

CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ VÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A, LÝ THUYẾT

1, Số nguyên tố:

Tìm các ước của 2; 3; 4; 5; 6

Các số 2; 3; 5 chỉ có hai ước là 1 và chính nó nên gọi là số nguyên tố, còn 4 và 6 có nhiều hơn hai ước nên gọi là hợp số

Đ/N: Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước là 1 và chính nó

Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước

Chú ý: Số 0, 1 không là số nguyên tố cũng không là hợp số

Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất, các số nguyên tố còn lại đều là số lẻ

Các số nguyên tố < 20 là 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19

B, LUYỆN TẬP

DẠNG 1: TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

Bài 1: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $3.4.5+6.7$

b, $5.7.9.11-2.3.4.7$

c, $3.5.7+11.13.17$

d, $16354+67541$

HD:

a, Ta có: $3.4.5+6.7 = 3(4.5+2.7):3$, Vậy tổng trên là hợp số

b, Ta có: $5.7.9.11-2.3.4.7 = 7(5.9.11-2.3.4):7$, Vậy tổng trên là hợp số

c, Ta có: $16354+67541$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

Bài 2: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $5.6.7+8.9$

b, $5.7.9.11.13-2.3.7$

c, $5.7.11+13.17.19$

d, $4253+1422$

HD :

a, Ta có: $5.6.7+8.9 = 3(5.2.7+8.3):3$, Vậy tổng trên là hợp số

b, Ta có: $5.7.9.11.13-2.3.7 = 7(5.9.11.13-2.3):7$, Vậy tổng trên là hợp số

c, Ta có: $5.7.11$ là 1 số lẻ, và $13.17.19$ cũng là 1 số lẻ, Nên tổng là số chẵn: $2 \Rightarrow$ Là hợp số

d, Ta có: $4253+1422$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

Bài 3: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $17.18.19.31+11.13.15.23$

b, $41.43.45.47+19.23.29.31$

c, $987654+54321$

HD :

a, Ta có: $17.18.19.31+11.13.15.23 = 3(17.6.19.31+11.13.5.23):3$, là hợp số

b, Ta có: $41.43.45.47$ là số lẻ, $19.23.29.31$ là số lẻ, nên tổng là số chẵn nên là hợp số

c, Ta có: $987654+54321$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, là hợp số

Bài 4: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $5.31.19.101+62.131.1989.17$

b, $23.161.121.19-13.157.22.17$

c, $123456789+729$

Bài 5: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $5.7.8.9.11-132$

b, $4.5.6+9.13$

c, $7.11.13-5.6.7$

d, $17.19.23+23.25.27$

Bài 6: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $11.13.17-121$

b, $15+3.40+8.9$

c, $5.7.9-2.5.6$

d, $90.17-34.40+12.51$

Bài 7: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số:

a, $2010+4149$

b, $5+5^2+5^3+5^4$

c, $7.8.9.10-2.3.4.5$

d, 2007^2+2010^2

HD :

d, Dựa vào dấu hiệu chia hết cho 3

Bài 8: Tổng hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số: $1.2.3 \dots n + 1$

HD :

Xét $n = 3 \Rightarrow 1.2.3+1 = 7$ là số nguyên tố

Xét $n = 4 \Rightarrow 1.2.3.4+1 = 25$ là hợp số. Vậy không kết luận được

Bài 9: Cho $a=2.3.4.5\dots 2008$. Hỏi 2007 số tự nhiên liên tiếp sau có đều là hợp số không
 $a+2, a+3, a+4, \dots, a+2008$

HD:

Ta có: 2007 số trên đều là hợp số vì chúng lần lượt chia hết cho 2; 3; 4;... ; 2008, Và lớn hơn 2

Bài 10: Thay chữ số d vào số $\overline{5d}$ để được 1 hợp số

HD:

Vì $d \in \{0;1;2;3;\dots;8;9\}$

Nếu $d \in \{0;2;4;6;8\} \Rightarrow \overline{5d}:2 \Rightarrow$ là hợp số

Nếu $d \in \{1;7\} \Rightarrow \overline{5d}:3 \Rightarrow$ là hợp số

Nếu $d \in \{5\} \Rightarrow \overline{55}:5 \Rightarrow$ là hợp số

Nếu $d \in \{3;9\} \Rightarrow \overline{5d}$ là số nguyên tố

Bài 11: Thay chữ số vào $*$ để $\overline{7*}$ là số nguyên tố

HD:

Vì $* \in \{0;1;2;3;\dots;8;9\}$

Nếu $* \in \{0;2;4;6;8\} \Rightarrow \overline{7*}:2 \Rightarrow$ là hợp số

Nếu $* \in \{5;7\} \Rightarrow \overline{7*}:5, \overline{7*}:7 \Rightarrow$ là hợp số

Nếu $* \in \{1;3;9\} \Rightarrow \overline{7*}$ là số nguyên tố

Bài 12: Thay chữ số vào $*$ để $\overline{5*}$ là số nguyên tố

Bài 13: Thay a vào $\overline{13a}$ để được 1 số nguyên tố

Bài 14: Thay chữ số vào 8 để $\overline{1*}, \overline{3*}$ là hợp số

Bài 15: Thay chữ số vào $*$ để $\overline{5*}, \overline{9*}$ là số nguyên tố

Bài 16: Tìm số tự nhiên k để $3.k$ là số nguyên tố, $7.k$ là số nguyên tố

HD:

Vì $3.k$ chia hết cho 3, nên để là số nguyên tố thì $3k$ chỉ có 2 ước là 1 và chính nó, Vậy $k=1$

Vì $7.k$ chia hết cho 7, nên để là số nguyên tố thì $7k$ chỉ có 2 ước là 1 và chính nó, Vậy $k=7$

Bài 17: Thay dấu $*$ bằng chữ số thích hợp để mỗi số sau là số nguyên tố: $\overline{*1}, \overline{15*}, \overline{12*}, \overline{2*9}$

