

BÀI 8. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI. SỐ THỰC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nhận biết được sự tồn tại của số thập phân vô hạn tuần hoàn, từ đó hiểu được khái niệm số vô tỉ.
- + Nắm được khái niệm về căn bậc hai của một số không âm.
- + Biết được tập số thực là tên gọi chung cho tập số hữu tỉ và tập số vô tỉ. Từ đó thấy được sự phát triển các tập số từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}$.
- + Nắm được ý nghĩa của trục số thực.

❖ Kỹ năng

- + Nhận biết được số vô tỉ. Phân biệt được dạng đồ thị của hàm số mũ và hàm số logarit.
- + Tính được căn bậc hai của một số không âm (bằng định nghĩa và máy tính bỏ túi) và sử dụng đúng kí hiệu $\sqrt{}$.
- + Có kỹ năng so sánh số các số thực và biểu diễn số thực trên trục số.

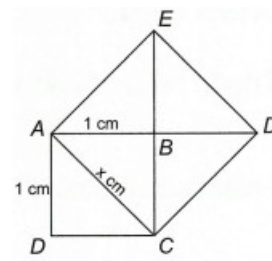
I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Số vô tỉ

Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là $\mathbb{I}$.

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1 cm. Vẽ hình vuông $ACDE$.



Ta thấy diện tích của hình vuông $ACDE$ là x^2 .

Mặt khác diện tích hình vuông $ACDE$ bằng hai lần diện tích hình vuông $ABCD$ tức là bằng $2.1.1 = 2$. Do đó $x^2 = 2$.

Vậy có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 2 hay không? Người ta chứng minh được là không có số hữu tỉ nào và tính được $x = 1,414213562\dots$.

Đây là số vô tỉ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Khái niệm về căn bậc hai

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

- Số dương a ta có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau, số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 chỉ có một căn bậc hai là 0.
- Số âm không có căn bậc hai.

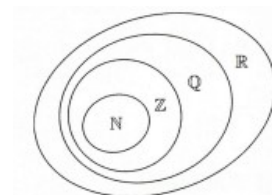
Số thực

Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực.

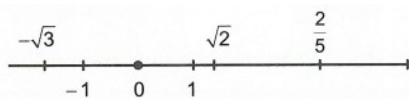
Tập hợp số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$.

Quan hệ giữa các tập số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Trên trục số, mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm. Ngược lại mỗi điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực.
- Các phép toán trong tập hợp các số thực cũng có các tính chất tương tự các phép toán trong tập hợp

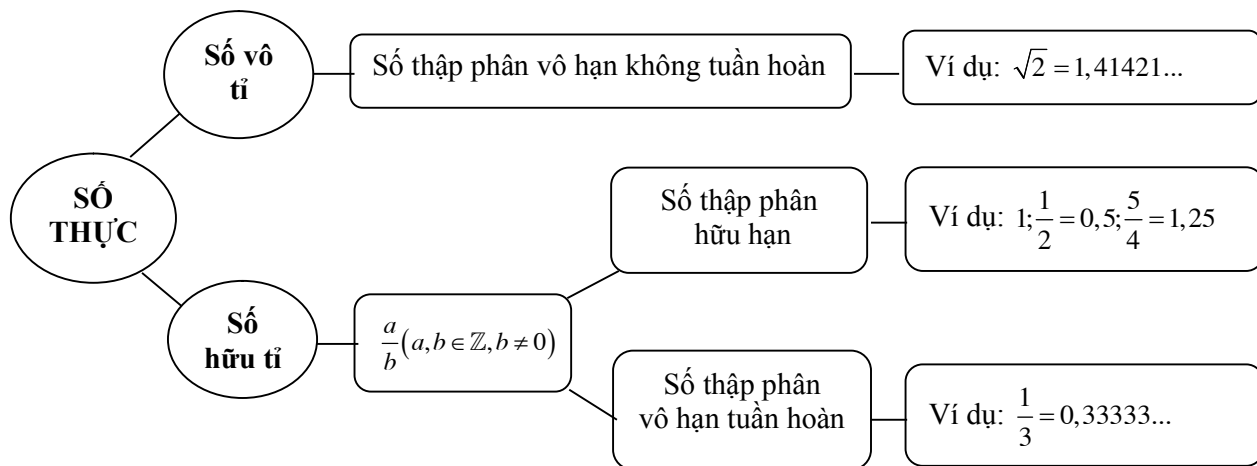


Các điểm biểu diễn số thực đã lấp đầy trục số thực.



