

CHUYÊN ĐỀ 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. CĂN THỨC BẬC 2

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; (\text{Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu})$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

2. CĂN THỨC BẬC 3.

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$
- Cho $a \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.
- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ với mọi a, b .
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- $A \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 B}$.
- $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\frac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\frac{A}{B^3}}$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt[3]{A \pm \sqrt[3]{B}}} = \frac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B} \text{ với } A \neq \pm B.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Rút gọn biểu thức không chứa biến

1. Phương pháp

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt[4]{B})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll} M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80} & N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18} & P = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80} \\ A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} & B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300} & C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3} \end{array}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{array}{lll} M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{4^2 \cdot 5} & N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18} & P = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \\ = \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{7^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2 \cdot 5} & = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} & = -5\sqrt{5} \\ = 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} & = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} & \\ & = (10 + 5 - 6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300} \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3} - \sqrt{10^2 \cdot 3} \\ &= 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - 10\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3} \\ &= (2\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3} + 4 \cdot 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} \\ &= -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5 \end{aligned}$$

Nhận xét: Đây là một dạng toán dễ. Học sinh có thể bấm máy tính để kiểm tra kết quả, đa phần áp dụng kiến thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn để giải toán. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ ($B \geq 0$)

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} & \text{b)} & \sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2} & \text{c)} & \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \\ \text{d)} & \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} & \text{e)} & \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} & \text{f)} & \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2} \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a)} \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = |3-2\sqrt{2}| + |3+2\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6$$

Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

Kết quả: b) $-4\sqrt{6}$ c) 1 d) 4 e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{2}-4$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức

$$\text{a)} A = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$\text{b)} B = \sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

$$\text{c)} C = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

$$\text{d)} D = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$$

$$\text{e)} E = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$\text{f)} F = \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a)} A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\text{b)} B = \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{15}-1)^2} = \sqrt{15}-1$$

$$\text{c)} C = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$$

$$\text{d)} D = \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14+2\sqrt{13}} - \sqrt{14-2\sqrt{13}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\sqrt{13}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13}-1)^2} \right] = \sqrt{2}$$

$$\text{e)} E = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = |\sqrt{5}+1| - |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= |\sqrt{5}-\sqrt{2}| + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = \sqrt{5}-\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức: (áp dụng các kiến thức tổng hợp)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} & B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \\ C &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} & D &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \\ E &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} & F &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2 \\ \text{b) } B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6} \\ \text{c) } C &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = 9 \\ \text{d) } D &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} + 2 - \sqrt{3} = 4 \\ \text{e) } E &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2} \\ \text{f) } F &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + (2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - 2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(3-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kinh nghiệm: Đôi khi một số bài toán rút gọn căn thức sẽ thực hiện dễ dàng hơn nếu chúng ta **trục căn thức** hoặc **rút gọn được một hạng tử** trong đề toán. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp. Vì vậy trước khi làm bài toán rút gọn, học sinh cần quan sát kỹ đề toán từ đó có định hướng giải đúng dẫn đến lời giải được ngắn gọn, chính xác.

Ví dụ 5: Thu gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$

b) $B = \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

c) $C = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

a) $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 2} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + 3\sqrt{2^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $B = \sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3^2 \cdot 3} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$

c) $C = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2} = \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} + \sqrt{2}$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} - |\sqrt{7}-1| + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{7}-1) + \sqrt{2} = 1 \quad (\text{Vì } \sqrt{7} > 1)$$

Ví dụ 6: Thực hiện phép tính

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt[3]{8}$

c) $5\sqrt{2a} - \sqrt{50a} - 2\sqrt{a^3} + 4\sqrt{32a}$ với $a \geq 0$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 \cdot 3} - 2\sqrt{5^2 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3 \cdot 11}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}$

$$= 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{2^2}{3}} = -9\sqrt{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{-17\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt[3]{8} = \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} - \sqrt[3]{2^3} \\ & = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} - 2 = |\sqrt{5}+1| - |\sqrt{5}-1| - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 - 2 \quad (\text{Vì } \sqrt{5} > 1) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 5\sqrt{2a} - \sqrt{50a} - 2\sqrt{a^3} + 4\sqrt{32a} = 5\sqrt{2a} - \sqrt{5^2 \cdot 2a} - 2\sqrt{a^2 \cdot a} + 4\sqrt{4^2 \cdot 2a} \\ & = 5\sqrt{2a} - 5\sqrt{2a} - 2a|\sqrt{a}| + 16\sqrt{2a} = -2a\sqrt{a} + 16\sqrt{2a} \quad (\text{Vì } a \geq 0) \end{aligned}$$

