CHUYÊN ĐỀ .SO SÁNH

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA.

I. Phương pháp 1:

Để so sánh hai luỹ thừa ta thường đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu hai luỹ thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$a^m > a^n \quad a>1 \quad \Leftrightarrow m > n$

- Nếu hai luỹ thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn.

$a^n > b^n \quad n>0 \quad \Leftrightarrow a > b$

II. Phương pháp 2: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$a > b$ và $b > c$ thì $a > c$

$a.c > b.c \quad c>0 \quad \Leftrightarrow a > b$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: **So sánh hai số lũy thừa.**

Dạng 1. III. BÀI TẬP

Bài 1: So sánh các số sau đây:

a) 16^{19} và 8^{25}

b) 5^{23} và 6.5^{22}

c) 27^{11} và 81^{8}

d) 625^{5} và 125^{7}

e) 7.2^{13} và 2^{16}

f) 199^{20} và 2003^{15}

Phân tích:

Đưa cả hai lũy thừa về cùng cơ số, so sánh hai số mũ, lũy thừa nào có số mũ lớn hơn thì lớn hơn.

Lời giải

a) 16^{19} và 8^{25}

Ta có: $16^{19}=(2^4)^{19}=2^{76}$ và $8^{25}=(2^3)^{25}=2^{75}$ nên $16^{19}>8^{25}$ (vì $2^{76}>2^{75}$)

b) 5^{23} và 6.5^{22}

Ta có: $5^{23}=5.5^{22}<6.5^{22}$ nên $6.5^{22}>5^{23}$

c) 27^{11} và 81^8

Ta có: $27^{11}=(3^3)^{11}=3^{33}$ và $81=(3^4)^8=3^{32}$ nên $27^{11}>81^8$ (vì $3^{33}>3^{32}$)

d) 625^5 và 125^7

Ta có: $625^5=(5^4)^5=5^{20}$ và $125=(5^3)^7=5^{21}$ nên $625^5<125^7$ (vì $5^{20}<5^{21}$)

e) 7.2^{13} và 2^{16}

Ta có: $2^{16}=2^3.2^{13}=8.2^{13}>7.2^{13}$ nên $7.2^{13}<2^{16}$

f) 199^{20} và 2003^{15}

Ta có: $199^{20}<200^{20}=(8.25)^{20}=(2^3.5^2)^{20}=2^{60}.5^{40}$

và $2003^{15}>2000^{15}=(16.125)^{15}=(2^4.5^3)^{15}=(2^4.5^3)^{15}=2^{60}.5^{45}$

nên $199^{20}<2003^{15}$ (vì $2^{60}.5^{40}<2^{60}.5^{45}$)

Bài 2: So sánh các số sau đây:

a) 5^{100} và 3^{500}

b) 3^{39} và 11^{21}

c) $\frac{1}{2^{21}}$ và $\frac{1}{5^{35}}$

d) 3^{2n} và 2^{3n} $n\in\mathbb{N}^*$

e) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ và 3.24^{10}

f) 11^{1979} và 37^{1320}

Phân tích:

Đưa cả hai lũy thừa về cùng số mũ, so sánh hai cơ số, lũy thừa nào có cơ số lớn hơn thì lớn hơn.

Lời giải

a) 5^{100} và 3^{500}

Ta có: $5^{300}=(5^3)^{100}=125^{100}$ và $3^{500}=(3^5)^{100}=243^{100}$

nên $5^{300}<3^{500}$ (vì $125<243\Rightarrow 125^{100}<243^{100}$)

b) 3^{39} và 11^{21}

Ta có: $3^{39}<3^{40}=(3^4)^{10}=81^{10}$ và $11^{21}>11^{20}=(11^2)^{10}=121^{10}$

nên $3^{39}<11^{21}$ (vì $81^{20}<121^{10}$)

c) $\frac{1}{2^{21}}$ và $\frac{1}{5^{35}}$

Ta có: $2^{21}=(2^3)^7=8^7$ và $5^{35}=(5^5)^7=3125^7$

nên: $2^{21}<5^{35}$ (do $8^7<3125^7$)

Suy ra: $\frac{1}{2^{21}}>\frac{1}{5^{35}}$

d) 3^{2n} và 2^{3n} $n\in\mathbb{N}^*$

Ta có: $3^{2n}=\left(3^2\right)^n=9^n$ và $2^{3n}=\left(2^3\right)^n=8^n$ nên: $3^{2n}>2^{3n}$ (vì $9^n>8^n$)

e) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ và 3.24^{10}

Ta có: $4^{30}=2^{30}.2^{30}=(2^3)^{10}.(2^2)^{15}=8^{10}.4^{15}>8^{10}.3^{15}>8^{10}.3^{10}.3=(8.3)^{10}.3=24^{10}.3$

nên: $2^{30}+3^{30}+4^{30}>3.24^{10}$

f) 11^{1979} và 37^{1320}

Ta có:

$11^{1979}<11^{1980}=\left(11^3\right)^{660}=1331^{660}$ và $37^{1320}=\left(37^2\right)^{660}=1369^{660}$

nên $11^{1979}<37^{1320}$ (vì $1331^{660}<1369^{660}$)

Bài 3: So sánh các số sau:

a) $A=72^{45}-72^{44}$ và $B=72^{44}-72^{43}$

c) 10^{10} và 48.50^{5}

e) 2^{91} và 5^{35}

b) 99^{20} và 9999^{10}

d) 107^{50} và 73^{75}

f) $1990^{10}+1990^{9}$ và 1991^{10}

Lời giải

a) $A=72^{45}-72^{44}$ và $B=72^{44}-72^{43}$

Ta có: $A=72^{44}\ 72-1=72^{44}.71$

$B=72^{43}\ 72-1=72^{43}.71$

nên $A>B$

b) 99^{20} và 9999^{10}

Ta có: $99^{2}<99.101=9999\Rightarrow 99^{2\ 10}<9999^{10}$ nên: $99^{20}<9999^{10}$

c) 10^{10} và 48.50^{5}

Ta có: $10^{10}=2^{10}.5^{10}=2.2^{9}.5^{10}$

và $48.50^{5}=3.2^{4}\ .\ 2^{5}.5^{10}=3.2^{9}.5^{10}$

suy ra: $10^{10}<48.50^{5}$ (vì $2.2^{9}.5^{10}<3.2^{9}.5^{10}$)

nên: $10^{10}<48.50^{5}$

d) 107^{50} và 73^{75}

Ta có: $107^{50}<108^{50}=4.27^{\ 50}=2^{100}.3^{150}$

và $73^{75}>72^{75}=8.9^{\ 75}=2^{225}.3^{150}$

nên: $107^{50} < 73^{75}$ (vì $2^{100}.3^{150} < 2^{225}.3^{150}$)

e) 2^{91} và 5^{35}

Ta thấy: $2^{91} > 2^{90} = 2^{5\ ^{18}} = 32^{18}$

và $5^{35} < 5^{36} = 5^{2\ ^{18}} = 25^{18}$

nên: $2^{91} > 5^{35}$ (do $2^{91} > 32^{18} > 25^{18} > 5^{35}$)

f) $1990^{10} + 1990^{9}$ và 1991^{10}

Ta có: $1990^{10} + 1990^{9} = 1990^{9}\ 1990 + 1 = 1991.1990^{9}$

và: $1991^{10} = 1991.1991^{9}$

nên $1990^{09} + 1990^{10} < 1991^{10}$ (do $1990^{9} < 1991^{9}$)

Bài 4: So sánh các số sau

a) $1102^{2009} - 1102^{2008}$ và $1102^{2008} - 1102^{2007}$

b) $A = 2007^{2007} + 2007^{2008}$ và $B = 2008^{2009}$

Lời giải

a) $1102^{2009} - 1102^{2008}$ và $1102^{2008} - 1102^{2007}$

Ta có: $1102^{2009} - 1102^{2008} = 1102^{2008}\ 1102 - 1 = 1102^{2008}.1101$

và $1102^{2008} - 1102^{2007} = 1102^{2007}\ 1102 - 1 = 1102^{2007}.1101$

suy ra: $1102^{2008}.1101 > 1102^{2007}.1101$

nên: $1102^{2009}-1102^{2008}>1102^{2008}-1102^{2007}$

b) $A=2007^{2007}+2007^{2008}$ và $B=2008^{2009}$

Ta có: $A=2007^{2007}+2007^{2008}=2007^{2007}\ 1+2007\ =2008.2007^{2007}$

và $B=2008^{2009}=2008.2008^{2008}$

suy ra: $2008.2007^{2007}<2008.2008^{2008}\quad 2007^{2007}<2008^{2008}$

nên $A<B$

Bài 5: Chứng tỏ rằng : $5^{27}<2^{63}<5^{28}$

Lời giải

Ta có: $2^{63}=2^{7}{}^{9}=128^{9}$ và $5^{27}=5^{3}{}^{9}=125^{9}$ nên $2^{63}>5^{27}$ (vì $125^{9}>125^{9}$)

mà $2^{63}=2^{9}{}^{7}=512^{7}$ và $5^{28}=5^{4}{}^{7}=625^{7}$ nên $2^{63}<5^{28}$ (vì $512^{7}<625^{7}$)

Nên: $5^{27}<2^{63}<5^{28}$

Bài 6: Chứng minh rằng:

a) $2^{1993}<7^{714}$

b) $2^{1995}<5^{863}$

Lời giải

a) $2^{1993}<7^{714}$

Ta có: $2^{14}=16384<7^{5}=16807$

và: $\frac{1993}{14}=\frac{9965}{90}<\frac{714}{5}=\frac{9996}{90}$ nên $2^{1993}=2^{14}{}^{\frac{1993}{14}}<7^{5}{}^{\frac{714}{5}}=7^{114}$

Vậy: $2^{1993}<7^{714}$

b) $2^{1995} < 5^{863}$

Ta có: $2^{15} = 32468 < 5^7 = 78125$

và: $\frac{1993}{15} = \frac{13951}{105} < \frac{863}{7} = \frac{12945}{105}$ nên $2^{1995} = 2^{15}{}^{\frac{1995}{15}} < 5^7{}^{\frac{863}{7}} = 5^{863}$

Vậy: $2^{1995} < 5^{863}$

Bài tập 7: Viết theo từ nhỏ đến lớn: 2^{100} ; 3^{75} và 5^{50}

Lời giải

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25} \\ 3^{75} = 3^{3}{}^{25} = 27^{75} \\ 5^{50} = (5^2)^{25} = 25^{25} \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$$

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với 1 số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

Bài 1: So sánh biểu thức $A = \frac{13^{15}+1}{13^{16}+1}$ và $B = \frac{13^{16}+1}{13^{17}+1}$

Lời giải

Ta có: $13A = \frac{13.(13^{15}+1)}{13^{16}+1} = \frac{13^{16}+13}{13^{16}+1} = \frac{13^{16}+1+12}{13^{16}+1} = 1 + \frac{12}{13^{16}+1}$

và $13B = \frac{13^{16}+1}{13^{17}+1} = \frac{13.(13^{16}+1)}{13^{17}+1} = \frac{13^{17}+13}{13^{17}+1} = \frac{13^{17}+1+12}{13^{17}+1} = 1 + \frac{12}{13^{17}+1}$

Vì $\frac{12}{13^{17}+1} < \frac{12}{13^{16}+1} \Rightarrow 1 + \frac{12}{13^{17}+1} < 1 + \frac{12}{13^{16}+1}$ nên $13A < 13B$

Vậy $A < B$

Bài 2: So sánh biểu thức $A = \frac{10^{100}+1}{10^{99}+1}$ và $B = \frac{10^{98}+1}{10^{97}+1}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{10}A=\frac{10^{100}+1}{10.(10^{99}+1)}=\frac{10^{100}+10-9}{10^{100}+10}=1-\frac{9}{10^{100}+10}$

$\frac{1}{10}B=\frac{10^{98}+1}{10.(10^{97}+1)}=\frac{10^{98}+1}{10^{98}+10}=\frac{10^{98}+10-9}{10^{98}+10}=1-\frac{9}{10^{98}+10}$

Vì $\frac{9}{10^{100}+10}<\frac{9}{10^{98}+10}$ nên $1-\frac{9}{10^{100}+10}>1-\frac{9}{10^{98}+10}$

Vậy $A>B$

Bài 3: So sánh biểu thức $A=\frac{19^{20}+5}{10^{20}-8}$ và $B=\frac{19^{21}+6}{10^{21}-7}$

Lời giải

Ta có:

$A=\frac{19^{20}+5}{19^{20}-8}=\frac{19^{20}-8+13}{19^{20}-8}=1+\frac{13}{19^{20}-8}$

$B=\frac{19^{21}+6}{19^{21}-7}=\frac{19^{21}-7+13}{19^{21}-7}=1+\frac{13}{19^{21}-7}$

Vì $\frac{13}{19^{20}-8}<\frac{13}{19^{21}-7}$ nên $1+\frac{13}{19^{20}-8}<1+\frac{13}{19^{21}-7}$

Vậy $A<B$

Bài 4: So sánh biểu thức $A=\frac{33.10^3}{2^3.5.10^3+7000}$ và $B=\frac{3774}{5217}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{33.10^3}{2^3.5.10^3+7000}=\frac{33.10^3}{8.5.10^3+7.10^3}=\frac{10^3.33}{10^3.(40+7)}=\frac{33}{47}$

và: $B=\frac{3774}{5217}=\frac{33}{47}$

Vậy $A=B$

Bài 5: So sánh biểu thức $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{100^2}$ và $B=1$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2.1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

……..

$\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

Lấy vế cộng vế ta có

$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$

Vậy: $A<B$

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa tìm cơ số (số mũ) chưa biết

Bài 1. Tìm $x\in\mathbb{N}$ biết $25<5^x<125$.

Lời giải

Ta có: $25<5^x<3125\Leftrightarrow 5^2<5^x<5^5\Leftrightarrow 2<x<5$.

Do $x\in\mathbb{N}$ nên $x\in\ 3;4\ $.

Bài 2. Tìm $x\in\mathbb{N}$ biết $27<9^x<81$.

Lời giải

Ta có: $27<9^x<243\Leftrightarrow 3^3<3^{2x}<3^5\Rightarrow 3<2x<5$.

Do $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}$ nên $2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Vậy $x = 2$.

Bài 3. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $16^x < 128^4$.

Lời giải

Ta có: $16^x = {2^4}^x = 2^{4x}$; $128^4 = {2^7}^4 = 2^{28}$.

Do $16^x < 128^4$ nên $2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$.

mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Bài 4. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $3^{64} < x^{48} < 5^{72}$.

Lời giải

Ta giải $3^{64} < x^{48}$ và $x^{48} < 5^{72}$.

Ta có $x^{48} > 3^{64} \Rightarrow {x^3}^{16} > {3^4}^{16} \Rightarrow x^3 > 81 \Rightarrow x > 4$ (1)

$x^{48} < 5^{72} \Rightarrow {x^2}^{24} < {5^3}^{24} \Rightarrow x^2 < 125 \Rightarrow -11 < x < 11$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4 < x < 11$.

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{5,6,7,8,9,10\}$.

Bài 5. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \le 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{18\,so\ 0} : 2^{18}$

Lời giải

Ta có:

$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \le 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{18\,so\ 0} : 2^{18}$

$\Leftrightarrow 5^{3x+3} \le 10^{18} : 2^{18}$

$\Leftrightarrow 5^{3x+3} \le 5^{18}$

$\Leftrightarrow 3x+3 \le 18$.

$\Leftrightarrow x \le 5$

Vậy $x \in \ 0;1;2;3;4;5$

DẠNG 4: Một số bài toán khác.

Bài 1: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1 ; 2 ; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

Lời giải

1. TH không dùng luỹ thừa : Số lớn nhất viết được là 321

2. TH có dùng luỹ thừa : (Bỏ qua TH cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các luỹ thừa tầng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các luỹ thừa có số mũ một chữ số được 4 số : $13^2,31^2,12^3,21^3 => 21^3 > 31^2$

* Xét các luỹ thừa mà số mũ có hai chữ số được 4 số : $2^{13},2^{31},3^{12},3^{21}$

$=> 3^{21} = 3.3^{20} = 3.(3^2)^{10} = 3.9^{10}$ & $2^{31} = 2.2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2.8^{10} => 2^{31<3^{21}}$

So sánh 3^{21} và $21^3 => 3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$

Vậy số lớn nhất là 3^{21} .

Bài 2:

a. Số 5^8 có bao nhiêu chữ số ?

b. Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

Lời giải

Bài 1. ***Phương pháp:*** *So sánh lũy thừa với một số luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.*

a.

$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$

$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$

$<=> 360000 < 5^8 < 400000.$

Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b.

Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 chữ số liền nhau ta được 1 số có (a + b) chữ số.

Vì $10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a$ & $10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$

Nên $10^{a-1}.10^{b-1} < 2^{2003}.5^{2003} < 10^a.10^b => 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}$

Do đó: $2003 = a + b - 1$

Vậy $a + b = 2004$ suy ra số đó có 2004 chữ số.

Bài 3: Tìm các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a. $n = 8^3.15^5$

b. $m = 4^{16}.5^{25}$

Lời giải

Phương pháp: *Nhóm các luỹ thừa thích hợp nhằm làm xuất hiện luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.*

Bài 2. a. Ta có $n = 8^3.15^5 = \left(2^3\right)^3.(3.5)^5 = 2^9.3^5.5^5 = 2^4.3^5.(2.5)^5 = 16.243.10^5 = 3888.10^5$

Số 3888.10^5 gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy n có 9 chữ số.

Bài 3. b. Ta có: $m = 4^{16}.5^{25} = \left(2^2\right)^{16}.5^{25} = 2^{32}.5^{25} = 2^7.(2.5)^{25} = 128.10^{25}$

Bài 4. Số 128.10^{25} gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.
Vậy m có 28 chữ số.

Bài 4: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$.

Lời giải

Ta có: $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8 \quad (1)$

Dễ thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$2^n.(2-1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ và $m = 9$.

Trường hợp 2: Nếu $m - n \geq 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

CHỦ ĐỀ 2: SO SÁNH PHÂN SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn
- Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử lại với nhau: phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn

Từ lý thyết cơ bản ta rút ra nhận xét sau:

- Phân số có tử và mẫu là 2 số nguyên cùng dấu thì lớn hơn 0.
- Phân số có tử và mẫu là 2 số nguyên khác dấu thì nhỏ hơn 0.
- **Hai phân số có cùng mẫu âm, phân số nào có tử lớn hơn thì nhỏ hơn và ngược lại**

II. CÁC DẠNG TOÁN

PHƯƠNG PHÁP 1: Quy đồng mẫu dương

Ví dụ 1: So sánh các phân số sau

a. $\frac{42}{-63}$ và $\frac{180}{-216}$ b. $\frac{-136}{476}$ và $\frac{-306}{816}$

Lời giải

a. $\frac{42}{-63}=\frac{2}{-3}=\frac{4}{-6}$ và $\frac{180}{-216}=\frac{5}{-6}$

Mà $-6<0$ và $4<5$ nên $\frac{42}{-63}>\frac{180}{-216}$

b. $\frac{-136}{476}=\frac{-2}{7}=\frac{16}{-56}$ và $\frac{-306}{816}=\frac{-3}{8}=\frac{21}{-56}$

Mà $-56<0$ và $16<21$ nên $\frac{-136}{476}>\frac{-306}{816}$

Ví dụ 2: So sánh các phân số sau

a. $\frac{-69}{665}$ và $\frac{2019}{2020}$ b. $\frac{287}{9111}$ và $\frac{2476}{-3007}$

Lời giải

a. $\frac{-69}{665}<0<\frac{2019}{2020}$ b. $\frac{287}{9111}>0>\frac{2476}{-3007}$

Ví dụ 3: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần $\frac{7}{-6};\frac{7}{-8};\frac{40}{32};\frac{4}{-15};\frac{3}{10};\frac{7}{-24}$

Lời giải

$\frac{7}{-6}=\frac{140}{-120}$ $\frac{7}{-8}=\frac{105}{-120}$ $\frac{40}{32}=\frac{-150}{-120}$

$\frac{4}{-15}=\frac{32}{-120}$ $\frac{3}{10}=\frac{-36}{-120}$ $\frac{7}{-24}=\frac{35}{-120}$

Mà $-120<0$ và $-150<-36<32<35<105<140$

Nên $\frac{40}{32}>\frac{3}{10}>\frac{4}{-15}>\frac{7}{-24}>\frac{7}{-8}>\frac{7}{-6}$

Ví dụ 4: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần $\frac{5}{12};\frac{19}{-27};\frac{1}{-2};\frac{1}{3};\frac{7}{18};\frac{-1}{33}$

Lời giải

$\frac{5}{12}=\frac{-495}{-1188}$ $\frac{19}{-27}=\frac{836}{-1188}$ $\frac{1}{-2}=\frac{594}{-1188}$

$\frac{1}{3}=\frac{-396}{-1188}$ $\frac{7}{18}=\frac{-462}{-1188}$ $\frac{-1}{33}=\frac{36}{-1188}$

Mà $-1188<0$ và $-495<-462<-396<36<594<836$

Nên $\frac{19}{-27}<\frac{1}{-2}<\frac{-1}{33}<\frac{1}{3}<\frac{7}{18}<\frac{5}{12}$

Ví dụ 5: Tìm hai số nguyên a,b sao cho $\frac{2}{-21}>\frac{a}{-9}>\frac{b}{-7}>\frac{1}{-3}$

Lời giải

$\frac{2}{-21}>\frac{a}{-9}>\frac{b}{-7}>\frac{1}{-3}$ hay $\frac{6}{-63}>\frac{7a}{-63}>\frac{9b}{-63}>\frac{21}{-63}$ suy ra $6<7a<9b<21$