các số hữu tỉ.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận biết mối quan hệ giữa các tập số

Phương pháp giải

Để nhận biết mối quan hệ giữa các tập số, ta cần:

Ví dụ: Các số $-2; 2; \frac{-1}{2}; \sqrt{2}$ thuộc tập hợp số nào

trong các tập số: $\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$

Hiểu được khái niệm các tập số và sử dụng đúng các kí hiệu:

$\in$: thuộc;

$\notin$: không thuộc;

$\subset$: con (được chứa).

Xét số -2 , ta có: $-2 \notin \mathbb{N}; -2 \in \mathbb{Z}; -2 \in \mathbb{Q}; -2 \in \mathbb{R}$.

Xét số 2 , ta có: $2 \in \mathbb{N}; 2 \in \mathbb{Z}; 2 \in \mathbb{Q}; 2 \in \mathbb{R}$.

Xét số $\frac{-1}{2}$, ta có: $\frac{-1}{2} \notin \mathbb{N}; \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}; \frac{-1}{2} \in \mathbb{Q}; \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$.

Xét số $\sqrt{2}$, ta có: $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}; \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}; \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}; \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Nắm vững mối quan hệ giữa các tập hợp số:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Điền các kí hiệu $\in, \notin, \subset$ vào các ô trống:

a) $-0,(33) \square \mathbb{Q}$;

b) $0,52(41) \square \mathbb{I}$;

c) $\sqrt{2} \square \mathbb{R}$;

d) $3 \square \mathbb{I}$;

e) $\mathbb{Q} \square \mathbb{R}$;

f) $\mathbb{I} \square \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

a) $-0,(33) \square \mathbb{Q}$;

b) $0,52(41) \square \mathbb{I}$;

c) $\sqrt{2} \square \mathbb{R}$;

d) $3 \square \mathbb{I}$;

e) $\mathbb{Q} \square \mathbb{R}$;

f) $\mathbb{I} \square \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Điền dấu x vào ô thích hợp trong bảng sau:

Câu	Đúng	Sai
1. $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.		
2. Số vô tỉ là số thực.		
3. Số vô tỉ là số thập phân vô hạn tuần hoàn.		
4. Căn bậc hai của một số tự nhiên là một số vô tỉ.		
5. Nếu a là số thực thì a cũng là số vô tỉ.		
6. Nếu a là số hữu tỉ thì a cũng là số vô tỉ.		
7. Tập số thực gồm tập số hữu tỉ và tập số vô tỉ.		

Hướng dẫn giải

Câu	Đúng	Sai
1. $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.	x	
2. Số vô tỉ là số thực.	x	
3. Số vô tỉ là số thập phân vô hạn tuần hoàn.		x
4. Căn bậc hai của một số tự nhiên là một số vô tỉ.		x
5. Nếu a là số thực thì a cũng là số vô tỉ.		x
6. Nếu a là số hữu tỉ thì a cũng là số vô tỉ.		x
7. Tập số thực gồm tập số hữu tỉ và tập số vô tỉ.	x	

Giải thích cho các câu sai:

3. Số vô tỉ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

4. Căn bậc hai của một số tự nhiên chưa chắc đã là số vô tỉ. Ví dụ: Căn bậc hai của 4 là 2 và -2 . Hai số này thuộc $\mathbb{Q}$.

