

CHUYÊN ĐỀ: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

★ Các công thức biến đổi căn thức

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

★ Cách tìm điều kiện trong bài toán chứa căn thức

BIỂU THỨC - ĐKXĐ:			VÍ DỤ
1. $\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ: $x \geq 2018$
2. $\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Ví dụ: $\frac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ: $x \neq 7$
3. $\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $x > 3$
4. $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Ví dụ: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

$$5. \sqrt{\frac{A}{B}} \quad \text{ĐKXĐ:} \quad \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \text{Ví dụ: } \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad \text{ĐKXĐ:} \quad \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Cho $a > 0$ ta có:

$$6. \quad x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases} \quad \text{Ví dụ: } x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{1} \\ x < -\sqrt{1} \end{cases}$$

Cho $a > 0$ ta có:

$$7. \quad x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \quad \text{Ví dụ: } x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Dạng 1: Các bài toán biến đổi căn thức thường gặp

★**Thí dụ 1.** (Trích đề thi HSG huyện Nghi Xuân Hà Tĩnh)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-1+3-\sqrt{5} = 2$$

★**Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng năm 2010-2011)

Cho $E = \left(\sqrt[3]{2} + 1\right) \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$. Chứng minh rằng E là số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^3 \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}} = \sqrt[3]{\left[2+1+3\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\right] \frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}} = \sqrt{(8-3\sqrt{7})^2} - \sqrt{(8+3\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)} = \sqrt[3]{2-1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy E là số nguyên

★**Thí dụ 3.** (Trích đề thi chọn HSG tỉnh Hòa Bình Năm 2010-2011)

$$\text{Rút gọn: } A = \frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{T}{M}. \text{ Ta có } T > 0 \text{ nên } T = \sqrt{T^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Xét } T^2 &= \left(\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) - 2 \cdot \sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1} + \left(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) \\
&= 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&= 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \\
&= 2\left(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \right) \\
\Rightarrow T &= \sqrt{2\left(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \right)} \\
\Rightarrow A &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 4.** (Trích đề thi HSG Phú Thọ năm 2012-2013)

Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \\
& \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 5.** (Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)

Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } N &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}} + \sqrt{25-10\sqrt{2}+2} \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})^2}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}} + |5-\sqrt{2}| \\
&= \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 6.** (Trích đề thi Chọn HSG tỉnh Long An năm 2012)

Không sử dụng máy tính, hãy thực hiện phép tính: $A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10}}{\sqrt{23-3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{10})}{\sqrt{2}(\sqrt{23-3\sqrt{5}})} \\
&= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{46-6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{(3\sqrt{5}-1)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}-\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1} = \frac{3\sqrt{5}-1}{3\sqrt{5}-1} = 1
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 7.** (Trích đề thi HSG huyện Nga Sơn-Thanh Hóa năm 2016-2017)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{B}{\sqrt{2}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
\frac{B}{\sqrt{2}} &= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6} \\
\frac{B}{\sqrt{2}} &= 1 \Rightarrow B = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 8.** (Trích đề thi HSG huyện Thạch Hà năm 2016-2017)

$$\text{So sánh } \sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1} \text{ và } \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1} &= \frac{(\sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1})(\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1})}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \\
&= \frac{(2017^2-1) - (2016^2-1)}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} = \frac{2017^2 - 2016^2}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \\
&= \frac{2017+2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} > \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}} \\
\text{Vậy } \sqrt{2017^2-1} - \sqrt{2016^2-1} &> \frac{2 \cdot 2016}{\sqrt{2017^2-1} + \sqrt{2016^2-1}}
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 9.** Rút gọn các biểu thức:

$$a) A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

$$b) B = \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}$$

Lời giải

$$a) A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} \\ = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1$$

$$b) \text{Đặt } x_0 = \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}$$

$$\Rightarrow x_0^3 = \left(\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} \right)^3 \\ = 70 - \sqrt{4901} + 70 + \sqrt{4901} + 3\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} \cdot \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} \left(\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} \right) \\ = 140 + 3x_0$$

Khi đó ta có:

$$x_0^3 + 3x_0 - 140 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 5)(x_0^2 + 5x_0 + 28) = 0$$

$$\text{Mà } x_0^2 + 5x_0 + 28 > 0 \text{ (do } \Delta < 0) \Rightarrow x_0 = 5$$

Vậy $B = 5$.

