

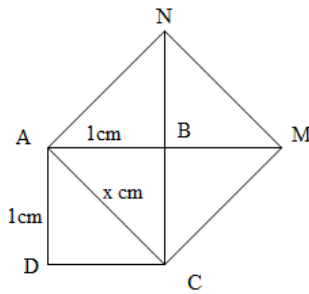
## CHUYÊN ĐỀ 6. SỐ VÔ TỈ. CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

### PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

#### 1. Số vô tỉ

a) Ví dụ mở đầu:

Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh 1 cm. Vẽ hình vuông  $ACMN$ .



Ta có diện tích của hình vuông  $ACMN$  là  $x^2$

Mặt khác diện tích hình vuông  $ACMN$  gấp hai lần diện tích hình vuông  $ABCD$ . Do đó  $x^2 = 2$ . Người ta chứng minh được là không có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 2 và tính được  $x = 1,414213562\dots$ . Đây là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Ta gọi những số như thế là số vô tỉ.

b) Khái niệm: Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Ví dụ: 2,71828... là số vô tỉ.

Tập hợp các số vô tỉ được kí hiệu là  $I$ .

#### 2. Khái niệm về căn bậc hai số học

a) Định nghĩa: Căn bậc hai số học của một số  $a$  không âm, kí hiệu là  $\sqrt{a}$ , là số  $x$  không âm sao cho  $x^2 = a$ .

Như vậy, trong ví dụ trên thì cạnh của hình vuông có diện tích bằng  $2\text{ cm}^2$  là  $\sqrt{2}\text{ cm}$

Chú ý: Số âm không có căn bậc hai.

b) Tính chất: Với hai số dương bất kì  $a$  và  $b$

+) Nếu  $a = b$  thì  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  và ngược lại.

+) Nếu  $a < b$  thì  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  và ngược lại.

#### 3. Tính căn bậc hai số học bằng máy tính cầm tay.

### PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

#### Dạng 1. Tính căn bậc hai.

##### I. Phương pháp giải:

Các phép toán trong tập hợp các số vô tỉ cũng có các tính chất tương tự các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

Để thực hiện phép tính có chứa căn bậc 2, ta có thể làm như sau:

**Bước 1.** Tính các giá trị căn bậc hai (có thể dùng định nghĩa hoặc máy tính)

**Bước 2.** Thực hiện đúng thứ tự phép tính.

##### II. Bài toán.

##### Mức nhận biết

**Bài 1.** Tìm căn bậc hai số học của:

a) 4.

b) -5

c) 0

d) 81

**Lời giải:**

- a) Căn bậc hai số học của 4 là 2 vì  $2^2 = 4$   
 b) Số -5 không có căn bậc hai vì  $-5 < 0$   
 c) Căn bậc hai số học của 0 là 0 vì  $0^2 = 0$   
 d) Căn bậc hai số học của 81 là 9 vì  $9^2 = 81$

**Bài 2.** Tính

- a)  $\sqrt{36}$                       b)  $\sqrt{64}$                       c)  $\sqrt{1}$                       d)  $\sqrt{625}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{36} = 6$ ;                      b)  $\sqrt{64} = 8$ ;                      c)  $\sqrt{1} = 1$ ;                      d)  $\sqrt{625} = 25$

**Bài 3.** Tính

- a)  $\sqrt{\frac{4}{9}}$                       b)  $\sqrt{\frac{100}{81}}$                       c)  $\sqrt{\frac{1}{16}}$                       d)  $\sqrt{\frac{49}{25}}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ;                      b)  $\sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$ ;                      c)  $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ ;                      d)  $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$

**Bài 4.** Tính

- a)  $\sqrt{0,04}$                       b)  $\sqrt{0,01}$                       c)  $\sqrt{0,0009}$                       d)  $\sqrt{0,25}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{0,04} = 0,2$                       b)  $\sqrt{0,01} = 0,1$                       c)  $\sqrt{0,0009} = 0,03$                       d)  $\sqrt{0,25} = 0,5$

**Bài 5.** Tính

- a)  $\sqrt{3^2}$                       b)  $\sqrt{6^2}$                       c)  $\sqrt{21^2}$                       d)  $\sqrt{100^2}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{3^2} = 3$ ;                      b)  $\sqrt{6^2} = 6$ ;                      c)  $\sqrt{21^2} = 21$ ;                      d)  $\sqrt{100^2} = 100$

**Mức thông hiểu**

**Bài 6.** Sử dụng máy tính bỏ túi để tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

- a)  $\sqrt{2}$                       b)  $\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{5}$                       d)  $\sqrt{6}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{2} \approx 1,41$                       b)  $\sqrt{3} \approx 1,73$                       c)  $\sqrt{5} \approx 2,24$                       d)  $\sqrt{6} \approx 2,45$

**Bài 7.** Sử dụng máy tính bỏ túi để tính (làm tròn đến hàng phần chục).

- a)  $\sqrt{2}$                       b)  $\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{8}$                       d)  $\sqrt{10}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{2} \approx 1,4$                       b)  $\sqrt{3} \approx 1,7$                       c)  $\sqrt{8} \approx 2,8$                       d)  $\sqrt{10} \approx 3,2$

**Bài 8.** Tính

- a)  $\sqrt{2\frac{1}{4}}$                       b)  $\sqrt{2\frac{7}{9}}$                       c)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$                       d)  $\sqrt{1\frac{15}{49}}$

**Lời giải:**

- a)  $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$                       b)  $\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$$c) \sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$d) \sqrt{1\frac{15}{49}} = \sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{8}{7}$$

**Bài 9.** Tính

$$a) \sqrt{1,44}$$

$$b) \sqrt{6,25}$$

$$c) \sqrt{1,21}$$

$$d) \sqrt{1,96}$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{1,44} = 1,2$$

$$b) \sqrt{6,25} = 2,5$$

$$c) \sqrt{1,21} = 1,1$$

$$d) \sqrt{1,96} = 1,4$$

**Bài 10.** Tính

$$a) \sqrt{(-5)^2}$$

$$b) \sqrt{(-2)^4}$$

$$c) -\sqrt{400}$$

$$d) -\sqrt{7^2}$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$b) \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4;$$

$$c) -\sqrt{400} = -20;$$

$$d) -\sqrt{7^2} = -7$$

**Mức vận dụng**

**Bài 11.** Tính

$$a) \sqrt{(3^2)^2}$$

$$b) \sqrt{(2^2)^3}$$

$$c) \sqrt{3,2,0,2}$$

$$d) \sqrt{1,7^2 - 1,5^2}$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{(3^2)^2} = 9$$

$$b) \sqrt{(2^2)^3} = \sqrt{(2^3)^2} = 8$$

$$c) \sqrt{3,2,0,2} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

$$d) \sqrt{1,7^2 - 1,5^2} = \sqrt{2,89 - 2,25} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

**Bài 12.** Tính

$$a) \sqrt{\frac{0,04}{0,49}}$$

$$b) \sqrt{\frac{0,36}{2,25}}$$

$$c) \sqrt{(2,8 - 0,5)^2}$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{\frac{0,04}{0,49}} = \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$$

$$b) \sqrt{\frac{0,36}{2,25}} = \sqrt{\frac{36}{225}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$c) \sqrt{(2,8 - 0,5)^2} = \sqrt{(2,3)^2} = 2,3$$

**Bài 13.** Thực hiện phép tính:

$$a) A = \sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{(-1)^2}$$

$$b) B = \sqrt{36} - \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{16}$$

**Lời giải:**

$$a) A = \sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{(-1)^2}$$

$$b) B = \sqrt{36} - \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{16}$$

$$A = 7 - 5 + 1$$

$$B = 6 - 3 + 4$$

$$A = 3$$

$$B = 7$$

**Bài 14.** Thực hiện phép tính:  $A = \sqrt{36} \cdot \left( 3\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{9}} \right) + 2$