Ta thấy 4 là số chính phương nên căn bậc hai của nó không thể là số vô tỉ. Do đó, nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

Bài tập tự luyện dạng 1

Chọn đáp án đúng nhất trong các câu từ 1 đến 3.

Câu 1: Số $\sqrt{3}$ thuộc tập hợp số nào sau đây?

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{Z}$. C. $\mathbb{Q}$. D. $\mathbb{N}$.

Câu 2: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$. B. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$. C. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Câu 3: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. B. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$. C. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. D. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Câu 4: Điền các kí hiệu $\in, \notin, \subset$ vào các ô trống:

- a) $-0,2 \in \mathbb{Q}$; b) $0,2(41) \in \mathbb{I}$; c) $1,7329508 \in \mathbb{R}$;
d) $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$; e) $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$; f) $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$.

Dạng 2: Tìm căn bậc hai của một số cho trước và tìm một số biết căn bậc hai của nó

Bài toán 1. Tìm căn bậc hai của một số cho trước

Phương pháp giải

Để tìm căn bậc hai của một số cho trước ta cần:

Cách 1. Sử dụng định nghĩa căn bậc hai: Căn bậc

hai của số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

a) 4.

b) -5.

c) 0.

Chú ý:

Số dương có hai căn bậc hai là hai số đối nhau, số âm không có căn bậc hai.

Khi viết $\sqrt{a}$ ta phải có $a \geq 0$ và $\sqrt{a} \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2^2 = 4$ và $(-2)^2 = 4$.

Vậy căn bậc hai của 4 là $\sqrt{4} = 2$ và $-\sqrt{4} = -2$.

b) Do -5 là số âm nên -5 không có căn bậc hai.

c) Số 0 có căn bậc hai là 0.

Cách 2. Sử dụng máy tính bỏ túi nếu đề bài cho phép.

Nút dấu căn bậc hai: $\sqrt{\square}$.

Ví dụ. Tính $\sqrt{3}$.

Ta ấn liên tiếp các nút sau: $\sqrt{\square}$ 3 $=$

Máy tính hiện kết quả là 1,732050808.

Vậy $\sqrt{3} \approx 1,73$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của:

a) 25.

b) 0,0001.

c) $\frac{9}{25}$.

d) -6.

Hướng dẫn giải

a) Căn bậc hai của 25 là $\sqrt{25} = 5$ và $-\sqrt{25} = -5$.

b) Căn bậc hai của 0,0001 là $\sqrt{0,0001} = 0,01$ và $-\sqrt{0,0001} = -0,01$.

c) Căn bậc hai của $\frac{9}{25}$ là $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ và $-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

d) Do $-6 < 0$ nên không tồn tại căn bậc hai của -6.

Chú ý : Không viết $\sqrt{25} = \pm 5$ do $\sqrt{a} \geq 0$ với $a \geq 0$

Ví dụ 2. Tính $\sqrt{100}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $-\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{5^2}$;

Hướng dẫn giải

Vì $10^2 = 100$ nên $\sqrt{100} = 10$.

Vì $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ nên $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Vì $5^2 = 25$ nên $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow -\sqrt{(-5)^2} = -5$ và $\sqrt{5^2} = 5$.

Ví dụ 3. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

- a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{9}$; c) $\sqrt{5}$; d) $\sqrt{0,25}$.

Hướng dẫn giải

Tính	Nút ấn	Kết quả
a) $\sqrt{2}$	$\sqrt{\square} \square \square =$	1,414213562...
b) $\sqrt{9}$	$\sqrt{\square} \square \square =$	3
c) $\sqrt{5}$	$\sqrt{\square} \square \square =$	2,236067977...
d) $\sqrt{0,25}$	$\sqrt{\square} \square \square , \square \square \square =$	0,5

Như vậy:

- a) $\sqrt{2} \approx 1,41$; b) $\sqrt{9} = 3$; c) $\sqrt{5} \approx 2,24$; d) $\sqrt{0,25} = 0,5$.