Bài 18: Các số sau đây là số nguyên tố hay hợp số:

a, $\overline{111\dots 1}$ (2010 số 1)

b, $\overline{333\dots 3}$ (2009 số 3)

c, $n(n+1), n > 0$

d, $3.5.7.9-28$

HD:

a, Số $\overline{111\dots 1}:11$ (2010 số 1) $\Rightarrow$ là hợp số

b, Số $\overline{333\dots 3}:3 \Rightarrow$ Là hợp số

c, Số $n(n+1)$ có 2 TH :

Nếu $n=1 \Rightarrow n(n+1)=2$ là số nguyên tố

Nếu $n \geq 2 \Rightarrow n(n+1)$ là hợp số vì $:n$ và $:n+1$

d, Số $3.5.7.9-28:7 \Rightarrow$ là hợp số

Bài 19: Các số sau đây là số nguyên tố hay hợp số:

a, $3.n^5$

b, $\overline{111\dots 1}$ (2001 chữ số 1)

c, $n^4 + 4$

d, 1112111

HD:

a, Với $n=1 \Rightarrow 3.n^5 = 3$ là số nguyên tố

Với $n \geq 2 \Rightarrow 3.n^5$ là hợp số

b, Số $\overline{111\dots 1}$ (2001 chữ số 1) có tổng các chữ số là $2001:3 \Rightarrow$ là hợp số

c, Với $n=1 \Rightarrow n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố

Với $n \geq 2 \Rightarrow n^4 + 4$ là hợp số

d, Số $1112111 = 1111000 + 1111 = 1111(10^3 + 1):1111$ là hợp số

Bài 20: Các số sau đây là số nguyên tố hay hợp số:

a, 111...1(2000 số 1)

b, 1010101

c, 311141111

HD:

a, Số 111...1 (2000 số 1) chia hết cho 11 nên là hợp số

b, Số 1010101 = 101.10001:101 nên là hợp số

c, Số 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111 nên là hợp số

Bài 21: Tìm tất cả các số tự nhiên n để

a, $n^2 + 12n$ là số nguyên tố

b, $3^n + 6$ là số nguyên tố

HD :

a, Ta có : $n^2 + 12n = n(n+12)$, Vì $n+12 > 1 \Rightarrow n(n+12)$ có thêm 2 ước là n và n+2

Để $n(n+12)$ là số nguyên tố thì $n=1 \Rightarrow n^2 + 12n = 13$ (thỏa mãn)

b, Nếu $n=0 \Rightarrow 3^n + 6 = 7$ là số nguyên tố

Nếu $n \neq 0 \Rightarrow 3^n + 6 : 3$ là hợp số

Bài 22: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a, p+2, p+4 cũng là số nguyên tố

b, p+10, p+14 là số nguyên tố

HD :

a, Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=4$ là hợp số $p=2(l)$

Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=5, p+4=7$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3(t/m)$

Với $p>3 \Rightarrow p=3k+1, p=3k+2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=3k+1+2:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1(l)$

Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+4=3k+2+4:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+2(l)$

Vậy p=3 là số nguyên tố cần tìm

b, Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+10=12:2$ là hợp số $\Rightarrow p=2(l)$

Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+10=13, p+14=17$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3(t/m)$

Với $p>3 \Rightarrow p=3k+1, p=3k+2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p=3k+1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+14=3k+1+14:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1(l)$

Nếu $p=3k+2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+10=3k+2+10:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3k+1(l)$

Vậy p=3 là số nguyên tố cần tìm

Bài 23: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a, p+2, p+6, p+8, p+14 cũng là số nguyên tố

b, p+6, p+8, p+12, p+14 cũng là số nguyên tố

HD :

a, Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=4:2$ là hợp số $\Rightarrow p=2(l)$

Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+6=9:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3(l)$

Với $p=5$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=7, p+6=11, p+8=13, p+14=19$ đều là số nguyên tố

Với $p>5 \Rightarrow p=5k+1, p=5k+2, p=5k+3, p=5k+4, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p=5k+1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+14=5k+1+14:5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+1(l)$

Nếu $p=5k+2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+8=5k+10:5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+1(l)$

Nếu $p=5k+3$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=5k+3+2:5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+3(l)$

Nếu $p=5k+4$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p+6=5k+4+6:5$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+4(l)$

Vậy p=5 là số nguyên tố cần tìm

Bài 24: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a, p+4, p+8 cũng là số nguyên tố

b, p+94, p+1994 cũng là số nguyên tố

HD :

b, Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+94=96$ là hợp số $p=2(l)$

Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+94=97, p+1994=1997$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p=3(t/m)$

Với $p > 3 \Rightarrow p = 3k + 1, p + 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p + 1994 = 3k + 1 + 1994 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 1(l)$

Nếu $p = 3k + 2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p + 94 = 3k + 2 + 94 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 2(l)$

Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm

Bài 25: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a, $p+18, p+24, p+26, p+32$ cũng là số nguyên tố

b, $p+2, p+10$ cũng là số nguyên tố

Bài 26: Tìm số nguyên tố p sao cho: $p+2, p+8, p+16$ đều là số nguyên tố

Bài 27: Tìm số nguyên tố p sao cho:

a, $2p-1, 4p-1$ cũng là số nguyên tố

b, $2p+1, 4p+1$ cũng là số nguyên tố

HD:

a, Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1 = 3, 4p-1 = 7$ là số nguyên tố $p = 2(t/m)$

Với $p = 3$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1 = 5, 4p-1 = 11$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p = 3(t/m)$

Với $p > 3 \Rightarrow p = 3k + 1, p + 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 4p-1 = 4(3k+1)-1 = 12k+3 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 1(l)$

Nếu $p = 3k + 2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 2p-1 = 2(3k+2)-1 = 6k+3 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 2(l)$

Vậy $p = 3$ và $p = 2$ là số nguyên tố cần tìm

b, Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 4p+1 = 9$ là hợp số $p = 2(l)$

Với $p = 3$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p+1 = 7, 4p+1 = 13$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow p = 3(t/m)$

Với $p > 3 \Rightarrow p = 3k + 1, p + 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 2p+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 1(l)$