Ví dụ 7. (Đề thi năm học 2014 – 2015 Thành phố Hồ Chí Minh)

Thu gọn các biểu thức sau: $A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4} \\ &= 3\sqrt{5} - 5 + 5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Tính $B = 21\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 - 6\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - 15\sqrt{15}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{21}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{21}{2}\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1\right)^2 - 3\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}+1\right)^2 - 15\sqrt{15} = \frac{15}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 - 15\sqrt{15} = 60. \end{aligned}$$

Dạng 2: Tìm điều kiện xác định của biểu thức

	BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		VÍ DỤ		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x \geq 2018$

2.	$\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Ví dụ: $\frac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x \neq 7$
3.	$\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x > 3$
4.	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Ví dụ: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$
5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$	Ví dụ: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$
6.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$		Ví dụ: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$		
7.	Cho $a > 0$ ta có: $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$		Ví dụ: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$		

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0)$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) (x > 0) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: (Đề thi năm 2014 – 2015 TP Đà Nẵng)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Lời giải:

Với điều kiện đã cho thì:

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}x(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1.$$

Ví dụ 3: Thu gọn các biểu thức sau: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Hướng dẫn giải

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có:

$$A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3.$$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right|$

+ Nếu $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ thì $\left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $\left| \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

b)

$$B = \sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}} = \sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1} + \sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$$

$$\text{Hay } B = \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| = |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1} + 1$$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B = 2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B = 2$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$.

Chúng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Lời giải

Ta có:
$$Q = \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a} + (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = 0$$

$$= \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} = 0$$

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}}; x > 0, x \neq 9.$

Lời giải

$$A = \frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{x+\sqrt{x}-12} - \frac{x-5\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}+19}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} - \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}-8+x-7\sqrt{x}+19-x+8\sqrt{x}-15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}.$$

Dạng 4: Rút gọn biểu thức, biết biến thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25.$

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9.$

Lời giải:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5 \cdot (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}.$$

Với $x=9$ ta có: $\sqrt{x}=3$. Vậy $A = \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

- 1) $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$
- 2) $P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow x=36$ (thỏa mãn ĐKXD)
- 3) Với $x \geq 0, P = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1$ khi $x=0$ (TM).

Ví dụ 3: Cho biểu thức $P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2-y^2}, x \neq y$.

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Lời giải

- 1) $P = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$.
- 2) Với $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$
Thay vào P ta được: $P = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}} = -\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4: Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2(2-\sqrt{x})}{4-x} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}. \text{ Với } A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (nhận).}$$

Vậy $A = \frac{1}{3}$ khi $x = 16$.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$.

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Lời giải

$$1) \text{ Biểu thức } C \text{ có nghĩa khi: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a-16 \neq 0 \\ \sqrt{a}-4 \neq 0 \\ \sqrt{a}+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16.$$

$$\begin{aligned} \text{Rút gọn } C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}. \end{aligned}$$

2) Giá trị của C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

$$\text{Ta có: } a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$$

$$\text{Vậy } C = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2+4} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

Ví dụ 6. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Thái Bình tỉnh Thái Bình)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 4).$$

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

1) Với $x > 0, x \neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$$A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A \text{ nhận giá trị là một số nguyên}$$

thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Ví dụ 7. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Lời giải

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Theo câu a) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \quad 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Dạng 5: Các bài toán tổng hợp bao gồm các câu hỏi phụ

Bài 1: Cho biểu thức $Q = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

1. Rút gọn biểu thức Q
2. Tính giá trị của Q khi $x = 16$
3. Tìm giá trị của x khi $Q = \frac{1}{3}$
4. Tìm giá trị của x sao cho $Q > \frac{1}{9}$
5. Tìm giá trị lớn nhất của Q .