Bài toán 2. Tìm một số biết căn bậc hai của nó

 **Phương pháp giải**

Ta sử dụng định nghĩa:

Căn bậc hai của số a không âm là số x sao cho **Ví dụ:** Tìm x biết $\sqrt{x} = 4$.

$$x^2 = a.$$

Hướng dẫn giải

Do đó, để tìm một số biết căn bậc hai của nó, ta Ta có $\sqrt{x} = 4$ thì $x = 16$.

biên phương căn bậc hai.

Nếu $\sqrt{x} = a (a \geq 0)$ thì $x = a^2$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Hãy cho biết mỗi số sau là căn bậc hai của số nào?

2; 0; -1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$; -0,4

Hướng dẫn giải

Các số 2; 0; -1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$; -0,4 lần lượt là căn bậc hai của các số: 4; 0; 1; $\frac{1}{4}$; 3; 0,16.

Ví dụ 2. Điền số thích hợp vào ô trống:

x	3		16	19	$(-5)^2$			12,25	0,25
$\sqrt{x}$		2				7	$\frac{1}{2}$		

Hướng dẫn giải

x	3	4	16	19	$(-5)^2$	49	$\frac{1}{4}$	12,25	0,25
---	---	---	----	----	----------	----	---------------	-------	------

$\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$	2	4	$\sqrt{19}$	5	7	$\frac{1}{2}$	3,5	0,5
------------	------------	---	---	-------------	---	---	---------------	-----	-----

Chú ý:

$\sqrt{x}$ là số không âm a sao cho $a^2 = x$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tìm căn bậc hai của:

- a) 9. b) $0,1^2$. c) $\frac{4}{25}$. d) -36 .

Câu 2: Tìm căn bậc hai của các số sau:

- a) 49. b) 0,25. c) $\frac{9}{49}$ d) -1

Câu 3: Điền số thích hợp vào ô trống:

x	9		16	1	$(-3)^2$		
$\sqrt{x}$		2				$\sqrt{23}$	1,1

Câu 4: Điền số thích hợp vào ô trống:

$\sqrt{x}$	3		6	
x		225		0,0025

Câu 5: Tính $\sqrt{6}; \sqrt{0,04}; \sqrt{11}$ bằng cách sử dụng máy tính bỏ túi (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Dạng 3: Thực hiện phép tính

Phương pháp giải

Các phép toán trong tập hợp các số thực cũng có các tính chất tương tự các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

Để thực hiện phép tính có chứa căn bậc 2, ta có thể làm như sau:

Ví dụ. Tính $A = \sqrt{36} \cdot \left(3 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{9}} \right) + 2$

Bước 1. Tính các giá trị căn bậc hai (nếu có) $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$ Ta có $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6; \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4;$
trong phép tính.

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Bước 2. Thực hiện đúng thứ tự phép tính.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } A &= 6 \cdot \left(3 \cdot 4 - \frac{1}{3} \right) + 2 = 6 \cdot \left(12 - \frac{1}{3} \right) + 2 \\ &= 72 - 2 + 2 = 72 \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính:

- a) $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$; b) $\sqrt{4 + 36 + 81}$; c) $\sqrt{1^3 + 2^3}$; d) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}$.

Hướng dẫn giải

$$a) \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{9 \cdot 16}} = \sqrt{\frac{25}{9 \cdot 16}} = \sqrt{\frac{5^2}{(3 \cdot 4)^2}} = \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{5}{12}.$$

$$b) \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11.$$

$$c) \sqrt{1^3+2^3} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3.$$

$$d) \sqrt{1^3+2^3+3^3} = \sqrt{1+8+27} = \sqrt{36} = 6.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị biểu thức:

$$a) M = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{441}{324}};$$

$$b) N = -4\sqrt{\frac{1}{16}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} - 5\sqrt{0,04}.$$

