

RÚT GỌN PHÂN THỨC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn phân thức cho trước ta làm như sau:

Bước 1. Sử dụng các *phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử* để biến đổi cả tử và mẫu của phân thức;

Bước 2. Sử dụng các *tính chất cơ bản của phân thức* đã học để rút gọn phân thức đã cho.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Rút gọn phân thức

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử;

Bước 2. Rút gọn bằng cách triệt tiêu nhân tử chung.

Bài 1: Rút gọn phân thức

$$A = \frac{17xy^3z^4}{34x^3y^2z}$$

$$B = \frac{y^2 - xy}{4xy - 7y^2}$$

$$C = \frac{x^2 - 25}{5x - x^2}$$

$$D = \frac{x^2 + xz - xy - yz}{x^2 + xz + xy + yz}$$

$$E = \frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^2}$$

$$G = \frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

Bài 2: Rút gọn phân thức

$$A = \frac{ax^4 - a^4x}{a^2 + ax + x^2}$$

$$B = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x}$$

$$C = \frac{2a^2 - 2ab}{ac + ad - bc - bd}$$

$$D = \frac{(x+a)^2 - 4x^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax}$$

$$E = \frac{y(2x-x^2)(y+2)}{x(2y+y^2)(x-2)}$$

$$F = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$$

Bài 3: Rút gọn phân thức

$$A = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-4x^2 + 10x - 4}$$

$$B = \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3}$$

$$C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$$

$$D = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$$

$$F = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức.

Phương pháp giải: Thực hiện tương tự các bước chứng minh đẳng thức đã học trong CD 1 và CD2.

Bài 4: Chứng minh đẳng thức.

$$a) \frac{3}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$$

$$b) \frac{2}{x+4} = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$$

Bài 5: Chứng minh đẳng thức.

$$a) \frac{x^5-1}{x+1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$b) \frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức với điều kiện cho trước.

Bước 1. Sử dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi cả tử và mẫu của phân thức;

Bước 2. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức đã học để rút gọn phân thức đã cho.

Bài 6: Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \neq 0$. **Rút gọn biểu thức**
$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ax + by + cz)^2}$$

Bài 7: Cho $ax + by + cz = 0$. **Rút gọn phân thức**

$$A = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2}$$

Dạng 4: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x.

Bước 1. Sử dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi cả tử và mẫu của phân thức;

Bước 2. Sử dụng các tính chất cơ bản của phân thức đã học để rút gọn phân thức đã cho sao cho không còn các ẩn (x,y ...đề bài yêu cầu không phụ thuộc)

Bài 8: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x .

$$A = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)(ay-ax)}$$

$$B = \frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}$$

Bài 9: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x, y .

$$\frac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1}; x \neq \frac{1}{3}; y \neq 1$$

Dạng 5: Bài toán nâng cao.

Bài 10: Cho $x > y > 0$.Chứng minh rằng $\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Rút gọn phân thức.

Bài 1:

$A = \frac{17xy^3z^4}{34x^3y^2z} = \frac{yz^3}{2x^2}$	$B = \frac{y^2 - xy}{4xy - 7y^2}$ $= \frac{-y(x - y)}{y(4x - 7y)} = \frac{y - x}{4x - 7y}$	$C = \frac{x^2 - 25}{5x - x^2}$ $= \frac{(x + 5)(x - 5)}{-x(x - 5)} = \frac{x + 5}{-x}$
$D = \frac{x^2 + xz - xy - yz}{x^2 + xz + xy + yz}$ $= \frac{(x + z)(x - y)}{(x + z)(x + y)} = \frac{x - y}{x + y}$	$E = \frac{45x(3 - x)}{15x(x - 3)^2} = \frac{3}{3 - x}$	$G = \frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$ $= \frac{-(x + y)(x - y)}{(x - y)^3} = \frac{-x - y}{(x - y)^2}$

Bài 2:

$A = \frac{ax^4 - a^4x}{a^2 + ax + x^2}$ $= \frac{ax(x^3 - a^3)}{a^2 + ax + x^2}$ $= \frac{ax(x - a)(a^2 + ax + x^2)}{a^2 + ax + x^2}$ $= ax(x - a)$	$B = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 4x}$ $= \frac{x(x^2 + x - 6)}{x(x^2 - 4)}$ $= \frac{x(x - 2)(x + 3)}{x(x + 2)(x - 2)}$ $= \frac{x + 3}{x + 2}$	$C = \frac{2a^2 - 2ab}{ac + ad - bc - bd}$ $= \frac{2a(a - b)}{a(c + d) - b(c + d)}$ $= \frac{2a(a - b)}{(c + d)(a - b)}$ $= \frac{2a}{c + d}$
$D = \frac{(x + a)^2 - 4x^2}{a^2 + 9x^2 + 6ax}$ $= \frac{(x + a + 2x)(x + a - 2x)}{a^2 + 6ax + 9x^2}$ $= \frac{(3x + a)(a - x)}{(3x + a)^2}$ $= \frac{(a - x)}{(3x + a)}$	$E = \frac{y(2x - x^2)(y + 2)}{x(2y + y^2)(x - 2)}$ $= \frac{xy(2 - x)(y + 2)}{xy(2 + y)(x - 2)}$ $= \frac{-xy(x - 2)(y + 2)}{xy(y + 2)(x - 2)}$ $= -1$	$F = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ $= \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ $= \frac{(x - 2)}{(x^2 + x + 1)}$

Bài 3:

$A = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-4x^2 + 10x - 4}$ $= \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{-2(2x^2 - 5x + 2)}$ $= \frac{x(x-2)(x-3)}{-2(2x-1)(x-2)}$ $= \frac{-x(x-3)}{2(2x-1)}$	$B = \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3}$ $= \frac{(x-y)(x-2y)}{x^2(x+2y) - y^2(x+2y)}$ $= \frac{(x-y)(x-2y)}{(x+2y)(x^2 - y^2)}$ $= \frac{(x-y)(x-2y)}{(x+2y)(x-y)(x+y)}$ $= \frac{(x-2y)}{(x+2y)(x+y)}$	$C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}$ $= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c}$ $= a+b+c$
$D = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$ $= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}$ $= \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+c)^2 - b^2}$ $= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b+c)}$ $= \frac{a+b-c}{a-b+c}$		$F = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$ $Mau = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ $= a^2(b-c) + b^2c - b^2a + ac^2 - bc^2$ $= a^2(b-c) + bc(b-c) - a(b^2 - c^2)$ $= (b-c)[a(a-b) - c(a-b)]$ $= (b-c)(a-c)(a-b)$ $\Rightarrow F = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$ Ta có nhận xét Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ Đặt $b - c = x; c - a = y; a - b = z$ thì $x + y + z = 0$ $\Rightarrow F = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-xyz} = \frac{3xyz}{-xyz} = -3$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức.

Bài 4: Chứng minh đẳng thức.

$$a) \frac{3}{2x-3} = \frac{3x+6}{2x^2+x-6}$$
$$VP = \frac{3x+6}{2x^2+x-6} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{3}{2x-3} = VT$$

$$b) \frac{2}{x+4} = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$$
$$VP = \frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x} = \frac{2x(x+3)}{x(x^2+7x+12)} = \frac{2x(x+3)}{x(x+4)(x+3)} = \frac{2}{x+4} = VT$$

Bài 5: Chứng minh đẳng thức.

$$a) \frac{x^5-1}{x+1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

Thực hiện phép chia đa thức

$$x^5-1 = (x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$b) \frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{x+y}{x-y}$$
$$VT = \frac{2x^2+xy-y^2}{2x^2-3xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy-xy-y^2}{2x^2-2xy-xy+y^2} = \frac{(x+y)(2x-y)}{(x-y)(2x-y)} = \frac{x+y}{x-y}$$
$$VT = VP \Rightarrow dpcm$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức với điều kiện cho trước.

Bài 7: Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \neq 0$. rút gọn biểu thức

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{(ax+by+cz)^2}$$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \neq 0 \Rightarrow x = ka; y = kb; z = kc$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(ax + by + cz)^2} \\
&= \frac{(k^2 a^2 + k^2 b^2 + k^2 c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{(aka + bkb + ckc)^2} \\
&= \frac{k^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2}{k^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Bài 8: Cho $ax + by + cz = 0$. rút gọn phân thức

$$A = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2}$$

Áp dụng hằng đẳng thức $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$\begin{aligned}
ax + by + cz = 0 &\Rightarrow (ax + by + cz)^2 = 0 \Rightarrow a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + 2(axby + axcz + bycz) = 0 \\
&\Rightarrow a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = -2(axby + axcz + bycz)(1)
\end{aligned}$$

Biến đổi mẫu thức

$$\begin{aligned}
& bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2 \\
&= bcy^2 + bcz^2 + acx^2 + acz^2 + abx^2 + aby^2 - 2(abxy + acxz + bcyz)(2)
\end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) thì mẫu thức bằng

$$\begin{aligned}
& (bcy^2 + acx^2 + c^2 z^2) + (bcz^2 + abx^2 + b^2 y^2) + (acx^2 + aby^2 + a^2 x^2) \\
&= c(by^2 + ax^2 + cz^2) + b(cz^2 + ax^2 + by^2) + a(cz^2 + by^2 + ax^2) \\
&= (cz^2 + by^2 + ax^2)(a + b + c)
\end{aligned}$$

Vậy
$$A = \frac{1}{a + b + c}$$

Dạng 4: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x.