**Lời giải:**

$$A = \sqrt{36} \cdot \left( 3\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{9}} \right) + 2$$

$$A = 6 \cdot \left( 3.4 - \frac{1}{3} \right) + 2$$

$$A = 6 \cdot \left( 12 - \frac{1}{3} \right) + 2$$

$$A = 6 \cdot \frac{35}{3} + 2$$

$$A = 70 + 2 = 72$$

**Bài 15.** Thực hiện phép tính:

$$a) A = \sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{(-2)^4}$$

$$b) B = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{-(-4)^3}$$

**Lời giải:**

$$a) A = \sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{(-2)^4}$$

$$b) B = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{-(-4)^3}$$

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 4$$

$$B = 2 + 3 - \sqrt{4^3}$$

$$B = 2 + 3 - 8$$

$$B = -3$$

**Mức vận dụng cao**

**Bài 16.** Tìm căn bậc hai số học của:

$$a) a^2 \text{ với } a \geq 0$$

$$b) (a-1)^2 \text{ với } a \geq 1$$

$$c) (a+1)^2 \text{ với } a \geq 0$$

$$d) 9(a-1)^2 \text{ với } a \geq 1$$

**Lời giải:**

$$a) \text{ Với } a \geq 0, \text{ ta có } \sqrt{a^2} = a$$

$$b) \text{ Với } a \geq 1, \text{ ta có } \sqrt{(a-1)^2} = a-1$$

$$c) \text{ Với } a \geq 0, \text{ ta có } \sqrt{(a+1)^2} = a+1$$

$$d) \text{ Với } a \geq 1, \text{ ta có } \sqrt{9(a-1)^2} = 3(a-1)$$

**Bài 17.** Chứng tỏ rằng:  $\sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1} = n$  Với  $n \geq 1$

**Lời giải:**

$$\sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1} \quad \text{Với } n \geq 1$$

$$= \sqrt{2[1+2+3+\dots+(n-1)+n] - n}$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} - n}$$

$$= \sqrt{(n+1)n - n}$$

$$= \sqrt{n^2 + n - n}$$

$$= \sqrt{n^2} = n$$

**Bài 18.** Tính độ dài cạnh của hình vuông có diện tích bằng:

$$a) 64cm^2$$

$$b) 625m^2$$

**Lời giải:**

$$a) \text{ Độ dài cạnh của hình vuông có diện tích } 64cm^2 \text{ là: } \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

b) Độ dài cạnh của hình vuông có diện tích  $625m^2$  là:  $\sqrt{625} = 25m$

**Bài 19.** Để lát sân gạch có diện tích  $100m^2$ , người ta đã dùng vừa đủ 1600 viên gạch hình vuông cùng cỡ. Hỏi mỗi viên gạch có độ dài cạnh là bao nhiêu, biết rằng diện tích các mạch ghép là không đáng kể?

**Lời giải:**

Diện tích mỗi viên gạch là :  $100 : 1600 = 0,0625m^2$

Đổi  $0,0625m^2 = 625cm^2$

Độ dài cạnh của mỗi viên gạch là :  $\sqrt{625} = 25cm$

**Bài 20.** Chứng minh rằng  $\sqrt{5}$  là số vô tỉ.

**Lời giải:**

Giả sử  $\sqrt{5}$  là số hữu tỉ. Khi đó  $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$  với  $(m, n) = 1$ ;  $m, n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra :  $m^2 = 5n^2$

$\Rightarrow m^2 : 5$

$\Rightarrow m : 5$

Đặt  $m = 5k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Ta có  $m^2 = 25k^2$ . Do đó  $5n^2 = 25k^2$

$\Rightarrow n^2 = 5k^2$

$\Rightarrow n^2 : 5$

Mà 5 là số nguyên tố nên  $n : 5$

Suy ra  $\frac{m}{n}$  chưa tối giản, trái với giả thiết  $(m, n) = 1$ .

Vậy  $\sqrt{5}$  không là số hữu tỉ, hay  $\sqrt{5}$  là số vô tỉ.

**Dạng 2. Tìm  $x$**

**I. Phương pháp giải:** Ta sử dụng các tính chất sau:

+) Nếu  $\sqrt{x} = a$  thì  $x = a^2$  (với  $a \geq 0$ )

+) Nếu  $x^2 = a$  (với  $a \geq 0$ ) thì  $x = \sqrt{a}$  hoặc  $x = -\sqrt{a}$  và ngược lại.

**II. Bài toán.**

**Mức nhận biết**

**Bài 1.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} = 4$

b)  $\sqrt{x} = 5$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{x} = 4$

b)  $\sqrt{x} = 5$

$\Rightarrow x = 4^2$

$\Rightarrow x = 5^2$

$\Rightarrow x = 16$  ( thoả mãn )

$\Rightarrow x = 25$  ( thoả mãn )

**Bài 2.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 = 9$

b)  $x^2 = 16$

**Lời giải:**

a)  $x^2 = 9$

$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3$

b)  $x^2 = 16$

$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = -4$

**Bài 3.** Điền số thích hợp vào ô trống

|            |   |   |    |    |          |   |               |
|------------|---|---|----|----|----------|---|---------------|
| $x$        | 3 |   | 16 | 19 | $(-5)^2$ |   |               |
| $\sqrt{x}$ |   | 2 |    |    |          | 7 | $\frac{1}{2}$ |

**Lời giải:**

|            |            |   |    |             |          |    |               |
|------------|------------|---|----|-------------|----------|----|---------------|
| $x$        | 3          | 4 | 16 | 19          | $(-5)^2$ | 49 | $\frac{1}{4}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | 4  | $\sqrt{19}$ | 5        | 7  | $\frac{1}{2}$ |

**Bài 4.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$

b)  $\sqrt{x} = 0,5$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\Rightarrow x = \frac{9}{16} \text{ (thoả mãn)}$

b)  $\sqrt{x} = 0,5$

$\Rightarrow x = 0,5^2$

$\Rightarrow x = 0,25 \text{ (thoả mãn)}$

**Bài 5.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 = \frac{25}{64}$

b)  $x^2 = 0,04$

**Lời giải:**

a)  $x^2 = \frac{25}{64}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{64}} \text{ hoặc } x = -\sqrt{\frac{25}{64}}$

$\Rightarrow x = \frac{5}{8} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{8}$

b)  $x^2 = 0,04$

$\Rightarrow x = \sqrt{0,04} \text{ hoặc } x = -\sqrt{0,04}$

$\Rightarrow x = 0,2 \text{ hoặc } x = -0,2$

**Mức thông hiểu****Bài 6.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} - 9 = 0$

b)  $2\sqrt{x} = 10$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{x} - 9 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 9$

$\Rightarrow x = 9^2$

$\Rightarrow x = 81 \text{ (thoả mãn)}$

b)  $2\sqrt{x} = 10$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 5$

$\Rightarrow x = 5^2$

$\Rightarrow x = 25 \text{ (thoả mãn)}$

**Bài 7.** Tìm  $x$ , biết:

$$a) x^2 - 10 = 0$$

**Lời giải:**

$$a) x^2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 10$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{10} \text{ hoặc } x = -\sqrt{10}$$

**Bài 8.** Tìm  $x$  biết:

$$a) \sqrt{x+1} = 2 \text{ Với } x \geq -1$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{x+1} = 2 \text{ Với } x \geq -1$$

$$\Rightarrow x+1 = 4$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

**Bài 9.** Tìm  $x$  biết:

$$a) (x+1)^2 = 49$$

**Lời giải:**

$$a) (x+1)^2 = 49$$

$$\Rightarrow x+1 = 7 \text{ hoặc } x+1 = -7$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = -8$$