★**Thí dụ 10.** Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + (\sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} \\ = 1 + \sqrt{2}$$

📁 **Dạng 2: Dùng ẩn phụ đơn giản hóa bài toán**

★**Thí dụ 1.** Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2}{\sqrt[4]{7}} - \sqrt[4]{7} - \frac{\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{7} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}} + \frac{6}{\sqrt{7} \left(\sqrt[4]{7} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}} \right)} + \frac{7}{\sqrt[4]{343}}$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt[4]{7} \Rightarrow a^4 = 7 \text{ và } a^2 = \sqrt{7} \text{ ta có:}$$

$$A = \frac{2}{a} - a - \frac{a^2 - \frac{1}{a^2}}{a - \frac{1}{a}} + \frac{6}{a^2 \left(a + \frac{1}{a} \right)} + \frac{7}{a^3} = \frac{1 - 2a^2}{a} + \frac{13a^2 + 7}{a^3(a^2 + 1)}$$

$$= \frac{a^4 + a^2 - 2a^6 - 2a^4 + 13a^2 + a^4}{a^3(a^2 + 1)} = \frac{2a^2(7 - a^4)}{a^3(a^2 + 1)} = 0 \text{ (Do } a^4 = 7)$$

★ **Thí dụ 2.** Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{125}}}$.

Lời giải

Đặt $b = \sqrt[4]{5} \Rightarrow b^2 = \sqrt[4]{25}, b^3 = \sqrt[4]{125}, b^4 = 5, b^6 = 5b^2, b^5 = 5b$.

Ta có: $B = \frac{2}{\sqrt{4 - 3b + 2b^2 - 3b^3}}$

Mặt khác: $\frac{1}{b^3 - 2b^2 + 3b - 4} = \frac{1}{(b^3 + 3b) - (2b^2 + 4)} = \frac{(b^3 + 3b) + (2b^2 + 4)}{(b^3 + 3b)^2 - (2b^2 + 4)^2}$

$$= \frac{b^3 + 3b + 2b^2 + 4}{-2b^2 - 6} = -\frac{(b^3 + 2b^2 + 3b + 4)(b^2 - 3)}{2(b^4 - 9)} = \frac{b^5 + 2b^4 - 2b^2 - 9b - 12}{8}$$

$$= \frac{-b^2 - 2b - 1}{4} = -\left(\frac{b+1}{2}\right)^2.$$

Vậy $B = 2\sqrt{\left(\frac{2}{b+1}\right)^2} = \frac{4}{b+1} = \frac{4}{\sqrt[4]{5} + 1}$.

★ **Thí dụ 3.** Rút gọn biểu thức: $E = \left(\frac{\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{2}}{1 - \sqrt[4]{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{2}}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt[4]{2} = a \Rightarrow a^4 = 2, \sqrt[4]{4} = a^2 = \sqrt{2}$

Ta có:

$$E = \left(\frac{a^2 - a}{1 - a} + \frac{1 + a^2}{a} \right) - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^4}}}{1 + a^2} = \left(-a + \frac{1 + a^2}{a} \right)^2 - \frac{1 + a^2}{a^2(1 + a^2)} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 0$$

Vậy $E = 0$

 **Dạng 3: Các bài toán về tính tổng dãy có quy luật**

★ **Thí dụ 1.** Rút gọn:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1+1}\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2+2}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1999\sqrt{1998+1998}\sqrt{1999}} + \frac{1}{2000\sqrt{1999+1999}\sqrt{2000}}$$

Lời giải

Với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 \cdot k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \quad (1)$$

Áp dụng (1) với $k = 1, 2, 3, \dots, 1999$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2000\sqrt{1999}+1999\sqrt{2000}} &= \frac{1}{\sqrt{1999}} - \frac{1}{\sqrt{2000}}. \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}} + \frac{1}{2000\sqrt{1999}+1999\sqrt{2000}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1999}} - \frac{1}{\sqrt{2000}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2000}} \\ &= \frac{\sqrt{2000}-1}{\sqrt{2000}} \\ &= \frac{20\sqrt{5}-1}{20\sqrt{5}} \end{aligned}$$

★**Thí dụ 2.** Rút gọn:

$$A = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1998^2} + \frac{1}{1999^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}.$$