Bài 9: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^2 - y^2}{(x+y)(ay-ax)} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y)}{a(x+y)(y-x)} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y)}{-a(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{-1}{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay} \\
 &= \frac{(a-1)(2x+3y)}{(2x+3y)(2a+3)} \\
 &= \frac{a-1}{2x+3}
 \end{aligned}$$

Bài 10: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến x, y

$$\begin{aligned}
 &\frac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1}; x \neq \frac{1}{3}; y \neq 1 \\
 &= \frac{(3x+1)(3x-1)}{-(3x-1)} + \frac{3x(y-1) + 2(y-1)}{y-1} \\
 &= -(3x+1) + \frac{(3x+2)(y-1)}{y-1} \\
 &= -3x - 1 + 3x + 2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Dạng 5: Bài toán nâng cao.

Bài 11: cho $x > y > 0$.chứng minh rằng $\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Do $x > y > 0$ nên $x+y \neq 0$

Theo tính chất cơ bản của phân thức, ta có

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \quad (1)$$

Mặt khác vì $x > y > 0$ nên $x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2$

Vậy $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} < \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2)
(1)(2) $\Rightarrow$ dpcm

B. PHIẾU TỰ LUYỆN

Dạng 1: Rút gọn phân thức.

Bài 1: Rút gọn các phân thức sau.

a) $\frac{14x^5y^3z^2}{21x^2y^4z}$ b) $\frac{25x^2y(x+1)^3}{30xy(x+1)}$ c) $\frac{3x(5-x)}{12(x-5)^3}$ d) $\frac{60xy(3x-2)^3}{45xy^2(2-3x)}$

Bài 2: Rút gọn các phân thức sau.

a) $\frac{6x+12}{24x^2+48x}$ b) $\frac{y(2x-x^2)}{x(2y+y^2)}$ c) $\frac{xy^3-yx^3}{x^2+xy}$ d) $\frac{48y-12y^2+3y^3}{y^3+64}$

Bài 3: Rút gọn các phân thức sau.

a) $\frac{5(x-3)}{x^2-4x+3}$ b) $\frac{(3x+3)(3x-5)}{25-9x^2}$ c) $\frac{x^2+xy-x-y}{x^2-xy-x+y}$ d) $\frac{2y^3-y^2-2y+1}{y^3+3y^2-y-3}$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức.

Bài 4: Chứng minh đẳng thức.

a) $\frac{b^2+2b+1}{3b^3+3b^2} = \frac{b+1}{3b^2}$ b) $\frac{(x+a)^2-4x^2}{a^2+9x^2+6ax} = \frac{a-x}{a+3x}$ c) $\frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \frac{x-2}{x^2+x+1}$

Bài 5: Chứng minh đẳng thức.

a) $\frac{xy+x-2y-2}{4-4x+x^2} = \frac{y+1}{x-2}$ b) $\frac{2x^2+3xy+y^2}{2x^3+x^2y-2xy^2-y^3} = \frac{1}{x-y}$

Bài 6: Cho hai phân thức $P = \frac{4xy^2-4x^2y+x^3}{4x^3-8x^2y}$ và $Q = \frac{2xy-x^2-2y+x}{4x-4x^2}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2y$

Chứng minh rằng $P = Q$.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức với điều kiện cho trước.

Bài 7: Tính giá trị của các biểu thức.

a) $A = \frac{3m^2 - 2m}{9m^2 - 12m + 4}$ tại $m = -8$

b) $B = \frac{n^2 + 7n + 6}{n^3 + 6n^2 - n - 6}$ tại $n = 1000001$

Bài 8: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, hãy tính.

$$C = \frac{\left[a^2 - (b+c)^2 \right] (a+b-c)}{(a+b+c) \left[(a-c)^2 - b^2 \right]}$$

Dạng 4: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến.