Vậy: a = 1, b = 1 hoặc a = 1, b = 2 hoặc a = 2, b = 2

PHƯƠNG PHÁP 2: Quy đồng tử dương

Ví dụ 1: So sánh các phân số:

a) $\frac{17}{-21}$ và $\frac{51}{-31}$; b) $\frac{-4}{9}$ và $\frac{-3}{13}$;

Lời giải

$a)\frac{17}{-21}=\frac{51}{-63};\ \frac{51}{-63}>\frac{51}{-31}\Rightarrow\frac{17}{-21}>\frac{51}{-31}$

$b)\frac{-4}{9}=\frac{12}{-27};\ \frac{-3}{13}=\frac{12}{-52};\frac{12}{-27}<\frac{12}{-52}\Rightarrow\frac{-4}{9}<\frac{-3}{13}$

Ví dụ 2: So sánh các phân số:

a) $\frac{7}{421}$ và $\frac{5}{531}$ b) $\frac{-4}{93}$ và $\frac{3}{-134}$

Lời giải

$a)\dfrac{7}{421}=\dfrac{35}{2105};\ \dfrac{5}{531}=\dfrac{35}{3717};\ \dfrac{35}{2105}>\dfrac{35}{3717}\Rightarrow\dfrac{7}{421}>\dfrac{5}{531}$

$b)\dfrac{-4}{93}=\dfrac{12}{-279};\ \dfrac{3}{-134}=\dfrac{12}{-536};\dfrac{12}{-273}<\dfrac{12}{-536}\Rightarrow\dfrac{-4}{93}<\dfrac{3}{-134}$

PHƯƠNG PHÁP 3: Tích chéo với các mẫu dương

A. Lý thuyết:

+ Nếu a.d > b.c thì $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$

+ Nếu a.d < b.c thì $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$

+ Nếu a.d = b.c thì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

B. Ví dụ

Ví dụ 1: So sánh $\dfrac{5}{6}$ và $\dfrac{7}{8}$

Lời giải

$\dfrac{5}{6}<\dfrac{7}{8}$ vì 5.8 < 7.6

Ví dụ 2: So sánh $\dfrac{-4}{5}$ và $\dfrac{-4}{8}$

Lời giải

$\dfrac{-4}{5}<\dfrac{-4}{8}$ vì $-4.8<-4.5$

Ví dụ 3: So sánh $\dfrac{3}{-4}$ và $\dfrac{4}{-5}$

Lời giải

Ta viết $\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}$ và $\frac{4}{-5}=\frac{-4}{5}$; Vì tích chéo –3.5 > -4.4 nên $\frac{3}{-4}>\frac{4}{-5}$

Chú ý : Phải viết các mẫu của các phân số là các mẫu dương chẳng hạn $\frac{3}{-4}<\frac{-4}{5}$ *do 3.5 < -4.(-4) là sai*

Ví dụ 4: So sánh $\frac{12}{13}$ và $\frac{13}{14}$

Lời giải

Ta có: $\frac{12}{13}<\frac{13}{14}$ vì $12.14<13.13$

Ví dụ 5: So sánh $\frac{7}{-4}$ và $\frac{-10}{3}$

Lời giải

Ta viết $\frac{7}{-4}=\frac{-7}{4}$ và $\frac{-10}{3}$

Vì $(-7).3>(-10).4$ nên $\frac{7}{-4}>\frac{-10}{3}$

PHƯƠNG PHÁP 4: DÙNG SỐ HOẶC PHÂN SỐ LÀM TRUNG GIAN

4.1. DÙNG SỐ 1 LÀM TRUNG GIAN (Chuyên đề so sánh số, phân số).

Bài 1. So sánh các cặp phân số

a) $\frac{7}{9}$ và $\frac{19}{17}$.

b) $\frac{8}{7}$ và $\frac{2019}{2020}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{7}{9}<1$ và $\frac{19}{17}>1$ nên $\frac{7}{9}<\frac{19}{7}$.

b) Ta có: $\frac{8}{7}>1$ và $\frac{2019}{2020}<1$ nên $\frac{8}{7}>\frac{2019}{2020}$.

Bình luận:

Một trong các phương pháp so sánh hai phân số là ta so sánh các phân số đó với số 1, nếu một phân số nhỏ hơn 1 và một phân số lớn hơn 1 thì chúng ta có đánh giá được ngay về hai phân số đó.

Bài toán tổng quát

Cho $a,\ b,\ m,\ n$ là các số tự nhiên khác 0. So sánh hai phân số $\frac{a}{a+m}$ và $\frac{b+n}{b}$. Khi đó ta rất dễ dàng đánh giá $\frac{a}{a+m}<1<\frac{b+n}{b}$.

Bài 2. So sánh các cặp phân số

a) $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$.

b) $\frac{1011}{1010}$ và $\frac{2023}{2021}$.

c) $A=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$ và $B=\frac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{19}{18}=1+\frac{1}{18}$ và $\frac{2005}{2004}=1+\frac{1}{2004}$. Vì $\frac{1}{18}>\frac{1}{2004}$ nên $\frac{19}{18}>\frac{2005}{2004}$.

b) Ta có $\frac{1011}{1010}=1+\frac{1}{1010}$ và $\frac{2023}{2021}=1+\frac{2}{2021}$. Vì $\frac{1}{1010}=\frac{2}{2020}>\frac{2}{2021}$ nên $\frac{1011}{1010}>\frac{2023}{2021}$.

c) Theo giả thiết $A=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$ suy ra $19A=\frac{19^{31}+95}{19^{31}+5}=\frac{\left(19^{31}+5\right)+90}{19^{31}+5}=1+\frac{90}{19^{31}+5}$.

Ta lại có $19B=\frac{19^{32}+95}{19^{32}+5}=\frac{\left(19^{32}+5\right)+90}{19^{32}+5}=1+\frac{90}{19^{32}+5}$.

Vì $19^{31}+5<19^{32}+5$ nên $\frac{90}{19^{31}+5}>\frac{90}{19^{32}+5}$. Suy ra $19A>19B\Leftrightarrow A>B$.

Bình luận:

Một số bài toán so sánh hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ mà ta chỉ ra được $\frac{a}{b}=1+M;\frac{c}{d}=1+N$ trong đó $M>N$ thì ta có ngay kết quả so sánh. Tuy nhiên đó là các bài toán dễ (dạng câu a, b bài 2). Trong thực tế chúng ta thường gặp những bài toán khó hơn (dạng câu c bài 2), một trong các cách làm là ta phải nhân hoặc chia cả 2 phân số với một số hợp lí để so sánh, từ đó mới có kết luận về hai phân số ban đầu.

Bài toán tương tự

Bài tập 1: Cho hai phân số $A=\dfrac{10^7+5}{10^7-8}$ và $B=\dfrac{10^8+6}{10^8-7}$

So sánh A và B.

Bài tập 2: Cho hai phân số $A=\dfrac{10^8+2}{10^8-1}$ và $B=\dfrac{10^8}{10^8-3}$.

So sánh A và B.

Bài tập 3: Cho hai phân số $A=\dfrac{19^{20}+5}{19^{20}-8}$ và $B=\dfrac{19^{21}+6}{19^{21}-7}$.

So sánh A và B.

Bài tập 4: Cho hai phân số $A=\dfrac{10^{10}+1}{10^{10}-1}$ và $B=\dfrac{10^{10}-1}{10^{10}-3}$.

So sánh A và B.

Bài 3. So sánh các cặp phân số

a) $\dfrac{72}{73}$ và $\dfrac{98}{99}$.

b) $\dfrac{2017}{2019}$ và $\dfrac{1009}{1010}$.

c) $A=\dfrac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$ và $B=\dfrac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$.

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{72}{73}=1-\dfrac{1}{73}$ và $\dfrac{98}{99}=1-\dfrac{1}{99}$. Vì $\dfrac{1}{73}>\dfrac{1}{99}$ nên $\dfrac{72}{73}<\dfrac{98}{99}$

b) Ta có $\dfrac{2017}{2019}=1-\dfrac{2}{2019}$ và $\dfrac{1009}{1010}=1-\dfrac{1}{1010}$. Vì $\dfrac{1}{1010}=\dfrac{2}{2020}<\dfrac{2}{2019}$ nên $\dfrac{2017}{2019}<\dfrac{1009}{1010}$.

c) Theo giả thiết $A=\dfrac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$ suy ra $\dfrac{1}{2}A=\dfrac{2^{2008}-3}{2^{2008}-2}=1-\dfrac{1}{2^{2008}-2}$.

Ta lại có $B=\dfrac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$ nên $\dfrac{1}{2}B=\dfrac{2^{2007}-3}{2^{2007}-2}=1-\dfrac{1}{2^{2007}-2}$.

Vì $2^{2008}-2>2^{2007}-2$ nên $\dfrac{1}{2^{2008}-2}<\dfrac{1}{2^{2007}-2}$ suy ra $\dfrac{1}{2}A>\dfrac{1}{2}B\Leftrightarrow A>B$

Bình luận:

Một số bài toán so sánh hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ mà ta chỉ ra được $\frac{a}{b}=1-M;\frac{c}{d}=1-N$ trong đó $M>N$ thì ta có ngay kết quả so sánh. Tuy nhiên đó là các bài toán dễ (dạng câu a, b bài 2). Trong thực tế chúng ta thường gặp những bài toán khó hơn (dạng câu c bài 2), một trong các cách làm là ta phải nhân hoặc chia cả 2 phân số với một số hợp lí để so sánh, từ đó mới có kết luận về hai phân số ban đầu.

Bài toán tương tự.

Bài tập: Cho hai phân số $A=\frac{2^{18}-3}{2^{20}-3}$ và $B=\frac{2^{20}-3}{2^{22}-3}$. So sánh A và B.

Bài 4. Cho hai phân số: $A=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}$ và $B=\frac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

Cách 1: Với bài toán này chúng ta có thể làm theo phương pháp so sánh với số 1, cách làm tương tự bài số 2 như sau :

Ta có $2008A=\frac{2008^{2009}+2008}{2008^{2009}+1}=\frac{2008^{2009}+1+2007}{2008^{2009}+1}=1+\frac{2007}{2008^{2009}+1}$.

Ta lại có $2018B=\frac{2008^{2008}+2018}{2008^{2008}+1}=\frac{2008^{2008}+1+2017}{2008^{2008}+1}=1+\frac{2017}{2008^{2008}+1}$.

Vì $2^{2009}+1>2^{2008}+1$ nên $\frac{2017}{2^{2009}+1}<\frac{2017}{2^{2008}+1}$ suy ra $2018A<2018B\Leftrightarrow A<B$.

Ngoài ra bài toán này có thể giải bằng các cách sau:

Cách 2: Với mọi số tự nhiên a, b, c ≠ 0, ta chứng minh được:

+) Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$.

+) Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

Áp dụng tính chất trên vào bài, ta có:

Vì $A=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}<\frac{2008^{2009}+1}{2008^{2009}+1}=1$ nên

$$A=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}<\frac{2008^{2008}+1+2017}{2008^{2009}+1+2017}=\frac{2018\left(2008^{2007}+1\right)}{2018\left(2008^{2008}+1\right)}=\frac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}=B.$$

Vậy $A<B$

Cách 3:

Ta có: $\frac{1}{A}=\frac{2008^{2009}+1}{2008^{2008}+1}=\frac{2008^{2009}+2008-2007}{2008^{2008}+1}$

$$=\frac{2008.(2008^{2008}+1)-2007}{2008^{2008}+1}=2018-\frac{2007}{2008^{2008}+1}$$

Ta lại có: $\frac{1}{B}=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2007}+1}=\frac{2008^{2008}+2008-2007}{2008^{2007}+1}$

$$=\frac{2008.(2008^{2007}+1)-2007}{2008^{2007}+1}=2008-\frac{2007}{2008^{2007}+1}$$

Vì $2008^{2008}+1>2008^{2007}+1$ nên $\frac{2007}{2008^{2008}+1}<\frac{2007}{2008^{2008}+1}$

Suy ra $2008-\frac{2007}{2008^{2008}+1}>2008-\frac{2007}{2008^{2008}+1}$. Do đó $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}\Leftrightarrow A<B$ (vì $A,B>0$).

Cách 4: Quy đồng

Ta có: $A-B=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}-\frac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}=\frac{\left(2008^{2008}+1\right)\left(2008^{2008}+1\right)-\left(2008^{2009}+1\right)\left(2008^{2007}+1\right)}{\left(2008^{2009}+1\right)\left(2008^{2008}+1\right)}$

$$=\frac{2008^{4016}+2.2008^{2008}+1-\left(2008^{4016}+2008^{2009}+2008^{2007}+1\right)}{\left(2008^{2009}+1\right)\left(2008^{2008}+1\right)}=\frac{2008^{2007}\left(2.2008-2008^{2}-1\right)}{\left(2008^{2009}+1\right)\left(2008^{2008}+1\right)}<0$$

Bài toán tổng quát

Cho hai phân số: $A=\frac{a^{n}+b}{a^{n+1}+b}$ và $B=\frac{a^{n+1}+b}{a^{n+2}+b}$. So sánh A và B.

Bài toán tương tự.

Bài tập 1: Cho hai phân số $A=\frac{10^{19}+1}{10^{20}+1}$ và $B=\frac{10^{20}+1}{10^{21}+1}$.

So sánh A và B.

Bài tập 2: Cho hai phân số $A=\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B=\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$.

So sánh A và B.

Bài tập 3: Cho hai phân số $A=\frac{2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1}$ và $B=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$.

So sánh A và B.

Bài tập 4: Cho hai phân số $A=\frac{10^{19}+1}{10^{20}+1}$ và $B=\frac{10^{20}+1}{10^{21}+1}$.

So sánh A và B.

4.2 Dùng một phân số làm trung gian

Dạng 2. + So sánh hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d};(a,b,c,d>0)$

Nếu $a<c$ còn $b>d$ (hoặc $a>c$ còn $b<d$) thì ta có thể chọn phân số trung gian là $\frac{c}{b}$ (hoặc $\frac{a}{d}$)

Bài 1: So sánh hai phân số sau bằng cách nhanh nhất.: $\frac{40}{57}$ và $\frac{41}{55}$

Phân tích: Ta có tử số của phân số thứ nhất nhỏ hơn tử số của phân số thứ hai ($40<41$); Mẫu số của phân số thứ nhất lớn hơn mẫu số của phân số thứ hai ($57 > 55$).

Lời giải.

Chọn phân số trung gian là $\frac{41}{57}$

Ta có: $\frac{40}{57}<\frac{41}{57}$ mà $\frac{41}{57}<\frac{41}{55}$

Vậy $\frac{40}{57}<\frac{41}{55}$.

Đôi khi bài toán không cho ta nhìn thấy ngay phân số trung gian mà phải biến đổi chúng về các phân số tương đương có tính chất như trên. Các bạn có thể tham khảo một trong những cách biến đổi nó như sau:

+ Nếu hiệu của tử số của phân số thứ nhất với tử số của phân số thứ hai và hiệu của mẫu số phân số thứ nhất với mẫu số của phân số thứ hai có mối quan hệ với nhau về tỉ số (ví dụ: gấp

2 hoặc 3 lần,…hay bằng $\frac{1}{2};\frac{2}{3};...$ thì ta nhân cả tử số và mẫu số của cả hai phân số lên một số lần sao cho hiệu giữa hai tử số và hiệu giữa hai mẫu số của hai phân số là nhỏ nhất". *Các bạn lưu ý đây không phải là các tối ưu có thể áp dụng trong các trường hợp mà chỉ là một cách để tham khảo.*

Bài 2: So sánh hai phân số sau bằng cách nhanh nhất. $\frac{67}{101}$ và $\frac{15}{29}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{15}{29}=\frac{15\times 4}{29\times 4}=\frac{60}{116}$

Ta so sánh $\frac{60}{116}$ và $\frac{67}{101}$. Ta thấy 60 < 67; 116 > 101

Chọn phân số trung gian là $\frac{60}{101}$

Ta có $\frac{60}{116}<\frac{60}{101};\frac{60}{101}<\frac{67}{101}$. Vậy $\frac{15}{29}<\frac{67}{101}$

+ Sử dụng tính chất với a, b,c, d >0 và $\frac{a}{b}$<1 thì chọn phân số trung gian là $\frac{a+m}{b+m}$ (m>0) sao cho $\frac{a}{b}$ $<\frac{a+m}{b+m}<\frac{c}{d}$

Bài 3: So sánh hai phân số sau: $\frac{33}{101}$ và $\frac{15}{29}$

Nếu theo cách trên các bạn sẽ có: Hiệu giữa hai mẫu số là: 101 – 29 =72

Hiệu giữa hai tử số là: 33-15 = 18

Tỉ số giữa hiệu của hai mẫu số và hiệu của hai tử số là: 72 : 18 = 4

Nhân cả tử số và mẫu số của phân số $\frac{15}{29}$ với 4 để có hiệu hiệu giữa hai tử số và hiệu giữa hai mẫu số của hai phân số là nhỏ nhất. Ta có: $\frac{15}{29}=\frac{15\times 4}{29\times 4}=\frac{60}{116}$

Khi đó việc so sánh hai phân số $\frac{33}{101}$ và $\frac{15}{29}$ thành so sánh $\frac{60}{116}$ và $\frac{33}{101}$

Vì $\frac{33}{101}<1$, nên ta chọn phần tử trung gian là $\frac{33+15}{101+15}=\frac{48}{116}<\frac{60}{116}$, suy ra

$$\frac{33}{101}<\frac{33+15}{101+15}<\frac{60}{116}.$$

Nếu các bài toán so sánh sử dụng phương pháp tìm phần tử trung gian chỉ đơn giản như các ví dụ phía trên thì thật là nhàm chán. Chúng ta có thể mở rộng hay nói vui là nâng cấp bài toán sử dụng phương pháp dùng phần tử trung gian để nó trở lên hấp dẫn hơn. Chúng ta có thể sử dụng một trong các cách sau. (Tuy nhiên, tác giả mong muốn trước khi xem lời giải thì người đọc tự giải thử trước).

Bài 4:: So sánh

$$\frac{2015}{2020}+\frac{2013}{2018}+\frac{2011}{2016} \text{ và } \frac{2016}{2019}+\frac{2014}{2017}+\frac{2012}{2015}$$

Phân tích: Chắc chắn sẽ không ai ngốc nghếch đến mức quy đồng rồi so sánh. ^_^. Nhiều bạn sẽ sử dụng phần bù vì nhìn thấy quy luật của hiệu giữa tử và mẫu nhưng mình thấy cách đó dài hơn.

Vậy nên chúng ta sử dụng kết hợp tính chất $a_1>b_1;a_2>b_2;....;a_n>b_n$ thì

$a_1+a_2+a_3+...+a_n>b_1+b_2+b_3+...+b_n$ và phân số trung gian.

Lời giải:

Ta so sánh $\frac{2015}{2020}$ và $\frac{2016}{2019}$; $\frac{2013}{2018}$ và $\frac{2014}{2017}$; $\frac{2011}{2016}$ và $\frac{2012}{2015}$

Ta thấy đã xuất hiện dạng bài dùng phân số trung gian

$\frac{2015}{2020}$ và $\frac{2016}{2019}$ chọn $\frac{2015}{2019}$ làm phân số trung gian. Dễ thấy $\frac{2015}{2020}<\frac{2015}{2019}<\frac{2016}{2019}$ (1)

$\frac{2013}{2018}$ và $\frac{2014}{2017}$ chọn $\frac{2013}{2017}$ làm phân số trung gian. Dễ thấy $\frac{2013}{2018}<\frac{2013}{2017}<\frac{2014}{2017}$ (2)

$\frac{2011}{2016}$ và $\frac{2012}{2015}$ chọn $\frac{2011}{2015}$ làm phân số trung gian. Dễ thấy $\frac{2011}{2016}<\frac{2011}{2015}<\frac{2012}{2015}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{2015}{2020}+\frac{2013}{2018}+\frac{2011}{2016}<\frac{2016}{2019}+\frac{2014}{2017}+\frac{2012}{2015}$.

Để tăng độ khó hơn một ít, chúng ta có thể mở rộng bài này thêm một chút

Bài 5:: Chứng mình rằng

$$\frac{2011}{2020}+\frac{2007}{2018}+\frac{2003}{2016}<\frac{503}{504}+\frac{502}{503}+\frac{501}{502}$$

Phân tích: Ta đưa bài toán về bài toán so sánh

$$\frac{2011}{2020}+\frac{2007}{2018}+\frac{2003}{2016} \text{ và } \frac{503}{504}+\frac{502}{503}+\frac{501}{502} \quad (I)$$

Ta chia thành các cặp

$$\frac{2011}{2020} \text{ và } \frac{503}{504};\ \frac{2007}{2018} \text{ và } \frac{502}{503};\ \frac{2003}{2016} \text{ và } \frac{501}{502}$$

Hiệu giữa các mẫu số của phân sô bên vế trái lớn hơn nhiều so với mẫu số của các phân số bên vế phải. Vậy để đưa về dạng có thể tìm được phần tử trung gian thì ta phải nhân vào cả tử và mẫu của vế phải một số để cho hiệu giữa các mẫu của phân số bên vế trái và mẫu của các phân số bên vế phải là nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta xét $\frac{503}{504}+\frac{502}{503}+\frac{501}{502}=\frac{4}{4}\times(\frac{503}{504}+\frac{502}{503}+\frac{501}{502})=\frac{4\times503}{4\times504}+\frac{4\times502}{4\times503}+\frac{4\times501}{4\times502}=\frac{2012}{2016}+\frac{2008}{2012}+\frac{2004}{2008}$

(I) Trở thành so sánh $\frac{2011}{2020}+\frac{2007}{2018}+\frac{2003}{2016} \text{ và } \frac{2012}{2016}+\frac{2008}{2012}+\frac{2004}{2008}$

So sánh $\frac{2011}{2020} \text{ và } \frac{2012}{2016};\ \frac{2007}{2018} \text{ và } \frac{2008}{2012};\ \frac{2003}{2016} \text{ và } \frac{2004}{2008}$

Khi đó: $\frac{2011}{2020}+\frac{2007}{2018}+\frac{2003}{2016}<\frac{2011}{2016}+\frac{2007}{2012}+\frac{2003}{2008}<\frac{2012}{2016}+\frac{2008}{2012}+\frac{2004}{2008}=\frac{503}{504}+\frac{502}{503}+\frac{501}{502}$

(ĐFCM)

Chúng ta lại có thể tăng thêm độ khó 1 chút. Ví dụ như bài sau:

Bài 6:: So sánh

$$\frac{899}{999}+\frac{895}{997} \text{ và } \frac{225}{249}+\frac{299}{332}$$

Hướng dẫn:

Phân số $\frac{225}{249}$ nhân cả tử và mẫu với 2

Phân số $\frac{299}{332}$ nhân cả tử và mẫu với 3.

