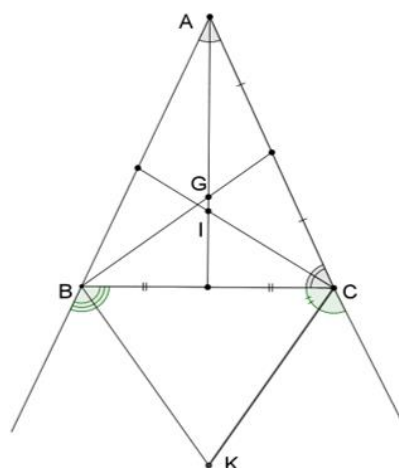
$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AD$ là trung tuyến

$\Rightarrow O$ là giao điểm hai đường trung tuyến AD, BE nên O là trọng tâm

b) $\triangle ABC$ đều.

Bài 4.



Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$

$\Rightarrow G$ thuộc trung tuyến AM (1)

Mà AI là phân giác của $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AI$ là trung tuyến của $\triangle ABC$ (2)

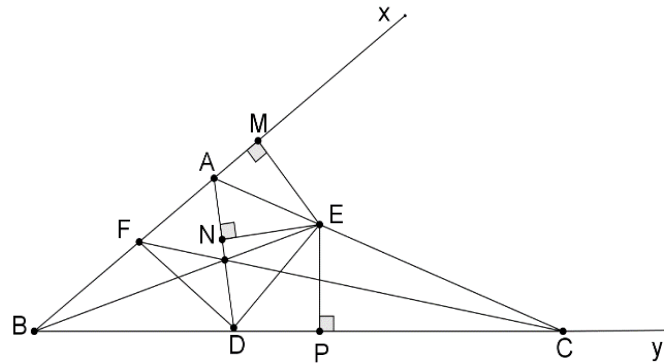
Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, I, G$ thẳng hàng (3)

Theo đề bài AI là phân giác góc A mặt khác (theo bài 4) thì AK cũng là phân giác góc A nên ba điểm A, I, K thẳng hàng (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow A, I, K, G$ thẳng hàng

Dạng 4.

Bài 1.



a) Gọi Ax là tia đối của tia AB

Vì $\angle ABC = 120^\circ$ nên $\angle CAx = 60^\circ$. Do AD là phân giác $\angle BAC$

nên $\angle BAD = \angle DAC = \angle CAx = 60^\circ$

Kẻ $ME \perp AB$; $EN \perp AD$; $EP \perp DB$.

Xét $\triangle ABD$ có BE là phân giác trong của góc $B \Rightarrow ME = EP$ (tính chất tia phân giác), (1)
 AE là phân giác góc ngoài tại đỉnh A của tam giác $ABD \Rightarrow ME = NE$ (tính chất tia phân giác)
 (2)

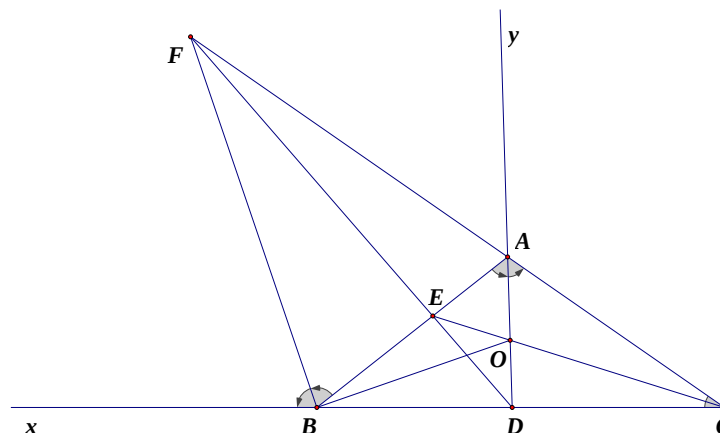
Từ (1) và (2) ta có $EP = NE$. Do đó DE là phân giác góc ngoài tại đỉnh D của $\triangle ABD$

b) Chứng minh tương tự ta có DF là phân giác góc ngoài đỉnh D của $\triangle DEC$

Vì $\angle ADC$; $\angle ADB$ là hai góc kề bù nên $DE \perp DF$

Hay $\angle EDF = 90^\circ$

Bài 2.



a) BO, BF là hai tia phân giác hai góc kề bù nên $BO \perp BF$

b) $\angle FAB + \angle BAC = 180^\circ$ mà $\angle BAC = 120^\circ$

$\Rightarrow \angle FAB = 60^\circ$.