Lời giải

Với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{(k-1)k} - \frac{2}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2}} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng (1) với $k = 1, 2, 3, \dots, 2000$ ta được

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{1998} - \frac{1}{1999}\right) + \left(1 + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}\right).$$

$$= 1998 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2000}$$

★**Thí dụ 3.** Rút gọn các biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}};$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1})(\sqrt{2} - \sqrt{1})} = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Do đó:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - 1$$

★**Thí dụ 4.**

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4.$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

c) Chứng minh: $2\sqrt{n} - 2 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2.$

Lời giải

a) Xét $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}}, B = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$

Dễ thấy $A > B.$

Ta có $A + B = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Suy ra $A + B = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) = \sqrt{81} - 1 = 8$. Do $A > B$ suy ra $2A > A + B = 8 \Leftrightarrow A > 4$.

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} < \frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.

Suy ra $VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ hay

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right] < T$ và

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right].$$

Hay $2\sqrt{n} - 2 < T < 2\sqrt{n} - 1$.

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 2$, ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}.$$

Lời giải

Để ý rằng các phân số có tử và mẫu hơn kém nhau 2 đơn vị, nên ta nghĩ đến đẳng thức

$\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n} (\Leftrightarrow n^2 < n^2 + n - 2 \Leftrightarrow n > 2)$. Kí hiệu $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}$. Ta có:

$$P^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}\right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&< \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \\
&< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Dạng 4: Bài toán rút gọn biểu thức chứa một hay nhiều ẩn

★**Thí dụ 1.** Rút gọn: $B = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}}{1 - \sqrt[4]{a}} + \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a}}}{1 + \sqrt{a}} \quad (a > 0, a \neq 1).$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[4]{a} \ (t > 0) \Rightarrow \sqrt{a} = t^2, a = t^4$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó: } B &= \left(\frac{t^2 - t}{1 - t} + \frac{1 + t^2}{t} \right)^2 - \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}}}{1 + t^2} \\
&= \left[\frac{t(t-1)}{1-t} + \frac{1}{t} + t \right]^2 - \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t^2} + 1 \right)^2}}{1 + t^2} = \left(-t + \frac{1}{t} + t \right)^2 - \frac{\frac{1}{t^2} + 1}{1 + t^2} \\
&= \frac{1}{t^2} - \frac{t^2 + 1}{t^2(t^2 + 1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2012-2013)

Rút gọn biểu thức: $A = \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right) \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 50}} \quad \text{với } x \geq \sqrt{50}$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right)^2 \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \Rightarrow A^2 = \left(x - \sqrt{50} + x + \sqrt{50} - 2\sqrt{x^2 - 50} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \\
&\Rightarrow A^2 = \left(2x - 2\sqrt{x^2 - 50} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - 50} \right) \Rightarrow A^2 = 2 \left(x^2 - x^2 + 50 \right)
\end{aligned}$$

Vậy: $A^2 = 100$

Nhưng do theo giả thiết ta thấy $A = \left(\sqrt{x - \sqrt{50}} - \sqrt{x + \sqrt{50}} \right) \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 50}} < 0$

$\Rightarrow A = -10$

★Thí dụ 3. (Trích đề thi HSG Hải Dương năm 2013-2014)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3})}{2-\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 \leq x \leq 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(2-\sqrt{1-x^2})}{2-\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\ &= \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(2+2\sqrt{1-x^2})} \\ &= \sqrt{2x^2} = |x|\sqrt{2} \end{aligned}$$

★Thí dụ 4. (Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)

Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} (\text{GT}) &\Rightarrow [(a+b)^2 - 2(ab+1)](a+b)^2 + (1+ab)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2(a+b)^2(1+ab) + (1+ab)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [(a+b)^2 - (1+ab)]^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 - (1+ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 = 1+ab \Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{1+ab} \in \mathbb{Q}; \text{ do: } a, b \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

★Thí dụ 5. (Trích đề thi HSG T.P Bắc Giang năm 2016-2017)

Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$

Lời giải

$$\text{Rút gọn } M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \text{ với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} &= 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1 \\ &\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = 1 \end{aligned}$$

+ Nếu $a > b > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$$

+ nếu $0 < a < b$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right| = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$$

Dạng 4: Bài toán rút gọn biểu thức và bài toán liên quan

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn.

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức P khi cho $x = k$ (k là hằng số)

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa.

- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức P và rút gọn k nếu cũng là một biểu thức chứa căn phức tạp

- **Bước 3:** Thay giá trị $x = k$ vào biểu thức đã rút gọn rồi tính ra kết quả.

Ví dụ minh họa:

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của P khi $x = 4$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có khi $x = 4$ thì:

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{4+\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{4+2+1}{2} = \frac{7}{2}$$

★Thí dụ 2. (Trích đề thi HSG huyện lớp 9 năm 2013-2014)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right).$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}.$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1.$

Mẫu thức chung là $1 - xy$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \end{aligned}$$

b) Ta có: $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} =$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$$

★Thí dụ 3. (Trích đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa năm học 2011-2012)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{3 + \sqrt{x} - 1} + \frac{x + 8}{10 - x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 1 + 1}{x - 3\sqrt{x} - 1 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right)$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}}$

Lời giải

Điều kiện: $1 < x \neq 10$

1) $P = \frac{3\sqrt{x} - 1 + 9}{10 - x} : \left[\frac{1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1 + 4}{\sqrt{x} - 1 - 3} \right]$

$$P = \frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x} \cdot \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}{2\sqrt{x-1}+4}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x-1}(x-10)(\sqrt{x-1}-2)}{2(10-x)(x-1-4)} = -\frac{3(x-2)}{2(x-5)}$$

$$2) x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \text{ vì } x > 1$$

$$\text{Vậy } P = 0$$

Dạng 2. Tìm giá trị của biến x để biểu thức P = k (k là hằng số)

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức P.
- **Bước 3:** - Giải phương trình P - k = 0.
- **Bước 4:** Đối chiếu điều kiện của x và kết luận.

Ví dụ minh họa:

★ **Thí dụ 1.** Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$1) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$2) P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow x=36 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

★ **Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG Ninh Bình năm học 2012-2013)

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \quad (x > 0, x \neq 1).$$

1. Rút gọn P.

2. Tìm giá trị của x để P = 3.

Lời giải

$$1/\text{Ta có: } P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x}+1)$$

$$= x - \sqrt{x} + 1$$

$$2/ \text{Ta có: } P = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t, t \geq 0 \text{ ta được pt } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } t = 2 \text{ ta được } \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } P = 3.$$

★ **Thí dụ 3.** (Trích đề thi HSG tỉnh Hà Nam năm 2012-2013)

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$$

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn $P = 2$.

Lời giải

1) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(1 + \sqrt{x}) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} = \frac{(x - y) + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) + y(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{y})(1 + \sqrt{y}) - \sqrt{y}(1 - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{y})} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$2) P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2 \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; y \neq 1; x + y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = 0; 1; 2; 3; 4$$

Thay vào P ta được các cặp giá trị $(4;0)$ và $(2;2)$ thỏa mãn.

📁 **Dạng 3. Tìm giá trị của biến x để biểu thức $P = A$ (A là biểu thức chứa ẩn)**

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức P .
- **Bước 3:** - Giải phương trình $P - A = 0$.
- **Bước 4:** Đối chiếu điều kiện của x và kết luận.

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
- Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Lời giải

- Ta có:

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

- Theo câu a) $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Dạng 4. Tìm giá trị của ẩn để biểu thức thỏa mãn một bất đẳng thức $A > k$ ($\geq$; $\leq$; $< k$) với k là hằng số.

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A .
- **Bước 3:** - Giải bất phương trình $A - k > 0$.
- **Bước 4:** Đối chiếu điều kiện của x và kết luận.

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \div \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$, với $x > 0$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị của x để $A > \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Với $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{1-x}{x}. \end{aligned}$$

b) Với $x > 0$, ta có

$$A > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2x > x \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $0 < x < \frac{2}{3}$.

★**Thí dụ 2.** Cho biểu thức $M = \left(\frac{4x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$, với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

a) Rút gọn M .

b) Tìm x để $M < 4$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$. Ta có

$$M = \left(\frac{4x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} = \frac{4x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} = \frac{4x-1}{x^2}.$$

Ta có $x > 0$ nên $x^2 > 0$ khi đó

$$M < 4 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x^2} < 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}.$$

Vậy với $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $x \neq 4$ thì $M < 4$.

★**Thí dụ 2.** Cho biểu thức $A = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27})$,

$$B = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(1 - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức A và B .
- b) Tìm các giá trị của x sao cho $A \cdot B \leq 0$.