Bài 7:: So sánh

$A=\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}$ và $B=\frac{2008^{2007}+2}{2008^{2008}+1}$

Lời giải:

Ta xét $\frac{2008^{2008}+1}{2008^{2009}+1}<\frac{2008^{2008}+1+2007}{2008^{2009}+1+2007}=\frac{2008^{2008}+2008}{2008^{2009}+2008}=\frac{2008^{2007}+1}{2008^{2008}+1}<\frac{2008^{2007}+2}{2008^{2008}+1}$

Tổng quát:

So sánh $\frac{a^{n-1}+k}{a^n+m}$ và $\frac{a^n+m}{a^{n+1}+m}$, với $k>m$

Ta có

$$\frac{a^n+m}{a^{n+1}+m}<\frac{a^n+m+m.a-m}{a^{n+1}+m+m.a-m}=\frac{a^n+m.a}{a^{n+1}+m.a}=\frac{a^{n-1}+m}{a^n+m}<\frac{a^{n-1}+k}{a^n+m}$$

+ Sử dụng tính chất với a, b,c, d >0 và $\frac{a}{b}$>1 thì chọn phân số trung gian là $\frac{a+m}{b+m}$ (m>0) sao cho $\frac{a}{b}$ $>\frac{a+m}{b+m}>\frac{c}{d}$

Bài tập tương tự

Bài tập 1: So sánh

$\frac{899}{999}+\frac{895}{997}$ và $\frac{225}{249}+\frac{223}{247}$

Một số cách mở rộng khác:

Bài 7:: So sánh

$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{98.100}$ và $\frac{50}{198}$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{98.100}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+....+\frac{1}{98}-\frac{1}{100})=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{100})=\frac{98}{400}=\frac{49}{200}$$

So sánh $\frac{49}{200}$ và $\frac{50}{198}$

Chọn phân số trung gian là $\frac{49}{198}$, khi đó: $\frac{49}{200}<\frac{49}{198}<\frac{50}{198}$

Vậy $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+...+\frac{1}{98.100}<\frac{50}{198}$

Bài tập tương tự

Bài tập 1: So sánh

A= $141\times(\frac{1}{256}+\frac{1}{289}+\frac{1}{324}+\frac{1}{361})$ và B= $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}$

Bài tập 2: So sánh $\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{90}$ và $\frac{61}{89}$

Bài 3: Cho tổng

A = $\frac{1}{2^3+3}+\frac{1}{3^3+4}+\frac{1}{4^3+5}+...+\frac{1}{2018^3+2019}$. So sánh A với $\frac{1}{6}$

4.3.dùng phân số xấp xỉ làm phân số trung gian.

Bài tập 1: So sánh $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$?

Hướng dẫn

Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{4}$.

Ta có : $\frac{12}{47}>\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$ và $\frac{19}{77}<\frac{19}{76}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{12}{47}>\frac{19}{77}$

Bài tập 2: Dùng phân số xấp xỉ làm phân số trung gian để so sánh :

a) $\frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}$ b) $\frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}$ c) $\frac{12}{37}$ và $\frac{19}{54}$

d) $\frac{18}{53}$ và $\frac{26}{78}$ e) $\frac{13}{79}$ và $\frac{34}{204}$ f) $\frac{25}{103}$ và $\frac{74}{295}$

g) $\frac{58}{63}$ và $\frac{36}{55}$.

Hướng dẫn

PHƯƠNG PHÁP 5: Dùng tính chất sau với $m \neq 0$:

$*0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$; $\frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$

$*\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}$.

$*\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$; $\frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}$

$*\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Bài tập 1: So sánh $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$ và $B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

Hướng dẫn

Ta có : $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < 1$ (vì tử < mẫu) $\Rightarrow$ $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1} < \frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1} = B$

Vậy A < B .

Bài tập 2: So sánh $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004+2005}{2005+2006}$?

Hướng dẫn

Ta có : $\left.\begin{array}{l} \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005+2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005+2006} \end{array}\right\}$ => Cộng theo vế ta có kết quả M > N.

Bài tập 3: So sánh $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Hướng dẫn

$\frac{37}{39}=\frac{3700}{3900}=\frac{3700+37}{3900+39}=\frac{3737}{3939}$ (áp dụng $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.)

PHƯƠNG PHÁP 6: Đổi phân số lớn hơn đơn vị ra hỗn số để so sánh

Phân số nào có phần nguyên lớn hơn thì phân số đó lớn hớn

Hai phân số có cùng phân nguyên thì so sánh các phân số kèm theo.

Bài 1: So sánh các phân số sau $\frac{5}{8}$ và $\frac{12}{15}$

Lời giải

Ta có

$\frac{5}{8}=0,625;\quad \frac{12}{15}=0,8$

Vì $0,625<0,8$ nên $\frac{5}{8}<\frac{12}{15}$

Bài 2: So sánh các phân số sau $\frac{3}{-4}$ và $\frac{4}{-5}$

Lời giải

Ta có

$\frac{3}{-4}=-0,75;\quad \frac{4}{-5}=-0,8$

Vì $-0,75>-0,8$ nên $\frac{3}{-4}>\frac{4}{-5}$

Bài 3: So sánh các phân số sau

$A=\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $B=\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$

Lời giải

Ta có :

$A=1+\frac{-1}{2003.2004}$, $B=1+\frac{-1}{2004.2005}$, Mà: $\frac{-1}{2003.2004}<\frac{-1}{2004.2005}\Rightarrow A<B$

Bài 4: So sánh các phân số sau

a) $A=\frac{2^{2010}+1}{2^{2007}+1}$ và $B=\frac{2^{2012}+1}{2^{2009}+1}$ b, $A=\frac{3^{123}+1}{3^{125}+1}$ và $B=\frac{3^{122}}{3^{124}+1}$

Lời giải

a, Ta có : $A=\frac{2^{2010}+2^3-7}{2^{2007}+1}=2^3-\frac{7}{2^{2002}+1}$ $B=\frac{2^{2012}+2^3-7}{2^{2009}+1}=2^3-\frac{7}{2^{2009}+1}$

Vậy $B>A$

b,Ta có : $A=\frac{3^{123}+\frac{1}{3^2}+\frac{8}{9}}{3^{125}+1}=\frac{\frac{1}{3^2}\left(3^{125}+1\right)+\frac{8}{9}}{3^{125}+1}=\frac{1}{3^2}+\frac{\frac{8}{9}}{3^{125}+1}$

Tương tự : $B=\frac{1}{3^2}+\frac{\frac{8}{9}}{3^{124}+1}$

Vậy, $A<B$

Bài 5 : So sánh phân số : $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ với a, b là số nguyên cùng dấu và $a\neq b$

Lời giải

Ta có : $\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}=1+\frac{1}{b}$

*Nếu $a>0$ và $b>0$ thì $\frac{1}{a}>0$ và $\frac{1}{b}>0\Rightarrow\frac{a-1}{a}<\frac{b+1}{b}$

*Nếu $a<0$ và $b<0$ thì $\frac{1}{a}<0$ và $\frac{1}{b}<0\Rightarrow\frac{a-1}{a}>\frac{b+1}{b}$

Bài 6 : So sánh $A=\frac{2006}{2007}+\frac{2007}{2008}+\frac{2008}{2009}+\frac{2009}{2006}$ với B=4

Lời giải

Ta có :

$A=\frac{2007-1}{2007}+\frac{2008-1}{2008}+\frac{2009-1}{2009}+\frac{2006+3}{2006}=4+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2008}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2009}>4$

Suy ra $A > B$

Dạng 3. III.CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. So sánh tổng $S = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{41}+\frac{1}{42}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải

$\frac{1}{9}+\frac{1}{10} < \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ và $\frac{1}{41}+\frac{1}{42} < \frac{1}{40}+\frac{1}{40} = \frac{1}{20}$

Suy ra $S = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{41}+\frac{1}{42} < \frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20} = \frac{4+5+1}{20} = \frac{1}{2}$

Bài toán tương tự: Không tính ra kết quả cụ thể hãy so sánh :

a) $A = \frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{97}$ với $\frac{1}{3}$

b) $B = \frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+...+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$ với $\frac{1}{2}$

Bài 2. a)So sánh P và Q, biết rằng: $P = \frac{31}{2}.\frac{32}{2}.\frac{33}{2}....\frac{60}{2}$ và $Q = 1.3.5.7....59$?

b) So sánh $U = \frac{1.3.5.7.....39}{21.22.23.24.....40}$ và $V = \frac{1}{2^{20}-1}$

Lời giải

a) $P = \frac{31}{2}.\frac{32}{2}.\frac{33}{2}....\frac{60}{2} = \frac{31.32.33....60}{2^{30}} = \frac{(31.32.33.....60).(1.2.3....30)}{2^{30}.(1.2.3....30)}$

$= \frac{(1.3.5....59).(2.4.6....60)}{2.4.6....60} = 1.3.5....59 = Q$

Vậy $P = Q$

b) Ta có :

$$U = \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29.31.33.35.37.39}{21.2.11.23.3.2^3.25.2.13.27.2^2.7.29.2.15.31.2^5.33.2.17.35.2^2.9.37.2.19.39.2^3.5}$$

$$= \frac{1}{2.2^3.2.2^2.2.2^5.2.2^2.2.2^3} = \frac{1}{2^{20}}$$

Vì $\frac{1}{2^{20}}<\frac{1}{2^{20}-1}\Rightarrow U<V$

Bài toán tương tự: c) So sánh : $C=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

d) So sánh : $D=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{100}\right)$ với $\frac{11}{9}$

Bài 3. a) So sánh A = $\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{4n-2}}-\frac{1}{3^{4n}}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{100}}$ với $\frac{1}{10}$

b) So sánh : $B=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}$ với 4

Lời giải

a) $A=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{4n-2}}-\frac{1}{3^{4n}}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{100}}$

$\Rightarrow 9A=1-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{4n-4}}-\frac{1}{3^{4n-2}}+\frac{1}{3^{96}}-\frac{1}{3^{98}}$

$9A+A=1-\frac{1}{3^{100}}<1\Rightarrow 10A<1\Rightarrow A<\frac{1}{10}$

b) Đặt $S=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}$ Ta có : $2S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+...+\frac{2014}{2^{2012}}+\frac{2015}{2^{2013}}$

$2S-S=\frac{3}{2}+\frac{4-3}{2^2}+\frac{5-4}{2^3}+...+\frac{2015-2014}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}$ $\Rightarrow S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2013}}\right)-\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\frac{1}{2^{2013}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2013}}$. Do đó :

$S=2-\frac{1}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}<2\Rightarrow 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+...+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$. Vậy $A<4$

Bài 4 a) So sánh $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}$ với 1

b) Cho $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{9^2}$. Chứng minh : $\frac{2}{5}<A<\frac{8}{9}$.

c) Cho $B=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{2499}{2500}$ (B có 49 số hạng). So sánh B với 48 .

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ ...,\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

Do đó :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1.$$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$.

b) Ta có : $A>\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{9.10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$\Rightarrow A>\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ (1)

Mặt khác : $A<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{8.9}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$

$\Rightarrow A<1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ (2) . Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{2}{5}<A<\frac{8}{9}$

c) Ta có : $B-49=-\left(1-\frac{3}{4}+1-\frac{8}{9}+1-\frac{15}{16}+...+1-\frac{2499}{2500}\right)=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2500}\right)$

$B=49-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2500}\right)=49-C$.

Xét $C=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2500}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{50^2}$

$C<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}=1-\frac{1}{50}<1$

$C<1\Rightarrow 49-C>49-1=48\ \Rightarrow B>48$.

Bài 5. So sánh P và Q. Biết $P=\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2013}$ và $Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}=\frac{2010}{2011+2012+2013}+\frac{2011}{2011+2012+2013}+\frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Vì :

$$\frac{2010}{2011}>\frac{2010}{2011+2012+2013},\ \frac{2011}{2012}>\frac{2011}{2011+2012+2013},\ \frac{2012}{2013}>\frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Do đó : $P>Q$

Cách 2: Có thể so sánh với 1

Bài toán tương tự: So sánh : $D=\frac{2006}{2007}+\frac{2007}{2008}+\frac{2008}{2009}+\frac{2009}{2006}$ với 4

Bài 6. Cho $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}$. So sánh A với 2.

Lời giải:

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{13}+...+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{19}+...+\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{28}+...+\frac{1}{32}\right)$$

$$>\ 2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+4.\frac{1}{12}+6.\frac{1}{18}+9.\frac{1}{27}+5.\frac{1}{32}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{5}{32}=2+\frac{5}{32}$$

Bài 7. So sánh $A=\frac{2019^{2019}+2}{2019^{2020}+1}$ và $B=\frac{2019^{2018}+2}{2019^{2019}+1}$.

Lời giải:

$$2019A=\frac{2019^{2020}+4038}{2019^{2020}+1}=1+\frac{4037}{2019^{2020}+1};\ 2019B=\frac{2019^{2019}+4038}{2019^{2019}+1}=1+\frac{4037}{2019^{2019}+1}.$$

Vì $\frac{4037}{2019^{2020}+1}<\frac{4037}{2019^{2019}+1}$ nên $2019A<2019B$. Vậy $A<B$.

Bài 8. Cho $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}$. Chứng tỏ $A<\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}\Rightarrow 2A=3A-A=1-\frac{1}{3^{99}}<1\Rightarrow A<\frac{1}{2}$$

Bài 9. Cho a,b,c là các số tự nhiên khác 0 và $M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Chứng tỏ M không có giá trị là số tự nhiên.

Lời giải:

$$M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1 \quad (1)$$

Mặc khác: sử dụng tính chất nếu $0<x<y,z>0$ thì $\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}$.

Khi đó $M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{a+a}{b+c+a}+\frac{b+b}{c+a+b}+\frac{c+c}{a+b+c}=2 \quad (2)$

Từ (1) và (2): $1<M<2$. Vậy M không có giá trị là số tự nhiên.

Bài 10. Cho $A=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}...+\frac{2019}{2^{2019}}+\frac{2020}{2^{2020}}$. Chứng minh $A<2$.

Lời giải:

Nhận xét: Với $n\geq 2$ thì $\frac{n}{2^n}=\frac{2n+2-(n+2)}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n}$.

$$A=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}...+\frac{2019}{2^{2019}}+\frac{2020}{2^{2020}}$$

$$A=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^2}-\frac{5}{2^3}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{6}{2^4}\right)+...+\left(\frac{2020}{2^{2018}}-\frac{2021}{2^{2019}}\right)+\left(\frac{2021}{2^{2019}}-\frac{2022}{2^{2020}}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{2022}{2^{2020}}=2-\frac{2022}{2^{2020}}\Rightarrow A<2$$

Bài 11. Cho $A=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+...+\frac{11}{5^{12}}$. Chứng minh $A<\frac{1}{16}$.

Lời giải:

$$5A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{11}{5^{11}}$$

$$4A=5A-A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{5^{11}}-\frac{11}{5^{12}}$$

$$20A=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{10}}-\frac{11}{5^{11}}$$

$$16A=20A-4A=1-\frac{1}{5^{11}}+\frac{11}{5^{12}}-\frac{11}{5^{11}}<1$$

Vậy $A<\frac{1}{16}$.

Bài 12. Cho $B=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{100^2}$. Chứng minh $\frac{1}{6}<B<\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$B<\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+...+\frac{1}{99.100}\Rightarrow B=\frac{1}{4}-\frac{1}{100}<\frac{1}{4}$$

$$B>\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+...+\frac{1}{100.101}$$

$$\Rightarrow B>\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$

Vậy $B>\frac{1}{5}-\frac{1}{101}>\frac{1}{6}$

PHẦN II.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG TOÁN 6

Bài 1. (ĐỀ HSG 6 SỐ D - 11)

Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{100^2}<1$

Lời giải

Ta có:

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100};$ Vậy

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{10\,0^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{99.100}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\quad=1-\frac{1}{2}=\frac{99}{100}<1.$

Bài 2. (ĐỀ HSG 6 SỐ D - 12)

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\ldots+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt A= $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow$ 2A= $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow$ 2A+A =3A = 1- $\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow$ 3A < 1 $\Rightarrow$ A < $\frac{1}{3}$

b) Đặt A= $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\ldots+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow$3A= 1-$\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow$ 4A = 1-$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$ $\Rightarrow$ 4A< 1-$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt B= 1-$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ $\Rightarrow$ 3B= 2+ $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B = B+3B= 3- \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow 4A < B < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 3. (ĐỀ HSG 6 SỐ D - 14)

Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}<1$.

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

Áp dụng : $\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3};...;\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n} < 1-\frac{1}{n}<1.$

Bài 4. (ĐỀ HSG 6 SỐ D - 12)

Cho phân số $\frac{a}{b}$ (a<b) cùng thêm m đơn vị vào tử và mẫu thì phân số mới lớn hơn hay bé hơn $\frac{a}{b}$?

Theo bài toán cho a <b nên am < bm (nhân cả hai vế với m)

Lời giải

$\Rightarrow$ ab +am < ab+bm (cộng hai vế với ab)

$\Rightarrow$ a(b+m) < b(a+m)

$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$

Bài 5. (ĐỀ HSG 6 SỐ D - 12)

Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43}+ \ldots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

Vậy $\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+.....+\frac{1}{78}+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}$

$= \left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+.....+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+...+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}\right)$ (1)

Vì $\frac{1}{41}>\frac{1}{42}.>.....>\frac{1}{60}$ và $\frac{1}{61} > \frac{1}{62} >...> \frac{1}{80}$ (2)

Ta có $\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+...+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{80}+...+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}\right)$

$= \frac{20}{60}+\frac{20}{80}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$ (3)

Từ (1) , (2), (3) Suy ra:

$\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+.....+\frac{1}{78}+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}>\frac{7}{12}$

Bài 6. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh các phân số sau đây bằng nhau: $\frac{25}{53}$; $\frac{2525}{5353}$; $\frac{252525}{535353}$.

Lời giải

$\frac{2525}{5353}=\frac{25.101}{53.101}=\frac{25}{53}$

$\frac{252525}{535353}=\frac{25.10101}{53.10101}=\frac{25}{53}$

Vậy $\frac{25}{53}=\frac{2525}{5353}=\frac{252525}{535353}$.

Bài 7. (Đề thi HSG 6)

Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Lời giải

$\frac{300}{670}>\frac{300}{677}$ mà $\frac{300}{670}=\frac{30}{67}\Rightarrow\frac{30}{67}>\frac{300}{677}$ (1)

Ta có : $1-\frac{37}{67}=\frac{30}{67}$ và $1-\frac{377}{677}=\frac{300}{677}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{377}{677}>\frac{37}{67}$.

Bài 8. (Đề thi HSG 6)

So sánh: $A=\frac{2005^{2005}+1}{2005^{2006}+1}$ và $B=\frac{2005^{2004}+1}{2005^{2005}+1}$.

Lời giải

$A=\frac{2005^{2005}+1}{2005^{2006}+1}<\frac{2005^{2005}+1+2004}{2005^{2006}+1+2004}=\frac{2005(2005^{2004}+1)}{2005(2005^{2005}+1)}=\frac{2005^{2004}+1}{2005^{2005}+1}=B.$

Vậy $A<B$.

Bài 9. (Đề thi HSG 6)

So sánh: $A=\frac{2006^{2006}+1}{2007^{2007}+1}$ và $B=\frac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1}$.

Lời giải

Ta có nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+n}{b+n}(n\in N^*)$ $A=\frac{2006^{2006}+1}{2006^{2007}+1}<\frac{2006^{2006}+1+2005}{2006^{2007}+2005+1}$

$=\frac{2006^{2006}+2006}{2006^{2007}+2006}=\frac{2006(2006^{2005}+1)}{2006(2006^{2006}+1)}=\frac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1}=B$

Vậy $A < B$.

Bài 10. (Đề thi HSG 6)

So sánh các biểu thức :

a. 3^{200} và 2^{300} .

b. $A = \frac{121212}{171717}+\frac{2}{17}-\frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải

a.Ta có : $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$

$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$

Vì $9^{100} > 8^{100}$ Nên $3^{200} > 2^{300}$

b. $A = \frac{121212}{171717}+\frac{2}{17}-\frac{404}{1717}+\frac{121212:10101}{171717:10101}+\frac{2}{17}-\frac{404:101}{1717:101}$

$\Rightarrow A=\frac{12}{17}+\frac{2}{17}-\frac{4}{17}=\frac{12+2-4}{17}$

Vậy $A=\frac{10}{17}$ hay $A=B=\frac{10}{17}$.

Bài 11. (Đề thi HSG 6)

Cho: A= $\frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$; B = $\frac{10^{2002}+1}{10^{2003}+1}$.Hãy so sánh A và B.

Lời giải

Ta có: $10A=\frac{10^{2002}+10}{10^{2002}+1}=1+\frac{9}{10^{2002}+1}$ (1)

Tương tự: $10B=\frac{10^{2003}+10}{10^{2003}+1}=1+\frac{9}{10^{2003}+1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy : $\frac{9}{10^{2002}+1}>\frac{9}{10^{2003}+1}\Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B.$

Bài 12.