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có } \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}; \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}; \sqrt{\frac{441}{324}} = \frac{21}{18}.$$

$$\text{Vậy } M = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{9} \right) : \frac{21}{18} = \left(\frac{6}{18} + \frac{15}{18} - \frac{14}{18} \right) \cdot \frac{18}{21} = \frac{7}{18} \cdot \frac{18}{21} = \frac{1}{3}.$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}; \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}; \sqrt{0,04} = 0,2 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vậy } N = -4\sqrt{\frac{1}{16}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} - 5\sqrt{0,04} = -4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot \frac{1}{5} = -1 + 1 - 1 = -1.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Tính:

$$a) \sqrt{25-9}; \quad b) \sqrt{0,01} - \sqrt{0,25}; \quad c) \sqrt{2 \cdot 2^2 + 4^2 + 5^2}.$$

Câu 2: Tính giá trị biểu thức:

$$a) A = \left(\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{25}{144}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{121}{36}}$$

$$b) B = -5\sqrt{\frac{9}{25}} + 6\sqrt{\frac{1}{4}} - 5\sqrt{0,25}.$$

$$\text{Câu 3: Tính: } A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5.$$

Dạng 4: Tìm x

Phương pháp giải

Ta sử dụng các tính chất sau:

- $\sqrt{x} = a$ thì $x = a^2$ với $a \geq 0$.

Ví dụ: Tìm x, biết: $\sqrt{x} = 2$

Ta có $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

Vậy $x = 4$.

Ví dụ: Tìm x, biết: $x^2 = 9$

- $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) thì $x = \sqrt{a}$ hoặc $x = -\sqrt{a}$. Ta có $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy $x = 3$ hoặc $x = -3$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm x , biết:

a) $\sqrt{x-1} = 3$ b) $x^2 - 64 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow x-1 = 9 \Rightarrow x = 10$.

Vậy $x = 10$.

b) $x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ hoặc $x = -8$

Vậy $x = 8$ hoặc $x = -8$.

Ví dụ 2. Tìm x , biết: $|\sqrt{x} - 1| - 3 = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|\sqrt{x} - 1| - 3 = 2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| = 5 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 5$ hoặc $\sqrt{x} - 1 = -5$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 6$ hoặc $\sqrt{x} = -4$ (không thỏa mãn vì $\sqrt{x} \geq 0$).

$\Rightarrow x = 36$.

Vậy $x = 36$.

Chú ý: $|x| = a$ thì $x = a$ hoặc $x = -a$.

Ví dụ 3. Tìm x , biết: $(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0$.

Hướng dẫn giải

$(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ hoặc $x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 3$.

Với $x^2 = 4$ ta có $x = 2$ hoặc $x = -2$.

Với $x^2 = 3$ ta có $x = \sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}$.

Vậy $x = \pm 2$ hoặc $x = \pm \sqrt{3}$.

Chú ý: Nếu $a.b = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Các giá trị của biến x thỏa mãn biểu thức $\sqrt{x} = 4$ là:

- A. 2. B. ± 2 . C. 16. D. ± 16 .

Câu 2: Giá trị của biến x thỏa mãn biểu thức $x^2 = 4$ là:

- A. 2. B. ± 2 . C. 16. D. ± 16 .

Câu 3: Tìm x , biết: $x^2 + 16 = 25$

Câu 4: Tìm x , biết: $|\sqrt{x} - 3| + 3 = 9$.

Dạng 5: So sánh hai số

Phương pháp giải

Với $a \geq 0; b \geq 0$:

$a = b$ khi và chỉ khi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$a < b$ khi và chỉ khi $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. So sánh:

a) $\sqrt{2}$ với $\sqrt{3}$. b) 3 với $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $2 < 3$ nên $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) Ta có $3 = \sqrt{9}$ mà $9 < 10$ nên $\sqrt{9} < \sqrt{10}$.

Do đó $3 < \sqrt{10}$.

Ví dụ 2. So sánh hai số thực sau:

a) $\sqrt{9 \cdot 16}$ với $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$. b) $3\sqrt{7}$ với 8. c) $2\sqrt{3}$ với $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$;

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Vậy $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$.

b) Ta có $3\sqrt{7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63}$, $8 = \sqrt{64}$.