Nếu $p = 3k + 2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 4p+1 = 4(3k+2)+1 = 12k+9 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3k + 2(l)$

Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm

Bài 28: Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15$ đều là số nguyên tố

Bài 29: Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p+q$ và $pq+11$ cũng là số nguyên tố

HD :

Nếu $pq+11$ là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ vì nó là số nguyên tố lớn hơn 2

Suy ra pq là số chẵn, khi đó ít nhất 1 trong 2 số p hoặc q bằng 2

Giả sử : $p = 2 \Rightarrow 7p+q = 14+q$ là số nguyên tố

Nếu $q = 2 \Rightarrow 7p+q = 7.2+2 = 16(l)$

Nếu $q = 3 \Rightarrow p.q+11 = 2.3+11 = 17(t/m)$ và $7p+q = 7.2+3 = 17(t/m)$

Nếu $q > 3 \Rightarrow q = 3k + 1, q = 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$

Với $q = 3k + 1 \Rightarrow 7p+q = 14+3k+1 : 3$ là hợp số $\Rightarrow q = 3k + 1(l)$

Với $q = 3k + 2 \Rightarrow pq+11 = 2q+11 = 2(3k+2)+11 = 6k+15 : 3$ là hợp số $\Rightarrow q = 3k + 2(l)$

Vậy $p = 2, q = 3$

Xét tiếp TH giả sử $q = 2$ thì ta được $p = 3$

2. Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p + 8$ là hợp số

Bài 30: Tìm số nguyên tố k để $5k$ là số nguyên tố

HD :

Thấy $5k$ luôn có 2 ước là 1 và chính nó

Nên $k > 1 \Rightarrow 5k$ là hợp số

Để $5k$ là số nguyên tố thì $k=1$

Bài 31: Tìm số nguyên tố p sao cho $5p+7$ là số nguyên tố

HD :

Nhận thấy $p = 2$ là số nguyên tố, và $5p + 7 = 17$ cũng là số nguyên tố

Ngoài $p = 2$ thì p chỉ có thể là $p = 2k + 1, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 2k + 1 \Rightarrow 5p + 7 = 5(2k + 1) + 7 = 10k + 12 : 2$ là hợp số, nên $p = 2k + 1 (l)$

Vậy $p=2$ là số nguyên tố cần tìm

Bài 32: Tìm số tự nhiên k để $11k$ cũng là số nguyên tố

Bài 33: Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n (n > 1)$ luôn tìm được n số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số

HD :

Chọn số tự nhiên $a = 2.3.4....n.(n+1)$

Khi đó ta có n số tự nhiên liên tiếp là $a + 2, a + 3, a + 4, ..., a + n, a + (n + 1)$ đều là hợp số

Vì n số trên lần lượt chia hết cho $2, 3, 4, ..., n, n + 1$

Bài 34: Tìm 2002 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số

HD :

Chọn $a = 2.3.4.....2002.2003$

Khi đó ta có 2002 số tự nhiên liên tiếp là $a + 2, a + 3, a + 4, ..., a + 2002, a + 2003$ đều là hợp số

Vì 2002 số trên lần lượt chia hết cho $2, 3, 4, ..., 2002, 2003$

Bài 35: Tìm các số nguyên tố a sao cho $6a+13$ là số nguyên tố và $25 \leq 6a+13 \leq 45$

HD :

Ta có : Từ 25 đến 45 có 5 số nguyên tố là : 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43

Nên ta có bảng sau :

$6a+13$	29	31	37	41	43
a		3	4		5

Mà a là số nguyên tố nên $a = 4$ (loại)

Bài 36: Tìm các số nguyên tố a để $2a+7$ là các số nguyên tố < 20

Bài 37: Tìm 1 số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố

HD :

Gọi số nguyên tố cần tìm là p , Nhận thấy $p > 2$

Vì p vừa là tổng vừa là hiệu của 2 số nguyên tố nên trong đó phải có 1 số nguyên tố chẵn,

Như vậy số chẵn là 2, Khi đó ta có :

$p = a + 2 = b - 2$ (với a, b là các số nguyên tố)

$\Rightarrow a = p - 2, p, b = p + 2$ là 2 số lẻ liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3, vậy phải có 1 số bằng 3

Nếu $a = 3 \Rightarrow p = 5, b = 7$

Nếu $p = 3 \Rightarrow a = 1 (l)$

Nếu $b = 3 \Rightarrow p = 1 (l)$

Vậy số nguyên tố cần tìm là 5

Bài 38: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $4p+11$ là số nguyên tố < 30

Bài 39: Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố

Bài 40: Tìm ba số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng

Bài 41: Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho $a.b.c = 3(a + b + c)$

Bài 42: Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 23$ có đúng 6 ước dương

HD:

Đặt $A = p^2 + 23 (p \geq 2) \Rightarrow A \geq 27$, Để A có 6 ước thì $6 = 2.3 \Rightarrow A = a^x . b^y \Rightarrow (x+1)(y+1) = 6$

Với $x \geq y \geq 1$

Nếu A chứa 1 thừa số nguyên tố thì $x+1=6 \Rightarrow x=5$, Chọn thừa số nguyên tố bé nhất là 2 thì $A = 2^5 = 32$
Nếu A chứa hai thừa số nguyên tố thì: $x=2, y=1$ hoặc ngược lại, để A nhỏ nhất ta chọn thừa số nguyên tố bé có số mũ lớn và thừa số lớn có số mũ bé là $A = 2^2 \cdot 3^1 = 6$ ước: Đối chiếu đề bài ta thấy $A > 27$ thì 32 thỏa mãn: $\Rightarrow p^2 = 32 - 23 = 9 = 3^2$ và 3 là số nguyên tố.