Hướng dẫn giải

1. Với $x \geq 0; x \neq 9$ thì

$$\begin{aligned} Q &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{x-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x+2\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+2(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10 - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-10 - x+4-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 9$ thì $Q = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

2. Thay $x = 16$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$) vào Q ta được:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{16}+2} = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

Vậy khi $x = 16$ thì $Q = \frac{1}{6}$

3. $Q = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$)

Vậy với $x = 1$ thì $Q = \frac{1}{3}$

4. $Q > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0$ (1)

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 7 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 7 \Leftrightarrow x < 49$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Vậy với $\begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ x \neq 9 \end{cases}$ thì $Q > \frac{1}{9}$

5. Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ nên $\sqrt{x} + 2 \geq 2$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi } x \geq 0; x \neq 9$$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$)

Bài 2: Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x = 4 + 2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn giải

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 9$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} - \frac{3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1) + 3(3\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 + 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 - 9\sqrt{x} + 15}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(5\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1 ;$$

Do đó: $P = \frac{5(\sqrt{3}+1)-2}{(\sqrt{3}+1)+1} = \frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2} = \frac{(5\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2)(2-\sqrt{3})} = 7\sqrt{3}-9.$

c) Ta có $P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{5\sqrt{x}+5-7}{\sqrt{x}+1}$

$$P = 5 - \frac{7}{\sqrt{x}+1}.$$

Vì $\frac{7}{\sqrt{x}+1} > 0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+1}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow x=0.$$

Khi đó min $P = 5 - 7 = -2.$

Bài 3: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x} \right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q = 2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x > 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$.

$$\begin{aligned} \text{a) } Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+2}{4-x} \right) : \frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)^2} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2-2x+4\sqrt{x}-5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} \\ &= \frac{-x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

b) $Q = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 2\sqrt{x}-6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64. (\text{Thỏa mãn ĐKXĐ}).$$

$$c) Q < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $Q < 0$ khi $0 < x < 9$ và $x \neq 4$.

Bài 4: Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$

a) Rút gọn B.

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

a) Với $a \geq 0; a \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \\ &= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Để } B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11:(a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in U(11)$$

$U(11) = \{1; 11; -1; -11\}$. Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$a) A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

b) **Cách 1:** Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

Vậy $0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$.

Vì A nguyên nên $A = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (Không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$$

Trường hợp 1: $A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$

Trường hợp 2: $A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \text{ do } A \in \mathbb{Z}, A > 0$$

Với $A = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại)

Với $A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$ (loại).

Bài 6: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{7}{12}$

c) Tìm x để $P > \frac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của x để P nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x \geq 0; x \neq 4 \text{ thì } P &= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}+3)} \\ &= -\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2-9+x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{9-x+\left(\sqrt{x}-2\right)^2-9+x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4$ thì $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

b) $P = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 12\sqrt{x}-24=7\sqrt{x}+21 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}=45$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=9 \Leftrightarrow x=81$ (thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 4$)

Vậy với $x=81$ thì $P = \frac{7}{12}$

c) $P > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+3} > 0 \quad (3)$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$ nên $\sqrt{x}+3 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$

Nên (3) $\Leftrightarrow \sqrt{x}-7 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 7 \Leftrightarrow x > 49$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$.

Vậy $x > 49$ thì $P > \frac{1}{2}$

d) Ta có $\frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$

$\frac{1}{P}$ nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ nguyên $\Leftrightarrow 5: (\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-2$ là Ư (5) = $\{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-2$	-1	1	-5	5
$\sqrt{x}$	1	3	-3	7
x	1	9		49
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn

Vậy $x \in \{1; 9; 49\}$ thì $\frac{1}{P}$ nguyên.

e) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3-2}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\frac{2}{\sqrt{x}+3} > 0$ nên $P < 1$ với mọi $x \geq 0; x \neq 4$

$$\text{Mà } \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x} + 3} \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Do đó $\frac{1}{3} \leq P < 1$. Vậy không có giá trị hữu tỷ nào của x để P nguyên.