**Bài 10.** Tìm  $x$  biết:

$$a) \sqrt{x-1} = \frac{3}{2} \text{ Với } x \geq 1$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{x-1} = \frac{3}{2} \text{ Với } x \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

**Mức vận dụng**

**Bài 11.** Tìm  $x$  biết:

$$a) \frac{2}{3} - \sqrt{x+1} = 0 \text{ Với } x \geq -1$$

**Lời giải:**

$$a) \frac{2}{3} - \sqrt{x+1} = 0 \text{ Với } x \geq -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x+1 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{9} - 1$$

$$b) 64 - x^2 = 0$$

$$b) 64 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 64$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{64} \text{ hoặc } x = -\sqrt{64}$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -8$$

$$b) \sqrt{x-1} = 3 \text{ Với } x \geq 1$$

$$b) \sqrt{x-1} = 3 \text{ Với } x \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 = 9$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$b) (x-3)^2 = 81$$

$$b) (x-3)^2 = 81$$

$$\Rightarrow x-3 = 9 \text{ hoặc } x-3 = -9$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ hoặc } x = -6$$

$$b) \sqrt{3-x} = \frac{1}{2} \text{ Với } x \leq 3$$

$$b) \sqrt{3-x} = \frac{1}{2} \text{ Với } x \leq 3$$

$$\Rightarrow 3-x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = 3 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$b) \sqrt{1-x} - \frac{4}{5} = 0 \text{ Với } x \leq 1$$

$$b) \sqrt{1-x} - \frac{4}{5} = 0 \text{ Với } x \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 1-x = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{9} \text{ (thoả mãn)}$$

**Bài 12.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $18 - (5 + x)^2 = 14$

**Lời giải:**

a)  $18 - (5 + x)^2 = 14$

$$\Rightarrow (5 + x)^2 = 18 - 14$$

$$\Rightarrow (5 + x)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 5 + x = 2 \text{ hoặc } 5 + x = -2$$

$$\Rightarrow x = 2 - 5 \text{ hoặc } x = -2 - 5$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = -7$$

**Bài 13.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $3\sqrt{x} - 24 = 0$

**Lời giải:**

a)  $3\sqrt{x} - 24 = 0$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x} = 24$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 8$$

$$\Rightarrow x = 8^2$$

$$\Rightarrow x = 64 \text{ (thoả mãn)}$$

**Bài 14.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $5x^2 - 76 = 4$

**Lời giải:**

a)  $5x^2 - 76 = 4$

$$\Rightarrow 5x^2 = 80$$

$$\Rightarrow x^2 = 80 : 5$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = -4$$

**Bài 15.** Tìm  $x$  không âm biết:

$$\Rightarrow x = \frac{9}{25} \text{ (thoả mãn)}$$

b)  $(2 - x)^2 - 16 = 0$

b)  $(2 - x)^2 - 16 = 0$

$$\Rightarrow (2 - x)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2 - x = 4 \text{ hoặc } 2 - x = -4$$

$$\Rightarrow x = 2 - 4 \text{ hoặc } x = 2 - (-4)$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 6$$

b)  $\frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

b)  $\frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}\sqrt{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} : \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{25} \text{ (thoả mãn)}$$

b)  $\frac{3}{8} - 2x^2 = \frac{1}{4}$

b)  $\frac{3}{8} - 2x^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 2x^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} : 2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{4}$$

$$a) \frac{5}{4} - 2\sqrt{x} = 1$$

**Lời giải:**

$$a) \frac{5}{4} - 2\sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{5}{4} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} : 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{64} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$b) \frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) \frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}\sqrt{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12}\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} : \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{25} \text{ (thỏa mãn)}$$

### Mức vận dụng cao

**Bài 16.** Tìm  $x$  biết:

$$a) \frac{6}{7} - 13\sqrt{x-1} = \frac{5}{21} \text{ Với } x \geq 1$$

**Lời giải:**

$$a) \frac{6}{7} - 13\sqrt{x-1} = \frac{5}{21} \text{ Với } x \geq 1$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x-1} = \frac{6}{7} - \frac{5}{21}$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x-1} = \frac{13}{21}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{441}$$

$$\Rightarrow x = \frac{442}{441} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$b) \frac{2}{5}\sqrt{x+7} + 1 = \frac{6}{5} \text{ Với } x \geq -7$$

$$b) \frac{2}{5}\sqrt{x+7} + 1 = \frac{6}{5} \text{ Với } x \geq -7$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{x+7} + 1 = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{x+7} = \frac{6}{5} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{x+7} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+7} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+7 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-27}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

**Bài 17.** Tìm  $x$ , biết:

$$a) 5(1-x)^2 + 7 = 12$$

**Lời giải:**

$$a) 5(1-x)^2 + 7 = 12$$

$$\Rightarrow 5(1-x)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1-x = 1 \text{ hoặc } 1-x = -1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2$$

$$b) 10 - 4\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$$b) 10 - 4\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x + \frac{5}{7} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{14} \text{ hoặc } x = -\frac{31}{14}$$

**Bài 18.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{(x-1)^2} = 5$

b)  $\sqrt{x+1} + 2 = 0$  Với  $x \geq -1$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{(x-1)^2} = 5$

b)  $\sqrt{x+1} + 2 = 0$  Với  $x \geq -1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = -2$$

$$\Rightarrow x-1 = 5 \text{ hoặc } x-1 = -5$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = -4$$

**Bài 19.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  Với  $x \geq 0$ ;  $x \leq -1$

b)  $4 - 3\sqrt{x^2-2x} = 4$  Với  $x \geq 2$ ;  $x \leq 0$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  Với  $x \geq 0$ ;  $x \leq -1$

b)  $4 - 3\sqrt{x^2-2x} = 4$  Với  $x \geq 2$ ;  $x \leq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x^2-2x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x} = 0$$

$$\Rightarrow x^2+x = 0$$

$$\Rightarrow x^2-2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (TM) hoặc } x = -1 \text{ (TM)}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (TM) hoặc } x = 2 \text{ (TM)}$$

**Bài 20.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} = -\frac{2}{7}$  Với  $x \geq -2$

b)  $4(x-5)^2 - \frac{15}{16} = (x-5)^2$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} = -\frac{2}{7}$  Với  $x \geq -2$

b)  $4(x-5)^2 - \frac{27}{16} = (x-5)^2$

$$\Rightarrow (1-3)\sqrt{x+2} = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 4(x-5)^2 - (x-5)^2 = \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x+2} = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow 3(x-5)^2 = \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{49}$$

$$\Rightarrow x-5 = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x-5 = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{97}{49} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23}{4} \text{ hoặc } x = \frac{17}{4}$$

**Dạng 3. So sánh các căn bậc hai**

**I. Phương pháp giải:** Sử dụng tính chất:

❖ Với hai số dương bất kì  $a$  và  $b$  thì:

+)  $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$

+)  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

+)  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

❖ Nếu  $a > m$ ,  $m > b$  thì  $a > b$

❖ Nếu  $x > y, z > t$  thì  $x + z > y + t$

## II. Bài toán.

### Mức nhận biết

**Bài 1.** So sánh:

- a)  $\sqrt{16}$  và 4                                      b)  $\sqrt{24}$  và 5

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{16} = 4$

b) Ta có  $5 = \sqrt{25}$

Vì  $24 < 25$  nên  $\sqrt{24} < \sqrt{25}$ . Do đó  $\sqrt{24} < 5$ .