Bài 43: Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn số sau lớn hơn số trước là k đơn vị. CMR: $k \vdots 6$

HD:

Gọi 3 số nguyên tố thỏa mãn là: p, p+k và p+2k

$\Rightarrow k$ là số chẵn $\Rightarrow k$ chia hết cho 2, Giả sử k không chia hết cho 3 khi đó $k = 3m+1, k = 3m+2$

TH1: $k = 3m+1$

Với p chia 3 dư 1 thì: $p=3n+1 \Rightarrow p+2k=3n+1+6m+2$ chia hết cho 3 (loại)

Với p chia 3 dư 2 thì: $p=3n+2 \Rightarrow p+k = 3n+2+3m+1$ chia hết cho 3 (loại)

TH2: $k=3m+2$

Với p chia 3 dư 1 thì: $p=3n+1 \Rightarrow p+k=3n+1+3m+2$ chia hết cho 3 (loại)

Với p chia 3 dư 2 thì: $p=3n+2 \Rightarrow p+2k=3n+2+6m+4$ chia hết cho 3 (loại)

nên k phải chia hết cho 3 nên k chia hết cho 3 $\Rightarrow k$ chia hết cho 6

Bài 44: Tìm số nguyên tố p sao cho $2p^2+1$ cũng là số nguyên tố

Bài 45: Tìm mọi số nguyên tố thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

HD:

Từ gt $\Rightarrow x^2 - 1 = 2y^2$, nếu x chia hết cho 3 vì x nguyên tố nên $x=3$, lúc đó $y=2$ nguyên tố

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2 - 1$ chia hết cho 3 khi đó $2y^2$ chia hết cho 3, mà $(2;3)=1$

Nên y chia hết cho 3, $\Rightarrow y=3$ vậy $x^2 = 19$ không thỏa mãn,

Bài 46: Tìm số n nhỏ nhất để: $n+1; n+3; n+7$ đều là nguyên tố.

Bài 47: Tìm hai số nguyên tố p và q biết rằng $p > q$ sao cho p + q và p - q đều là các số nguyên tố.

Bài 48: Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn: $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 49: Tìm ba số nguyên tố x, y, z thỏa mãn: $x^y + 1 = z$

DẠNG 2: CHỨNG MINH LÀ HỢP SỐ

Bài 1: Cho p và $8p-1$ là số nguyên tố, chứng minh rằng $8p+1$ là hợp số

HD:

Nhằm thấy $p = 3$ là số cần tìm

Đặt $p = 3a + r (r = 0; 1; 2)$

Nếu $r = 0 \Rightarrow p = 3a$ là số nguyên tố nên $a = 1 \Rightarrow p = 3, 8p - 1 = 23$ là các số nguyên tố,

Thỏa mãn điều kiện đầu bài, Khi đó $8p + 1 = 25$ là hợp số (đpcm)

Nếu $r = 1 \Rightarrow p = 3a + 1$ giả sử là số nguyên tố

và $8p - 1 = 8(3a + 1) - 1 = 24a + 7$ giả sử cũng là số nguyên tố, khi đó:

$8p + 1 = 8(3a + 1) + 1 = 24a + 9 : 3$ là hợp số (đpcm)

Nếu $r = 2 \Rightarrow 8p - 1 = 8(3a + 2) - 1 = 24a + 15 : 3$ là hợp số nên $r = 2 (l)$

Bài 2: Chứng minh rằng: nếu p là số nguyên tố > 3 và $2p+1$ là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số

HD:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1, p = 3k + 2 (k \in N)$

Nếu $p = 3k + 1$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p + 1 = 6k + 3 : 3 (l)$

Nếu $p = 3k + 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow 2p + 1 = 6k + 5$ giả sử cũng là số nguyên tố,

Khi đó : $4p + 1 = 12k + 9 : 3$ là hợp số, (đpcm)

Bài 3: Cho p là số nguyên tố > 3 , biết $p+2$ cũng là số nguyên tố, cmr $p+1$ chia hết cho 6

HD :

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên $p = 3k + 1, p = 3k + 2, (k \in N^*)$

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p + 2 = 3k + 3 : 3 (l)$

Nếu $p = 3k + 2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p + 2 = 3k + 4$ giả sử cũng là số nguyên tố,

Khi đó : $p + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$

Mà p nguyên tố nên $3k + 2$ là số lẻ $\Rightarrow 3k$ là số lẻ $\Rightarrow 3k$ là số lẻ $\Rightarrow k$ là số lẻ $\Rightarrow k + 1$ là số chẵn
 $\Rightarrow 3(k + 1) : 6$ (đpcm)

Bài 4: Cho p và $p+4$ là số nguyên tố lớn hơn 3, cmr $p+8$ là hợp số

HD :

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2, (k \in N^*)$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 6 : 3$ là hợp số (loại)

Nếu $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow p + 4 = 3k + 5$ giả sử cũng là số nguyên tố,

Khi đó : $p + 8 = 3k + 9 : 3$ là hợp số (đpcm)

Bài 5: Chứng minh rằng với p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $8p^2 + 1$ là 2 số nguyên tố thì $8p^2 - 1$ là hợp số

HD :

Vì $p, 8p^2 + 1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p^2 - 1; 8p^2; 8p^2 + 1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p^2 + 1 \nmid 3, p \nmid 3 \Rightarrow 8p^2 \nmid 3$, Vậy $8p^2 - 1 : 3$ hay là hợp số

Bài 6: Chứng minh rằng nếu p và $p+2$ là hai số nguyên tố > 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12

HD :

Đặt $A = p + (p + 2) = 2p + 2 = 2(p + 1)$

Và $p + 2 = p - 1 + 3$

Xét 3 số liên tiếp $p - 1, p, p + 1$ phải có 1 số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p không chia hết cho 3,

Mặt khác $p - 1 \nmid 3$ vì nếu chia hết cho 3 thì $p + 2$ sẽ chia hết cho 3, như vậy $p + 1 : 3 \Rightarrow 2(p + 1) : 3$

Lại có p là số nguyên tố > 3 nên p lẻ $\Rightarrow p + 1$ là số chẵn : 2

Vậy $2(p+1):12$

Bài 7: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố >3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24

HD :

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Với p không chia hết cho 2 $\Rightarrow (p-1), (p+1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1):8$