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ Với $\frac{25}{499}$

b) So sánh tổng S = $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}+...+\frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. (n$\in$ N^*)

Lời giải

a) *So sánh phân số:* $\frac{15}{301}$ *Với* $\frac{25}{499}$

$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}$. Vậy $\frac{15}{301} < \frac{25}{499}$

b) *So sánh tổng* $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^n} + ... + \frac{2007}{2^{2007}}$ *với 2. (* $n \in N^*$*)*

Với $\forall n \geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$S = \frac{1}{2} + (\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2}) + (\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3}) + ...+ (\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}}) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2$. Vậy $S < 2$

Bài 13.

So sánh giá trị của biểu thức: $A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + ... + \frac{9999}{10.000}$ với số 99

Lời giải

Biến đổi:

$A = (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{9}) + ... + (1 - \frac{1}{10000})$

$= (1 - \frac{1}{2^2}) + (1 - \frac{1}{3^2}) + ... + (1 - \frac{1}{100^2})$

$= 99 - (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{100^2}) = 99 - B$

Trong đó $B = (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{100^2})$

Vì $B > 0$ nên $A < 99$

Bài 14.

So sánh 2 số: $2^{2^{2^3}}$ và $3^{2^{3^2}}$

Lời giải

Ta có $3^{2^3} = 3^8 = 9^4 > 8^4 = 2^{12} > 2^{10}$

Từ đó: $2^{3^{2^3}} > 2^{2^{10}} = 2^{2..2^9} = 4^{2^9} > 3^{2^9} = 3^{2^{3^2}}$

Suy ra: $2^{3^{2^3}} > 3^{2^{3^2}}$

Bài 15.

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{99}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $3A = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}$

Nên $3A - A = 1 - \frac{1}{3^{99}}$

Hay $2A = 1 - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow A = \frac{1}{2}-\frac{1}{2.3^{99}} < \frac{1}{2}$

Vậy $A < \frac{1}{2}$

Bài 16.

Số 2^{50} viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số ?

Lời giải

Nhận xét: Số a có n chữ số khi và chỉ khi: $10^{n-1} \le a \le 10^n$

Ta thấy: $2^{50} = 2^{16}.2^{34} = 2^{16}.(2^9)^3.2^7 = 2^{16}.512^3.128$ (1)

$10^{16} = 2^{16}.5^{16} = 2^{16}.(5^4)^4 = 2^{16}.625^4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2^{50} < 10^{16}$

Mặt khác: $2^{50} = 2^{15}.2^{35} = 2^{15}.(2^7)^5 = 2^{15}.128^5$ (3)

$10^{15} = 2^{15}.5^{15} = 2^{15}.(5^3)^5 = 2^{15}.125^5$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $10^{15} < 2^{50}$

Vậy ta có: $10^{15} < 2^{50} < 10^{16}$; Nên số 2^{50} có 16 chữ số viết trong hệ thập phân

Bài 17.

Tìm các số tự nhiên a,b thoả mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và 8b - 9a = 31

Lời giải

$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in N \Rightarrow (a-1) \vdots 8 \Rightarrow a = 8q + 1 (q \in N)$

$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$

$11(9q+5) < 17(8q+1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$

$29(8q+1) < 23(9q+5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2; 3\}$

$q = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{23}{17}$ $q = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{32}{25}$.

Bài 18.

Chứng minh rằng: $2^{1995} < 5^{863}$

Lời giải

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10}.3 < 5^5$

$\Rightarrow 2^{1720}.3^{172} < 5^{860}$

Có $3^7 = 2187$; $2^{10} = 1024 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$

$3^{172} = (3^7)^{24}.3^4 > (2^{11})2^4 > (2^{11}).2^6 = 2^{270}$

$\Rightarrow 2^{1720}.2^{270} < 2^{1720}.3^{172} < 5^{860}$

Vậy $2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 19.

Chứng minh rằng: $\mathbf{2^{1993} < 7^{714}}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3.7^3 \Rightarrow \left(2^{10}\right)^{238} < 3^{238}.\left(7^3\right)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238}.7^{714}$$

$$\begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

Mặt khác $3^{238} = 3^3.3^{235} = 3^3.\left(3^5\right)^{47} < 3^3\left(2^8\right)^{47} < 2^5.2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381}$

$$7a + 4b = 1994 \Rightarrow a = \frac{1994 - 4b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1994 - 4b}{7b} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{1994 - 4b}{7b} < \frac{2}{3} \Rightarrow 4 < \frac{1994 - 4b}{b} < \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1994}{b} - 4 > 4 \Rightarrow \dfrac{1994}{b} > 8 \Rightarrow b < \dfrac{1994}{8} \Rightarrow b < 294\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1994}{b} - 4 < \dfrac{14}{3} \Rightarrow \dfrac{1994}{b} > \dfrac{26}{3} \Rightarrow b > 230\dfrac{1}{13} \end{cases}$$

$\Rightarrow 231 < b < 249$

$7a + 4b = 1994 \Rightarrow 4b = 7k + 6\ (k \in N) \Rightarrow b = \dfrac{7k+6}{4}; b \in N \Rightarrow k = 4l + 2\ (l \in N) \Rightarrow b = 7l + 5$

$\Rightarrow 231 < 7l + 5 < 249 \Rightarrow \dfrac{236}{7} < l < \dfrac{244}{7} \Rightarrow l = 34 \Rightarrow b = 243 \Rightarrow a = 146$

$2^{2380} < 3^{238}.7^{714} \Rightarrow 2^{2380} < 2^{381}.7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$

Bài 20. (Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 1997-1998)

So sánh: $M = \dfrac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1}$ và $N = \dfrac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$

Lời giải

Ta có : $1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1$

$1999^{2000}+1 < 1999^{2009}+1$

$\Rightarrow \dfrac{1999^{1999}+1}{1999^{2000}+1} > \dfrac{1999^{1989}+1}{1999^{2009}+1}$

Vậy $M > N$

Bài 21. (Đề thi HSG 6_ *Quận Hai bà Trưng 1999 - 2000*)

Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

a) $\dfrac{1999}{2000};\dfrac{19992000}{20002000}$ b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{32}>2$

Lời giải

a) Cách 1 : Qui đồng mẫu số rồi so sánh tử.

Cách 2: $\dfrac{1999}{2000}=\dfrac{19991999}{20002000}<\dfrac{19992000}{20002000}$

Cách 3: $\dfrac{1999}{2000}+\dfrac{1}{2000}=\dfrac{19992000}{20002000}+\dfrac{10000}{20002000}=1 \Rightarrow \dfrac{1999}{2000}<\dfrac{19992000}{20002000}$

b) $\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}=\dfrac{4n-1}{4n^2-2n}>\dfrac{1}{n}\left(n\in\mathbb{N};n\geq 2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{32}>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{16}>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{8}>1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}>2$

Bài 22. HSG LÊ QUÝ ĐÔN - HƯNG HÀ

Cho $\mathrm{M}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{7}{8}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{9}{10}$. So sánh M với 1.

Lời giải

$\mathrm{M}=\dfrac{2-1}{2!}+\dfrac{3-1}{3!}+\dfrac{4-1}{4!}+\ldots+\dfrac{9-1}{9!}+\dfrac{10-1}{10!}$

$\mathrm{M}=\left(1-\dfrac{1}{2!}\right)+\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{8!}-\dfrac{1}{9!}\right)+\left(\dfrac{1}{9!}-\dfrac{1}{10!}\right)$

$\mathrm{M}=1-\dfrac{1}{10!}$

Vậy $\mathrm{M}<1$ (vì $0<\dfrac{1}{10!}<1$.

Bài 23. HSG 2012 – 2013

Cho $\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.....\dfrac{9999}{10000}$. So sánh A với $0,01$.

Lời giải

$\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.....\dfrac{9999}{10000}$. Đặt $\mathrm{B}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{5}.\dfrac{6}{7}.....\dfrac{10000}{10001}$.

Vì $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5};\dfrac{5}{6}<\dfrac{6}{7};...;\dfrac{9999}{10000}<\dfrac{10000}{10001}$

Nên $\mathrm{A}<\mathrm{B}$ mà $\mathrm{A}>0;\mathrm{B}>0 \Rightarrow \mathrm{A}^2<\mathrm{A.B}=\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.....\dfrac{9999}{10000}\right).\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{5}.\dfrac{6}{7}.....\dfrac{10000}{10001}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{A}^2<\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{5}.\dfrac{5}{6}.\dfrac{6}{7}.....\dfrac{9999}{10000}.\dfrac{10000}{10001}=\dfrac{1}{10001}<\dfrac{1}{10000}=\left(\dfrac{1}{100}\right)^2=0,01^{\,2}$.

Hay $\mathrm{A}<0,01$.

Bài 24. HSG 2006 – 2007

a) Cho $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng $A<\frac{3}{4}$.

b) So sánh 17^{20} và 31^{15}.

Lời giải

a) $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$

$\Leftrightarrow A<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow A<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\Leftrightarrow A<\frac{3}{4}$

b) $17^{20}>16^{20}=2^{4\ \ 20}=2^{80};31^{15}<32^{15}=2^{5\ \ 15}=2^{75}$

$\Rightarrow 31^{15}<2^{75}<2^{80}<17^{20}\Rightarrow 31^{15}<17^{20}$

Bài 25. HSG 2013 – 2014

Thực hiện so sánh:

a) $A=\frac{2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1}$ với $B=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$

b) $C=1.3.5.7.....99$ với $D=\frac{51}{2}.\frac{52}{2}.\frac{53}{2}.....\frac{100}{2}$.

Lời giải

a) Thực hiện qui đồng mẫu số:

$A=\frac{2009^{2008}+1\ \ 2009^{2010}+1}{2009^{2009}+1\ \ 2009^{2010}+1}=\frac{2009^{4018}+2009^{2010}+2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1\ \ 2009^{2010}+1}$

$B=\frac{2009^{2009}+1\ \ 2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1\ \ 2009^{2009}+1}=\frac{2009^{4018}+2009^{2009}+2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1\ \ 2009^{2009}+1}$

$2009^{2010}+2009^{2008}=2008\ \ 2009^2+1$

$2009^{2009}+2009^{2009}=2009^{2008}\ \ 2009+2009$

Do $2009^2+1>2009+2009$ nên $A>B$.

(Có thể chứng tỏ $A-B>0$ để kết luận $A>B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2009A$ với $2009B$ trước.

b) $C=1.3.5.7.....99=\frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{2.4.6.....100}=\frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{1.2\ \ 2.2\ \ 3.2\ \ 4.2\ .....\ 50.2}$

$=\frac{1.2.3.....50.51.52.53.....100}{1.2.3.....50.\underbrace{2.2.2.....2}_{50cs2}}=\frac{51}{2}.\frac{52}{2}.\frac{53}{2}.....\frac{100}{2}=D$

Vậy $C=D$.

Bài 26. HSG THANH OAI 2013 – 2014

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$$

$$2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$$

$$\Rightarrow 2A+A=3A=1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$$

$$\Rightarrow 3A<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}.$$

Bài 27. HSG THANH OAI 2013 – 2014

So sánh: $\frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1}$ với $B=\frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1}$.

Lời giải

$$A=\frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1}\ \frac{2013^{2014}+1}{2013^{2014}+1}=\frac{2013^{4026}+2013^{2012}+2013^{2014}+1}{2013^{2013}+1\ \ 2013^{2014}+1}$$

$$B=\frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1}\ \frac{2013^{2013}+1}{2013^{2013}+1}=\frac{2013^{4026}+2013^{2013}+2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1\ \ 2013^{2013}+1}$$

$$2013^{2014}+2013^{2012}=2013^{2012}\ \ 2013^2+1$$

$$2013^{2013}+2013^{2013}=2013^{2012}\ \ 2013+2013$$

Do $2013^2+1>2013+2013$ **nên** $A>B$.

(Có thể chứng tỏ $A-B>0$ để kết luận $A>B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2013A$ với $2013B$ trước.

Bài 28.

So sánh $2004^{10}+2004^9$ và 2005^{10}.

Lời giải

$$2004^{10}+2004^9=2004^9\ \ 2004+1\ =2004^9.2005$$

$$2005^{10}=2005^9.2005$$

Ta thấy $2005^9.2005<2005^9.2005\Rightarrow 2004^{10}+2004^9<2005^{10}$.

Bài 29. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Chương 2013 - 2014)

So sánh 2^{2013} và 3^{1344}

Lời giải

$2^{2013}=(2^3)^{671}=8^{671}$; $3^{1344}=(3^2)^{672}=9^{672}$

Ta có $8<9$; $671<672$ nên $8^{671}<9^{672}$ hay $2^{2013}<3^{1344}$

Bài 30. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

So sánh A và B biết: A = $2011^{2012}-2011^{2011}$; B = $2011^{2013}-2011^{2012}$

Lời giải

Ta có:

A = $2011^{2012}-2011^{2011}=2011^{2011}\left(2011-1\right)=2011^{2011}.2010$

B = $2011^{2013}-2011^{2012}=2011^{2012}\left(2011-1\right)=2011^{2012}.2010$

Do $2011^{2012} > 2011^{2011}$ nên B > A.

Bài 31. (Đề thi HSG 6)

So sánh C và D

C = $\frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1}$ D = $\frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1}$

Lời giải

C = $\frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1} \rightarrow 2013C = \frac{2013^{2014}+2013}{2013^{2014}+1} = 1+\frac{2012}{2013^{2014}+1}$

D = $\frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1} \rightarrow 2013D = \frac{2013^{2013}+2013}{2013^{2013}+1} = 1+\frac{2012}{2013^{2013}+1}$

Vì $\frac{2012}{2013^{2014}+1} < \frac{2012}{2013^{2013}+1}$ nên 2013C < 2013D

Vậy C < D

Bài 32. (Đề số 88 Trường THCS Trực Ninh 2013-2014)

So sánh:

C = $\frac{2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1}$ với D = $\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

C = $\frac{(2009^{2008}+1)(2009^{2010}+1)}{(2009^{2009}+1)(2009^{2010}+1)} = \frac{2009^{4018}+2009^{2010}+2009^{2008}+1}{(2009^{2009}+1)(2009^{2010}+1)}$

D = $\frac{(2009^{2009}+1)(2009^{2009}+1)}{(2009^{2010}+1)(2009^{2009}+1)} = \frac{2009^{4018}+2009^{2009}+2009^{2009}+1}{(2009^{2010}+1)(2009^{2009}+1)}$

$2009^{2010}+2009^{2008}=2009^{2008}(2009^2+1)$

$2009^{2009}+2009^{2009}=2009^{2008}(2009+2009)$

Do $(2009^2+1) > (2009+2009)$ nên C > D

Bài 33. So sánh

a) 10^{30} và 2^{100}; b) 8^5 và 3.4^7 ; c) 125^5 và 25^7

Lời giải

a, 10^{30} và 2^{100}

Ta có $10^{30}=(10^3)^{10}=1000^{10}$; $2^{100}=(2^3)^{10}=1024^{10}$

=> $10^{30}< 2^{100}$

b, 8^5và 3.4^7

$8^5=2^{15}$; $3.4^7 =3.2^{14}$ => $8^5< 3.4^7$

c, 125^5và 25^7

$125^5= 5^{15}$; $25^7= 5^{14}$ => 125^5và 25^7

Bài 34.

a) So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$;

b) So sánh: $A=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$.

Lời giải

$$a)\frac{22}{45}<\frac{22}{44}=\frac{1}{2}=\frac{51}{102}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{22}{45}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$$

$$b)B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<1$$

$$\Rightarrow B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<\frac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=\frac{2009^{2010}+2009}{2009^{2011}+2009}$$

$$=\frac{2009\ \ 2009^{2009}+1}{2009\ \ 2009^{2010}+1}=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}=A$$

Vậy $A>B$

Bài 35.

So sánh A = $\frac{2012^{37}+37^{2012}+1}{2012^{38}}$ với B = $\frac{2012^{38}+37^{2012}+2}{2012^{39}}$

Lời giải

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A=\frac{2012^{37}+37^{2012}+1}{2012^{38}}=\frac{2012^{76}+37^{2012}.2012^{39}+2012^{39}}{2012^{39}.2012^{38}}$$

$$B=\frac{2012^{38}+37^{2012}+2}{2012^{39}}=\frac{2012^{76}+37^{2012}.2012^{38}+2.2012^{38}}{2012^{39}.2012^{38}}$$

$$37^{2012}.2012^{39}+2012^{39}=2012^{38}\left(37^{2012}.2012+2012\right)$$

$37^{2012}.2012^{38}+2.2012^{38}=2012^{38}\left(37^{2012}+2\right)$

Từ đó suy ra A > B

Bài 36. (Đề thi HSG 6 – Mã B1)

a) Cho a, b, $n\in\mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$; $B=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B .

Lời giải

Ta xét 3 trường hợp $\frac{a}{b}=1$ $\frac{a}{b}>1$ $\frac{a}{b}<1$

TH1: $\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$ thì $\frac{a+n}{b+n}=\frac{a}{b}=1$.

TH2: $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow a+m>b+n$.

Mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{a}$, vì $\frac{a-b}{b+n}<\frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

TH3: $\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b\Leftrightarrow a+n<b+n$

Khi đó $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{a}$, vì $\frac{a-b}{b}<\frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

Rõ ràng $A<1$ nên theo a, nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}\Rightarrow A<\frac{\left(10^{11}-1\right)+11}{\left(10^{12}-1\right)+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A<\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10\left(10^{10}+1\right)}{10\left(10^{11}+1\right)}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Vậy $A<B$.

Bài 37. (Đề thi HSG 6 – Mã B5)

a) So sánh: 222^{333} và 333^{222}

Lời giải

Ta có $222^{333}=\left(2.111\right)^{3.111}=8^{111}.\left(111^{111}\right)^2.111^{111}$

$333^{222}=\left(3.111\right)^{2.111}=9^{111}.\left(111^{111}\right)^2$

Suy ra : $222^{333}>333^{222}$

Bài 38. (Đề thi HSG 6 – Mã B6)

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow 2A+A=3A=1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow 3A<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}$

b) Đặt $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+...+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt $B=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}\Rightarrow 3B=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B=B+3B=3-\frac{1}{3^{99}}<3\Rightarrow B<\frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A<B<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{3}{16}$

Bài 39. (Đề thi HSG 6 – Mã B10)

So sánh : 9^{20} và 27^{13}

Lời giải

Có : $9^{20}=\left(3^2\right)^{20}=3^{40}$

$27^{13}=\left(3^3\right)^{13}=3^{39}$

Vì $3^{40}>3^{39}\Rightarrow 9^{20}>27^{13}$.

Bài 40. (Đề thi HSG 6)

Cho phân số $\frac{a}{b}\left(a<b\right)$ cùng thêm m đơn vị vào tử và mẫu thì phân số mới lớn hơn hay bé hơn $\frac{a}{b}$?

Lời giải

Theo bài toán cho $a<b$ nên $am<bm$ (nhân cả hai vế với m)

$\Rightarrow ab+am<ab+bm$ (cộng hai vế với ab)

$\Rightarrow a\left(b+m\right)<b\left(a+m\right)$

$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$

Bài 41. (Đề thi HSG 6)

Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+...+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}>\frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

Vậy $\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+.....+\frac{1}{78}+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}$

$=\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+.....+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+...+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}\right)(1)$

Vì $\frac{1}{41}>\frac{1}{42}>...>\frac{1}{60}$ và $\frac{1}{61}>\frac{1}{62}>...>\frac{1}{80}$ (2)

Ta có $\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+...+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{80}+...+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}\right)$

$=\frac{20}{60}+\frac{20}{80}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$ (3)

Từ (1) , (2), (3) Suy ra:

$\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+.....+\frac{1}{78}+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}>\frac{7}{12}$

Bài 42. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng các phân số sau đây bằng nhau.

a) $\frac{41}{88}; \frac{4141}{8888}; \frac{414141}{888888}$

b) $\frac{27425-27}{99900}; \frac{27425425-27425}{99900000}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{4141}{8888}=\frac{41.101}{88.101}=\frac{41}{88}; \frac{414141}{888888}=\frac{41.10101}{88.10101}=\frac{41}{88}$

Vậy $\frac{41}{88}=\frac{4141}{8888}=\frac{414141}{888888}$

b) Ta có:

$$\frac{27425425-27425}{99900000}=\frac{(27425425-425)-(27425-425)}{99900.1000}$$

$$=\frac{27425000-27000}{99900.1000}=\frac{1000(27425-27)}{99900.1000}=\frac{27425-27}{99900}$$

Bài 43. (Đề thi HSG 6)

Điền dấu x vào ô trống thích hợp:

Lời giải

Câu	Đúng	Sai
a) Số $-5\frac{1}{5}$ bằng $-5+\frac{1}{5}$		X
b) Số $11\frac{3}{7}$ bằng $\frac{80}{7}$	X	
c) Số $-11\frac{5}{4}$ bằng $-11-\frac{5}{4}$	X	
d) Tổng $-3\frac{1}{5}+2\frac{2}{3}$ bằng $-1\frac{13}{15}$		X

Bài 44.

Cho S = $\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}$. Chứng minh rằng : $1< S < 2$

Lời giải

a) M = $\frac{10}{56}+\frac{10}{140}+\frac{10}{260}+\ldots+\frac{10}{1400}=\frac{5}{4.7}+\frac{5}{7.10}+\frac{5}{10.13}+\ldots+\frac{5}{25.28}$

$= \frac{5}{3}.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+...+\frac{1}{25}-\frac{1}{28}\right)$

$= \frac{5}{3}.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{28}\right) = \frac{5}{3}.\frac{6}{28} = \frac{5}{14}$

b. $S = \frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14} > \frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15} \Rightarrow S > \frac{15}{15} = 1$ (1)

$S = \frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14} < \frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10} \Rightarrow S < \frac{15}{10} < \frac{20}{10} = 2$ (2)

Từ (1) và (2) => $1 < S < 2$

Bài 45. (Đề thi HSG 6 huyện ABC 2019-2020)

Cho: $A = \frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$; $B = \frac{10^{2002}+1}{10^{2003}+1}$.