**Bài 2.** So sánh:

- a)  $\sqrt{50}$  và  $\sqrt{38}$                                       b)  $\sqrt{11.3}$  và  $\sqrt{44}$

**Lời giải:**

a) Vì  $50 > 38$  nên  $\sqrt{50} > \sqrt{38}$

b)  $\sqrt{11.3} = \sqrt{33}$

Vì  $33 < 44$  nên  $\sqrt{33} < \sqrt{44}$

Do đó  $\sqrt{11.3} < \sqrt{44}$

**Bài 3.** So sánh:

- a)  $-\sqrt{37}$  và  $-\sqrt{62}$                                       b)  $-\sqrt{26}$  và  $\sqrt{5}$

**Lời giải:**

a)  $37 < 62$  nên  $\sqrt{37} < \sqrt{62}$

Do đó  $-\sqrt{37} > -\sqrt{62}$

b)  $-\sqrt{26} < 0$  ;  $\sqrt{5} > 0$

Do đó  $-\sqrt{26} < \sqrt{5}$

**Bài 4.** So sánh:

- a)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  và  $\sqrt{\frac{3}{4}}$                                       b)  $\sqrt{\frac{25}{43}}$  và  $\sqrt{\frac{16}{43}}$

**Lời giải:**

a)  $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$  nên  $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{\frac{3}{4}}$

b)  $\frac{25}{43} > \frac{16}{43}$  nên  $\sqrt{\frac{25}{43}} > \sqrt{\frac{16}{43}}$

**Bài 5.** So sánh:

- a)  $\sqrt{1\frac{3}{4}}$  và  $\sqrt{1\frac{1}{4}}$                                       b)  $\sqrt{0,8}$  và  $\sqrt{0,64}$

**Lời giải:**

a)  $1\frac{3}{4} > 1\frac{1}{4}$  nên  $\sqrt{1\frac{3}{4}} > \sqrt{1\frac{1}{4}}$

b)  $0,8 > 0,64$  nên  $\sqrt{0,8} > \sqrt{0,64}$

### Mức thông hiểu

**Bài 6.** So sánh:

a)  $\sqrt{25.4}$  và  $\sqrt{25}.\sqrt{4}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{4}}$  và  $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{25.4} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{25}.\sqrt{4} = 5.2 = 10$

Do đó  $\sqrt{25.4} = \sqrt{25}.\sqrt{4}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5}{2}$

Do đó  $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$

**Bài 7.** So sánh:

a)  $\sqrt{1\frac{1}{2}}$  và  $\sqrt{\frac{9}{8}}$

b)  $\sqrt{\frac{14}{39}}$  và  $\sqrt{\frac{2}{13}}$

**Lời giải:**

a)  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{12}{8} > \frac{9}{8}$  nên  $\sqrt{1\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{9}{8}}$

b)  $\frac{2}{13} = \frac{6}{39} < \frac{14}{39}$  nên  $\sqrt{\frac{14}{39}} > \sqrt{\frac{2}{13}}$

**Bài 8.** So sánh:

a)  $\sqrt{1\frac{3}{4}}$  và  $\sqrt{1,8}$

b)  $-\sqrt{2\frac{4}{7}}$  và  $-\sqrt{2,5}$

**Lời giải:**

a)  $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = \frac{35}{20}$ ;  $1,8 = \frac{9}{5} = \frac{36}{20}$ . Vì  $\frac{35}{20} < \frac{36}{20}$  nên  $\sqrt{1\frac{3}{4}} < \sqrt{1,8}$

b)  $2,5 = \frac{5}{2} = \frac{35}{14}$ ;  $2\frac{4}{7} = \frac{18}{7} = \frac{36}{14}$ . Vì  $\frac{35}{14} < \frac{36}{14}$  nên  $\sqrt{2,5} < \sqrt{2\frac{4}{7}}$ . Do đó  $-\sqrt{2,5} > -\sqrt{2\frac{4}{7}}$

**Bài 9.** So sánh:

a)  $\sqrt{5.\left(\frac{2}{5}\right)^2}$  và  $\sqrt{1-\frac{2}{5}}$

b)  $\sqrt{6:\frac{4}{5}}$  và  $\sqrt{1\frac{2}{3}}$

**Lời giải:**

a)  $\sqrt{5.\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{5.\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$ ;  $\sqrt{1-\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

Vì  $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$  nên  $\sqrt{5.\left(\frac{2}{5}\right)^2} > \sqrt{1-\frac{2}{5}}$

b)  $\sqrt{6:\frac{4}{5}} = \sqrt{6.\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{7\frac{1}{2}}$

Vì  $7\frac{1}{2} > 1\frac{2}{3}$  nên  $\sqrt{6:\frac{4}{5}} > \sqrt{1\frac{2}{3}}$

**Bài 10.** So sánh:

a)  $\sqrt{16+9}$  và  $\sqrt{16}+\sqrt{9}$

b)  $\sqrt{25-9}$  và  $\sqrt{25}-\sqrt{9}$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

$$\text{Do đó } \sqrt{16+9} < \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$$b) \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$\text{Do đó } \sqrt{25-9} > \sqrt{25} - \sqrt{9}$$

### Mức vận dụng

**Bài 11.** So sánh:

$$a) \sqrt{35} + \sqrt{99} \text{ và } 16$$

$$b) \sqrt{26} + \sqrt{50} \text{ và } 12$$

**Lời giải:**

$$a) \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{99} < \sqrt{100} = 10$$

$$\text{Do đó } \sqrt{35} + \sqrt{99} < 6 + 10 = 16$$

$$b) \sqrt{26} > \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Do đó } \sqrt{26} + \sqrt{50} > 5 + 7 = 12$$

**Bài 12.** So sánh:  $7\sqrt{6}$  và  $6\sqrt{7}$

**Lời giải:**

$$\left(7\sqrt{6}\right)^2 = 49 \cdot 6 = 294$$

$$\left(6\sqrt{7}\right)^2 = 36 \cdot 7 = 252$$

$$\text{Vì } 294 > 252 \text{ nên } \left(7\sqrt{6}\right)^2 > \left(6\sqrt{7}\right)^2. \text{ Do đó } 7\sqrt{6} > 6\sqrt{7}$$

**Bài 13.** So sánh:  $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$  và  $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$

**Lời giải:**  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}; \quad \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

$$\text{Vì } \frac{1}{12} > \frac{1}{18} \text{ nên } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Do đó } -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} < -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

**Bài 14.** So sánh:  $5\sqrt{(-10)^2}$  và  $10\sqrt{(-5)^2}$

**Lời giải:**

$$5\sqrt{(-10)^2} = 5 \cdot 10 = 50$$

$$10\sqrt{(-5)^2} = 10 \cdot 5 = 50$$

$$\text{Do đó } 5\sqrt{(-10)^2} = 10\sqrt{(-5)^2}$$

**Bài 15.** So sánh:  $\sqrt{50+2}$  và  $\sqrt{50} + \sqrt{2}$

**Lời giải:**

$$\sqrt{50+2} = \sqrt{52} < \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{50} + \sqrt{2} \geq \sqrt{49} + \sqrt{1} = 7 + 1 = 8$$

$$\text{Do đó } \sqrt{50+2} < \sqrt{50} + \sqrt{2}$$

### Mức vận dụng cao

**Bài 16.** So sánh:  $\sqrt{8} - \sqrt{5}$  và 1

**Lời giải:**

$$\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$$

$$-\sqrt{5} < -\sqrt{4} = -2$$

$$\text{Do đó } \sqrt{8} + (-\sqrt{5}) < 3 + (-2) = 1$$

$$\text{Hay } \sqrt{8} - \sqrt{5} < 1$$

**Bài 17.** So sánh:  $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{30} + \sqrt{56}$  và 19

**Lời giải:**

$$\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{30} + \sqrt{56} < \sqrt{6,25} + \sqrt{12,25} + \sqrt{30,25} + \sqrt{56,25} = 2,5 + 3,5 + 5,5 + 7,5 = 19$$