Mà $64 > 63$ nên $\sqrt{64} > \sqrt{63}$.

Vậy $3\sqrt{7} < 8$.

c) Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$ và $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Mà $18 > 12$ nên $\sqrt{18} > \sqrt{12}$.

Vậy $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: So sánh:

a) $3\sqrt{2}$ với $2\sqrt{5}$. b) $-5\sqrt{6}$ với $-6\sqrt{5}$.

Câu 2: So sánh:

a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$ với $\sqrt{9 \cdot 4}$. b) $3\sqrt{5}$ với 6.

Dạng 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải

Ví dụ: So sánh:

a) $\sqrt{16}$ với 4. b) $\sqrt{11 \cdot 3}$ và $\sqrt{44}$.

Hướng dẫn giải

a) So sánh $\sqrt{16}$ với 4.

Ta có $4^2 = 16$. Suy ra $4 = \sqrt{16}$.

b) Suy ra $\sqrt{11 \cdot 3} < \sqrt{44}$ (vì $33 < 44$)

Ta có $\sqrt{11 \cdot 3} = \sqrt{44}$.

Áp dụng tính chất cơ bản sau:

$\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Mở rộng:

$\sqrt{x-a} \geq 0$ với mọi $x \geq a$, dấu “=” khi $x = a$.

$\sqrt{x-b} \leq 0$ với mọi $x \geq b$, dấu “=” khi $x = b$.

Min là viết tắt của từ “minimum” nghĩa là giá trị nhỏ nhất.

Max là viết tắt của từ “maximum” nghĩa là giá trị lớn nhất.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \sqrt{x} - 1$

Hướng dẫn giải

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với $x \geq 0$ nên $A = \sqrt{x} - 1 \geq -1$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Vậy $\min A = -1$ khi $x = 0$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P = 1 - 2\sqrt{x-3}$

Hướng dẫn giải

Vì $\sqrt{x-3} \geq 0$ với $x \geq 3$ nên $-2\sqrt{x-3} \leq 0$.

Do đó $P = 1 - 2\sqrt{x-3} \leq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$.

Bài tập tự luyện dạng 6

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của A, B (giả thiết các căn bậc hai đều có nghĩa).

a) $A = \sqrt{x} + 2$ b) $B = \sqrt{x+5} - 3$

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của A, B (giả thiết các căn bậc hai đều có nghĩa).

a) $A = 4 - \sqrt{x}$ b) $B = -5 - \sqrt{x+3}$

Dạng 7. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức nhận giá trị nguyên

Phương pháp giải

Tìm điều kiện của x để biểu thức nhận giá trị nguyên, ta thường làm như sau:

Bước 1. Tách phần nguyên.

Tách tử theo mẫu sao cho A có dạng tổng của một số nguyên và một phân số có tử nguyên.

Ví dụ:

+) $\sqrt{x-3} \geq 0$ với $x \geq 3$.

Dấu “=” xảy ra khi $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

+) $-\sqrt{x-3} \leq 0$ với $x \geq 3$.

Dấu “=” xảy ra khi $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Ví dụ: Với $x \geq 0, x \neq 1$, tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

nhận giá trị là số nguyên.

Bước 1.

$$A = \frac{\sqrt{x}-1+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Bước 2. Tìm x .

Vận dụng tính chất sau: $A = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Để A nhận giá trị nguyên thì $m:n$ hay $n \in U(n)$.

Bước 2.

Để A là số nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 1. Suy ra $\sqrt{x}-1 \in \{-1; 1\}$.

$\sqrt{x}-1$	-1	1
$\sqrt{x}$	0	2
x	0	4

Các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì A nhận giá trị nguyên.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Với $x \geq 0, x \neq 4$, tìm x nguyên để biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

Với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \geq 0, x \neq 4$, để P nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x}-2$ là ước của 2.