Mặt khác p không chia hết cho 3 nên $p = 3k+1, p = 3k+2$

Nếu $p = 3k+1 \Rightarrow (p-1):3 \Rightarrow (p-1)(p+1):24$

Nếu $p = 3k+2 \Rightarrow (p+1):3 \Rightarrow (p-1)(p+1):24$

Bài 8: Cho p và $10p+1$ là các số nguyên tố >3 , cmr $5p+1$ là hợp số

HD:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k+1, p = 3k+2, (k \in \mathbb{N}^*)$

Với $p = 3k+1$ giả sử là số nguyên tố, $\Rightarrow 10p+1 = 30k+11$ giả sử cũng là số nguyên tố

Khi đó: $5p+1 = 15k+6:3$ là hợp số (đpcm)

Với $p = 3k+2$ giả sử là số nguyên tố $\Rightarrow 10p+1 = 30k+21:3$ (loại)

Bài 9: Cho p và $p+8$ là các số nguyên tố ($p>3$) cmr $p+4$ là hợp số

Bài 10: Cho p và $4p+1$ là hai số nguyên tố ($p>3$), cmr $2p+1$ là hợp số

Bài 11: Cho p và $5p+1$ là hai số nguyên tố ($p>3$), cmr $10p+1$ là hợp số

Bài 12: Cho p và $8p+1$ là hai số nguyên tố ($p>3$), cmr $4p+1$ là hợp số

Bài 13: Cho p và $p+10$ là các số nguyên tố, cmr $p+32$ là hợp số

Bài 15: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, hỏi tổng 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay số lẻ

HD:

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, có 1 số nguyên tố chẵn là số 2

Còn lại 24 số nguyên tố còn lại là số lẻ $\Rightarrow$ tổng của 24 số lẻ cho ta 1 số chẵn

Vậy xét tổng của 25 số nguyên tố đó cho ta được 1 số chẵn

Bài 16: Tổng của ba số nguyên tố là 1012, Tìm số nguyên tố nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó

HD:

Tổng của 3 số nguyên tố là 1012 là 1 số chẵn, nên bắt buộc phải có 1 số chẵn,

Mà số nguyên tố chẵn duy nhất cũng là nhỏ nhất là số 2

Bài 17: CMR mọi số nguyên tố >2 đều có dạng $4n+1$ hoặc $4n-1$

HD:

Mọi số nguyên tố p lớn hơn 2 đều có dạng $p = 2k+1, (k \in \mathbb{N}^*)$

TH1: Nếu k chẵn $\Rightarrow k = 2n \Rightarrow p = 2k+1 = 2.2n+1 = 4n+1$

TH2: Nếu k lẻ $\Rightarrow k = 2n-1 \Rightarrow p = 2k+1 = 2(2n-1)+1 = 4n-1, (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 18: CMR p là số nguyên tố >3 thì p có dạng $6k+1$ hoặc $6k+5$

HD:

Mọi số tự nhiên p lớn hơn 3 đều có dạng $p = 3n+1, p = 3n-1$

Vì nếu n lẻ thì p là số chẵn như vậy p không là số nguyên tố

Nên n phải chẵn $\Rightarrow n = 2k (k > 0, k \in \mathbb{N})$, Xét 2 TH:

TH1: $p = 3n+1 = 6k+1$

TH2: $p = 3n-1 = 3.2k-1 = 6k-1 = 6k+5$

Bài 19: CMR nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho $14p+1$ cũng là số nguyên tố thì $7p+1$ là bội số của 6

HD:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Khi đó $7p+1$ là 1 số chẵn nên chia hết cho 2

Mặt khác vì p không chia hết cho 3 nên p có dạng $p = 3k+1, p = 3k+2, (k \in \mathbb{N}^*)$

Với $p = 3k+1$ giả sử là số nguyên tố, $\Rightarrow 14p+1 = 45k+15:3$ nên $p = 3k+1 (l)$

Với $p = 3k+2 \Rightarrow 14p+1 = 42k+29$ giả sử là số nguyên tố, Khi đó:

$$7p+1=21k+15:3 \text{ Như vậy } 7p+1:6$$

Bài 20: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, CMR: $p^2 + 2012$ là hợp số

Bài 21: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương

HD:

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p:2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

- Giả sử $p+1$ là số chính phương, Đặt $p+1=m^2 (m \in \mathbb{N})$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ

Đặt $m=2k+1 (k \in \mathbb{N})$, Ta có: $m^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow p+1=4k^2+4k+1 \Rightarrow p=4k^2+4k=4k(k+1)$

Mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p+1$ không thể là số chính phương

- Giả sử $p=2.3.5....$ là $:3 \Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2 \Rightarrow p-1$ không là số chính phương

Vậy nếu p là tích của $n (n > 1)$ số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương

Bài 22 : Cho $B=1.3.5.7....2017.2019$, Hỏi trong các số $2B-1, 2B, 2B+1$ số nào là số chính phương?

HD :

Ta có : $2B-1=2.1.3.5...2017.2019-1$, có $2B:3 \Rightarrow 2B-1=3k+2 (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2B-1$ không là số chính phương

Với $2B=2.1.3.5...2017.2019 \Rightarrow 2B$ chẵn $\Rightarrow B$ lẻ nên $B \not\vdots 2 \Rightarrow 2B:2$ nhưng $2B \not\vdots 4$

Và $2B$ chẵn nên $2B$ không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3, vậy $2B$ không là số chính phương

Với $2B+1=2.1.3.5...2017.2019+1 \Rightarrow 2B+1$ là số lẻ, nên $2B+1 \not\vdots 4$

và $2B \not\vdots 4 \Rightarrow 2B+1 \not\vdots 4$ dư 1 $\Rightarrow 2B+1$ không là số chính phương

Bài 23 : Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau

HD :

Gọi số chính phương phải tìm là : $\overline{aabb} = n^2, (a, b \in \mathbb{N}), 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

Ta có : $n^2 = \overline{aabb} = 11.a0b = 11(100a+b) = 11(99a+a+b)$ (1)