**Bài 18.** Chứng minh:  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{8} + \sqrt{9} < 5\sqrt{5} + 12$

**Lời giải:**

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} < 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} < 4\sqrt{9} = 12$$

$$\text{Do đó } \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{8} + \sqrt{9} < 5\sqrt{5} + 12$$

**Bài 19.** So sánh  $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12}$  và 12

**Lời giải:**

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12} < \sqrt{2,25} + \sqrt{6,25} + \sqrt{20,25} + \sqrt{12,25} = 1,5 + 2,5 + 4,5 + 3,5 = 12$$

**Bài 20.** So sánh  $\sqrt{8} + \sqrt{15}$  và  $\sqrt{65} - 1$

**Lời giải:**

$$\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 8 - 1 = \sqrt{64} - 1 < \sqrt{65} - 1$$

**Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai**

**I. Phương pháp giải:**

Áp dụng tính chất cơ bản sau:  $\sqrt{x} \geq 0$  với mọi  $x \geq 0$ . Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$

Mở rộng:

$$\sqrt{x-a} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq a. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = a$$

$$-\sqrt{x-b} \leq 0 \text{ với mọi } x \geq b. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = b$$

**II. Bài toán.**

**Mức nhận biết**

**Bài 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x} - 1$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ với } x \geq 0 \text{ nên } A = \sqrt{x} - 1 \geq -1.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$ .

$$\text{Vậy } \min A = -1 \text{ khi } x = 0$$

**Bài 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ với } x \geq 0 \text{ nên } A = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$ .

Vậy  $\min A = \frac{1}{2}$  khi  $x = 0$

**Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 1 - \sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $-\sqrt{x} \leq 0$ .

Do đó  $P = 1 - \sqrt{x} \leq 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$

Vậy  $\max P = 1$  khi  $x = 0$

**Bài 4.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = -5\sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $-5\sqrt{x} \leq 0$ .

Do đó  $P = -5\sqrt{x} \leq 0$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$

Vậy  $\max P = 0$  khi  $x = 0$

**Bài 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 7\sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $A = 7\sqrt{x} \geq 0$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$ .

Vậy  $\min A = 0$  khi  $x = 0$

**Mức thông hiểu**

**Bài 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x-1} + 2$  với  $x \geq 1$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x-1} \geq 0$  với  $x \geq 1$  nên  $A = \sqrt{x-1} + 2 \geq 2$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 1$ .

Vậy  $\min A = 2$  khi  $x = 1$

**Bài 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x+3} - \frac{5}{2}$  với  $x \geq -3$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x+3} \geq 0$  với  $x \geq -3$  nên  $A = \sqrt{x+3} - \frac{5}{2} \geq -\frac{5}{2}$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $x = -3$ .

Vậy  $\min A = -\frac{5}{2}$  khi  $x = -3$

**Bài 8.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 4 - \sqrt{x-2}$  với  $x \geq 2$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x-2} \geq 0$  với  $x \geq 2$  nên  $-\sqrt{x-2} \leq 0$ .

Do đó  $P = 4 - \sqrt{x-2} \leq 4$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 2$

Vậy  $\max P = 4$  khi  $x = 2$

**Bài 9.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = \frac{3}{4} - \sqrt{x+1}$  với  $x \geq -1$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x+1} \geq 0$  với  $x \geq -1$  nên  $-\sqrt{x+1} \leq 0$ .

Do đó  $P = \frac{3}{4} - \sqrt{x+1} \leq \frac{3}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = -1$

Vậy  $\max P = \frac{3}{4}$  khi  $x = -1$

**Bài 10.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 3,5 - \sqrt{x+1,5}$  với  $x \geq -1,5$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x+1,5} \geq 0$  với  $x \geq -1,5$  nên  $-\sqrt{x+1,5} \leq 0$ .

Do đó  $P = 3,5 - \sqrt{x+1,5} \leq 3,5$

Dấu “=” xảy ra khi  $x+1,5 = 0$  hay  $x = -1,5$

Vậy  $\max P = 3,5$  khi  $x = -1,5$

**Mức vận dụng thấp**

**Bài 11.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 6\sqrt{x} + 1$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $6\sqrt{x} \geq 0$ .

Do đó  $A = 6\sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$ .

Vậy  $\min A = 1$  khi  $x = 0$

**Bài 12.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 5\sqrt{x-4} - \frac{3}{2}$  với  $x \geq 4$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x-4} \geq 0$  với  $x \geq 4$  nên  $5\sqrt{x-4} \geq 0$ .

Do đó  $A = 5\sqrt{x-4} - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 4$ .

Vậy  $\min A = -\frac{3}{2}$  khi  $x = 4$

**Bài 13.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 4 - 3\sqrt{x-1,2}$  với  $x \geq 1,2$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x-1,2} \geq 0$  với  $x \geq 1,2$  nên  $-3\sqrt{x-1,2} \leq 0$ .

Do đó  $P = 4 - 3\sqrt{x-1,2} \leq 4$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 1,2$

Vậy  $\max P = 4$  khi  $x = 1,2$

**Bài 14.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 1 - 3\sqrt{x+2}$  với  $x \geq -2$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x+2} \geq 0$  với  $x \geq -2$  nên  $-3\sqrt{x+2} \leq 0$ .

Do đó  $P = 1 - 3\sqrt{x+2} \leq 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = -2$

Vậy  $\max P = 1$  khi  $x = -2$

**Bài 15.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x+3}$  với  $x \geq -3$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x+3} \geq 0$  với  $x \geq -3$  nên  $-\frac{1}{3}\sqrt{x+3} \leq 0$ .

$$\text{Do đó } P = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x+3} \leq \frac{2}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x+3=0$  hay  $x=-3$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{2}{3} \text{ khi } x = -3$$

### Mức vận dụng cao

**Bài 16.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{-3}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}+2 \geq 2$ .

$$\text{Do đó } \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2}. \text{ Suy ra } A = \frac{-3}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{-3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$ .

$$\text{Vậy } \min A = -\frac{3}{2} \text{ khi } x = 0$$

**Bài 17.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}+1 \geq 1$ .

$$\text{Do đó } \frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq 2. \text{ Suy ra } B = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq -1$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$ .

$$\text{Vậy } \min B = -1 \text{ khi } x = 0$$

**Bài 18.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $C = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}+1 \geq 1$ .

$$\text{Do đó } C = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$

$$\text{Vậy } \max C = 1 \text{ khi } x = 0$$

**Bài 19.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

$$D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}+2 \geq 2$ .

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } D = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$

Vậy  $\max D = \frac{3}{2}$  khi  $x = 0$

**Bài 20.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau  $E = x + \sqrt{x} + 1$  với  $x \geq 0$

**Lời giải:**

Vì  $\sqrt{x} \geq 0$  với  $x \geq 0$  nên  $x + \sqrt{x} \geq 0$ .

Do đó  $E = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$

Vậy  $\min E = 1$  khi  $x = 0$

**Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức nhận giá trị nguyên**

**I. Phương pháp giải:**

Tìm điều kiện của  $x$  để biểu thức nhận giá trị nguyên, ta thường làm như sau:

Bước 1. Tách phần nguyên.

Tách tử theo mẫu sao cho  $A$  có dạng tổng của một số nguyên và một phân số có tử số nguyên.