Hãy so sánh A và B.

Lời giải

Ta có: $10A = \frac{10^{2002}+10}{10^{2002}+1} = 1+\frac{9}{10^{2002}+1}$ (1)

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003}+10}{10^{2003}+1} = 1+\frac{9}{10^{2003}+1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy : $\frac{9}{10^{2002}+1} > \frac{9}{10^{2003}+1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$

Bài 46.

Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$

Lời giải

$\frac{300}{670} > \frac{300}{677}$ mà $\frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677}$ (1)

Ta có : $1-\frac{37}{67} = \frac{30}{67}$ và $1-\frac{377}{677} = \frac{300}{677}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{377}{677} > \frac{37}{67}$

Bài 47. (Bài 4 - Đề 22)

So sánh: $A = \frac{2005^{2005}+1}{2005^{2006}+1}$ và $B = \frac{2005^{2004}+1}{2005^{2005}+1}$

Lời giải

$A = \frac{2005^{2005}+1}{2005^{2006}+1} < \frac{2005^{2005}+1+2004}{2005^{2006}+1+2004} = \frac{2005(2005^{2004}+1)}{2005(2005^{2005}+1)} = \frac{2005^{2004}+1}{2005^{2005}+1} = B$

Vậy $A < B$

Bài 48. (Bài 1b - Đề 23)

So sánh: $A = \frac{2006^{2006}+1}{2007^{2007}+1}$ và $B = \frac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1}$

Lời giải

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n} (n \in N^*)$

$$A = \frac{2006^{2006}+1}{2006^{2007}+1} < \frac{2006^{2006}+1+2005}{2006^{2007}+2005+1}$$

$$= \frac{2006^{2006}+2006}{2006^{2007}+2006} = \frac{2006(2006^{2005}+1)}{2006(2006^{2006}+1)} = \frac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1} = B$$

Vậy A < B

Bài 49. (Bài 2 - Đề 25)

So sánh các biểu thức :

a) 3^{200} và 2^{300}

b) $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải

Ta có : $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

Vì $9^{100} > 8^{100}$ Nên $3^{200} > 2^{300}$

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} + \frac{121212:10101}{171717:10101} + \frac{2}{17} - \frac{404:101}{1717:101} \Rightarrow A = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12+2-4}{17}$$

Vậy $A = \frac{10}{17}$ hay A =B = $\frac{10}{17}$

Bài 50. Đề thi HSG 6 Kinh Môn 2017 - 2018

So sánh: $E = \frac{2018^{99}-1}{2018^{100}-1}$ và $F = \frac{2018^{98}-1}{2018^{99}-1}$

Lời giải

Ta có: $E = \frac{2018^{99}-1}{2018^{100}-1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100}-2018}{2018^{100}-1} \Rightarrow 2018.E = 1 - \frac{2017}{2018^{100}-1}$

$F=\dfrac{2018^{98}-1}{2018^{99}-1}\Rightarrow 2018.F=\dfrac{2018^{99}-2018}{2018^{99}-1}\Rightarrow 2018.F=1-\dfrac{2017}{2018^{99}-1}$

Vì $\dfrac{2017}{2018^{100}-1}<\dfrac{2017}{2018^{99}-1}\Rightarrow 1-\dfrac{2017}{2018^{100}-1}>1-\dfrac{2017}{2018^{99}-1}$

Hay $2018E>2018F\Rightarrow E>F$

Vậy E > F

Bài 51. Đề HSG Toán 6 năm học 2019-2020

So sánh : $\dfrac{-22}{45}$ và $-\dfrac{51}{103}$

So sánh : $A=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

Lời giải

$a)\dfrac{22}{45}<\dfrac{22}{44}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{51}{102}<\dfrac{51}{101}\Rightarrow\dfrac{22}{45}<\dfrac{51}{101}\Rightarrow\dfrac{-22}{45}>\dfrac{-51}{101}$

$b)B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<1$

$\Rightarrow B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<\dfrac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=\dfrac{2009^{2010}+2009}{2009^{2011}+2009}$

$=\dfrac{2009\left(2009^{2009}+1\right)}{2009\left(2009^{2010}+1\right)}=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}=A$

Vậy $A>B$

Bài 52. Đề HSG Toán 6 Ba Vì năm 2017-2018

Cho $A=\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{33}+...+\dfrac{1}{59}+\dfrac{1}{60}$

Chứng tỏ rằng: $A<\dfrac{4}{5}$

Lời giải

$A=\left(\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{32}+.....+\dfrac{1}{40}\right)+\left(\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{42}+....+\dfrac{1}{50}\right)+\left(\dfrac{1}{51}+....+\dfrac{1}{60}\right)$

$<\left(\dfrac{1}{30}+...+\dfrac{1}{30}\right)+\left(\dfrac{1}{40}+....+\dfrac{1}{40}\right)+\left(\dfrac{1}{50}+...+\dfrac{1}{50}\right)=\dfrac{10}{30}+\dfrac{10}{40}+\dfrac{10}{50}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{47}{60}<\dfrac{48}{60}=\dfrac{4}{5}$

Bài 53. (Đề thi HSG 6 CẤP TRƯỜNG 2018- 2019)

a) So sánh : $\dfrac{-22}{45}$ và $-\dfrac{51}{103}$

b) So sánh : $A=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

Lời giải

$a)\dfrac{22}{45}<\dfrac{22}{44}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{51}{102}<\dfrac{51}{101}\Rightarrow\dfrac{22}{45}<\dfrac{51}{101}\Rightarrow\dfrac{-22}{45}>\dfrac{-51}{101}$

b) $B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<1$

$\Rightarrow B=\dfrac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<\dfrac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=\dfrac{2009^{2010}+2009}{2009^{2011}+2009}$

$=\dfrac{2009\left(2009^{2009}+1\right)}{2009\left(2009^{2010}+1\right)}=\dfrac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}=A$

Vậy $A>B$

Bài 54. (Đề thi HSG 6 TP BUÔN MÊ THUỘT 2018- 2019)

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{8^2}+.....+\dfrac{1}{(2n)^2}<\dfrac{1}{4}$

Lời giải

Ta có:

$A=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{8^2}+.....+\dfrac{1}{(2n)^2}$

$A=\dfrac{1}{(2.2)^2}+\dfrac{1}{(2.3)^2}+\dfrac{1}{(2.4)^2}+.....+\dfrac{1}{(2.n)^2}$

$A=\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{n^2}\right)<\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+.....+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)$

$A<\dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$A<\dfrac{1}{4}.\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{4}$

Bài 55. (Đề thi HSG 6 huyện QUỲNH LƯU 2018- 2019)

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{100^2}<1$

Lời giải

Ta có:

$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+.....+\dfrac{1}{99.100}$

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}=1-\dfrac{1}{100}<1$

Bài 56. (Đề thi HSG 6 Tỉnh ĐỒNG THÁP 2018- 2019)

So sánh p và Q

Biết : $P=\dfrac{2010}{2011}+\dfrac{2011}{2012}+\dfrac{2012}{2013}$ và $Q=\dfrac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải

Ta có:

$Q=\dfrac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}=\dfrac{2010}{2011+2012+2013}+\dfrac{2011}{2011+2012+2013}+\dfrac{2012}{2011+2012+2013}$ Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là : 2011, 2010, 2012 ta thấy :

Ta có: $\dfrac{2010}{2011+2012+2013}<\dfrac{2010}{2011}$

$\dfrac{2011}{2011+2012+2013}<\dfrac{2011}{2012}$

$\dfrac{2012}{2011+2012+2013}<\dfrac{2012}{2013}$

$\Rightarrow P>Q$

Bài 57. (Đề thi HSG 6 huyện VĨNH LỘC 2018- 2019)

Cho tổng $T=\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+.....+\dfrac{2016}{2^{2015}}+\dfrac{2017}{2^{2016}}$

So sánh T với 3

Lời giải

$T=\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+.....+\dfrac{2016}{2^{2015}}+\dfrac{2017}{2^{2016}}$

$2T=2+\dfrac{3}{2^1}+\dfrac{4}{2^2}+.....+\dfrac{2016}{2^{2014}}+\dfrac{2017}{2^{2015}}$

$2T-T=2+\dfrac{3}{2^1}-\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{4}{2^2}-\dfrac{3}{2^2}+....+\dfrac{2016}{2^{2014}}-\dfrac{2015}{2^{2014}}+\dfrac{2017}{2^{2015}}-\dfrac{2016}{2^{2015}}-\dfrac{2017}{2^{2016}}$

$T=2+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+.....+\dfrac{1}{2^{2015}}-\dfrac{2017}{2^{2016}}$

Đặt $N=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+.....+\dfrac{1}{2^{2015}}\Rightarrow 2N=1+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+.....+\dfrac{1}{2^{2014}}$

$2N-N=1-\dfrac{1}{2^{2015}}\Rightarrow N<1$

Nên $T<2+1-\dfrac{2017}{2^{2016}}=3-\dfrac{2017}{2^{2016}}\Rightarrow T<3$

Bài 58. (Đề thi HSG 6 huyện Duy Xuyên 2019-2020)

So sánh các phân số sau: $\dfrac{23}{99};\dfrac{23232323}{99999999};\dfrac{2323}{9999};\dfrac{232323}{999999}$

Lời giải

$\dfrac{23}{99}=\dfrac{23.101}{99.101}=\dfrac{2323}{9999}$

$\dfrac{23}{99}=\dfrac{23.10101}{99.10101}=\dfrac{232323}{999999}$

$\dfrac{23}{99}=\dfrac{23.1010101}{99.1010101}=\dfrac{23232323}{99999999}$

$\Rightarrow \dfrac{23}{99}=\dfrac{2323}{9999}=\dfrac{232323}{999999}=\dfrac{23232323}{99999999}$

Bài 59. (Đề thi HSG 6 cấp trường 2019-2020)

So sánh không qua quy đồng: $A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}};B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải

$A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

$B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

$\frac{-8}{10^{2006}}>\frac{-8}{10^{2005}}\Rightarrow A>B$

Bài 60. (Đề thi HSG 6 cấp trường 2018-2019)

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh: $A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}};B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}}=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-10}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2011}}$

$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2010}}+\frac{-9}{10^{2010}}$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}}>\frac{-10}{10^{2010}}\Rightarrow A>B$

Bài 61. (Đề thi HSG 6 huyện Bạch Thông 2018-2019)

So sánh A và B biết: $A=\frac{2013.2014-1}{2013.2014}$ và $B=\frac{2014.2015-1}{2014.2015}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{2013.2014-1}{2013.2014}=1-\frac{1}{2013.2014}$

$B=\frac{2014.2015-1}{2014.2015}=1-\frac{1}{2014.2015}$

Vì $\frac{1}{2013.2014}>\frac{1}{2014.2015}$ nên $A<B$

Bài 62. (Đề thi HSG 6 Trung Nguyên – Huyện Yên Lạc 2018-2019)

So sánh các số sau: 3^{39} và $11^{21};199^{20}$ và 2003^{15}

Lời giải

Ta có: $3^{39}<3^{40}=\left(3^4\right)^{10}=81^{10};11^{21}>11^{20}=\left(11^2\right)^{10}=121^{10}$

Vì $121^{10}>81^{10}$ nên $11^{21}>3^{39}$

Ta có: $199^{20}<200^{20}=\left(8.25\right)^{20}=2^{60}.5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = \left(2^4.5^3\right)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

Vì $2^{60}.5^{40} < 2^{60}.5^{45}$ nên $199^{20} < 2003^{15}$

Bài 63. (Đề thi HSG 6 huyện Sơn Tây 2019-2020)

a) Cho $a,b,n \in \mathbb{N}^*$. Hãy so sánh: $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b)Cho $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}; B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B

Lời giải

a)Ta xét 3 trường hợp: $\frac{a}{b} = 1;\ \ \frac{a}{b} > 1;\ \ \frac{a}{b} < 1$

Trường hợp 1: $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$ thì $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a}{b} = 1$

Trường hợp 2: $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a+n > b+n$

Mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1là $\frac{a-b}{b}$

Vì $\frac{a-b}{b+n} < \frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$

Trường hợp 3: $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a+n < b+n$

Khi đó : $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{b-a}{b+n}, \frac{a}{b}$ có phần bù tới 1 là $\frac{b-a}{b}$

Vì $\frac{b-a}{b+n} < \frac{b-a}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$

b) $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$; rõ ràng $A < 1$ nên theo a, nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$

$\Rightarrow A < \frac{\left(10^{11}-1\right)+11}{\left(10^{12}-1\right)+11} = \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó: $A < \frac{10^{11}+10}{10^{12}+10} = \frac{10.\left(10^{10}+1\right)}{10.\left(10^{11}+1\right)} = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Vậy $A<B$

Bài 64. (Đề HSG cấp trường 2018 – 2019)

Hãy chọn kết quả đúng

Cho 2 số: $x=\dfrac{222221}{222222}$; $y=\dfrac{444443}{444445}$ ta có:

a. $x=y$ $\quad$ b. $x>y$ $\quad$ c. $x<y$

Lời giải

Chọn đáp án C

Bài 65. (Đề HSG cấp trường 2018 – 2019)

So sánh giá trị của biểu thức :

$A=\dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{9}+.....+\dfrac{9999}{10000}$ với số 99

Lời giải

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+.....+\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+.....+\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

$$=99-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{100^2}\right)=99-B$$

Trong đó, $B=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{100^2}$

Vì $B>0\Rightarrow A<99$

Bài 66. (Đề HSG cấp trường 2018 – 2019)

So sánh hai số: $2^{2^{2^3}}$ và $3^{2^{3^2}}$

Lời giải

Ta có: $3^{2^3}=3^8=9^4>8^4=2^{12}>2^{10}$

Từ đó $2^{3^{2^3}}>2^{2^{10}}=2^{2.2^9}=4^{2^9}>3^{2^9}=3^{2^{3^2}}$

Suy ra : $2^{3^{2^3}}>3^{2^{3^2}}$

Bài 67. (Đề HSG cấp trường 2018 – 2019)

Chứng minh rằng: $A=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+.....+\dfrac{1}{3^{99}}<\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $3A=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+.....+\dfrac{1}{3^{98}}$

Nên $3A-A=1-\frac{1}{3^{99}}$ hay $2A=1-\frac{1}{3^{99}}\Rightarrow A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3^{99}}<\frac{1}{2}$

Vậy $A<\frac{1}{2}$

Bài 68. (Đề HSG cấp trường 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}$

$A=\frac{1}{(2.2)^2}+\frac{1}{(2.3)^2}+\frac{1}{(2.4)^2}+.....+\frac{1}{(2.n)^2}$

$A=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+.....+\frac{1}{(n-1)n}\right)$

$A<\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$A<\frac{1}{4}.\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}(dfcm)$

Bài 69. (Đề thi HSG 6 huyện Lương Tài 2105 – 2016)

So sánh A và B biết:

$A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1},\qquad B=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Lời giải

Vì $A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<1\Rightarrow A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<\frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16}=\frac{17.\left(17^{17}+1\right)}{17.\left(17^{18}+1\right)}=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}=B$

Bài 70. (Đề thi HSG 6 huyện Vũ Thư 2018-2019)

Cho biểu thức $D=\frac{(2!)^2}{1^2}+\frac{(2!)^2}{3^2}+\frac{(2!)^2}{5^2}+\frac{(2!)^2}{7^2}+.....+\frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n!=1.2.3....n\left(n\in\mathbb{N}\right)$

Lời giải

Ta có:

$$D=\frac{(2!)^2}{1^2}+\frac{(2!)^2}{3^2}+\frac{(2!)^2}{5^2}+\frac{(2!)^2}{7^2}+.....+\frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D=\frac{2^2}{1^2}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{2^2}{7^2}+.....+\frac{2^2}{2015^2}$$

$$D=4+2.\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+.....+\frac{2}{2015^2}\right)$$

$$D<4+2.\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+.....+\frac{2}{2013.2015}\right)$$

$$=4+2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)$$

$$=4+2\left(1-\frac{1}{2015}\right)=4+2-\frac{2}{2015}<6$$

$$\Rightarrow D<6$$

Bài 71. (Đề thi HSG 6 THCS Nguyễn Khuyến 2018-2019)

So sánh : $\frac{-22}{45}$ và $\frac{-51}{103}$

Lời giải

$$\frac{22}{45}<\frac{22}{44}=\frac{1}{2}=\frac{51}{102}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{22}{45}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$$

Bài 72. (Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2018-2019)

So sánh P và Q

Biết: $P=\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2013}$ và $Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải

Ta có:

$$Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$$

$$=\frac{2010}{2011+2012+2013}+\frac{2011}{2011+2012+2013}+\frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: $2010;2011;2012$ thấy được các phân thức của P đều lớn hơn các phân thức của Q.

Vậy $P>Q$

Bài 73. (Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2017-2018)

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}};B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}$

Lời giải

Ta có:

$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}}=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-10}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2011}}$

$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2010}}+\frac{-9}{10^{2010}}$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}}>\frac{-10}{10^{2010}}\Rightarrow A>B$

Bài 74. (Đề thi HSG 6 huyện Lập Thạch 2018-2019)

So sánh S với 3, biết $S=\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2011}$

Lời giải

$S=\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2013}+\frac{2013}{2011}=\left(1-\frac{1}{2012}\right)+\left(1-\frac{1}{2013}\right)+\left(1+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2011}\right)$

$=3+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)$

$Do\ \frac{1}{2011}>\frac{1}{2012};\frac{1}{2011}>\frac{1}{2013}$

Nên: $\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}>0,\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}>0\Rightarrow 3+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)>3$

Vậy S>320

Bài 75. (Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2019-2020)

So sánh: $N=\frac{5}{10^{2005}}+\frac{11}{10^{2006}}$ và $M=\frac{11}{10^{2005}}+\frac{5}{10^{2006}}$

Lời giải

Ta có: $N-M=\frac{5}{10^{2005}}+\frac{11}{10^{2006}}-\frac{11}{10^{2005}}-\frac{5}{10^{2006}}=\frac{6}{10^{2006}}-\frac{6}{10^{2005}}$

$=6\left(\frac{1}{10^{2006}}-\frac{1}{10^{2005}}\right)<0\Rightarrow N<M$

Bài 76. (Đề thi HSG 6 huyện Lương Tài 2015-2016)

So sánh A và B biết: $A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1},\qquad B=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Lời giải

Vì $A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<1\Rightarrow A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<\frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16}=\frac{17.\left(17^{17}+1\right)}{17.\left(17^{18}+1\right)}=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}=B$

Bài 77. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Chương 2019-2020)

So sánh : 2^{2013} và 3^{1344}

Lời giải

$2^{2013}=\left(2^3\right)^{671}=8^{671};3^{1344}=\left(3^2\right)^{672}=9^{672}$

$Do 8<9,671<672\Rightarrow 8^{671}<9^{672}\Rightarrow 2^{2013}<3^{1344}$

Bài 78. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh:

a) $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$ b) $9^8.5^{16}$ và 19^{20}

Lời giải

$a)\frac{1717}{8585}=\frac{17}{85}=\frac{1}{5}=\frac{13}{65}<\frac{13}{51}=\frac{1313}{5151}\Rightarrow\frac{1717}{8585}<\frac{1313}{5151}$

$b)9^8.5^{16}=3^{16}.5^{16}=15^{16}<19^{16}<19^{20}\Rightarrow 9^8.5^{16}<19^{20}$

Bài 79. (Đề thi HSG 6 huyện Bá Thước 2018 - 2019)

Cho $A=1+2012+2012^2+2012^3+2012^4+.....+2012^{71}+2012^{72}$ và $B=2012^{73}-1.$

So sánh A và B

Lời giải

Ta có: $2012A=2012+2012^2+2012^3+2012^4+....+2012^{72}+2012^{73}$

Lấy $2012A-A=2012^{73}-1,$

Vậy $A=\frac{2012^{73}-1}{2011}<B=2012^{73}-1$

Bài 80. (HSG6 LƯƠNG TÀI , 2015-2016)

So sánh A và B biết:

$A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1},\qquad B=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$

Lời giải

Vì $A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<1\Rightarrow A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<\frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16}=\frac{17.\left(17^{17}+1\right)}{17.\left(17^{18}+1\right)}=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}=B$

Bài 81. (NGA SƠN, 2018-2019)

So sánh:

$a) 3^{200}$ và 2^{300} b) 71^{50} và 37^{75} c) $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$

Lời giải

So sánh 3^{200} và 2^{300}

Ta có: $3^{200}=\left(3^2\right)^{100}=9^{100}$; $2^{300}=\left(2^3\right)^{100}=8^{100}$

Mà $8^{100}<9^{100}$ nên $2^{300}<3^{200}$

So sánh 71^{50} và 37^{75}

Ta thấy : $71^{50}<72^{50}=\left(8.9\right)^{50}=2^{150}.3^{100}$ (1)

$37^{75}>36^{75}=\left(2^2.3^2\right)^{75}=2^{150}.3^{150}$ (2)

Mà $2^{150}.3^{150}>2^{150}.3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $37^{75}>71^{50}$

So sánh $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$

Ta có: $\frac{201201}{202202}=\frac{201}{202}.\frac{1001}{1001}=\frac{201}{202}$; $\frac{201201201}{202202202}=\frac{201}{202}.\frac{1001001}{1001001}=\frac{201}{202}$

Vậy 2 phân số trên bằng nhau.