Nhân xét thấy : $\overline{aabb}:11 \Rightarrow a+b:11$

Mà $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b=11$

Thay vào (1) ta được : $n^2 = 11^2 (9a+1) \Rightarrow 9a+1$ là số chính phương

Bằng phép thử a từ 1 đến 9 ta thấy có $a=7$ là thỏa mãn $\Rightarrow b=4$

Vậy số cần tìm là 7744

Bài 24 : Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn : $10p+1$ cũng là số nguyên tố, CMR : $5p+1:6$

HD :

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3, nên $10p$ cũng không chia hết cho 3 (1)

Lại có $10p+1$ là số nguyên tố. $10p+1 > 3 \Rightarrow 10p+1 \not\vdots 3$ (2)

Ta có : $10p(10p+1)(10p+2)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

$\Rightarrow 10p+2:3 \Rightarrow 5p+1:3$

Lại có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p+1$ là số chẵn nên chia hết cho 2, khi đó

$5p+1:6$

DẠNG 3: CHỨNG MINH LÀ MỘT SỐ NGUYÊN TỐ

Bài 1: Chứng minh các số sau là hợp số

a, $12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$ b, $1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$ c, $45^{25} + 37^{15}$ d, $95^{354} + 51^{25}$

HD:

a, Ta có: $12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

b, $1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$ là số chẵn nên là hợp số

c, Ta có: $45^{25} + 37^{15}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

d, Tương tự $95^{354} + 51^{25}$ là 1 số chẵn nên là hợp số

Bài 2: Chứng minh các số sau là hợp số

a, $21^{123} + 23^{124} + 25^{125}$ b, $10^8 + 10^7 + 7$ c, $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ d, $425^{25} - 37^{15}$

HD:

b, Ta có: $10^8 + 10^7 + 7$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên là hợp số

c, Ta có: $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ là số chẵn nên là hợp số

d, $425^{25} - 37^{15}$ là số chẵn nên là hợp số

Bài 3: Chứng minh các số sau là hợp số

a, $1 + 2^7 + 3^{11} + 5^{13} + 7^{17} + 11^{19}$ b, $195^{354} - 151^{25}$ c, $2^{2^{2n+1}} + 3, n \in \mathbb{N}$ d, $2^{2^{4n+1}} + 7, n \in \mathbb{N}$

HD:

a,

b, Ta có: $195^{354} - 151^{25}$ là số chẵn nên là hợp số

c, Ta có: $2^{2^{2n+1}} = 2^{2^n} \cdot 2 = 4^n \cdot 2 = 2^{4^n} = 2^{4^n} = 2^{4^n} \cdot 4$ nên

$4^n = 4^{1+n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 2^{4^n} \cdot 4 = 2^{4 \cdot 4^{n-1}} \cdot 4 = (2^4)^{4^{n-1}} \cdot 4 = \overline{16} \cdot 4 = \overline{64}$, khi đó $2^{2^{2n+1}} + 3 = \overline{64} \cdot 5$ là hợp số

Bài 4: Chứng minh các số sau là hợp số: $2^{2^{6n+2}} + 13, n \in \mathbb{N}$

Bài 5: Chứng minh các số sau là hợp số:

a, $\overline{abcabc} + 7$ b, $\overline{abcabc} + 22$ c, $\overline{abcabc} + 39$

HD:

a, Ta có: $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c + 7$
 $= a \cdot 100100 + b \cdot 10010 + 1001c + 7 = 1001(100a + 10b + c) + 7$

Vì 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{abcabc} : 7$ là hợp số

b, Tách tương tự, nhưng vì $1001 : 11$ nên là hợp số

c, Tách tương tự, nhưng vì $1001 : 13$ nên là hợp số

Bài 6: Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là r là hợp số, tìm r

Bài 7: Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là r, Tìm r biết r không là số nguyên tố

Bài 8: Cho $C = 222...22000...00777...77$ (2011 số 2, 2011 số 0 và 2011 số 7). Vậy C là nguyên tố hay hợp số?

HD:

Tổng các chữ số của C là $2011(2+7) = 2011 \cdot 9$ chia hết cho 9 nên C là hợp số

Bài 9: CMR: Hai số lẻ liên tiếp bao giờ cũng nguyên tố cùng nhau.

Bài 10: Có hay không số nguyên tố mà khi chia cho 12 được dư 9

Bài 11: CMR : Trong ba số nguyên tố lớn hơn 3, luôn tồn tại 2 số nguyên tố mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 12

Bài 12: Một số nguyên tố p khi chia cho 42 có số dư là 1 hợp số r, tìm r

Bài 13: Cho a,b,c,d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, CMR: $a+b+c+d$ là hợp số

HD:

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$\Rightarrow a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) : 2$ Mà $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2) : 2$

Do đó $a + b + c + d : 2$ Vậy $a + b + c + d \geq 4$ nên $a + b + c + d$ là hợp số

Bài 14 : Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn : $ab=cd$. Chứng minh rằng : $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là 1 hợp số với mọi số tự nhiên n

CHUYÊN ĐỀ: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Định nghĩa: Số chính phương là bình phương của 1 số tự nhiên

Như vậy: A là số chính phương thì A có dạng $A = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

VD: 0;1;4;9;16;25;...

Tính chất:

- Số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0,1,4,5,6,9
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa thừa số với mũ chẵn.

Hệ quả:

- + Tích các số chính phương là 1 số chính phương
- + Số chính phương : 2 thì :4
- + Số chính phương : 3 thì :9
- + Số chính phương : 5 thì :25
- + Số chính phương : 8 thì :16
- + Số lượng các ước lẻ là số chính phương và ngược lại
- + Số chính phương chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

DẠNG 1: CHỨNG MINH LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Các tổng sau có phải là số chính phương không?

a/ $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$

b/ $B = 11 + 11^2 + 11^3$

c/ $10^{10} + 8$

d/ $10^{10} + 5$

e/ $10^{100} + 10^{50} + 1$

HD:

a, Tổng A Chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương

b, Tổng B có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương

c, Ta có: $10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương

d, Ta có: $10^{10} + 5$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương

e, Ta có: $10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số là 3 nên chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 2: Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$, chứng minh rằng $A+4$ không là số chính phương?