Bước 2. Tìm  $x$

Vận dụng tính chất sau:  $A = \frac{m}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Để  $A$  nhận giá trị nguyên thì  $m : n$  hay

$$n \in U'(m)$$

**II. Bài toán**

**Mức nhận biết**

**Bài 1.** Cho  $A = \frac{3}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$A$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 3 : \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{1; 3\}$$

|            |   |   |
|------------|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 1 | 3 |
| $x$        | 1 | 9 |

**Mức thông hiểu**

**Bài 2.** Cho  $B = \frac{\sqrt{x}}{2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  và  $x < 30$  để  $B$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$B$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow \sqrt{x} : 2$

$\Leftrightarrow x$  là số chẵn và  $x$  là bình phương của một số nguyên.

Mà  $x < 30$

Do đó  $x \in \{0; 4; 16\}$

**Mức vận dụng**

**Bài 3.** Cho  $A = \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}, x \neq 9$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$A$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 5 : \sqrt{x}-3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

|              |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|
| $\sqrt{x}-3$ | -1 | 1  | -5 | 5  |
| $\sqrt{x}$   | 2  | 4  | -2 | 8  |
| $x$          | 4  | 16 |    | 64 |

**Bài 4.** Cho  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  và  $x < 50$  để  $B$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$$B \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 : 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \text{ là số chẵn}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \text{ là số lẻ}$$

$$\Leftrightarrow x \text{ là số chính phương lẻ}$$

$$\text{Mà } x < 50$$

$$\text{Do đó } x \in \{1; 9; 25; 49\}$$

**Mức vận dụng cao**

**Bài 5.** Cho  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}; x \neq 4$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải:**

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+3}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

$$A \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow 3 : \sqrt{x}-2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

|              |    |   |    |    |
|--------------|----|---|----|----|
| $\sqrt{x}-2$ | -1 | 1 | -3 | 3  |
| $\sqrt{x}$   | 1  | 3 | -1 | 5  |
| $x$          | 1  | 9 |    | 25 |

### Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### Dạng 1. Tính căn bậc hai.

**Mức nhận biết**

**Bài 1.** Sử dụng máy tính bỏ túi để tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1).

a)  $\sqrt{7}$

b)  $\sqrt{11}$

c)  $\sqrt{12}$

d)  $\sqrt{14}$

**Bài 2.** Tính

a)  $\sqrt{2,7^2}$

b)  $\sqrt{(-1,5)^2}$

c)  $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

d)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

**Mức thông hiểu**

**Bài 3.** Tính

a)  $\sqrt{\frac{100}{81}}$

b)  $\sqrt{\frac{225}{169}}$

c)  $\sqrt{1\frac{27}{169}}$

d)  $\sqrt{3,24}$

**Bài 4.** Tính

a)  $\sqrt{3^4}$

b)  $\sqrt{(-2)^4}$

c)  $\sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$

d)  $\sqrt{25-9}$

## Mức vận dụng

**Bài 5.** Thực hiện phép tính:

a)  $A = \sqrt{121} - \sqrt{100} + \sqrt{(-6)^2}$

b)  $B = \sqrt{\frac{49}{64}} + \sqrt{\frac{1}{16}} + \sqrt{(-3)^4}$

**Bài 6.** Thực hiện phép tính:  $A = \sqrt{64} \cdot \left( \sqrt{25} - 6\sqrt{\frac{1}{4}} \right) + \sqrt{(-4,5)^2}$

## Mức vận dụng cao

**Bài 7.** Để lát gạch cho một công viên, người ta đã dùng vừa đủ 1500 viên gạch hình vuông cùng cỡ. Biết tổng diện tích lát gạch là  $240m^2$  và diện tích các mạch ghép là không đáng kể, hãy tính độ dài cạnh của mỗi viên gạch.

**Bài 8.** Để lát nền nhà có diện tích  $90m^2$ , người ta đã dùng vừa đủ 1000 viên gạch hình vuông cùng cỡ. Hỏi mỗi viên gạch có độ dài cạnh là bao nhiêu, biết rằng diện tích các mạch ghép là không đáng kể?

## Dạng 2. Tìm x

### Mức nhận biết

**Bài 1.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} = 7$

b)  $\sqrt{x} = 12$

**Bài 2.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 = \frac{9}{25}$

b)  $x^2 = 0,16$

### Mức thông hiểu

**Bài 3.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 - 9 = 0$

b)  $1 - \sqrt{x} = 0$  Với  $x \geq 0$

**Bài 4.** Tìm  $x$  biết:

a)  $4\sqrt{x} = 2$  Với  $x \geq 0$

b)  $75 - 3x^2 = 0$

## Mức vận dụng

**Bài 5.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{x + \frac{1}{3}} = 4$  Với  $x \geq -\frac{1}{3}$

b)  $4(2 - x)^2 = 1$

**Bài 6.** Tìm  $x$  biết:

a)  $6 - \sqrt{x + 7} = 0$  Với  $x \geq -7$

b)  $\sqrt{2 - x} - \frac{3}{2} = 0$  Với  $x \leq 2$

## Mức vận dụng cao

**Bài 7.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\sqrt{2x - 1} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$  Với  $x \geq \frac{1}{2}$

b)  $3\sqrt{1 - 3x} - 2 = 1$  Với  $x \leq \frac{1}{3}$

**Bài 8.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(4x - 1)^2 + \frac{3}{4} = 1$

b)  $17 - 9(2x + 3)^2 = 1$

## Dạng 3. So sánh các căn bậc hai

### Mức nhận biết

**Bài 1.** So sánh:

a)  $\sqrt{49}$  và 6

b)  $-\sqrt{2}$  và  $-\sqrt{3}$

**Bài 2.** So sánh:

a)  $\sqrt{\frac{5}{16}}$  và  $\sqrt{\frac{11}{16}}$

b)  $-\sqrt{1000}$  và  $\sqrt{4}$

### Mức thông hiểu

**Bài 3.** So sánh:

a)  $\sqrt{2\frac{3}{4}}$  và  $\sqrt{\frac{13}{12}}$

b)  $\sqrt{\frac{15}{28}}$  và  $\sqrt{\frac{9}{14}}$

**Bài 4.** So sánh:

a)  $\sqrt{31}$  và 5

b)  $\sqrt{\frac{25}{49}}$  và  $\frac{5}{8}$

### Mức vận dụng

**Bài 5.** So sánh:

a)  $\sqrt{50} + \sqrt{17}$  và 11

b)  $\sqrt{26} + \sqrt{17}$  và 9

**Bài 6.** So sánh:

a)  $\sqrt{63-27}$  và  $\sqrt{63}-\sqrt{27}$

b)  $\sqrt{169-25}$  và  $\sqrt{169}-\sqrt{25}$

### Mức vận dụng cao

**Bài 7.** So sánh:  $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{30} + \sqrt{90}$  và 19

**Bài 8.** So sánh  $\sqrt{24} + \sqrt{35}$  và  $\sqrt{145} - 1$

### Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai

#### Mức nhận biết

**Bài 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x} + 4$  với  $x \geq 0$

**Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $B = \frac{6}{7} - \sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

#### Mức thông hiểu

**Bài 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + 9$  với  $x \geq \frac{1}{2}$

**Bài 4.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $B = \frac{1}{3} - \sqrt{x+4}$  với  $x \geq -4$

#### Mức vận dụng

**Bài 5.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $B = -5 - \sqrt{x+3}$  với  $x \geq -3$

**Bài 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = -3 + \sqrt{2x-4}$  với  $x \geq 2$

#### Mức vận dụng cao

**Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $B = \frac{5}{6} - 2\sqrt{x+1}$  với  $x \geq 1$

**Bài 8.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = -3,4 + 5\sqrt{1-4x}$  với  $x \leq \frac{1}{4}$

### Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức nhận giá trị nguyên

#### Mức nhận biết

**Bài 1.** Cho  $A = \frac{6}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}^*$  để A có giá trị nguyên.

**Bài 2.** Cho  $A = \frac{8}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}^*$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Mức thông hiểu**

**Bài 3.** Cho  $A = \frac{10}{\sqrt{x-4}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}; x \geq 4$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 4.** Cho  $A = \frac{15}{\sqrt{2-x}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{Z}; x \leq 2$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Mức vận dụng**

**Bài 5.** Cho  $A = \frac{9}{\sqrt{x-5}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}; x \neq 25$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 6.** Cho  $A = \frac{20}{\sqrt{x+6}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Mức vận dụng cao**

**Bài 7.** Cho  $B = \frac{\sqrt{x+4}}{5}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  và  $x < 50$  để  $B$  có giá trị nguyên.