AD là tia phân giác $\angle BAC$ nên

$BAD = DAC = 60^\circ$ $FAy = DAC = 60^\circ$ (hai góc đối đỉnh)

Từ đó suy ra $BAF = FAy$

Xét $\triangle ABD$ có hai đường phân giác góc ngoài đỉnh A và B cắt nhau ở $F \Rightarrow DF$ là phân giác ABD .

Vậy $BDF = ADF$

c) Xét $\triangle ACD$ có phân giác góc C và phân giác góc ngoài ở đỉnh A cắt nhau ở $E \Rightarrow DE$ là phân giác góc ngoài đỉnh D .

DE, DF đều là tia phân giác góc ADB .

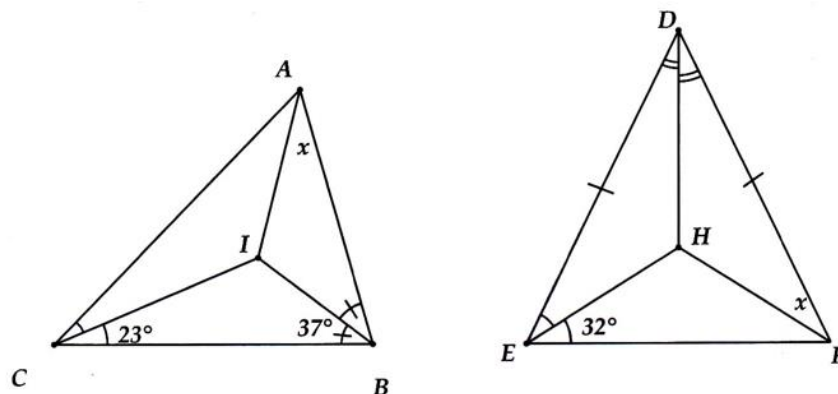
Suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Do đó, $DEA + FEA = 180^\circ$

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết CI và BI là hai phân giác của ACB và ABC , EH và FH là hai phân giác của DEF và DFE .



Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $A = 120^\circ$. Các đường phân giác AD, BE . Tính số đo góc BED .

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác kẻ từ góc B và C . Tính số đo góc BIC trong các trường hợp:

a) $BAC = 80^\circ$

b) $BAC = 120^\circ$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 70^\circ$, tính số đo góc BIC .

b) Biết $BIC = 140^\circ$, tính số đo góc A .

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi D là trung điểm của BC ; E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC . Chứng minh rằng $DE = DF$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB và AC .

a) Biết $ID = 2\text{cm}$. Tính IE ?

b) Biết $ID = x + 3$, $IE = 2x - 3$. Tìm x ?

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ gọi I là giao điểm của hai tia phân giác góc A và góc B . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC , cắt AB tại M , cắt AC tại N . Chứng minh rằng $MN = BM + CN$

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ các tia phân giác BD , CE . Lấy M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Ba đường thẳng AM , BD , CE đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC , tia phân giác AD . Các tia phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E . Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A có BM , CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G .

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC .

b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

e) Gọi P là trung điểm BC . CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC . Phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I . Phân giác các góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại J , phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh C cắt nhau tại K , phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh B cắt nhau tại L .

a) Chứng minh $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

b) Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng

c) Chứng minh AJ, BK, CL cắt nhau tại một điểm.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O , cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $\angle BDF = \angle ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường phân giác AM . Gọi D là một điểm nằm giữa A và M . Khi đó $\triangle BDC$ là tam giác gì?

Bài 2. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm. I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm M, G, I thẳng hàng.

Bài 3. Tam giác ABC cân tại A . Tia phân giác của góc A cắt đường trung tuyến BD tại K . Gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng ba điểm I, K, C thẳng hàng.

Bài 4. Chứng minh rằng trong tam giác cân, trung điểm của cạnh đáy cách đều hai cạnh bên.

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM là đường phân giác của góc A . Chứng minh tam giác ABC cân tại A .

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $AH \perp BC$ và $BAH = 2C$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E . Tia phân giác của góc BAH cắt BE ở I . Chứng minh $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân tại E .

Bài 7. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I .

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB .

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB . Chứng minh rằng: $ED \parallel BC$

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED . CMR: H là trung điểm của ED .

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Dạng 4. Chứng minh mối quan hệ giữa các góc

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I . Chứng minh rằng: $\angle IAB + \angle IBC + \angle IAC = 90^\circ$

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I và $AB < AC$.