Bài 9: Chứng minh giá trị của các phân thức sau luôn là hằng số.

a) $M = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)(3x-3y)}$

b) $N = \frac{5kx - 5x - 3y + 3ky}{25kx + 15x + 9y + 15ky}$ (với k là hằng số khác $-\frac{3}{5}$)

Bài 10: Cho phân thức $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

a) Thu gọn biểu thức A.

b) Chứng minh A luôn không âm với mọi giá trị của x.

Dạng 5: Bài toán nâng cao.

Bài 11: Tìm giá trị nguyên của u để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên.

a) $\frac{3}{u-2}$ với $u \neq 2$

b) $\frac{3u^2 - 2u + 1}{3u + 1}$ với $u \neq -\frac{1}{3}$

Bài 12: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 - 2x + 2019}{x^2}$ với $x > 0$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{3x^2 + 9x + 17}{3x^2 + 9x + 7}$

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Rút gọn phân thức.

Bài 1: Rút gọn các phân thức sau

$$a) \frac{14x^5y^3z^2}{21x^2y^4z} = \frac{2x^3z}{3y}$$

$$b) \frac{25x^2y(x+1)^3}{30xy(x+1)} = \frac{5x(x+1)^2}{6}$$

$$c) \frac{3x(5-x)}{12(x-5)^3} = \frac{-3x(x-5)}{12(x-5)^3} = \frac{-x}{4(x-5)^2}$$

$$d) \frac{60xy(3x-2)^3}{45xy^2(2-3x)} = \frac{-4(3x-2)^2}{3y}$$

Bài 2: Rút gọn các phân thức sau

$$a) \frac{6x+12}{24x^2+48x} = \frac{6(x+2)}{24x(x+2)} = \frac{1}{4x}$$

$$c) \frac{xy^3 - yx^3}{x^2 + xy} = \frac{xy(y+x)(y-x)}{x(x+y)} = y(y-x)$$

$$b) \frac{y(2x-x^2)}{x(2y+y^2)} = \frac{yx(2-x)}{xy(2+y)} = \frac{2-x}{2+y}$$

$$d) \frac{48y - 12y^2 + 3y^3}{y^3 + 64} = \frac{3y(16 - 4y + y^2)}{(y+4)(16 - 4y + y^2)} = \frac{3y}{y+4}$$

Bài 3: Rút gọn các phân thức sau

$$a) \frac{5(x-3)}{x^2-4x+3} = \frac{5(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{5}{x-1}$$

$$e) \frac{x^2+xy-x-y}{x^2-xy-x+y} = \frac{(x+y)(x-1)}{(x-y)(x-1)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$b) \frac{(3x+3)(3x-5)}{25-9x^2} = \frac{(3x+3)(3x-5)}{(5-3x)(5+3x)} = -\frac{3x+3}{5+3x}$$

$$d) \frac{2y^3-y^2-2y+1}{y^3+3y^2-y-3} = \frac{(y^2-1)(2y-1)}{(y^2-1)(y+3)} = \frac{2y-1}{y+3}$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức.**Bài 4: Chứng minh đẳng thức**

$$a) \frac{b^2+2b+1}{3b^3+3b^2} = \frac{b+1}{3b^2}$$

$$b) \frac{(x+a)^2-4x^2}{a^2+9x^2+6ax} = \frac{a-x}{a+3x}$$

$$c) \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$VT = \frac{(b+1)^2}{3b^2(b+1)} = \frac{b+1}{3b^2} = VP \quad VT = \frac{(a-x)(a+3x)}{(a+3x)^2} = \frac{a-x}{a+3x} = VP \quad VT = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

Bài 5: Chứng minh đẳng thức

$$a) \frac{xy + x - 2y - 2}{4 - 4x + x^2} = \frac{y+1}{x-2}$$

$$b) \frac{2x^2 + 3xy + y^2}{2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3} = \frac{1}{x-y}$$

$$VT = \frac{(x-2)(y+1)}{(2-x)^2} = \frac{y+1}{x-2} = VP$$

$$VT = \frac{2x(x+y) + (y+x)}{x^2(2x+y) - y^2(2x+y)} = \frac{1}{x-y} = VP$$

Bài 6: - Có: $P = \frac{4xy^2 - 4x^2y + x^3}{4x^3 - 8x^2y}$ và $Q = \frac{2xy - x^2 - 2y + x}{4x - 4x^2}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2y$

$$P = \frac{x(2y-x)^2}{4x(x-2y)} = \frac{x-2y}{4x}$$

$$Q = \frac{(2y-x)(x-1)}{4x(1-x)} = \frac{x-2y}{4x}$$

$$\Rightarrow P = Q$$

Dạng 3: Rút gọn biểu thức với điều kiện cho trước.