**Bài 8.** Cho  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+3}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Dạng 1. Tính căn bậc hai.**

**Bài 1.** Sử dụng máy tính bỏ túi để tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1).

- a)  $\sqrt{7} \approx 2,6$       b)  $\sqrt{11} \approx 3,3$       c)  $\sqrt{12} \approx 3,5$       d)  $\sqrt{14} \approx 3,7$

**Bài 2.**

- a)  $\sqrt{2,7^2} = 2,7$       b)  $\sqrt{(-1,5)^2} = 1,5$       c)  $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$       d)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

**Bài 3.** Tính

- a)  $\sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$       b)  $\sqrt{\frac{225}{169}} = \frac{15}{14}$       c)  $\sqrt{1\frac{27}{169}} = \frac{14}{13}$       d)  $\sqrt{3,24} = 1,8$

**Bài 4.** Tính

- a)  $\sqrt{3^4} = 9$       b)  $\sqrt{(-2)^4} = 4$       c)  $\sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$       d)  $\sqrt{25-9} = 4$

**Bài 5.**

- a)  $A = 7$       b)  $B = \frac{81}{8}$

**Bài 6.**  $A = 20,5$

**Bài 7.**  $0,4m = 40cm$

**Bài 8.**  $0,3m = 30cm$

**Dạng 2. Tìm  $x$**

**Bài 1.**

- a)  $x = 49$       b)  $x = 144$

**Bài 2.**

- a)  $x = \pm \frac{3}{5}$       b)  $x = \pm 0,4$

**Bài 3.**

a)  $x = \pm 3$

b)  $x = 1$

**Bài 4.**

a)  $x = \frac{1}{4}$

b)  $x = \pm 5$

**Bài 5.**

a)  $x = \frac{47}{3}$

b)  $x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\}$

**Bài 6.**

a)  $x = 29$

b)  $x = -\frac{1}{4}$

**Bài 7.**

a)  $x = \frac{433}{288}$

b)  $x = 0$

**Bài 8.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x \in \left\{ \frac{1}{8}; \frac{3}{8} \right\}$

b)  $x \in \left\{ -\frac{13}{6}; \frac{-5}{6} \right\}$

**Dạng 3. So sánh các căn bậc hai****Bài 1.**

a)  $\sqrt{49} > 6$

b)  $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$

**Bài 2.** So sánh:

a)  $\sqrt{\frac{5}{16}} < \sqrt{\frac{11}{16}}$

b)  $-\sqrt{1000} < \sqrt{4}$

**Bài 3.** So sánh:

a)  $\sqrt{2\frac{3}{4}} > \sqrt{\frac{13}{12}}$

b)  $\sqrt{\frac{15}{28}} < \sqrt{\frac{9}{14}}$

**Bài 4.** So sánh:

a)  $\sqrt{31} > 5$

b)  $\sqrt{\frac{25}{49}} > \frac{5}{8}$

**Bài 5.** So sánh:

a)  $\sqrt{50} + \sqrt{17} > 11$

b)  $\sqrt{26} + \sqrt{17} > 9$

**Bài 6.** So sánh:

a)  $\sqrt{63-27} > \sqrt{63} - \sqrt{27}$

b)  $\sqrt{169-25} > \sqrt{169} - \sqrt{25}$

**Bài 7.** So sánh:  $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{30} + \sqrt{90} < 19$ **Bài 8.** So sánh  $\sqrt{24} + \sqrt{35} < \sqrt{145} - 1$ **Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai****Bài 1.**  $A = \sqrt{x} + 4$  Vậy  $\min A = 4$  khi  $x = 0$ **Bài 2.**  $B = \frac{6}{7} - \sqrt{x}$ . Vậy  $\max B = \frac{6}{7}$  khi  $x = 0$ **Bài 3.**  $A = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + 9$ . Vậy  $\min A = 9$  khi  $x = \frac{1}{2}$



**Bài 9.** Tính

- a)  $\sqrt{1,44}$                       b)  $\sqrt{6,25}$                       c)  $\sqrt{1,21}$                       d)  $\sqrt{1,96}$

**Bài 10.** Tính

- a)  $\sqrt{(-5)^2}$                       b)  $\sqrt{(-2)^4}$                       c)  $-\sqrt{400}$                       d)  $-\sqrt{7^2}$

**Mức vận dụng thấp****Bài 11.** Tính

- a)  $\sqrt{(3^2)^2}$                       b)  $\sqrt{(2^2)^3}$                       c)  $\sqrt{3,2,0,2}$                       d)  $\sqrt{1,7^2-1,5^2}$

**Bài 12.** Tính

- a)  $\sqrt{\frac{0,04}{0,49}}$                       b)  $\sqrt{\frac{0,36}{2,25}}$                       c)  $\sqrt{(2,8-0,5)^2}$

**Bài 13.** Thực hiện phép tính:

- a)  $A = \sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{(-1)^2}$                       b)  $B = \sqrt{36} - \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{16}$

**Bài 14.** Thực hiện phép tính:  $A = \sqrt{36} \cdot \left( 3\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{9}} \right) + 2$ **Bài 15.** Thực hiện phép tính:

- a)  $A = \sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{(-2)^4}$                       b)  $B = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{-(-4)^3}$

**Mức vận dụng cao****Bài 16.** Tìm căn bậc hai số học của:

- a)  $a^2$  với  $a \geq 0$                       b)  $(a-1)^2$  với  $a \geq 1$   
c)  $(a+1)^2$  với  $a \geq 0$                       d)  $9(a-1)^2$  với  $a \geq 1$

**Bài 17.** Chứng tỏ rằng:  $\sqrt{1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1} = n$  Với  $n \geq 1$ **Bài 18.** Tính độ dài cạnh của hình vuông có diện tích bằng:

- a)  $64cm^2$                       b)  $625m^2$

**Bài 19.** Để lát sân gạch có diện tích  $100m^2$ , người ta đã dùng vừa đủ 1600 viên gạch hình vuông cùng cỡ. Hỏi mỗi viên gạch có độ dài cạnh là bao nhiêu, biết rằng diện tích các mạch ghép là không đáng kể?