Lời giải

a) Ta có $A = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = 3$.

Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$B = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = -(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1) = 1 - x$$

$$A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow 3(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy $x \geq 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 5. So sánh biểu thức A với k (hằng số) hoặc với biểu thức B (chứa ẩn)

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A .
- **Bước 3:** - Xét dấu của hiệu $A - k$ hoặc $A - B$ và đưa ra kết luận.

Ví dụ minh họa:

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức $B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với $a > 0, a \neq 1$).

- a) Rút gọn biểu thức B .
- b) Đặt $C = B(a - \sqrt{a} + 1)$. So sánh C và 1.

Lời giải

a) Ta có $a\sqrt{a} - a - \sqrt{a} + 1 = a(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 1) = (\sqrt{a} - 1)(a - 1)$.

$$\text{Do đó } B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}\right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{6(\sqrt{a}-1) + 10 - 2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1) \cdot (\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$= \frac{4+4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

b) Ta có $C = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) - 1 \geq 2 - 1 = 1.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=1$ (loại). Vậy $C > 1$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) So sánh M với 1.

Lời giải

a) Điều kiện: $a > 0$ và $a \neq 1$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{(1+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

b) Xét hiệu: $M - 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{a}} < 0$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

Vậy $M < 1$.

Ví dụ 3: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) So sánh P với $-2\sqrt{x}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \frac{-4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1-x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

b) Xét hiệu $P - (-2\sqrt{x}) = \frac{1-x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0; x \neq 1 &\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow P - (-2\sqrt{x}) > 0 \\ &\Rightarrow P > -2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dạng 6. So sánh biểu thức rút gọn A với $\sqrt{A}$ hoặc A^2 với A.

Phương pháp:

Bước 1: + Xác định điều kiện của x để $A > 0$ (nếu A chưa phải biểu thức dương)

Bước 2: + So sánh A với 1 bằng cách xét hiệu $A-1$ theo điều kiện x đã có:

Bước 3: - Nếu $0 < A < 1$ thì $\sqrt{A} > A$.

Bước 4: - Nếu $A > 1$ thì $\sqrt{A} < A$.

+ **Chú ý:** Dạng này còn có biến thể là so sánh biểu thức rút gọn A với A^2 (chỉ xét với biểu thức A dương).

Ví dụ 1: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với

$$x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) So sánh A với $\sqrt{A}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \left[(2\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}+x} \right) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : (2\sqrt{x}-1) : \frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \\ &= \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Biến đổi $A = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$.

Áp dụng BĐT cosi có: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ với mọi $x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{A} > 1 \Rightarrow \sqrt{A} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{A}(\sqrt{A} - 1) > 0$$

$$\Rightarrow A - \sqrt{A} > 0 \Rightarrow A > \sqrt{A}.$$

Ví dụ 2: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-2}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) So sánh A với A^2 .

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 4$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

b) Với mọi $x > 0; x \neq 4$ thì $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} > 0$.

$$\text{Mà } \sqrt{x}+1 < \sqrt{x}+2 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} < 1$$

Vậy $0 < A < 1$ với mọi $x > 0; x \neq 4 \Rightarrow A^2 < A$ với mọi $x > 0; x \neq 4$.

Dạng 7. Chứng minh với mọi giá trị của x và thì $A > k$ ($\geq; \leq; < k$) với k là hằng số

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A.

- **Bước 3:** - Chứng minh hiệu $A - k > 0 \forall x$

★ **Thí dụ 1.** (Trích đề Thi HSG huyện Bình Giang năm 2012-2013)

$$\text{Cho biểu thức: } A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

1) Rút gọn A

2) Chứng tỏ rằng: $A < \frac{1}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$1) A = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

$$2) \text{ Xét } \frac{1}{3} - A = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

Do $x \geq 0, x \neq 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \text{ và } x+\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - A > 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$$

★ **Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG huyện Cam Lộ)

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P.

b) Chứng minh $P \geq 0$.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) $\sqrt{x} \geq 0$

$$x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Do đó: $P = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0$

★ **Thí dụ 3.** (Trích đề thi HSG T.P Đà Nẵng năm học 2013-2014)

Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Chứng minh rằng $M > 4$.