Bài 7: Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{2022 + 4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022 - 4\sqrt{2018}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Và $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ nên $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Có $x = \sqrt{2022 + 4\sqrt{2018}} - \sqrt{2022 - 4\sqrt{2018}} = \sqrt{(\sqrt{2018}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{2018}-2)^2}$
 $= |\sqrt{2018}+2| - |\sqrt{2018}-2| = \sqrt{2018}+2 - \sqrt{2018}+2 = 4$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$.

+ Vậy giá trị của biểu thức P tại $x = 4$ là: $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Hướng dẫn giải

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

Khi $x = 9$ ta có $A = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5} = \frac{3+2}{3-5} = -\frac{5}{2}$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

$$\begin{aligned} \text{Với } x \geq 0, x \neq 25 \text{ thì } B &= \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-15} = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-5)+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Với $x \geq 0, x \neq 25$ Ta có: $A = B \cdot |x-4|$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \cdot |x-4| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = |x-4| \quad (*)$$

Nếu $x \geq 4, x \neq 25$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = x-4$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) = 0$$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x < 4$ thì (*) trở thành: $\sqrt{x}+2 = 4-x$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) = 0$$

Do $\sqrt{x}+2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị $x = 1$ và $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 9: Cho biểu thức $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Rút gọn B.

b) Tìm giá trị của x để $B = 1$

c) Tính giá trị của x sao cho B không vượt quá $\frac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1} = x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } B &= \frac{2(x+4)}{x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} \\ &= \frac{2(x+4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-4(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} = \frac{2(x+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x+8+\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)-8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3x-12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ Vậy với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ thì } B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{b) } B = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

(thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 16$). Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $B = 1$

$$\text{c) } B \text{ không vượt quá } \frac{3}{2} \Leftrightarrow B \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \leq 0 \quad (*)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$ nên $\sqrt{x}+1 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 16$

Vậy $0 \leq x \leq 1$ thì B không vượt quá $\frac{3}{2}$

$$\text{d) Ta có } \sqrt{2x-1} = x \quad (x \geq 0; x \neq 16) \Leftrightarrow 2x-1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{thỏa mãn } x \geq 0; x \neq 16) \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2} \text{ Vậy } \sqrt{2x-1} = x \text{ thì } B = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 3 \quad (\text{vì } \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \text{ với } x \geq 0; x \neq 16)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$ nên $\sqrt{x}+1 \geq 1$ với mọi $x \geq 0; x \neq 16$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -3 \Rightarrow 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

Suy ra $0 \leq B < 3$ Mà $B \in \mathbb{Z}$ nên $B \in \{0; 1; 2\}$

$$\text{TH1: } B = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } B = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } B = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{9}{4}; 36\right\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$

Bài 10: Cho biểu thức $P = 1 : \left(\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$ với $x > 0$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x \geq 0 \text{ thì } P &= 1 : \left(\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \\ &= 1 : \left[\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x + 2\sqrt{x} - 2 - x + 1 + x - \sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ \text{Vậy với } x > 0 \text{ thì } P &= \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = (2 - \sqrt{3})^2$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \text{ (vì } 2 > \sqrt{3}) \\ \Rightarrow P &= \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{7 - 4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3 \end{aligned}$$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $P = 3$

$$\text{c) } P = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 2x - \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn } x > 0)$$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2\sqrt{x} - 1$

$$\text{d) } P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = m \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = m\sqrt{x} \Leftrightarrow x - (m + 1)\sqrt{x} + 1 = 0 \quad (1)$$

Vì $1 \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai.

Đặt $t = \sqrt{x} \text{ (} t > 0 \text{)}$

$$(1) \text{ trở thành } t^2 - (m + 1)t + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \Delta &= (m+1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3 = m^2 - m + 3m - 3 \\ &= m(m-1) + 3(m-1) = (m-1)(m+3)\end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm dương

TH1: Phương trình (2) có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ \Delta = (m-1)(m+3) \geq 0 \\ S = m+1 > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

TH2: Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow S = 1 < 0 \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{Loại}$$

TH3: Phương trình (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0

$$\text{Với } t = 0 \text{ thay vào (2) ta được } 0^2 - (m+1).0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{Loại}$$