Bài 82. (ĐỒNG THÁP, 2018-2019)

So sánh P và Q

Biết : $P=\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2013}$ và $Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$

Lời giải

Ta có:

$$Q=\frac{2010+2011+2012}{2011+2012+2013}$$
$$=\frac{2010}{2011+2012+2013}+\frac{2011}{2011+2012+2013}+\frac{2012}{2011+2012+2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là : 2011, 2010, 2012 ta thấy

$P>Q$

Bài 83. (LÝ NHÂN, 2018-2019)

So sánh A và B biết: $A=\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2010}$ và $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....+\frac{1}{17}$

Lời giải

$$A=\left(1-\frac{1}{2011}\right)+\left(1-\frac{1}{2012}\right)+\left(1+\frac{2}{2010}\right)$$

$$A=3+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2012}\right)$$

$$\Rightarrow A>3$$

$$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+.....+\frac{1}{17}\right)$$

$$B<\frac{1}{2}.2+\frac{1}{5}.5+\frac{1}{8}.8\Rightarrow B<3$$

Từ đó suy ra $A>B$

Bài 84. (HSG6, 2017-2018)

Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{100^2}<1$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2.1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};.....;\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$

Bài 85. (BẠCH LIÊU, 2018-2019)

Cho $M=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}$. Chứng minh rằng $M<1$

Lời giải

Ta có:

$$M<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+.....+\frac{1}{2008.2009}+\frac{1}{2009.2010}$$

$$M<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}$$

$$M<1-\frac{1}{2010}\Rightarrow M<1$$

Bài 86. (THẠCH THÀNH, 2018-2019)

Cho $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$.

Chứng minh $A<\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$

$A=\frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}}+.....+\frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$

$=\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.6}+\frac{2}{4.8}+.....+\frac{2}{1009.2018}=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+....+\frac{1}{1009.1009}$

$A<\frac{1}{2.2}+\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{1008.1009}\right)$

$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{1008}-\frac{1}{1009}\right)$

$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1009}\right)\Rightarrow A<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow A<\frac{3}{4}(dfcm)$

Bài 87. (NGA SƠN, 2018-2019)

Cho $A=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{50^2}$.Chứng minh : $A<2$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.....$

$\frac{1}{50^2}<\frac{1}{49.50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$

Vậy $A=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{50^2}$

$$<\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{49.50}$$

$$=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$$

$$=1+1-\frac{1}{50}=\frac{99}{50}<2$$

Bài 88. (Đề thi HSG HUYỆN TÌNH GIA 2018 - 2019)

So sánh 2 phân số: $\frac{20072007}{20082008}$ và $\frac{200720072007}{200820082008}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{20072007}{20082008}=\frac{2007.1001}{2008.1001}=\frac{2007}{2008}$$

$$\frac{200720072007}{200820082008}=\frac{2007.100010001}{2008.100010001}=\frac{2007}{2008}$$

Vậy hai phân số trên bằng nhau

Bài 89. (Đề thi HSG cấp trường)

So sánh hai phân số $\frac{a-1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}$ (với a, b là số nguyên cùng dấu và $a;b\neq 0$)

Lời giải

Có $\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}$ và $\frac{b+1}{b}=1+\frac{1}{b}$

*Nếu $a>0,b>0\Rightarrow\frac{1}{a}>0$ và $\frac{1}{b}>0\Rightarrow 1-\frac{1}{a}<1+\frac{1}{b}$ hay $\frac{a-1}{a}<\frac{b+1}{b}$

*Nếu $a<0,b<0\Rightarrow\frac{1}{a}<0;\frac{1}{b}<0\Rightarrow 1-\frac{1}{a}>1+\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{a-1}{a}>\frac{b+1}{b}$

Bài 90. (Đề thi HSG 6 Cấp trường)

Cho $A=1+4+4^2+4^3+.....+4^{98}+4^{99}, B=4^{100}$ Chứng minh rằng: $A<\frac{B}{3}.$

Lời giải

$$4A=4.\left(1+4+4^2+4^3+4^4+.....4^{98}+4^{99}\right)$$

$$=4+4^2+4^3+4^4+.....4^{98}+4^{99}+4^{100}$$

$$\Rightarrow 4A-A=4^{100}-1\Rightarrow A=\frac{4^{100}-1}{3}$$

Vì $4^{100}-1<4^{100}\Rightarrow\frac{4^{100}-1}{3}<\frac{4^{100}}{3}$

Vậy $A<\frac{B}{3}$

Bài 91. (Đề thi HSG 6 Cấp trường)

a) Cho $a,b,n\in\mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1};\quad B=\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

Th1: $\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow a=b\Rightarrow\dfrac{a+n}{b+n}=\dfrac{a}{b}=1$

Th2: $\dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b\Rightarrow a+m>b+n$, mà $\dfrac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\dfrac{a-b}{b+n}$

$\dfrac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\dfrac{a-b}{b}$, vì $\dfrac{a-b}{b+n}<\dfrac{a-b}{b}$ nên $\dfrac{a+n}{b+n}<\dfrac{a}{b}$

Th3: $\dfrac{a}{b}<1\Rightarrow a<b\Rightarrow a+n<b+n$

Khi đó $\dfrac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\dfrac{a-b}{b}$, vì $\dfrac{a-b}{b}<\dfrac{b-a}{b+n}$ nên $\dfrac{a+n}{b+n}>\dfrac{a}{b}$

b) Cho $A=\dfrac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

rõ ràng $A<1$ nên theo câu a, $\dfrac{a}{b}<1\Rightarrow\dfrac{a+n}{b+n}>\dfrac{a}{b}\Rightarrow A<\dfrac{\left(10^{11}-1\right)+11}{\left(10^{12}-1\right)+11}=\dfrac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A<\dfrac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\dfrac{10\left(10^{10}+1\right)}{10.\left(10^{11}+1\right)}=\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Vậy A < B.

Bài 92. (Đề thi HSG 6 2018 - 2019)

Chứng minh $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{n^2}<1$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n.(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

Áp dụng : $\dfrac{1}{2^2}<1-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3};.....;\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n}<1$

Bài 93. (Đề thi HSG6 năm 2019 - 2020)

So sánh: $A=\dfrac{2016^{2016}+1}{2016^{2017}+1}$ và $B=\dfrac{2016^{2015}+1}{2016^{2016}+1}$

Lời giải

$A=\dfrac{2016^{2016}+1}{2016^{2017}+1}<\dfrac{2016^{2016}+1+2015}{2016^{2017}+1+2015}=\dfrac{2016.\left(2016^{2015}+1\right)}{2016\left(2016^{2016}+1\right)}=B\Rightarrow A<B$

Bài 94. (Đề thi HSG 6 - 2019 - 2020)

So sánh $A=\dfrac{2006^{2006}+1}{2007^{2007}+1}$ và $B=\dfrac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1}$

Lời giải

Ta có nếu $\dfrac{a}{b}<1\Rightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+n}{b+n}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

$$A=\frac{2006^{2006}+1}{2006^{2007}+1}<\frac{2006^{2006}+1+2005}{2006^{2007}+2005+1}=\frac{2006^{2006}+2006}{2006^{2007}+2006}$$
$$=\frac{2006.\left(2006^{2005}+1\right)}{2006.\left(2006^{2006}+1\right)}=\frac{2006^{2005}+1}{2006^{2006}+1}=B$$

Vậy $A<B$

Bài 95. (Đề thi HSG6 - 2018-2019)

So sánh các biểu thức:

a) 3^{200} và 2^{300}

b) $A=\dfrac{121212}{171717}+\dfrac{2}{17}-\dfrac{404}{1717}$ với $B=\dfrac{10}{17}$

Lời giải

a) Ta có: $3^{200}=\left(3^2\right)^{100}=9^{100}>8^{100}=\left(2^3\right)^{100}=2^{300}\Rightarrow 3^{200}>2^{300}$

b) $A=\dfrac{121212}{171717}+\dfrac{2}{17}-\dfrac{404}{1717}=\dfrac{12}{17}+\dfrac{2}{17}-\dfrac{4}{17}=\dfrac{10}{17}\Rightarrow A=B$

Bài 96. (Đề thi HSG 6 - huyện Thanh Oai - 2018 -2019)

Cho biết $S=\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{102}+.....+\dfrac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{4}<S<\dfrac{91}{330}$

Lời giải

*Chứng minh $S<\dfrac{91}{330}$

$$S=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{111}+....+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{121}+.....+\frac{1}{130}\right)$$
$$S<\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+.....+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{110}+.....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+.....+\frac{1}{120}\right)$$
$$S<\frac{1}{100}.10+\frac{1}{110}.10+\frac{1}{120}.10=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{181}{660}<\frac{182}{660}<\frac{91}{330}$$
$$\Rightarrow S<\frac{91}{330}\qquad(1)$$

*Chứng minh $\dfrac{1}{4}<S$

$$S > \left(\frac{1}{110}+.....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+....+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{130}+....+\frac{1}{130}\right)$$

$$S > \frac{1}{110}.10+\frac{1}{120}.10+\frac{1}{130}.10=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \Rightarrow S > \frac{1}{4} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Bài 97. (Đề thi HSG 6 cấp Huyện 2018 -2029)

Thực hiện so sánh:

$a) A=\frac{20132013}{20142014}$ với $B=\frac{131313}{141414}$

$b) C=2013^9+2013^{10}$ với $D=2014^{10}$

Lời giải

$a) A=\frac{2013.10001}{2014.10001}=\frac{2013}{2014}; B=\frac{13.10101}{14.10101}=\frac{13}{14}$

$1-A=1-\frac{2013}{2014}=\frac{1}{2014}; 1-B=1-\frac{13}{14}=\frac{1}{14}$

$Do 1-A<1-B \Rightarrow A>B$

$b) C=2013^9.(1+2013)=2013^9.2014$

$D=2014^9.2014$

$2013<2014 \Rightarrow C<D$

Bài 98. (Đề thi HSG 6)

So sánh $2004^{10}+2004^9$ và 2005^{10}

Lời giải

$2004^{10}+2004^9=2004^9.(2004+1)=2004^9.2005$

$2005^{10}=2005^9.2005$

$Do\ 2004^9.2005<2005^9.2005 \Rightarrow 2004^{10}+2004^9<2005^{10}$

Bài 99. (Đề thi HSG 6 - Việt Yên 2019-2020)

So sánh $A=\frac{10^{2014}+2016}{10^{2015}+2016}$ và $B=\frac{10^{2015}+2016}{10^{2016}+2016}$

Lời giải

Ta có:

$$A=\frac{10^{2014}+2016}{10^{2015}+2016}=\frac{\left(10^{2014}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}$$

$$=\frac{10^{4030}+2016.\left(10^{2014}+10^{2016}\right)+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}=\frac{10^{4030}+2016.10^{2014}.101+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)} \quad (1)$$

Lại có

$$B=\frac{10^{2015}+2016}{10^{2016}+2016}=\frac{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2015}+2016\right)}{\left(10^{2016}+2016\right).\left(10^{2015}+2016\right)}$$

$$=\frac{10^{4030}+2.2016.10^{2015}+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right)\left(10^{2016}+2016\right)}=\frac{10^{4030}+20.2016.10^{2014}+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right)\left(10^{2016}+2016\right)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A>B$

Bài 100. (THCS Duy Xuyên năm học 2018- 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{100^2}<1$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{99.100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{100^2}<1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$$

Bài 101. (Đề thi HSG Thanh Chương năm học 2018- 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{32}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{47}+\frac{1}{50}<\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{32}+\frac{1}{35}<\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{45}+\frac{1}{47}+\frac{1}{50}<\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\frac{1}{45}=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{32}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{47}+\frac{1}{50}<\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}$$

Bài 102. (Đề thi HSG 6 Duy Xuyên năm học 2019- 2020)

So sánh các phân số: $\frac{23}{99};\frac{23232323}{99999999};\frac{2323}{9999};\frac{232323}{999999}$

Lời giải

$$\frac{23}{99}=\frac{23.101}{99.101}=\frac{2323}{9999}$$
$$\frac{23}{99}=\frac{23.10101}{99.10101}=\frac{232323}{999999}$$
$$\frac{23}{99}=\frac{23.1010101}{99.1010101}=\frac{23232323}{99999999}$$
$$\Rightarrow \frac{23}{99}=\frac{2323}{9999}=\frac{232323}{999999}=\frac{23232323}{99999999}$$

Bài 103. (Đề thi HSG 6 Thanh Chương năm học 2018- 2019)

So sánh : $A=\frac{2012^{2012}+1}{2012^{2013}+1}$ và $B=\frac{2012^{2011}+1}{2012^{2012}+1}$

Lời giải

Vì $2012^{2012}+1<2012^{2013}+1\Rightarrow \frac{2012^{2012}+1}{2012^{2013}+1}<1$

$$\Rightarrow \frac{2012^{2012}+1}{2012^{2013}+1}<\frac{2012^{2012}+1+2011}{2012^{2013}+1+2011}$$
$$=\frac{2012^{2012}+2012}{2012^{2013}+2012}=\frac{2012.\left(2012^{2011}+1\right)}{2012.\left(2012^{2012}+1\right)}=\frac{2012^{2011}+1}{2012^{2012}+1}=B$$
$$\Rightarrow A<B$$

Bài 104.

a) Cho $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng $A<\frac{3}{4}$

b) So sánh 17^{20} và 31^{15}

Lời giải

$$a)A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{99.100}$$
$$\Leftrightarrow A<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$
$$\Leftrightarrow A<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\Leftrightarrow A<\frac{3}{4}$$
$$b)17^{20}>16^{20}=\left(2^4\right)^{20}=2^{80}$$
$$31^{15}<32^{15}=25^{15}=2^{75}$$
$$31^{15}<2^{75}<2^{80}<17^{20}\Rightarrow 31^{15}<17^{20}$$

Bài 105. (Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 2017-2018)

So sánh :

$$a)A=\frac{2009^{2008}+1}{2009^{2009}+1}\text{ với }B=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$$

b) 31^{11} và 17^{14}

Lời giải

a)Thực hiện quy đồng mẫu số:

$$A=\frac{\left(2009^{2008}+1\right)\left(2009^{2010}+1\right)}{\left(2009^{2009}+1\right)\left(2009^{2010}+1\right)}=\frac{2009^{4018}+2009^{2010}+2009^{2008}+1}{\left(2009^{2009}+1\right)\left(2009^{2010}+1\right)}$$

$$B=\frac{\left(2009^{2009}+1\right)\left(2009^{2009}+1\right)}{\left(2009^{2010}+1\right)\left(2009^{2009}+1\right)}=\frac{2009^{4018}+2009^{2010}+2009^{2008}+1}{\left(2009^{2010}+1\right)\left(2009^{2009}+1\right)}$$

$$2009^{2010}+2009^{2008}=2009^{2008}.\left(2009^2+1\right)$$

$$2009^{2009}+2009^{2009}=2009^{2008}.\left(2009+2009\right)$$

$$Do\left(2009^2+1\right)>\left(2009+2009\right)\Rightarrow A>B$$

$$31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55}<2^{56}=\left(2^4\right)^{14}=16^{14}<17^{14}\Rightarrow 31^{11}<17^{14}$$

Bài 106. So sánh hai phân số:

$$B=\frac{10^{2012}-10}{10^{2013}-10}\text{ và }A=\frac{10^{2011}+10}{10^{2012}+10}$$

Lời giải

Vì $B<1$nên

$$B<\frac{10^{2012}-10+110}{10^{2013}-10+110}=\frac{10^{2012}+100}{10^{2013}+100}=\frac{10\left(10^{2011}+10\right)}{10\left(10^{2012}+10\right)}=\frac{10^{2011}+10}{10^{2012}+10}=A$$

Bài 107. So sánh không qua quy đồng: $A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}};B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải

$$A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\frac{-8}{10^{2006}}>\frac{-8}{10^{2005}}\Rightarrow A>B$$

Bài 108. Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}};B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải

Ta có:

$$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}}=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-10}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2011}}$$
$$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2010}}+\frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}}>\frac{-10}{10^{2010}}\Rightarrow A>B$

Bài 109.

a) Cho $a,b,n\in\mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1};\quad B=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

Th1: $\frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b\Rightarrow\frac{a+n}{b+n}=\frac{a}{b}=1$

Th2: $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b\Rightarrow a+m>b+n$, mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b+n}<\frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

Th3: $\frac{a}{b}<1\Rightarrow a<b\Rightarrow a+n<b+n$

Khi đó $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b}<\frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

rõ ràng $A<1$ nên theo câu a, $\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}\Rightarrow A<\frac{\left(10^{11}-1\right)+11}{\left(10^{12}-1\right)+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A<\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10\left(10^{10}+1\right)}{10.\left(10^{11}+1\right)}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Bài 110. (Đề thi HSG 6 THCS Kim Trực- Kim Bài 2017-2018)

Cho x,y,z là các số nguyên dương. Chứng minh rằng biểu thức sau không có giá trị nguyên.

$$A=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$$

Lời giải

Chứng minh được:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y} > \dfrac{x}{x+y+z} \\ \dfrac{y}{y+z} > \dfrac{y}{x+y+z} \\ \dfrac{z}{z+x} > \dfrac{z}{x+y+z} \end{cases} \Rightarrow A > 1 \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} < \dfrac{x+z}{x+y+z} \\ \dfrac{y}{y+z} < \dfrac{y+x}{x+y+z} \\ \dfrac{z}{z+x} < \dfrac{z+y}{x+y+z} \end{cases} \Rightarrow A < 2$$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không là số nguyên.

Bài 111. (Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 2017-2018)

So sánh

a) 27^{11} & 81^8

b) 5^{36} & 11^{24}

c) 3^{39} & 11^{21}

Lời giải

a) $27^{11} = \left(3^3\right)^{11} = 3^{33}$; $81^8 = \left(3^4\right)^8 = 3^{32}$

$Do 3^{33} > 3^{32} \Rightarrow 27^{11} > 81^8$

b) $5^{36} = \left(5^3\right)^{12} = 125^{12}$; $11^{24} = \left(11^2\right)^{12} = 121^{12}$

$Do 125^{12} > 121^{12} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$

c) $3^{39} < 3^{40} = \left(3^4\right)^{10} = 81^{10}$; $11^{21} > 11^{20} = \left(11^2\right)^{10} = 121^{10}$

$Do 121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$

Bài 112. (Đề thi HSG 6 trường….. 2018 - 2019)

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\dfrac{-10}{10^{2011}} > \dfrac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 113. (Đề thi HSG 6 huyện Bá Thước 2018 - 2019)

Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + ... + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$.

So sánh A và B

Lời giải

Ta có: $2012A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + ... + 2012^{72} + 2012^{73}$

Lấy $2012A - A = 2012^{73} - 1$, Vậy $A = \dfrac{2012^{73} - 1}{2011} < B = 2012^{73} - 1$

Bài 114. (Đề thi HSG 6 huyện ….. 2019 - 2020)

a) So sánh : $\dfrac{-22}{45}$ và $-\dfrac{51}{103}$

b) So sánh : $A = \dfrac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$ và $B = \dfrac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2}$

Lời giải

$a)\ \dfrac{22}{45} < \dfrac{22}{44} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{51}{102} < \dfrac{51}{101} \Rightarrow \dfrac{22}{45} < \dfrac{51}{101} \Rightarrow \dfrac{-22}{45} > \dfrac{-51}{101}$

$b)\ B = \dfrac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < 1$

$\Rightarrow B = \dfrac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < \dfrac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = \dfrac{2009^{2010} + 2009}{2009^{2011} + 2009}$

$= \dfrac{2009\left(2009^{2009} + 1\right)}{2009\left(2009^{2010} + 1\right)} = \dfrac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1} = A$

Vậy $A > B$

Bài 115. (Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 20… - 20…)

So sánh phân số: $A = \dfrac{2012^{2012} + 1}{2012^{2013} + 1}$ và $B = \dfrac{2012^{2011} + 1}{2012^{2012} + 1}$

Lời giải

Ta có: $2012.A = \dfrac{2012^{2013} + 2012}{2012^{2013} + 1} = 1 + \dfrac{2011}{2012^{2013} + 1}$ (1)

$2012B = \dfrac{2012^{2012} + 2012}{2012^{2012} + 1} = 1 + \dfrac{2011}{2012^{2012} + 1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy: $\dfrac{2011}{2012^{2013} + 1} < \dfrac{2011}{2012^{2012} + 1}$

Suy ra $2012A < 2012B \Rightarrow A < B$

Bài 116. (Đề thi HSG 6 Trường THCS Nguyễn Khuyến 2017-2018)

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$A = \dfrac{-9}{10^{2012}} + \dfrac{-19}{10^{2011}}; B = \dfrac{-9}{10^{2011}} + \dfrac{-19}{10^{2012}}$

Lời giải

$A = \dfrac{-9}{10^{2012}} + \dfrac{-19}{10^{2011}} = \dfrac{-9}{10^{2012}} + \dfrac{-10}{10^{2011}} + \dfrac{-9}{10^{2011}}$

$B = \dfrac{-9}{2011} + \dfrac{-19}{2012} = \dfrac{-9}{2011} + \dfrac{-10}{2012} + \dfrac{-9}{2012}$

Mà $\dfrac{-10}{10^{2011}} < \dfrac{-10}{10^{2012}}$ nên $A < B$

Bài 117. (Đề thi HSG 6 Huyện Lương Tài 2015-2016)

So sánh A và B biết:

$$A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1},\qquad B=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}$$

Lời giải

Vì $A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<1\Rightarrow A=\frac{17^{18}+1}{17^{19}+1}<\frac{17^{18}+1+16}{17^{19}+1+16}=\frac{17.\left(17^{17}+1\right)}{17.\left(17^{18}+1\right)}=\frac{17^{17}+1}{17^{18}+1}=B$

Bài 118. (Đề thi HSG 6 cấp trường năm học 2018 - 2019)

So sánh hai số 55^{66} và 66^{55}

Lời giải

Ta có: $55^{66}=\left(55^6\right)^{11}$; $66^{55}=\left(66^5\right)^{11}$

Vì $55^6=5^6.11^6=15625.11.11^5$; $66^5=6^5.11^5=7776.11^5\Rightarrow 55^6>66^5$

Suy ra $55^{66}>66^{55}$

Bài 119. (HSG Toán 6 cấp trường)

So sánh:

a) 2^{91} và 5^{35} b) $B=\frac{2008}{x^m}+\frac{2008}{x^n}, A=\frac{2005}{x^m}+\frac{2011}{x^n}\left(x,m,n\in\mathbb{N}^*\right)$

Lời giải

$a)2^{91}>2^{90}=32^{18}>25^{18}=5^{36}>5^{35}\Rightarrow 2^{91}>5^{35}$

b) Tách rồi so sánh: $\frac{3}{x^m},\frac{3}{x^n}$

Xét $x=1\Rightarrow A=B$

Xét $x>1:\begin{cases}A=B\Leftrightarrow m=n\\A>B\Leftrightarrow m>n\\A<B\Leftrightarrow m<n\end{cases}$

Bài 120. (HSG Toán 6 cấp trường)

Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số $1;2;3$ với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần

Lời giải

*****Trường hợp không dùng lũy thừa

Số lớn nhất có thể viết được: 321

*Trường hợp dùng lũy thừa

- Xét các lũy thừa mà số mũ có một chữ số: $13^2,31^2,12^3,21^3$

So sánh 21^3 và 31^2, ta có: $21^3>31^2$

Xét các lũy thừa mà số mũ có 2 chữ số: $2^{13},2^{31},3^{12},3^{21}$

So sánh 3^{21} và 2^{31} ta có:

$3^{21}=3.3^{20}=3.\left(3^2\right)^{10}=3.9^{10}$

$2^{31}=2.2^{30}=2.\left(2^3\right)^{10}=2.8^{10}$

Từ đó suy ra $3^{21}>2^{31}$

So sánh 3^{21} với 21^3 ta có: $3^{21}>3^9=\left(3^3\right)^3=27^3>21^3$

Vậy số lớn nhất là 3^{21}

Bài 121. (Đề HSG Toán 6_Đặng Chánh Kỷ_2018-2019)

Cho 2 phân số $\frac{1}{7}<\frac{a}{b}<\frac{2}{3}$

Tìm 10 phân số có dạng $\frac{a}{b}$ sao cho $\frac{1}{7}<\frac{a}{b}<\frac{2}{3}$

Có thể tìm được bao nhiêu phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn điều kiện trên ?