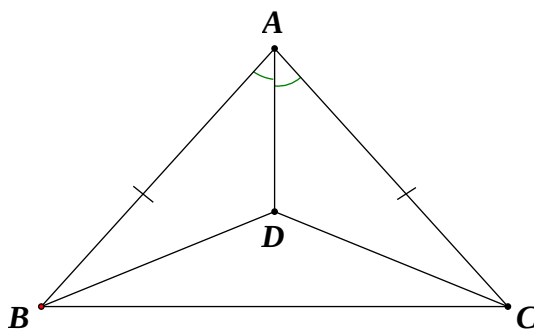
a) Chứng minh rằng: $\angle CBI > \angle ACI$

b) So sánh IB và IC

Bài 3. Cho hình vẽ.

a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ACD$

b) So sánh góc $\angle DBC$ và góc $\angle DCB$.



Bài 4. Cho ΔABC hai đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I . Chứng minh rằng:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $B > C$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và tia phân giác AD .

a) Biết $B = 70^\circ, C = 50^\circ$, tính số đo HAD .

b) Chứng minh $HAD = \frac{B-C}{2}$

Bài 6. Cho ΔABC các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở O . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC, CA, AB ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Tia AO cắt BC ở M .

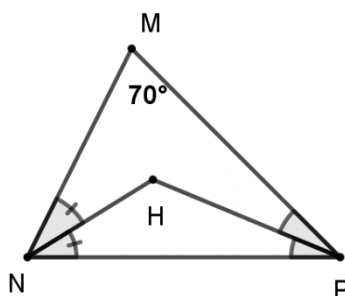
a) Chứng minh: $OD = OE = OF$

b) So sánh $\angle DOB$ và $\angle MOC$? $\angle MOB$ và $\angle DOC$?

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc
Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Cho hình vẽ:



H là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ N và P của tam giác MNP .

a) Chứng minh rằng điểm H cách đều hai cạnh MN, MP

b) Tính số đo $\angle HMN, \angle NHP$?

Bài 2. Cho ΔABC vuông ở A

Các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở I . Gọi D, E, F là hình chiếu của điểm I xuống AB, AC, BC

a) Chứng minh rằng $AD = AE$

b) Trong trường hợp ΔABC cân ở A . Chứng minh ΔDEF cân

Bài 3. Cho ΔABC , các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 80^\circ$, tính số đo góc BIC .

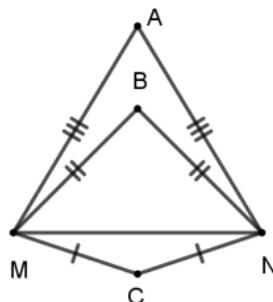
b) Biết $\angle BIC = 120^\circ$, tính số đo góc A .

Bài 4. Cho ΔABC có $A = 90^\circ$ các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I . Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB và AC .

- a) Biết $ID = 3\text{cm}$. Tính IE ?
 b) Biết $ID = x + 2$, $IE = 2x - 4$. Tìm x ?

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho hình vẽ :



CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có BM , CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G .

- a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC .
 b) CMR: $GM = GN$
 c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN .
 d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC .
 e) Gọi P là trung điểm BC . CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ các tia phân giác góc B và C cắt nhau tại I . Các đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O , cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

- a) $BO \perp BF$
 b) $BDF = ADF$
 c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Chứng minh rằng:

- a) Trong tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng là đường trung trực của cạnh đáy.
 b) Nếu tam giác có 1 đường vừa là đường trung trực của 1 cạnh, vừa là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I .

- a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB .
- b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.
- c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB . Chứng minh rằng: $ED \parallel BC$.
- d) Gọi H là giao điểm của AM và ED . CMR: H là trung điểm của ED .
- e) CMR: $AM \perp ED$
- f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A có đường phân giác AD ($D \in BC$) và đường trung tuyến BE ($E \in AC$) cắt nhau tại O .

- a) Chứng minh: O là trọng tâm $\triangle ABC$
- b) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để O cũng là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC ?

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ cân ở A . Gọi G là trọng tâm tam giác, I là giao điểm các phân giác của tam giác, K là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C . Chứng minh rằng bốn điểm A, G, I, K thẳng hàng.

Dạng 4. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.

Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 120^\circ$ các phân giác AD, BE, CF

- a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D của $\triangle ABD$
- b) Chứng minh rằng $EDF = 90^\circ$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, $A = 120^\circ$. Các tia phân giác góc $A; C$ cắt nhau ở O , cắt các cạnh $BC; AB$ lần lượt ở D và E . Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$ cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

- c) $BO \perp BF$
- d) $BDF = ADF$
- c) $DEA + FEA = 180^\circ$