Lời giải

Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$$

Do $a > 0; a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a}$

$$\Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

Dạng 8. Tìm giá trị của x để biểu thức thỏa mãn một bất đẳng thức $A > B$ ($\geq; \leq; < B$) với B là biểu thức chứa ẩn.

Phương pháp:

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A.
- **Bước 3:** - Giải bất phương trình $A - B > 0$.
- **Bước 4:** Đối chiếu điều kiện của x và kết luận.

Ví dụ minh họa:

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$, với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } A &= \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+2} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{1}{3} \text{ (do } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

$$\text{Vậy để } A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \text{ thì } 0 < x \leq 1.$$

★**Thí dụ 2.** Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Lời giải

a) Với $x = 9$ ta có $A = \frac{7}{2}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3} = \frac{3\sqrt{x}+1-2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

c) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+4$.

$$\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Dạng 9. Tìm giá trị của ẩn để biểu thức nhận giá trị nguyên

Phương pháp 1: Đưa về biểu thức về dạng chứa phân thức mà tử nguyên, tìm giá trị ẩn để mẫu là ước của tử.

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A và đưa về dạng phân thức có tử là số nguyên.
- **Bước 3:** - Lý luận để biểu thức là số nguyên thì mẫu số phải là ước của tử, từ đó tìm giá trị ẩn.
- **Bước 4:** Đối chiếu điều kiện của x và kết luận.

Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0, a \neq 9$.

- a) Rút gọn A .
- b) Tìm các số nguyên a để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

- a) Với $a \geq 0, a \neq 9$, ta có

$$A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{a-9} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{a-9} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{11}{a-9}$$

- b) $A = \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi 11 chia hết cho $a-9$. Do đó

$$\begin{cases} a-9=1 \\ a-9=-1 \\ a-9=11 \\ a-9=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ a=8 \\ a=20 \\ a=-2 \end{cases} \text{ (I)}.$$

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì A nhận giá trị nguyên.

★**Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai 2014-2015)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$

1. Rút gọn A
2. Tìm số nguyên x để A nguyên

Lời giải

- 1) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

Rút gọn $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$

2) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+3$ là Ư(5)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+3=1 & (\text{loại}) \\ \sqrt{x}+3=5 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

★**Thí dụ 3.** (Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai năm 2015-2016)

Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$ (*)

1) Rút gọn M: Với $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$ (*)

Rút gọn ta được: $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \quad M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

2) $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 : (\sqrt{x}+1) \Rightarrow (\sqrt{x}+1) \in U(3)$

$Ư(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$

Xảy ra các trường hợp sau:

+) $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

+) $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$. (không TMĐK (*) loại)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên.

Phương pháp 2: Đánh giá khoảng giá trị của biểu thức, từ khoảng giá trị đó ta có các giá trị nguyên mà biểu thức có thể đạt được.

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A.

- **Bước 3:** - Đánh giá khoảng giá trị mà biểu thức A có thể đạt được, từ khoảng giá trị đó ta có các giá trị nguyên mà biểu thức A có thể đạt được.

- **Bước 4:** Giải phương trình vế trái là biểu thức A đã rút gọn, vế phải là các giá trị nguyên nằm trong miền giá trị của A, đối chiếu điều kiện và kết luận.

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ và $B = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các số nguyên x để $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b) ta có:

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow 0 < P \leq \frac{7}{3}$$

Vậy các giá trị nguyên mà P có thể đạt được là 1 và 2.

$$\text{Với } P = 1 \text{ ta có: } \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x = 16 \text{ (TM)}$$

$$\text{Với } P = 2 \text{ ta có: } \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x}+6 = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

★ **Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG tỉnh Hải Phòng năm 2016-2017)

Cho biểu thức $B = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $A = \frac{6}{B}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Với điều kiện $a > 0; a \neq 1$ thì:

$$\begin{aligned} B &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ B &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Khi đó $A = \frac{6}{B} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0$. Ta thấy với $0 < a \neq 1 \Rightarrow a - \sqrt{a} + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} < 2$$

Do $0 < N < 2$

Để N có giá trị nguyên thì $N = 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{3} + 2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

★ **Thí dụ 3.** (Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012)

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$

Tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$. Khi đó ta có

Rút gọn biểu thức ta được $P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$

Ta có $Px + (P-1)\sqrt{x} + P-2 = 0$, ta coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$. Nếu

$P=0 \Rightarrow -\sqrt{x}-2=0$ vô lí, suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$$\Delta = (P-1)^2 - 4P(P-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (P-1)^2 \leq \frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $(P-1)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $(P-1)^2 = 0 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $(P-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P=2 \\ P=0 \end{cases} \Rightarrow P=2 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Phương pháp 3: Đặt biểu thức bằng một tham số nguyên, tìm khoảng giá trị của tham số, từ khoảng giá trị đó ta xét các giá trị nguyên của tham số, giải ra tìm ẩn.