Suy ra $\sqrt{x}-2 \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Ta có bảng sau:

$\sqrt{x}-2$	-2	-1	1	2
$\sqrt{x}$	0	1	3	4
x	0	1	9	16

Các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Vậy $x \in \{0; 1; 9; 16\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 2. Cho $A = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$. Tìm $x \in \mathbb{Z}, x < 30$ để A là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0 \leq x < 30, x \in \mathbb{Z}$.

Để A nhận giá trị nguyên thì $(\sqrt{x}-3):2$ hay $\sqrt{x}-3$ là số chẵn.

Suy ra $\sqrt{x}$ là số lẻ. Do đó x là số chính phương lẻ.

Vì $x < 30$ nên $x \in \{1; 3^2; 5^2\}$ hay $x \in \{1; 9; 25\}$.

 Bài tập tự luyện dạng 7

Câu 1. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ nhận giá trị nguyên với $x \geq 0, x \neq 4$.

Câu 2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+2}{2}$ nhận giá trị nguyên với $5 \leq x < 35$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Nhận biết mối quan hệ giữa các tập số

Câu 1. Chọn A.

$\sqrt{3} \in I$ mà $I \subset \mathbb{R}$ nên $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Chọn D.

$\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Chọn D.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Câu 4.

- a) $-0, (2) \notin \mathbb{Q}$; b) $0,2(41) \notin I$; c) $1,7329508... \in \mathbb{R}$;
d) $I \subset \mathbb{R}$; e) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; f) $I \subset \mathbb{R}$.

Dạng 2. Tìm căn bậc hai của một số cho trước và tìm một số biết căn bậc hai của nó

Câu 1.

- a) Căn bậc hai của 9 là $\sqrt{9} = 3$ và $-\sqrt{9} = -3$
b) Căn bậc hai của $0,1^2$ là $\sqrt{0,1^2} = 0,1$ và $-\sqrt{0,1^2} = -0,1$.
c) Căn bậc hai của $\frac{4}{25}$ là $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ và $-\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{2}{5}$.
d) Do $-36 < 0$ nên không tồn tại căn bậc hai của -36 .

Câu 2.

- a) Căn bậc hai của 49 là $\sqrt{49} = 7$ và $-\sqrt{49} = -7$.
b) Căn bậc hai của $0,25$ là $\sqrt{0,25} = 0,5$ và $-\sqrt{0,25} = -0,5$.
c) Căn bậc hai của $\frac{9}{49}$ là $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$ và $-\sqrt{\frac{9}{49}} = -\frac{3}{7}$.
d) Do $-1 < 0$ nên không tồn tại căn bậc hai của -1 .

Câu 3.

Ta có $\sqrt{x}$ là số không âm a sao cho $a^2 = x$

x	9	4	16	1	$(-3)^2$	23	1,21
$\sqrt{x}$	3	2	4	1	3	$\sqrt{23}$	1,1

Câu 4.

$\sqrt{x}$	3	25	6	0,05
x	9	225	36	0,0025

Câu 5.

Tính	Nút ấn	Kết quả
$\sqrt{6}$	$\sqrt{\square} \square \square \square$	2,449489743...

$\sqrt{0,04}$	$\sqrt{\quad} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{4} \boxed{=}$	0,2
$\sqrt{11}$	$\sqrt{\quad} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=}$	3,31662479...

Vậy $\sqrt{6} \approx 2,45; \sqrt{0,04} = 0,2; \sqrt{11} \approx 3,32$.

Dạng 3. Thực hiện phép tính

Câu 1.

a) $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$.

b) $\sqrt{0,01} - \sqrt{0,25} = 0,1 - 0,5 = -0,4$.

c) $\sqrt{2 \cdot 2^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 4 + 16 + 25} = \sqrt{49} = 7$.