Lời giải

a) $\frac{3}{21}<\frac{a}{b}<\frac{14}{21}\Rightarrow 10$ phân số là: $\frac{4}{21};\frac{5}{21};.....;\frac{13}{21}$

b) Có vô số phân số thỏa mãn điều kiện trên vì các phân số cần tìm phụ thuộc vào mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì phân số càng nhiều

Bài 122. (Đề HSG Toán 6_cấp trường_2018-2019)

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}};B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}$

Lời giải

$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}}=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-10}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2011}}$

$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2010}}+\frac{-9}{10^{2010}}$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}}>\frac{-10}{10^{2010}}\Rightarrow A>B$

Bài 123. (Đề HSG Toán 6_cấp trường_2019-2020)

So sánh không qua quy đồng: $A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}};B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải

$$A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\frac{-8}{10^{2006}}>\frac{-8}{10^{2005}}\Rightarrow A>B$$

Bài 124. (Đề HSG Toán 6_cấp trường_2019-2020)

a)So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

b)So sánh tổng $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+.....+\frac{n}{2^n}+.....+\frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Lời giải

a) $\frac{15}{301}<\frac{15}{300}=\frac{1}{20}=\frac{25}{500}<\frac{25}{499}$. Vậy $\frac{15}{301}<\frac{25}{499}$

b)Với mọi $n\geq 2$, ta có: $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^2}-\frac{5}{2^3}\right)+.....+\left(\frac{2008}{2^{2006}}-\frac{2009}{2^{2007}}\right)=2-\frac{2009}{2^{2007}}<2$. Vậy $S<2$

Bài 125. Đề HSG Toán 6_cấp huyện_2018-2019

Cho $A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{9999}{10000}$. So sánh A với $0,01$

Lời giải

$A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{9999}{10000}$,đặt $B=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.....\frac{10000}{10001}$

Vì $\frac{1}{2}<\frac{2}{3};\frac{3}{4}<\frac{4}{5};.....;\frac{9999}{10000}<\frac{10000}{10001}$ nên $A<B$ mà $A>0;B>0$

$\Rightarrow A^2<AB=\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{9999}{10000}\right).\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.....\frac{10000}{10001}\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{9999}{10000}.\frac{10000}{10001}=\frac{1}{10001}<\frac{1}{10000}=(0,01)^2\Rightarrow A^2<(0,01)^2\Rightarrow A<0,01$

Bài 126. Đề HSG Toán 6_Nga Sơn_2018-2019

$a)3^{200}$ và 2^{300} b) 71^{50} và 37^{75} c) $\frac{201201}{202202}$ và $\frac{201201201}{202202202}$

Lời giải

a) So sánh 3^{200} và 2^{300}

Ta có: $3^{200}=\left(3^2\right)^{100}=9^{100}$; $2^{300}=\left(2^3\right)^{100}=8^{100}$

Mà $8^{100}<9^{100}$ nên $2^{300}<3^{200}$

b) So sánh 71^{50} và 37^{75}

Ta thấy : $71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150}.3^{100}$ (1)

$37^{75} > 36^{75} = \left(2^2.3^2\right)^{75} = 2^{150}.3^{150}$ (2)

Mà $2^{150}.3^{150} > 2^{150}.3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$

c) Ta có: $\frac{201201}{202202} = \frac{201}{202}.\frac{1001}{1001} = \frac{201}{202}$; $\frac{201201201}{202202202} = \frac{201}{202}.\frac{1001001}{1001001} = \frac{201}{202}$

Vậy 2 phân số trên bằng nhau.

Bài 127. Đề HSG Toán 6_Nga Sơn_2018-2019

Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh : $A < 2$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ..... ; \frac{1}{50^2} < \frac{1}{49.50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$

Vậy $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{50^2}$

$< \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{49.50}$

$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$

$= 1 + 1 - \frac{1}{50} = \frac{99}{50} < 2$

Bài 128. (ĐỀ THI OLYMPIC MÔN TOÁN 6- THANH OAI- 2018-2019)

Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \frac{5}{23} + ... + \frac{5}{49}$. Chứng minh rằng $3 < S < 8$

Lời giải

Xét tổng $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + ... + \frac{5}{48} + \frac{5}{49} > \frac{5}{50} + \frac{5}{50} + ... + \frac{5}{50} + \frac{5}{50} = 30.\frac{5}{50} = 3$

$\Rightarrow S > 3$

$S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + ... + \frac{5}{48} + \frac{5}{49} < \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + ... + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} = 30.\frac{5}{20} = \frac{15}{2} < 8$

$\Rightarrow S < 8$

$\Rightarrow 3 < S < 8$

Bài 129. (ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN 6- HẢI HẬU)

Với n là số tự nhiên, hãy so sánh bội chung nhỏ nhất của $n^2 + n + 2$ và 3 với $n^2 + n + 2$

Lời giải

Với mọi số tự nhiên n thì n^2+n+2 không chia hết cho 3, thật vậy: $n^2+n+2=n(n+1)+2$

Nếu $n \vdots 3$ thì $n(n+1) \vdots 3 \Rightarrow n(n+1)+2$ chia cho 3 dư 2

Nếu n chia cho 3 dư 1 thì $n=3k+1(k\in\mathbb{N})$ khi đó $n^2+n+2=(3k+1)(3k+2)+2=3(3k^2+5k)+1$ chia cho 3 dư 1

Nếu n chia cho 3 dư 2 thì $n+1$ chia hết cho 3 khi đó n^2+n+2 chia cho 3 dư 2

Như vậy n^2+n+2 không chia cho 3 với mọi $n\in\mathbb{N}$, mà 3 là số nguyên tố nên

$BCNN(n^2+n+2;3)=3(n^2+n+2)>n^2+n+2$

Bài 130. (ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN 6- THANH CHƯƠNG)

Không tính giá trị của các biểu thức. Hãy so sánh:

a) $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$ b) $9^8.5^{16}$ và 19^{20}

Lời giải

$a)\frac{1717}{8585}=\frac{17}{85}=\frac{1}{5}=\frac{13}{65}<\frac{13}{51}=\frac{1313}{5151}\Rightarrow\frac{1717}{8585}<\frac{1313}{5151}$

$b)9^8.5^{16}=3^{16}.5^{16}=15^{16}<19^{16}<19^{20}\Rightarrow 9^8.5^{16}<19^{20}$

Bài 131. (Đề thi HSG 6 CẤP TRƯỜNG 2019 - 2020)

a)So sánh : $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{101}$

b)So sánh : $A=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

Lời giải

$a)\frac{22}{45}<\frac{22}{44}=\frac{1}{2}=\frac{51}{102}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{22}{45}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$

$b)B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<1$

$\Rightarrow B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<\frac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=\frac{2009^{2010}+2009}{2009^{2011}+2009}$

$=\frac{2009(2009^{2009}+1)}{2009(2009^{2010}+1)}=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}=A$

Vậy $B<A$

Bài 132. (Đề thi HSG 6 huyện HOÀI NHƠN 2018-2019)

So sánh M và N biết: $M=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5}$; $N=\frac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$

Lời giải

$$M=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5}\Rightarrow 19M=\frac{19.\left(19^{30}+5\right)}{19^{31}+5}=\frac{19^{31}+95}{19^{31}+5}=1+\frac{90}{19^{31}+5}$$

$$N=\frac{19^{31}+5}{19^{32}+5}\Rightarrow 19N=\frac{19.\left(19^{31}+5\right)}{19^{32}+5}=\frac{19^{32}+95}{19^{32}+5}=1+\frac{90}{19^{32}+5}$$

$$\frac{90}{19^{31}+5}>\frac{90}{19^{32}+5}\Rightarrow 1+\frac{90}{19^{31}+5}>1+\frac{90}{19^{32}+5}\Rightarrow 19M>19N$$

Vậy $M>N$

Bài 133. (HSG 6 Huyện Vĩnh Tường năm 2019 – 2020)

So sánh : 123456789^9 và $9^{123456789}$

Lời giải

$$9^{123456789}>9^{100.000.000}=81^{50.000.000}>10^{50.000.000}>10^{100}=\left(10^{10}\right)^{10}>123456789^9$$

Bài 134. (HSG 6 năm 2018 – 2019)

So sánh không qua quy đồng: $A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}};B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải

$$A=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\frac{-8}{10^{2006}}>\frac{-8}{10^{2005}}\Rightarrow A>B$$

Bài 135. (HSG 6 năm 2018 – 2019):

Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}};B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải

$$A=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-19}{10^{2011}}=\frac{-9}{10^{2010}}+\frac{-10}{10^{2011}}+\frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-19}{10^{2010}}=\frac{-9}{10^{2011}}+\frac{-10}{10^{2010}}+\frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}}>\frac{-10}{10^{2010}}\Rightarrow A>B$

Bài 136. (Đề thi HSG 6 huyện VIỆT YÊN 2019-2020)

So sánh $A=\dfrac{10^{2014}+2016}{10^{2015}+2016}$ và $B=\dfrac{10^{2015}+2016}{10^{2016}+2016}$

Lời giải

Ta có: $A=\dfrac{10^{2014}+2016}{10^{2015}+2016}=\dfrac{\left(10^{2014}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}$

$=\dfrac{10^{4030}+2016.\left(10^{2014}+10^{2016}\right)+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}=\dfrac{10^{4030}+2016.10^{2014}.101+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2016}+2016\right)}(1)$

Lại có $B=\dfrac{10^{2015}+2016}{10^{2016}+2016}=\dfrac{\left(10^{2015}+2016\right).\left(10^{2015}+2016\right)}{\left(10^{2016}+2016\right).\left(10^{2015}+2016\right)}$

$=\dfrac{10^{4030}+2.2016.10^{2015}+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right)\left(10^{2016}+2016\right)}=\dfrac{10^{4030}+20.2016.10^{2014}+2016^2}{\left(10^{2015}+2016\right)\left(10^{2016}+2016\right)}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A>B$

Bài 137. (Đề thi HSG 6 THCS XUÂN DƯƠNG 2019-2020)

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+.....+\dfrac{1}{2011^2}+\dfrac{1}{2012^2}<1$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{1}{1.2};\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{1}{2.3};.....;\dfrac{1}{2012^2}<\dfrac{1}{2011.2012}$

$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{2011^2}+\dfrac{1}{2012^2}<\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+.....+\dfrac{1}{2011.2012}$

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+.....+\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1}{2012}=\dfrac{2011}{2012}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+.....+\dfrac{1}{2011^2}+\dfrac{1}{2012^2}<1$

Bài 138. (Đề thi HSG 6 THCS HỒNG DƯƠNG 2019-2020)

So sánh A và B biết: $A=2011^{2012}-2011^{2011};\quad B=2011^{2013}-2011^{2012}$

Lời giải

Ta có:

$A=2011^{2012}-2011^{2011}=2011^{2011}.\left(2011-1\right)=2011^{2011}.2010$

$B = 2011^{2013} - 2011^{2012} = 2011^{2012}.(2011-1) = 2011^{2012}.2010$

Do $2011^{2012} > 2011^{2011} \Rightarrow B > A.$

Bài 139. (Đề thi HSG 6, THCS DÂN HÒA 2018-2019)

Cho $A = 1+4+4^2+4^3+....+4^{99};\ B = 4^{100}$

Chứng minh rằng: $A < \frac{B}{3}$

Lời giải

$4A = 4+4^2+4^3+4^4+.....+4^{100}$

$A = 1+4+4^2+4^3+.....+4^{99}$

$3A = 4A - A = 4^{100} - 1$

$\Rightarrow A = \frac{4^{100}-1}{3} < \frac{4^{100}}{3} = \frac{B}{3}$

Vậy $A < \frac{B}{3}$

Bài 140. (Đề thi HSG 6, THCS DÂN HÒA 2018-2019)

So sánh C và D: $C = \frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1}$; $D = \frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1}$

Lời giải

$C = \frac{2013^{2013}+1}{2013^{2014}+1} \Rightarrow 2013C = \frac{2013^{2014}+2013}{2013^{2014}+1} = 1+\frac{2012}{2013^{2014}+1}$

$D = \frac{2013^{2012}+1}{2013^{2013}+1} \Rightarrow 2013D = \frac{2013^{2013}+2013}{2013^{2013}+1} = 1+\frac{2012}{2013^{2013}+1}$

Vì $\frac{2012}{2013^{2014}+1} < \frac{2012}{2013^{2013}+1} \Rightarrow 2013C < 2013D \Rightarrow C < D$

Bài 141. (Đề thi HSGH 6, 2018-2019)

Thực hiện so sánh:

a) $A = \frac{20132013}{20142014}$ với $B = \frac{131313}{141414}$

b) $C = 2013^9 + 2013^{10}$ với $D = 2014^{10}$

Lời giải

a) $A = \frac{2013.10001}{2014.10001} = \frac{2013}{2014}; B = \frac{13.10101}{14.10101} = \frac{13}{14}$

$1-A = 1-\frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}; 1-B = 1-\frac{13}{14} = \frac{1}{14}$

Do $1-A<1-B\Rightarrow A>B.$

b) $C=2013^9.(1+2013)=2013^9.2014$

$D=2014^9.2014$

Mà $2013<2014\Rightarrow C<D$

Bài 142.

a) Cho $a,b,n\in\mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1};\quad B=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

Th1: $\frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b\Rightarrow\frac{a+n}{b+n}=\frac{a}{b}=1$

Th2: $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b\Rightarrow a+m>b+n$, mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b+n}<\frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

Th3: $\frac{a}{b}<1\Rightarrow a<b\Rightarrow a+n<b+n$

Khi đó $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b}<\frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

Rõ ràng $A<1$ nên theo câu a, $\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}\Rightarrow A<\frac{(10^{11}-1)+11}{(10^{12}-1)+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A<\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10(10^{10}+1)}{10.(10^{11}+1)}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Bài 143.

Cho phân số $\frac{a}{b}(a<b)$ cùng thêm m đơn vị vào tử và mẫu thì phân số mới lớn hơn hay bé hơn $\frac{a}{b}$?

Lời giải

Theo bài toán cho $a<b\Rightarrow am<bm$

$\Rightarrow ab+am<ab+bm$

$\Rightarrow a(b+m)<b(a+m)$

$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$

Bài 144.

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow 2A+A=3A=1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow 3A<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}$

b) Đặt $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{3}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt $B=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}\Rightarrow 3B=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B=B+3B=3-\frac{1}{3^{99}}<3\Rightarrow B<\frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A<B<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{3}{16}$

Bài 145.

Tìm phân số lớn hơn $\frac{4}{17}$, nhỏ hơn $\frac{6}{17}$ và có mẫu số bằng 20.

Lời giải

Gọi phân số phải tìm là $\frac{a}{20}$, a là số tự nhiên

$\frac{4}{17}<\frac{a}{20}<\frac{6}{17}\Rightarrow 80<17a<120\Rightarrow 5<a<7\Rightarrow a=6$

Bài 146.

So sánh $2009^{2010}+2009^{2009}$ với 2010^{2010}

Lời giải

$2009^{2010}+2009^{2009}=2009^{2009}\left(2009+1\right)=2009^{2009}.2010$

Bài 147.

Cho $A=\frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$; $B=\frac{10^{2002}+1}{10^{2003}+1}$. Hãy so sánh A và B.

Lời giải

Ta có: $10A=\frac{10^{2002}+10}{10^{2002}+1}=1+\frac{9}{10^{2002}+1}$ 1

Tương tự: $10B=\frac{10^{2003}+10}{10^{2003}+1}=1+\frac{9}{10^{2003}+1}(2)$

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2002}+1}>\frac{9}{10^{2003}+1}\Rightarrow 10A>10B\Rightarrow A>B$

Bài 148.

a) So sánh: $\frac{-22}{45}$ và $-\frac{51}{103}$;

b) So sánh: $A=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$.

Lời giải

$a)\frac{22}{45}<\frac{22}{44}=\frac{1}{2}=\frac{51}{102}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{22}{45}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$

$b)B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<1$

$\Rightarrow B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}<\frac{2009^{2010}-2+2011}{2009^{2011}-2+2011}=\frac{2009^{2010}+2009}{2009^{2011}+2009}$

$=\frac{2009\ \ 2009^{2009}+1}{2009\ \ 2009^{2010}+1}=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}=A$

Vậy $A>B$

Bài 149.

a) Cho $a,b,n \in \mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$; $B=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

a) Ta xét 3 trường hợp

Th1: $\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \Rightarrow \frac{a+n}{b+n}=\frac{a}{b}=1$

Th2: $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b \Rightarrow a+m>b+n$, mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b+n}<\frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

Th3: $\frac{a}{b}<1 \Rightarrow a<b \Rightarrow a+n<b+n$

Khi đó $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{a-b}{b}$, vì $\frac{a-b}{b}<\frac{b-a}{b+n}$ nên $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

rõ ràng $A<1$ nên theo câu a, $\frac{a}{b}<1 \Rightarrow \frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b} \Rightarrow A<\frac{10^{11}-1\ +11}{10^{12}-1\ +11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}$

Do đó $A<\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10\ 10^{10}+1}{10.\ 10^{11}+1}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Bài 150. (Đề thi HSG 6 cấp trường năm học 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $2^{1999}<7^{714}$

Lời giải

$$\begin{cases}2^{10}=1024\\7^3=343\end{cases}\Rightarrow 2^{10}<3.7^3\Rightarrow\left(2^{10}\right)^{238}<3^{238}.\left(7^3\right)^{238}\Rightarrow 2^{2380}<3^{238}.7^{714}$$

$$\begin{cases}2^8=256\\3^5=243\end{cases}\Rightarrow 3^5<2^8$$

Mặt khác:

$3^{238}=3^3.3^{235}=3^3.\left(3^5\right)^{47}<3^3.\left(2^8\right)^{47}<2^5.2^{376}=2^{381}\Rightarrow 3^{238}<2^{381}$

$2^{2380}<3^{238}.7^{714}\Rightarrow 2^{2380}<2^{381}.7^{714}\Rightarrow 2^{1999}<7^{714}$

Bài 151. (Đề thi HSG 6 THCS HOÀNG PHỤ 2019-2020)

a) So sánh $E=\dfrac{2018^{99}-1}{2018^{100}-1}$ và $F=\dfrac{2018^{98}-1}{2018^{99}-1}$

b) Tìm số nguyên tố $\overline{ab}\left(a>b>0\right)$. Biết $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương

c) Cho $\overline{abc}$ là số tự nhiên có ba chữ số

Tìm giá trị lớn nhất của $A=\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}+1918$

Lời giải

a) Ta có:

$E=\dfrac{2018^{99}-1}{2018^{100}-1}\Rightarrow 2018E=\dfrac{2018^{100}-2018}{2018^{100}-1}\Rightarrow 2018E=1-\dfrac{2017}{2018^{100}-1}$

$F=\dfrac{2018^{99}-1}{2018^{99}-1}\Rightarrow 2018F=\dfrac{2018^{99}-2018}{2018^{99}-1}\Rightarrow 2018F=1-\dfrac{2017}{2018^{99}-1}$

Vì $\dfrac{2017}{2018^{100}-1}<\dfrac{2017}{2018^{99}-1}\Rightarrow 1-\dfrac{2017}{2018^{100}-1}>1-\dfrac{2017}{2018^{99}-1}$