**Bài 20.** Chứng minh rằng  $\sqrt{5}$  là số vô tỉ.**Dạng 2. Tìm  $x$** **Mức nhận biết****Bài 1.** Tìm  $x$  không âm biết:

- a)  $\sqrt{x} = 4$                       b)  $\sqrt{x} = 5$

**Bài 2.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $x^2 = 9$   
b)  $x^2 = 16$

**Bài 3.** Điền số thích hợp vào ô trống

|     |   |  |    |    |          |  |  |
|-----|---|--|----|----|----------|--|--|
| $x$ | 3 |  | 16 | 19 | $(-5)^2$ |  |  |
|-----|---|--|----|----|----------|--|--|

|            |  |   |  |  |  |   |               |
|------------|--|---|--|--|--|---|---------------|
| $\sqrt{x}$ |  | 2 |  |  |  | 7 | $\frac{1}{2}$ |
|------------|--|---|--|--|--|---|---------------|

**Bài 4.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$

b)  $\sqrt{x} = 0,5$

**Bài 5.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 = \frac{25}{64}$

b)  $x^2 = 0,04$

### Mức thông hiểu

**Bài 6.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\sqrt{x} - 9 = 0$

b)  $2\sqrt{x} = 10$

**Bài 7.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^2 - 10 = 0$

b)  $64 - x^2 = 0$

**Bài 8.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\sqrt{x+1} = 2$  Với  $x \geq -1$

b)  $\sqrt{x-1} = 3$  Với  $x \geq 1$

**Bài 9.** Tìm  $x$  biết:

a)  $(x+1)^2 = 49$

b)  $(x-3)^2 = 81$

**Bài 10.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}$  Với  $x \geq 1$

b)  $\sqrt{3-x} = \frac{1}{2}$  Với  $x \leq 3$

### Mức vận dụng thấp

**Bài 11.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\frac{2}{3} - \sqrt{x+1} = 0$  Với  $x \geq -1$

b)  $\sqrt{1-x} - \frac{4}{5} = 0$  Với  $x \leq 1$

**Bài 12.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $18 - (5+x)^2 = 14$

b)  $(2-x)^2 - 16 = 0$

**Bài 13.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $3\sqrt{x} - 24 = 0$

b)  $\frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

**Bài 14.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $5x^2 - 76 = 4$

b)  $\frac{3}{8} - 2x^2 = \frac{1}{4}$

**Bài 15.** Tìm  $x$  không âm biết:

a)  $\frac{5}{4} - 2\sqrt{x} = 1$

b)  $\frac{5}{12}\sqrt{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

### Mức vận dụng cao

**Bài 16.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\frac{6}{7} - 13\sqrt{x-1} = \frac{5}{21}$  Với  $x \geq 1$

b)  $\frac{2}{5}\sqrt{x+7} + 1 = \frac{6}{5}$  Với  $x \geq -7$

**Bài 17.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $5(1-x)^2 + 7 = 12$

b)  $10 - 4\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = 1$

**Bài 18.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{(x-1)^2} = 5$

b)  $\sqrt{x+1} + 2 = 0$  Với  $x \geq -1$

**Bài 19.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$  Với  $x \geq 0; x \leq -1$

b)  $4 - 3\sqrt{x^2-2x} = 4$  Với  $x \geq 2; x \leq 0$

**Bài 20.** Tìm  $x$  biết:

a)  $\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} = -\frac{2}{7}$  Với  $x \geq -2$

b)  $4(x-5)^2 - \frac{15}{16} = (x-5)^2$

### Dạng 3. So sánh các căn bậc hai

#### Mức nhận biết

**Bài 1.** So sánh:

a)  $\sqrt{16}$  và 4

b)  $\sqrt{24}$  và 5

**Bài 2.** So sánh:

a)  $\sqrt{50}$  và  $\sqrt{38}$

b)  $\sqrt{11.3}$  và  $\sqrt{44}$

**Bài 3.** So sánh:

a)  $-\sqrt{37}$  và  $-\sqrt{62}$

b)  $-\sqrt{26}$  và  $\sqrt{5}$

**Bài 4.** So sánh:

a)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  và  $\sqrt{\frac{3}{4}}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{43}}$  và  $\sqrt{\frac{16}{43}}$

**Bài 5.** So sánh:

a)  $\sqrt{1\frac{3}{4}}$  và  $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

b)  $\sqrt{0,8}$  và  $\sqrt{0,64}$

#### Mức thông hiểu

**Bài 6.** So sánh:

a)  $\sqrt{25.4}$  và  $\sqrt{25}.\sqrt{4}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{4}}$  và  $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$

**Bài 7.** So sánh:

a)  $\sqrt{1\frac{1}{2}}$  và  $\sqrt{\frac{9}{8}}$

b)  $\sqrt{\frac{14}{39}}$  và  $\sqrt{\frac{2}{13}}$

**Bài 8.** So sánh:

a)  $\sqrt{1\frac{3}{4}}$  và  $\sqrt{1,8}$

b)  $-\sqrt{2\frac{4}{7}}$  và  $-\sqrt{2,5}$

**Bài 9.** So sánh:

a)  $\sqrt{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2}$  và  $\sqrt{1 - \frac{2}{5}}$

b)  $\sqrt{6 : \frac{4}{5}}$  và  $\sqrt{1\frac{2}{3}}$

**Bài 10.** So sánh:

a)  $\sqrt{16+9}$  và  $\sqrt{16} + \sqrt{9}$

b)  $\sqrt{25-9}$  và  $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

**Mức vận dụng thấp**

**Bài 11.** So sánh:

a)  $\sqrt{35} + \sqrt{99}$  và 16

b)  $\sqrt{26} + \sqrt{50}$  và 12

**Bài 12.** So sánh:  $7\sqrt{6}$  và  $6\sqrt{7}$

**Bài 13.** So sánh:  $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$  và  $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$

**Bài 14.** So sánh:  $5\sqrt{(-10)^2}$  và  $10\sqrt{(-5)^2}$

**Bài 15.** So sánh:  $\sqrt{50+2}$  và  $\sqrt{50} + \sqrt{2}$

**Mức vận dụng cao**

**Bài 16.** So sánh:  $\sqrt{8} - \sqrt{5}$  và 1

**Bài 17.** So sánh:  $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{30} + \sqrt{56}$  và 19

**Bài 18.** Chứng minh:  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{8} + \sqrt{9} < 5\sqrt{5} + 12$

**Bài 19.** So sánh  $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{20} + \sqrt{12}$  và 12

**Bài 20.** So sánh  $\sqrt{8} + \sqrt{15}$  và  $\sqrt{65} - 1$

**Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa căn bậc hai**

**Mức nhận biết**

**Bài 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x} - 1$  với  $x \geq 0$

**Bài 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$  với  $x \geq 0$

**Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 1 - \sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Bài 4.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = -5\sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Bài 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 7\sqrt{x}$  với  $x \geq 0$

**Mức thông hiểu**

**Bài 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x-1} + 2$  với  $x \geq 1$

**Bài 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = \sqrt{x+3} - \frac{5}{2}$  với  $x \geq -3$

**Bài 8.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 4 - \sqrt{x-2}$  với  $x \geq 2$

**Bài 9.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = \frac{3}{4} - \sqrt{x+1}$  với  $x \geq -1$

**Bài 10.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 3,5 - \sqrt{x+1,5}$  với  $x \geq -1,5$

**Mức vận dụng thấp**

**Bài 11.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 6\sqrt{x} + 1$  với  $x \geq 0$

**Bài 12.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:  $A = 5\sqrt{x-4} - \frac{3}{2}$  với  $x \geq 4$

**Bài 13.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 4 - 3\sqrt{x-1}, 2$  với  $x \geq 1, 2$

**Bài 14.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = 1 - 3\sqrt{x+2}$  với  $x \geq -2$

**Bài 15.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $P = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x+3}$  với  $x \geq -3$

### Mức vận dụng cao

**Bài 16.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{-3}{\sqrt{x+2}}$  với  $x \geq 0$

**Bài 17.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$

**Bài 18.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $C = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0$

**Bài 19.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau  $D = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0$

**Bài 20.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau  $E = x + \sqrt{x} + 1$  với  $x \geq 0$

### Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức nhận giá trị nguyên

**Bài 1.** Cho  $A = \frac{3}{\sqrt{x}}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}^*$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 2.** Cho  $A = \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}^*; x \neq 9$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 3.** Cho  $B = \frac{\sqrt{x}}{2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  và  $x < 30$  để  $B$  có giá trị nguyên.

**Bài 4.** Cho  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}; x \neq 4$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 5.** Cho  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ . Tìm  $x \in \mathbb{N}$  và  $x < 50$  để  $B$  có giá trị nguyên.