Câu 2.

a) Ta có $A = \left(\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{25}{144}} - \sqrt{\frac{49}{81}} \right) : \sqrt{\frac{121}{36}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - \frac{7}{9} \right) : \frac{11}{6} = \frac{1}{6}$.

b) Ta có $B = -5\sqrt{\frac{9}{25}} + 6\sqrt{\frac{1}{4}} - 5\sqrt{0,25} = -5\frac{3}{5} + 6\frac{1}{2} - 5 \cdot 0,5 = -\frac{5}{2}$.

Câu 3.

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2} \right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{22}{7} \right) + \frac{15}{2} = \left(\frac{7 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{6} \right) : \left(\frac{-25 \cdot 7 + 22 \cdot 6}{42} \right) + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{35}{6} : \frac{-43}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{42}{-43} + \frac{15}{2} = \frac{-245}{43} + \frac{15}{2} = \frac{-245 \cdot 2 + 15 \cdot 43}{43 \cdot 2} = \frac{155}{86}$$

Dạng 4. Tìm x

Câu 1. Chọn C.

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16.$$

Câu 2. Chọn B.

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Câu 3.

$$x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = -3$.

Câu 4.

$$\text{Ta có } |\sqrt{x} - 3| + 3 = 9 \Rightarrow |\sqrt{x} - 3| = 6 \Rightarrow \sqrt{x} - 3 = 6 \text{ hoặc } \sqrt{x} - 3 = -6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 9 \text{ hoặc } \sqrt{x} = -3 \text{ (loại vì } \sqrt{x} \geq 0)$$

$$\Rightarrow x = 81.$$

Vậy $x = 81$.

Dạng 5. So sánh hai số

Câu 1.

a) Ta có $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ và $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$

Mà $18 < 20$ vậy $\sqrt{18} < \sqrt{20}$ hay $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

b) Ta có $-5\sqrt{6} = -\sqrt{150}$ và $-6\sqrt{5} = -\sqrt{180}$

Mà $150 < 180$ nên $-\sqrt{180} < -\sqrt{150}$ hay $-5\sqrt{6} > -6\sqrt{5}$.

Câu 2.

a) Ta có $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$ và $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

Vậy $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$

b) Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ và $6 = \sqrt{36}$. Mà $45 > 36$ nên $\sqrt{45} > \sqrt{36}$.

Vậy $3\sqrt{5} > 6$.

Dạng 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai

Câu 1.

a) Ta có $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ với mọi $x \geq 0$.

Vậy $\min A = 2$ khi $x = 0$.

b) Ta có $\sqrt{x+5} \geq 0$ với mọi $x \geq -5$ nên $\sqrt{x+5} - 3 \geq -3$.

Dấu “=” xảy ra khi $x+5=0 \Rightarrow x=-5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\min B = -3$ khi $x = -5$.

Câu 2.

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow 4 - \sqrt{x} \leq 4$ với mọi $x \geq 0$.

Vậy $\max A = 4$ khi $x = 0$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq -3$.

Ta có $\sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+3} \leq 0 \Rightarrow -5 - \sqrt{x+3} \leq -5$.

Dấu “=” xảy ra khi $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $\max B = -5$ khi $x = -3$.

Dạng 7. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức nhận giá trị nguyên

Câu 1.

Với $x \geq 0, x \neq 4$.

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{2(\sqrt{x}-2)+5}{\sqrt{x}-2} = 2 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}.$$

Ta có $P \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{5}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-2 \in U(5)$.

Ta có bảng sau:

$\sqrt{x}-2$	-5	-1	1	5
$\sqrt{x}$	-3 (loại vì $\sqrt{x} \geq 0$)	1	3	7

x		1	9	49
---	--	---	---	----

Các giá trị tìm được của x đều thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $x \in \{1; 9; 49\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Câu 2.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x} + 2}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2} + 1$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{\sqrt{x}}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}$ là số chẵn $\Rightarrow x$ là số chính phương chẵn.

Vì $5 \leq x < 35$ nên $x = 4^2 = 16$.

Vậy $x = 16$ thì P nhận giá trị nguyên thỏa mãn $5 \leq x < 35$.