Hay $2018E>2018F\Rightarrow E>F$

b) Ta có: $\overline{ab}-\overline{ba}=9\left(a-b\right)$

Do a,b là các chữ số, $\overline{ab}$ là số nguyên tố nên $3\le b\Rightarrow 9\left(a-b\right)$ là số chính phương khi $a-b\in\left\{1;4\right\}$

Với $a-b=1$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ ta được số $\overline{ab}=43$

Với $a-b=4$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ ta được số $\overline{ab}=73$

Vậy $\overline{ab}\in\left\{43;73\right\}$

a) $A=\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}+1918=\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}+1918$

Nếu $b=c=0$ thì $A=100+1918=2018$

Nếu b hoặc c khác 0 thì

$A<\dfrac{100a+100b+100c}{a+b+c}+1918=100+1918=2018\Rightarrow A\le 2018$

Giá trị lớn nhất của A là 2018 khi $a\in\{1;2;....;9\};b=c=0$

(Hai ý b,c này thầy cô tự chuyển nha, GV tách nhầm chuyên đề rồi)

Bài 152. (Đề thi HSG 6 huyện BÌNH THUẬN 2018-2019)

So sánh: 36^{25} và 25^{36}

Lời giải

$36^{25}=(18.2)^{25}=18^{25}.2^{25}=18^{25}.2^{6}.2^{19}$

$25^{36}=25^{25}.25^{11}=25^{25}.5^{22}=25^{25}.5^{3}.5^{19}$

$5^3=125;2^6=64\Rightarrow 5^3>2^6\Rightarrow 25^{25}>18^{25};5^{19}>2^{19}$

$\Rightarrow 25^{25}.5^3.5^{19}>18^{25}.2^6.2^{19}$ *hay* $36^{25}>25^{36}$

Bài 153. (Đề thi HSG 6 TP BUÔN MÊ THUỘC 2019-2020)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có:

$A=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}$

$A=\frac{1}{(2.2)^2}+\frac{1}{(2.3)^2}+\frac{1}{(2.4)^2}+.....+\frac{1}{(2.n)^2}$

$A=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+.....+\frac{1}{(n-1)n}\right)$

$A<\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$A<\frac{1}{4}.\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}(dfcm)$

Bài 154. (Đề thi HSG 6 HUYỆN LÂM THAO 2019-2020)

Cho $M=(-a+b)-(b+c-a)+(c-a)$. Trong đó $b,c\in\mathbb{Z}$ còn a là một số nguyên âm. Chứng minh rằng biểu thức M luôn dương và tìm tất cả các cặp số nguyên sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Lời giải

$M=-a$ mà a là số nguyên âm nên M luôn dương $x=0,y=0$ hoặc $x=2,y=2$

(câu này cũng nhầm vị trí)

Bài 155. (Đề thi HSG 6 TRƯỜNG THCS BÍCH HÒA 2018-2019)

Cho biết $S=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+.....+\frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4}<S<\frac{91}{330}$

Lời giải

*Chứng minh $S<\frac{91}{330}$

$S=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{111}+....+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{121}+.....+\frac{1}{130}\right)$

$S<\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+.....+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{110}+.....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+.....+\frac{1}{120}\right)$

$S<\frac{1}{100}.10+\frac{1}{110}.10+\frac{1}{120}.10=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{181}{660}<\frac{182}{660}<\frac{91}{330}$

$\Rightarrow S<\frac{91}{330}$ (1)

*Chứng minh $\frac{1}{4}<S$

$S>\left(\frac{1}{110}+.....+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+....+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{130}+....+\frac{1}{130}\right)$

$S>\frac{1}{110}.10+\frac{1}{120}.10+\frac{1}{130}.10=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$

$S>\frac{431}{1716}>\frac{429}{1716}\Rightarrow S>\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{4}<S<\frac{91}{330}$

Bài 156. (Đề thi HSG 6 huyện HOÀI NHƠN 2018-2019)

So sánh M và N biết: $M=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5};\ N=\frac{19^{31}+5}{19^{32}+5}$

Lời giải

$M=\frac{19^{30}+5}{19^{31}+5}\Rightarrow 19M=\frac{19.\left(19^{30}+5\right)}{19^{31}+5}=\frac{19^{31}+95}{19^{31}+5}=1+\frac{90}{19^{31}+5}$

$N=\frac{19^{31}+5}{19^{32}+5}\Rightarrow 19N=\frac{19.\left(19^{31}+5\right)}{19^{32}+5}=\frac{19^{32}+95}{19^{32}+5}=1+\frac{90}{19^{32}+5}$

$\frac{90}{19^{31}+5}>\frac{90}{19^{32}+5}\Rightarrow 1+\frac{90}{19^{31}+5}>1+\frac{90}{19^{32}+5}\Rightarrow 19M>19N$

Vậy $M>N$

Bài 157.

a)So sánh : $\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$

b)So sánh : $A=\frac{2009^{2009}+1}{2009^{2010}+1}$ và $B=\frac{2009^{2010}-2}{2009^{2011}-2}$

Lời giải

$a)\frac{22}{45}<\frac{22}{44}=\frac{1}{2}=\frac{51}{102}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{22}{45}<\frac{51}{101}\Rightarrow\frac{-22}{45}>\frac{-51}{101}$

$b) B = \dfrac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < 1$

$\Rightarrow B = \dfrac{2009^{2010} - 2}{2009^{2011} - 2} < \dfrac{2009^{2010} - 2 + 2011}{2009^{2011} - 2 + 2011} = \dfrac{2009^{2010} + 2009}{2009^{2011} + 2009}$

$= \dfrac{2009\left(2009^{2009} + 1\right)}{2009\left(2009^{2010} + 1\right)} = \dfrac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1} = A$

Vậy $B < A$

Bài 158. (Đề thi HSG 6 huyện Vĩnh Tường 2019-2020)

Hãy so sánh : 123456789^9 và $9^{123456789}$

Lời giải

$9^{123456789} > 9^{100.000.000} = 81^{50.000.000} > 10^{50.000.000} > 10^{100} = \left(10^{10}\right)^{10} > 123456789^9$

Bài 159. (Đề thi HSG 6 huyện Vĩnh Tường 2019-2020)

Cho a, b là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \Rightarrow a = b + m, m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{b+m}{b} + \dfrac{b}{b+m} = 1 + \dfrac{m}{b} + \dfrac{b}{b+m} \geq 1 + \dfrac{m}{b+m} + \dfrac{b}{b+m} = 2$

Bài 160. (Đề thi HSG 6 huyện 282 năm học 2018-2019)

So sánh:

$a) A = \dfrac{20132013}{20142014}$ với $B = \dfrac{131313}{141414}$ $\qquad b) C = 2013^9 + 2013^{10}$ với $D = 2014^{10}$

Lời giải

$a) A = \dfrac{2013.10001}{2014.10001} = \dfrac{2013}{2014}; B = \dfrac{13.10101}{14.10101} = \dfrac{13}{14}$

$1 - A = 1 - \dfrac{2013}{2014} = \dfrac{1}{2014}; 1 - B = 1 - \dfrac{13}{14} = \dfrac{1}{14}$

$\text{Do } \dfrac{1}{2014} < \dfrac{1}{14} \Rightarrow 1 - A < 1 - B \Rightarrow A > B$

$b) C = 2013^9.(1 + 2013) = 2013^9.2014$

$D = 2014^9.2014$

$2013 < 2014 \Rightarrow C < D$

Bài 161. (Đề thi HSG 6)

Cho S = $\dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{11} + \dfrac{3}{12} + \dfrac{3}{13} + \dfrac{3}{14}$. Chứng minh rằng : 1< S < 2.

Lời giải

S = $\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{15}>\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}$ => S > $\frac{15}{15}=1$ (1)

S= $\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}<\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}$ => S < $\frac{15}{10}<\frac{20}{10}=2$ (2)

Từ (1) và (2) => 1 < S < 2.

Bài 162.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có

$A=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}$

$A=\frac{1}{(2.2)^2}+\frac{1}{(2.3)^2}+\frac{1}{(2.4)^2}+...+\frac{1}{(2.n)^2}$

$A=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{(n-1)n}\right)$

$A<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)$

$A<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}$ (Đpcm)

Bài 163.

So sánh A và B biết A = $\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2012}+\frac{2012}{2010}$ và B = $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{17}$

Lời giải

Ta có

$A=\left(1-\frac{1}{2011}\right)+\left(1-\frac{1}{2012}\right)+\left(1+\frac{2}{2010}\right)$

$A=3+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2012}\right)$

$A>3$

$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+...+\frac{1}{17}\right)$

$B<\frac{1}{2}.2+\frac{1}{5}.5+\frac{1}{8}.8$

$B<3$

Từ đó suy ra A > B

Bài 164.

Không tính giá trị biểu thức. Hãy so sánh:

a, $\frac{1717}{8585}$ và $\frac{1313}{5151}$ b, $9^8 . 5^{16}$ và 19^{20}

Lời giải

a, $\frac{1717}{8585}=\frac{17}{85}=\frac{1}{5}=\frac{13}{65}<\frac{13}{51}=\frac{1313}{5151}\Leftrightarrow\frac{1717}{8585}<\frac{1313}{5151}$

b, $9^8 . 5^{16} = 3^{16}.5^{16} = 15^{16} <19^{16} < 19^{20} => 9^8 . 5^{16} < 19^{20}$

Bài 165.

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$;

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt A= $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow 2A+A =3A = 1- \frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$

b) Đặt A= $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3A= 1-\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^3}+...+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A< 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt B= $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$

$\Rightarrow 3B= 2+ \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B = B+3B= 3- \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow 4A < B < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 166.

Các phân số sau có bằng nhau hay không? Vì sao?

$\frac{23}{99}$; $\frac{23232323}{99999999}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$

Lời giải

Ta thấy;

$\frac{23}{99}=\frac{23.101}{99.101}=\frac{2323}{9999}$

$\frac{23}{99}=\frac{23.10101}{99.10101}=\frac{232323}{999999}$

$\frac{23}{99}=\frac{23.1010101}{99.1010101}=\frac{23232323}{99999999}$

Vậy; $\frac{23}{99}=\frac{2323}{9999}=\frac{232323}{999999}=\frac{23232323}{99999999}$

Bài 167.

Cho phân số $A=\frac{199919991999}{200020002000}$ và phân số $B=\frac{1999}{2000}$. So sánh A và B.

Lời giải

Ta có

$A=\frac{199919991999}{200020002000}=\frac{1999000000+19990000+1999}{2000000000+20000000+2000}$

$=\frac{1999(100000000+10000+1)}{2000(100000000+10000+1)}=\frac{1999.100010001}{2000.100010001}=\frac{1999}{2000}=B$

Vậy $A = B$.

Bài 168.

a. chứng tỏ rằng $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản.

b. Chứng minh rằng : $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$

Lời giải

a. Gọi d là ước chung của 12n+1và 30n+2 ta có

5(12n+1)-2(30n+2)=1 chia hết cho d

vậy d=1 nên 12n+1 và 30n+2 nguyên tố cùng nhau do đó $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản b. Ta có

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2.1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

...

$\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$

Bài 169.

Tìm 3 số có tổng bằng 210, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ 2 và bằng $\frac{2}{3}$ số thứ 3.

Lời giải

Số thứ nhất bằng: $\frac{9}{11}:\frac{6}{7}=\frac{21}{22}$ (số thứ hai)

Số thứ ba bằng: $\frac{9}{11}:\frac{2}{3}=\frac{27}{22}$ (số thứ hai)

Tổng của 3 số bằng $\frac{22+21+27}{22}$ (số thứ hai) = $\frac{70}{22}$ (số thứ hai)

Số thứ hai là : 210 : $\frac{70}{22}$ = 66 ; số thứ nhất là: $\frac{21}{22}$. 66 = 63 ; số thứ 3 là: $\frac{27}{22}$.66 = 81

Bài 170.

So sánh: 222^{333} và 333^{222}

Lời giải

Ta có $222^{333}=(2.111)^{3.111}=8^{111}.(111^{111})^2.111^{111}$

$333^{222}=(3.111)^{2.111}=9^{111}.(111^{111})^2$

Suy ra: $222^{333}>333^{222}$

Bài 171.

So sánh $N=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}$ và $M=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Lời giải

So sánh:

Xét: $N=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-15}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2006}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M=\frac{-15}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}=\frac{-7}{10^{2005}}+\frac{-8}{10^{2005}}+\frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}}>\frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N>M$

Bài 172. (Đề thi HSG 6)

Cho a,b,c,d là các số tự nhiên khác 0 và biểu thức:

$$M=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{a+c+d}+\frac{d}{b+c+d}.$$

Hỏi M có giá trị là số tự nhiên hay không? Vì sao ?

Lời giải

Vì $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a+b+c<a+b+c+d\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$

Tương tự : $\frac{b}{a+b+d}>\frac{b}{a+b+c+d}$

$\frac{c}{a+c+d}>\frac{c}{a+b+c+d}$

$\frac{d}{b+c+d}>\frac{d}{a+b+c+d}$

Suy ra M > $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1$

Vì $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a+b+c>a+b\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}$

Tương tự : $\frac{b}{a+b+d}<\frac{b}{a+b}$

$\frac{c}{a+c+d}<\frac{c}{c+d}$;

$\frac{d}{b+c+d}<\frac{d}{c+d}$;

Suy ra M < $\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}=2$

Vậy $1<M<2$ nên M không là số tự nhiên.

Bài 173. (Đề thi HSG 6 huyện 2006-2007)

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

b) So sánh tổng $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{2^n}+...+\frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Lời giải

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

$\frac{15}{301}<\frac{15}{300}=\frac{1}{20}=\frac{25}{500}<\frac{25}{499}$.

Vậy $\frac{15}{301}<\frac{25}{499}$.

b) So sánh tổng $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{2^n}+...+\frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Với $\forall n\geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^2}-\frac{5}{2^3}\right)+...+\left(\frac{2008}{2^{2006}}-\frac{2009}{2^{2007}}\right)$

$=2-\frac{2009}{2^{2007}}<2$

Vậy $S<2$

Bài 174. (Đề thi HSG 6)

So sánh giá trị của biểu thức: $A=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+...+\frac{9999}{10000}$ với số 99.

Lời giải

Biến đổi:

$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+...+\left(1-\frac{1}{10000}\right)$

$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$

$A=99-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}\right)$

$A=99-B$

Trong đó $B=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}$

Vì $B>0$ nên $A<99$

Bài 175. (Đề thi HSG 6)

So sánh 2 số: $2^{3^{2^3}}$ và $3^{2^{3^2}}$

Lời giải

Ta có $3^{2^3}=3^8=9^4>8^4=2^{12}>2^{10}$

Từ đó: $2^{3^{2^3}}>2^{2^{10}}=2^{2.2^9}=4^{2^9}>3^{2^9}=3^{2^{3^2}}$

Suy ra: $2^{3^{2^3}}>3^{2^{3^2}}$

Bài 176. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}<\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}$

Nên $3A-A=1-\frac{1}{3^{99}}$

Hay $2A=1-\frac{1}{3^{99}}$

$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3^{99}}<\frac{1}{2}$

Vậy $A<\frac{1}{2}$

Bài 177. (Đề thi HSG 6)

a) Cho $a,b,n\in\mathbb{N}^*$. Hãy so sánh $\frac{a+n}{b+n}$ và $\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$, $B=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$. So sánh A và B.

Lời giải

Ta xét 3 trường hợp $\frac{a}{b}=1$, $\frac{a}{b}>1$, $\frac{a}{b}<1$

TH1: $\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$ thì $\frac{a+n}{b+n}=\frac{a+n}{a+n}=1$

TH2: $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow a+n>b+n.$

Mà $\frac{a+n}{b+n}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b+n}$

$\frac{a}{b}$ có phần thừa so với 1 là $\frac{a-b}{b}$,

vì $\frac{a-b}{b+n}<\frac{a-b}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

TH3: $\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b \Leftrightarrow a+n<b+n.$

Khi đó $\frac{a+n}{b+n}$ có phần bù tới 1 là $\frac{b-a}{b+n}$,

$\frac{a}{b}$ có phần bù tới 1 là $\frac{b-a}{b}$,

vì $\frac{b-a}{b+n}<\frac{b-a}{b}$ nên $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

b) Cho $A=\frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}$

rõ ràng $A<1$nên theo a, nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a+n}{b+n}>\frac{a}{b}$

Do đó $A<\frac{\left(10^{11}-1\right)+11}{\left(10^{12}-1\right)+11}=\frac{10^{11}+10}{10^{12}+10}=\frac{10\left(10^{10}+1\right)}{10\left(10^{11}+1\right)}=\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$

Vậy $A<B$.

Bài 178.

Cho $A=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+...+\frac{n}{5^{n+1}}+...+\frac{11}{5^{12}}$ với n ∈ N.Chứng minh rằng $A<\frac{1}{16}$

Lời giải

Xét $5A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{n}{5^n}+...+\frac{11}{5^{11}}$ Suy ra:

$$4A=5A-A=\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{n}{5^n}+...+\frac{11}{5^{11}}\right)-\left(\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+...+\frac{n}{5^{n+1}}+...+\frac{11}{5^{12}}\right)$$

$$4A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}+...+\frac{1}{5^{11}}-\frac{11}{5^{12}}$$

$$4A=B-\frac{11}{5^{12}}$$

Với biểu thức:

$$B=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}+...+\frac{1}{5^{11}}$$

$$\Rightarrow 5B=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{n-1}}+...+\frac{1}{5^{10}}$$

$$\Rightarrow 4B=5B-B=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{10}}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}+...+\frac{1}{5^{11}}\right)$$

$$\Rightarrow 4B=1-\frac{1}{5^{11}}=\frac{5^{11}-1}{5^{11}}\Rightarrow B=\frac{5^{11}-1}{4.5^{11}}$$

$$\Rightarrow 4A=\frac{5^{11}-1}{4.5^{11}}-\frac{11}{5^{12}}=\frac{5^{12}-5-44}{4.5^{12}}\Rightarrow A=\frac{1}{16}\bullet\frac{5^{12}-49}{5^{12}}=\frac{1}{16}\bullet\left(1-\frac{49}{5^{12}}\right)<\frac{1}{16}$$

Bài 179. (Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2013 - 2014)

Cho A = $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{99}$; B = 4^{100}

Chứng minh rằng: A < $\frac{B}{3}$

Lời giải

$4A = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \ldots + 4^{100}$

$A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{99}$

$3A = 4A - A = 4^{100} - 1$

$$\Rightarrow A=\frac{4^{100}-1}{3}<\frac{4^{100}}{3}=\frac{B}{3}$$

Vậy A < $\frac{B}{3}$

Bài 180. (Đề thi HSG 6 huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho $S=\frac{5}{20}+\frac{5}{21}+\frac{5}{22}+...+\frac{5}{49}$. Chứng minh rằng 3 < S < 8.

Lời giải

Xét tổng $S=\frac{5}{20}+\frac{5}{21}+\frac{5}{22}+...+\frac{5}{49}$ có 30 số hạng

Mà $\frac{5}{20}>\frac{5}{50};\frac{5}{21}>\frac{5}{50};\frac{5}{22}>\frac{5}{50};...;\frac{5}{49}>\frac{5}{50}$

$$\Rightarrow S>30.\frac{5}{50}=3 \quad (1)$$

Lại có : $\frac{5}{20}=\frac{5}{20};\frac{5}{21}<\frac{5}{20};\frac{5}{22}<\frac{5}{20};...;\frac{5}{49}<\frac{5}{20}$

$\Rightarrow S<30\frac{5}{20}=8(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3<S<8.$

Bài 181. (Đề số 82 Đề thi HSG 6 huyện Thanh Oai *2013-2014)*

Cho biết S = $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4}<S<\frac{91}{330}$

Lời giải

* Chứng minh S < $\frac{91}{330}$

S = $\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{111}+...\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{121}+...\frac{1}{130}\right)$

S < $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{110}+...\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+...\frac{1}{120}\right)$

S < $\frac{1}{100}\cdot 10+\frac{1}{110}\cdot 10+\frac{1}{120}\cdot 10=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$

S< $\frac{66+60+55}{660}$

S < $\frac{181}{660}<\frac{182}{660}$ hay S < $\frac{91}{330}$ (1)

* Chứng minh $\frac{1}{4}<$ S

S > $\left(\frac{1}{110}+...+\frac{1}{110}\right)+\left(\frac{1}{120}+...+\frac{1}{120}\right)+\left(\frac{1}{130}+...\frac{1}{130}\right)$

S > $\frac{1}{110}\cdot 10+\frac{1}{120}\cdot 10+\frac{1}{130}\cdot 10=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$

S > $\frac{156+143+132}{1716}$

$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716}$ Hay $S > \frac{1}{4}$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

Bài 182. (Đề số 84)

Chứng minh rằng : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Lời giải

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^{1999}} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2^3}) + (\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{2^4}) + ... + (\frac{1}{2^{1998}+1} + ... + \frac{1}{2^{1999}})$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.2 + \frac{1}{2^3}.2^2 + \frac{1}{2^4}.2^3 + ... + \frac{1}{2^{1999}}.2^{1998} = 1 + \frac{1}{2}.1999 = 1000,5 > 1000$ (ĐPCM)

Bài 183. (Đề số 85 Trường THCS Xuân Dương – *Thanh Oai 2013-2014)*

Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2} < 1$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}$; ... ; $\frac{1}{2012^2} < \frac{1}{2011.2012}$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2011.2012}$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2011^2} + \frac{1}{2012^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2012} = \frac{2011}{2012} < 1$

Bài 184. (Đề số 86 Trường THCS Phương Trung)

Chứng minh rằng : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

Ta có:

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$;

$\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100};$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{10\,0^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{99.100}=$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\quad=1-\frac{1}{2}=\frac{99}{100}<1.$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{100^2}<1$