HD:

Tính tổng A ta được: $A = 2^{21} - 2^2 \Rightarrow A + 4 = 2^{21}$ không là số chính phương vì có mũ lẻ

Bài 3: Cho $B = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$, chứng minh rằng $2B+3$ không là số chính phương?

HD:

Tính tổng B ta được: $2B = 3^{101} - 3 \Rightarrow 2B + 3 = 3^{101}$ không là số chính phương vì mũ lẻ

Bài 4: Viết liên tiếp từ 1 đến 12 ta được 1 số $A=1234\dots1112$ hỏi số A có thể có 81 ước không?

HD:

Giả sử A là số chính phương, ta có tổng các chữ số của A là:

$1+2+3+\dots+11+12 = 51:3$ nhưng $\nmid 9$ nên không là số chính phương

Khi đó A không thể có 81 ước

Hoặc chỉ ra A có chữ số tận cùng là 2, nên A không là số chính phương

Bài 5: Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương ($a > b > 0$)

HD:

Phân tích ta có: $A = \overline{ab} - \overline{ba} = 9a - 9b = 3^2(a - b)$

Để là số chính phương thì $a-b$ là số chính phương

Mà $1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$

TH1: Với $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$

Thấy có 43 là số nguyên tố

TH2: Với $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$

Có 73 là số nguyên tố

Vậy số $\overline{ab}$ bằng 43 hoặc 73

Bài 6: Tìm số có dạng $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương

Bài 7: Số 101112...20 có là số chính phương không?

HD:

Số trên có 3 chữ số tận cùng là 0 nên không là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng $2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương

HD:

Tổng trên có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương

Bài 9: Chứng minh rằng số 1234567890 không là số chính phương?

HD:

Số trên chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương

Bài 10: Chứng minh rằng nếu 1 số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không là số chính phương?

HD:

Số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

Bài 11: Chứng minh rằng 1 số có tổng các chữ số của nó là 2006 không phải là 1 số chính phương

HD:

Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Số trên có tổng các chữ số là 2006 nên chia 3 dư 2, vậy không phải là số chính phương

Bài 12: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không là số chính phương?

HD:

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + 2004 + 2005 = 2006 \cdot 2005 : 2 = 1003 \cdot 2005 = A$

Phân tích A ta thấy A không là số chính phương

Bài 13: Chứng minh rằng $n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương?

HD:

Ta có: $4^4 : 4, 44^{44} : 4 \Rightarrow n : 4$ dư 3, $\Rightarrow n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n$ không là số chính phương

Bài 14: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau

HD:

Gọi số chính phương cần tìm là: $\overline{aabb} = n^2 (a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11(100a + b) = 11(99a + a + b)$ (1)

Thấy $\overline{aabb} : 11 \Rightarrow a + b : 11 \Rightarrow a + b = 11$ Thay vào (1) ta được:

$n^2 = 11^2(9a + 1) \Rightarrow 9a + 1$ là số chính phương

Thử $a = 1, 2, 3, \dots, 9$ thấy $a = 7$ thỏa mãn $\Rightarrow b = 4$

Bài 15: Chứng minh rằng các số sau là số chính phương

a, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ b, $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$

HD:

b, Tính tổng B ta được: $A = \frac{(1 + 2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$ Vậy tổng trên là số chính phương

Bài 16: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số biết $2n+1$ và $3n+1$ đều là số chính phương

HD:

Ta có: $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199$,

Tìm các số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được: 25; 49; 81; 121; 169

ứng với $n = 12, 24, 40, 60, 84$

Khi đó $3n+1 = 37, 73, 121, 181, 253$, Thấy chỉ có 121 là số chính phương, vậy $n = 40$

Bài 17: Tìm số tự nhiên n có hai chữ số để $3n+1$ và $4n+1$ đều là các số chính phương

Bài 18: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng nhân nó với 135 thì ta được 1 số là số chính phương

HD:

Gọi số phải tìm là n , ta có: $135n = a^2 \ (a \in \mathbb{N})$

Hay $3^3 \cdot 5 \cdot n = a^2$ là số chính phương $\Rightarrow n = 3 \cdot 5 \cdot k^2$

Với $k=1 \Rightarrow n=15$

Với $k=2 \Rightarrow n=60$

Với $k \geq 3 \Rightarrow n \geq 135$ (loại)

Vậy số cần tìm là 15 hoặc 60

Bài 19: Các số sau là số chính phương không?

a, $\overline{abab}$

b, $\overline{abcabc}$

c, $\overline{ababab}$

d, 2001^{2001}

e, $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

HD:

a, Ta có: $n^2 = \overline{abab} = \overline{ab.101} \Rightarrow \overline{ab}:101$ (Vô lý)

b, Ta có: $n^2 = \overline{abcabc} = \overline{abc.1001} \Rightarrow \overline{abc}:1001$ (Vô lý)

c, Ta có: $n^2 = \overline{ababab} = \overline{ab.10101} = \overline{ab.3.7.13.37} \Rightarrow \overline{ab}:10101$ (Vô lý)

d, Ta có: $2001^{2001} = (2001^{1000})^2 \cdot 2001$, Số 2001 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

e, $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 3 \cdot 37(a + b + c)$

$a + b + c : 37$ mà $a + b + c \leq 27$ nên A không thể là số chính phương

Bài 20: Cho 4 số 3,6,8,8 tìm số chính phương được lập từ 4 số trên

HD:

Gọi n^2 là số chính phương phải tìm. Vì số chính phương không có tận cùng là 3; 8 nên

n^2 có tận cùng là 6 $\Rightarrow n^2$ tận cùng là 36 hoặc 86

Nếu tận cùng là 86 thì nó : 2 nhưng $\nmid 4$ nên phải có tận cùng là 36

Vậy số cần tìm là 8836

Bài 21: Cho 4 số 0,2,3,4 Tìm số chính phương có 4 chữ số từ 4 số trên

HD:

Gọi n^2 là số chính phương phải tìm $\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 0 hoặc 4

Nếu n có tận cùng là 0 thì n^2 có tận cùng là 00 $\Rightarrow$ loại

n có tận cùng là 4 thì n^2 có tận cùng là 04, 24, 34

Do n^2 là số chính phương nên nếu : 2 thì : 4 $\Rightarrow$ tận cùng là 04 hoặc 24

Xét các số: 2304; 3204; 3024 chỉ có 2304 là số chính phương

Bài 22: Cho 4 số 0,2,3,5 Tìm số chính phương có 4 chữ số từ 4 số trên

HD:

Gọi n^2 là số chính phương phải tìm $\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 0 hoặc 5

Nếu n có tận cùng là 0 $\Rightarrow n^2$ tận cùng là 00 (loại)

Nếu n có tận cùng là 5 $\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 25

Ta có số cần tìm là 3025

Bài 23: Cho 4 số 0,2,4,7 Tìm số chính phương có 4 chữ số gồm cả 4 số trên

HD:

Gọi n^2 là số chính phương cần tìm $\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 0 hoặc 4

Nếu n có tận cùng là 0 thì n^2 có tận cùng là 00 (loại)

Nếu n có tận cùng là 4 thì n^2 có tận cùng là 04; 24; 74

Do n là số chính phương nên nếu chia hết cho 2 thì sẽ chia hết cho 4

$\Rightarrow n^2$ có tận cùng là 04 hoặc 24

Khi đó ta có các số: 2704; 7204; 7024, trong các số trên chỉ có số 2704 là số chính phương.

Bài 24: Tổng các chữ số của 1 số chính phương có thể là 1983 không?

HD:

Tổng các chữ số của 1 số là 1983 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, nên số chính phương không có tổng là 1983

Bài 25: Cho $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$, hỏi A có là số chính phương không?

HD:

Nhận thấy A chia hết cho 5 nhưng A lại không chia hết cho 25 nên A không là số chính phương

Bài 26: Chứng minh rằng tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương?

HD:

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2, a+3$

Xét tổng ta có: $S = 4a+6$, thấy tổng chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương

Bài 27: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được 1 số chính phương?

HD:

Gọi số cần tìm là n, ta có: $n.45 = a^2 (a \in \mathbb{N})$

Hay $n.5.9 = a^2 \Rightarrow n = 5.k^2 (k \in \mathbb{N})$

Khi đó với $k=1 \Rightarrow n=5$ (loại)

$k=2 \Rightarrow n=20$ (nhận)

$k=3 \Rightarrow n=45$ (nhận)

$k=4 \Rightarrow n=80$ (nhận)

$k=5 \Rightarrow n=125$ (loại)

Bài 28: Tìm a sao cho số $(a+1)(a+2)a(a+3)$ là số chính phương

Bài 29: Tìm số $\overline{ab}$, biết: $c = \overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương

Bài 30: Tìm a,b sao cho $\overline{2007ab}$ là bình phương của 1 số tự nhiên

Bài 31: Cho $S = 1+3+5+\dots+2009+2011$

a, Tính S

b, Chứng tỏ S là 1 số chính phương

c, Tìm các ước nguyên tố khác nhau của S

Bài 32: Cho $A = 1-2+3-4+\dots+19-20$

a, A có chia hết cho 2;3;5 không?

b, Tìm tất cả các ước của A

Bài 33: CMR: tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là 1 số chính phương

HD:

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$, trong đó n là số tự nhiên và $n \geq 2$

Xét tổng bình phương: $A = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$, Vì n^2 không thể có tận cùng là 3 hoặc 8, nên $n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5 hay A không là số chính phương

Bài 34: Cho n là số tự nhiên có hai chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương

HD:

Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị 36, 64, 100, 144, 196

Với $2n=36 \Rightarrow n=18 \Rightarrow n+4=22$ không là số chính phương

Với $2n=64 \Rightarrow n=32 \Rightarrow n+4=36$ là số chính phương

Với $2n=100 \Rightarrow n=50 \Rightarrow n+4=54$ không là số chính phương

Với $2n=144 \Rightarrow n=72 \Rightarrow n+4=76$ (loại)

Với $2n=196 \Rightarrow n=98 \Rightarrow n+4=102$ (loại)

Bài 35: CMR: với mọi số tự nhiên a, tồn tại số tự nhiên b sao cho $4+ab$ là số chính phương

Bài 36: CMR: $P = 22499\dots9100\dots09$ là số chính phương khi có n-2 số 9 và n số 0

HD:

$$P = 225.10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$

$$P = (15.10^n)^2 - 90.10^n + 3^2 = (15.10^n - 3)^2 \text{ là số chính phương}$$

Bài 37: Cho $D = \underbrace{11\dots11}_{2n \text{ chữ số } 1}$; $E = \underbrace{11\dots11}_{n+1 \text{ chữ số } 1}$ và $F = \underbrace{66\dots66}_n$. Chứng minh rằng $D + E + F + 8$ là số chính phương.

Bài 38: Tìm hai số nguyên dương x, y ($x > y > 0$) thỏa mãn hai số $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ đều là số chính phương.

Bài 39: Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, CMR: S không phải là số chính phương

HD:

$$\text{Ta có: } S = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3(a + b + c)$$

$$\text{Vì } 0 < a + b + c \leq 27 \text{ nên } a + b + c \nmid 37, \text{ Mặt khác: } (3; 37) = 1 \Rightarrow 3(a + b + c) \nmid 37$$

Vậy S không thể là số chính phương

Bài 40: Chứng minh rằng: Nếu $2n+1$ và $3n+1, (n \in \mathbb{N})$ đều là số chính phương thì n chia hết cho 40

Bài 41: Với a, b là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $(a-b)(a+b+1) = b^2$

CMR: $a-b$ và $a+b+1$ là các số chính phương