- **Bước 1:** - Đặt điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

- **Bước 2:** - Rút gọn biểu thức A.

- **Bước 3:** - Đánh giá khoảng giá trị mà biểu thức A có thể đạt được, từ khoảng giá trị đó ta có các giá trị nguyên mà biểu thức A có thể đạt được.

- **Bước 4:** Giải phương trình vế trái là biểu thức A đã rút gọn, vế phải là các giá trị nguyên nằm trong miền giá trị của A, đối chiếu điều kiện và kết luận.

★**Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ và $B = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các số nguyên x để $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b) ta có:

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy các giá trị nguyên mà P có thể đạt được là 1 và 2.

$$\text{Đặt } \frac{7}{\sqrt{x}+3} = n \ (n > 0) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{7}{n} - 3 = \frac{7-3n}{n} \geq 0 \Rightarrow 7-3n \geq 0 \Rightarrow 0 < n \leq \frac{7}{3} \Rightarrow n = \{1; 2\}$$

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có: } \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x = 16 \ (TM)$$

$$\text{Với } n = 2 \text{ ta có: } \frac{7}{\sqrt{x}+3} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x} + 6 = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \ (TM)$$

★**Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai năm 2015-2016)

$$\text{Cho } M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$$

1) Rút gọn M

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9 \ (*)$$

1) Rút gọn M: Với $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$ (*)

$$\text{Rút gọn ta được: } M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \quad M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$2) M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Đặt } \frac{3}{\sqrt{x}+1} = n \quad (n > 0) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{n} - 1 = \frac{3-n}{n}$$

$$\text{Do } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } \frac{3-n}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 3-n \geq 0 \Rightarrow 0 < n \leq 3 \Rightarrow n = \{1; 2; 3\}$$

Xảy ra các trường hợp sau:

$$+) \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không TMĐK (*) loại)}$$

$$+) \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (loại do x không nguyên (*))}$$

$$+) \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TMĐK (*))}$$

Vậy $x = 0$ thì M nhận giá trị nguyên.

Dạng 10. Tìm giá trị của ẩn để biểu thức đạt GTNN hoặc GTLN

Phương pháp 1: Thêm bớt rồi dùng bất đẳng thức Cauchy hoặc đánh giá dựa vào điều kiện

★ **Thí dụ 37.** (Trích đề thi HSG huyện Thanh Oai 2014-2015)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$$

1. Rút gọn A

$$2. \text{ Với } x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9 \text{ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } B = \frac{A(x+16)}{5}$$

Lời giải

b) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 25, x \neq 9$

$$\text{Rút gọn } A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$$

b) Ta có :

$$B = \frac{A(x+16)}{5} = \frac{5(x+16)}{5(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6$$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$B = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+3\right) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 2.5 - 6 = 4$$

$$\Rightarrow B \geq 4 \Rightarrow \min B = 4 \quad \sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 4$$

★ **Thí dụ 2.** (Trích đề thi HSG huyện Tư Nghĩa năm 2016-2017)

Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \right)$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Lời giải

a) Điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa : $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3+1 \neq 0 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{x+2}} \right) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-(x+2)} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x-2)-(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{-1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

$$\text{Ta có } A = \frac{-1}{x^2-x+1} = \frac{-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Ta có A nhỏ nhất khi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{4}{3}$ khi $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

★ **Thí dụ 3.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$, với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$.

Lời giải

a) Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

b) Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$P = A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow 9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 6.$$

Như vậy $P \leq -5$.

Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x = \frac{1}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là -5 khi $x = \frac{1}{9}$.

Phương pháp 2: Dùng miền giá trị

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$, với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$.