Bài 7: Tính giá trị của các biểu thức

$$a) A = \frac{3m^2 - 2m}{9m^2 - 12m + 4} \text{ tại } m = -8$$

$$b) B = \frac{n^2 + 7n + 6}{n^3 + 6n^2 - n - 6} \text{ tại } n = 1000001$$

$$A = \frac{m(3m-2)}{(3m-2)^2} = \frac{m}{3m-2}$$

$$B = \frac{(n+1)(n+6)}{(n+6)(n^2-1)} = \frac{1}{n-1}$$

Thay $m=-8$ vào A ta được:

Thay $n=1000001$ vào B ta được:

$$A = \frac{-8}{3 \cdot (-8) - 2} = \frac{4}{13}$$

$$B = \frac{1}{1000001 - 1} = \frac{1}{1000000}$$

Bài 8: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, hãy tính

$$C = \frac{[a^2 - (b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)[(a-c)^2 - b^2]}$$

$$C = \frac{(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a-c+b)(a-c-b)}$$

$$C = 1$$

Dạng 4: Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào biến.

Bài 9: Chứng minh giá trị của các phân thức sau luôn là hằng số

$$a) M = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)(3x-3y)}$$

$$M = \frac{1}{3}$$

$$b) \text{ (với } k \text{ là hằng số khác } -\frac{3}{5} \text{)}$$

$$N = \frac{5kx - 5x - 3y + 3ky}{25kx + 15x + 9y + 15ky}$$

$$N = \frac{(k-1)(5x+3y)}{(5x+3y)(5k+3)}$$

$$N = \frac{k-1}{5k+3}$$

Khi đó

$$N = \frac{k-1}{5k+3} \text{ là hằng số.}$$

Bài 10: Cho phân thức $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$

a) Thu gọn biểu thức A.

$$A = \frac{x^3(x+1) + (x+1)}{x^2(x^2-x+1) + (x^2-x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

b) Chứng minh A luôn không âm với mọi giá trị của x.

$$\text{Có: } (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dạng 5: Bài toán nâng cao.

Bài 11: Tìm giá trị nguyên của u để tại đó giá trị của mỗi biểu thức sau là một số nguyên.

$$a) \frac{3}{u-2} \text{ với } u \neq 2$$

Để $\frac{3}{u-2}$ nguyên thì $3 : u-2 \Rightarrow u-2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có bảng

$u-2$	-1	1	-3	3
u	1 (TM)	3 (TM)	5 (TM)	-1 (TM)

Vậy $x \in \{1; 3; 5; -1\}$ thì $\frac{3}{u-2}$ nguyên.

b) $\frac{3u^2 - 2u + 1}{3u + 1}$ với $u \neq \frac{-1}{3}$

$$\frac{3u^2 - 2u + 1}{3u + 1} = u - 1 - \frac{2}{3u + 1}$$

Để $\frac{3u^2 - 2u + 1}{3u + 1}$ nguyên thì $2 : 3u + 1 \Rightarrow 3u + 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng

$3u+1$	-1	1	-2	2
u	$\frac{-2}{3}$ (KTM)	0 (TM)	-1 (TM)	$\frac{-1}{3}$ (KTM)

Bài 12: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 - 2x + 2019}{x^2}$ với $x > 0$.

$$A = \frac{2019x^2 - 2x \cdot 2019 + 2019^2}{2019x^2} = \frac{(x - 2019)^2}{2019x^2} + \frac{2018x^2}{2019x^2} = \frac{(x - 2019)^2}{2019x^2} + \frac{2018}{2019}$$

$$\forall \frac{(x - 2019)^2}{2019x^2} \geq 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \frac{(x - 2019)^2}{2019x^2} + \frac{2018}{2019} \geq \frac{2018}{2019}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x - 2019 = 0 \Rightarrow x = 2019$

Vậy $\text{Min}A = \frac{2018}{2019}$ khi $x=2019$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{3x^2 + 9x + 17}{3x^2 + 9x + 7}$

$$B = \frac{3x^2 + 9x + 17}{3x^2 + 9x + 7} = 1 + \frac{10}{3x^2 + 9x + 7} = 1 + \frac{10}{3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

Để B lớn nhất $\Rightarrow 3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ nhỏ nhất

Mà $3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$ vì $3 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu “=” xảy ra khi $x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $\text{Max}B = 41$ khi $x = -\frac{3}{2}$.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====