Vậy $m \geq 1$ là giá trị cần tìm.

$$\text{e) } P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } \sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn } x > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow P \geq 2 - 1 = 1. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P = 1 \text{ khi } x = 1$$

$$\text{Bài 11: Cho biểu thức } P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{x + \sqrt{x} - 6}\right)$$

với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

$$\text{b) Tính giá trị của } P \text{ biết } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$

d) So sánh P với 1

$$\text{e) Tìm các giá trị của } x \text{ để } P = \sqrt{x} - 3.$$

Hướng dẫn giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned}
 P &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-2(\sqrt{x}-3)}\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) + \sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-4-x+9+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}. \text{ Vậy với } x \geq 0; x \neq 4 \text{ thì } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

b) Với $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-2\sqrt{5} \cdot 1 + 1}{4} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$ thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{|\sqrt{5}-1|}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\text{vì } \sqrt{5} > 1) \\
 \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1} = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+1} = \frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\
 &= \frac{5\sqrt{5}-5-5+\sqrt{5}}{4} = \frac{6\sqrt{5}-10}{4} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}
 \end{aligned}$$

c) $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ là } U(3)$$

$$U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Mà $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \forall x \geq 0; x \neq 4$ nên:

TH1: $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

TH2: $\sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

Vậy $x \in \{0\}$ thì $P \in Z$

d) Xét hiệu $P - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 1} < 0 \quad \forall x \geq 0; x \neq 4$

Suy ra $P < 1$

e) $P = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = x - 3\sqrt{x} + \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \quad (2)$

Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0; t \neq 2)$

(2) trở thành: $t^2 - 3t - 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-1) = 13$

$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} & (TM) \\ t = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} & (loại) \end{cases} \Rightarrow x = \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)^2 = \frac{22 + 6\sqrt{13}}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$

Vậy $x = \frac{22 + 6\sqrt{13}}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 12: Cho biểu thức: $A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

a) Khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$ tính giá trị biểu thức A

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0; x \neq 5$

c) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Với $x = 6 - 2\sqrt{5}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$

Ta có $x = 6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1 \quad (\text{vì } \sqrt{5} > 1)$

$\Rightarrow A = \frac{1 - (\sqrt{5} - 1)}{1 + \sqrt{5} - 1} = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 5$ thì

$$B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \left[\frac{15 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right] : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \frac{5 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 5$ thì $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$$c) \text{ Ta có } M = B - A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{-1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = -1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 5 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \forall x \geq 0; x \neq 5$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Rightarrow M = -1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq -1 + 3 = 2$$

$$\text{Lại có } \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow -1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} > -1$$

$$\Rightarrow -1 < M \leq 2. \text{ Mà } M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{TH1: } M = 0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH2: } M = 1 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

$$\text{TH3: } M = 2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{0; 4; \frac{1}{4}\right\} \text{ thì } M \in \mathbb{Z}$$

Dạng 6: Bài tập chinh phục điểm 10

Bài 1. Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + 3 - \sqrt{5+2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9-(5+2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3}-1) = 4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2. \text{ Do } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{3}+1. \text{ Do đó } (a-1)^2 = 3 \text{ hay } \\ a^2 - 2a - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Bài 2.

a) Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$.

b) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 1942$. (Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại Ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015-2016).

c) Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$

Giải

a) Ta có: $x^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5}-1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}+1. \text{ Từ đó ta suy}$$

$$\text{ra } (x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$$

$$\text{Ta biến đổi: } P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$$

b) Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c) Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \text{ Khi đó ta có: } (\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\text{Ta biến đổi: } P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016$$

$$\text{Bài 3. Tính } C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$$

Giải

$$\text{Để ý rằng: } 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10(2 - \sqrt{3})}}} = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}} = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}}. \text{ Hay}$$

$$C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

Bài 4. Chứng minh:

$$\text{a) } A = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \text{ là số nguyên.}$$

$$\text{b) } B = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \text{ là một số nguyên}$$

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $A < 0$,

$$\text{Ta có } A^2 = (\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}})^2 = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = 14 - 2 \cdot 5 = 4$$

$$\text{Suy ra } A = -2.$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right) \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right).$$

$$\text{Hay } B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2 + B + 2) = 0 \text{ mà } B^2 + B + 2 = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B = 1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

Ta có $x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2a) = 0$

Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ với $\Delta = 1 - 8a \geq 0$

+ Khi $a = \frac{1}{8}$ ta có $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$.

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$. Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có:

$x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1$ là số tự nhiên.

Bài 6. Tính $x+y$ biết $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$.

Lời giải

Nhận xét: $(\sqrt{x^2 + 2015} + x)(\sqrt{x^2 + 2015} - x) = x^2 + 2015 - x^2 = 2015$.

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2 + 2015} - x = \sqrt{y^2 + 2015} + y$

$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 2015} + y + \sqrt{x^2 + 2015} + x = \sqrt{x^2 + 2015} - x + \sqrt{y^2 + 2015} - y \Leftrightarrow x + y = 0$

Bài 7.

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Lời giải

a) Xét $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$

Dễ thấy $A > B$.

Ta có $A + B = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Suy ra $A+B = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) = \sqrt{81}-1 = 8$. Do $A > B$ suy ra

$$2A > A+B = 8 \Leftrightarrow A > 4.$$

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

$$\text{Suy ra } VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

$$\text{c) Đặt } P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

$$\text{Từ đó suy ra } 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \text{ hay}$$

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$\text{Do đó: } 2\left[(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right] < T \text{ và}$$

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right].$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{n}-2 < T < 2\sqrt{n}-1.$$

Bài 8. Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}$.

Chứng minh rằng $B > A$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{(\sqrt{120}+\sqrt{121})(\sqrt{120}-\sqrt{121})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-2 + \dots + \sqrt{121}-\sqrt{120} = -1 + \sqrt{121} = 10 \quad (1)$$

$$\text{Với mọi } k \in \mathbb{N}^*, \text{ ta có: } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$\text{Do đó } B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}} \Rightarrow B > 2(\sqrt{2}-\sqrt{1} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{36}-\sqrt{35})$$

$$\Rightarrow B > 2(-\sqrt{1} + \sqrt{36}) = 2(-1+6) = 10 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } B > A.$$

Ví dụ 9. Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

- a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|} = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất đẳng thức}$$

Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có: $A = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$ suy

ra $m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}$.

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Bài 10. Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Giải

$$a^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên}$$

$$a = \sqrt{5} + 1. \text{ Do đó } (a - 1)^2 = 5 \text{ hay } a^2 - 2a = 4. \text{ Biểu diễn}$$

$$T = \frac{(a^2 - 2a)^2 - 3(a^2 - 2a) + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 4}{4 + 12} = \frac{1}{2}.$$

Bài 11. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Giải:

a) Vì $\sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})^3} = 1 + 2\sqrt{5}$

Từ đó $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - 1 - 2\sqrt{5}} + 1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 - 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow a^4 - 14a^2 + 9 = 0.$$

b) Do $f(x) = (x^4 - 14x^2 + 9)(x + 2) + 1$ và $x^4 - 14a^2 + 9 = 0$ nên ta được $f(a) = 1$.

Bài 12. Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Giải

Vì $a^3 = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow a^3 = 76 - 3a \Rightarrow a^3 + 3a = 76 \Rightarrow f(a) = (76 + 1940)^{2016} = 2016^{2016}.$$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Giải:

Đặt $P = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$. Thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta có:

$$\frac{2}{k^3} < \frac{2}{k^3 - k} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}, \forall k > 1$$

Cho $k = 4, 5, \dots, n$ thì $2P < 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}\right) + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$

$$= \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{n(n+1)} < \frac{251}{108} + \frac{1}{3.4} = \frac{65}{27}. \text{ Do đó } P < \frac{65}{64} \text{ (đpcm).}$$

Bài 14. Chứng minh rằng: $\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$

Giải:

Đặt $S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

Để ý rằng :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \forall k \geq 1$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng về với về ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó $S_{2001} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{45} < \frac{1}{\sqrt{2002}} < \frac{1}{44}$$

$$\Leftrightarrow 44 < \sqrt{2002} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2002 < 2025$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.