Lời giải

a) Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

b) Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
P &= A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} \quad (P < 1) \\
&\Leftrightarrow P \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 - 9x \\
&\Leftrightarrow 9x + (P-1)\sqrt{x} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 9(\sqrt{x})^2 + (P-1)\sqrt{x} + 1 = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Để tồn tại P thì phương trình (*) phải có nghiệm, tức là:

$$\Delta = (P-1)^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (P-1)^2 \geq 36 \Leftrightarrow P-1 \leq -6 \text{ (do } P < 1) \Leftrightarrow P \leq -5$$

Như vậy $P \leq -5$ khi $\sqrt{x} = \frac{-(P-1)}{2 \cdot 9} = \frac{-(-5-1)}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là -5 khi $x = \frac{1}{9}$.

Dạng 11. Chứng minh biểu thức luôn âm hoặc luôn dương

Phương pháp:

- Để chứng minh biểu thức A luôn dương ta chỉ ra $A = A_1^2 + k$ ($k > 0$)
- Để chứng minh biểu thức A luôn âm ta chỉ ra $A = -A_1^2 - k$ ($k > 0$)

Ví dụ minh họa:

★ **Thí dụ 1.** Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Chứng minh A luôn âm với mọi giá trị x làm A xác định.

Lời giải

- Điều kiện: $x > 0$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó: } A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{x - \sqrt{x} + 1 - x - 2}{(\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}
\end{aligned}$$

Do $-\sqrt{x} < 0$; $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)} < 0 \quad \forall x$

Vậy A luôn âm với mọi giá trị x làm A xác định.

★ **Thí dụ 2.** Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh A không âm với mọi giá trị x làm A xác định.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})} + \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \\ &= x - 2\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

A không âm với mọi giá trị $x \geq 1$.

Dạng 12. Tìm x biết biểu thức P thỏa mãn phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp:

① Tìm x để $|A| = A$.

Phương pháp: $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $A \geq 0$.

② Tìm x để $|A| = -A$.

Phương pháp: $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $A \leq 0$.

③ Tìm x để $\sqrt{A^2} = A$.

Phương pháp: $\sqrt{A^2} = A \Leftrightarrow A \geq 0$.

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $A \geq 0$.

④ Tìm x để $|A| > -A$.

Phương pháp: $|A| > -A \Leftrightarrow A > 0$

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $A > 0$.

⑤ Tìm x để $\sqrt{A} > A$.

Phương pháp: $\sqrt{A} > A \Leftrightarrow 0 < A < 1$

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $0 < A < 1$.

⊗ Tìm x để $\sqrt{A} < A$.

Phương pháp: $\sqrt{A} < A \Leftrightarrow A > 1$

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để $A > 1$.

⊗ Tìm x để $A > b$; $A \geq b$; $A < b$; $A \leq b$.

Phương pháp:

Cần tìm x thỏa mãn ĐK để: $A - b > 0$; $A - b \geq 0$; $A - b < 0$; $A - b \leq 0$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho biểu thức: $A = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A > 1$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 1$. Kết quả rút gọn $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}\right) \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1}\right) : \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}\right) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

b) Ta có: $A > 1 \Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{\sqrt{x} - 1} > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ (do } x + 2 > 0 \text{)}.$$

Kết hợp với ĐKXD $0 \leq x < 1$ thì $A > 1$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

a) Tìm ĐKXD, rút gọn biểu thức A .

b) Với giá trị nào của x thì $|A| > A$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$. Kết quả rút gọn $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có: $|A| > A \Leftrightarrow A < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x} > 0 \text{ với mọi } x > 0; x \neq 1).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp với điều kiện xác định $0 < x < 1$ thì $|A| > A$.

Dạng 13. Tìm giá trị tham số m để x thỏa mãn phương trình, bất phương trình.

Phương pháp:

- Đối với phương trình ta đưa phương trình về dạng $f(m).x = k$

- Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $f(m) = 0$, kết luận về bất phương trình nhận được.

Trường hợp 2: $f(m) \neq 0$, tìm được tập nghiệm x, rồi lập luận theo điều kiện nghiệm x thỏa mãn.

- Đối với bất phương trình biến đổi bất phương trình về một trong các dạng sau:

$$f(m).x > k \text{ hoặc } f(m).x \geq k \text{ hoặc } f(m).x < k \text{ hoặc } f(m).x \leq k$$

$$f(m).\sqrt{x} > k \text{ hoặc } f(m).\sqrt{x} \geq k \text{ hoặc } f(m).\sqrt{x} < k \text{ hoặc } f(m).\sqrt{x} \leq k$$

- Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $f(m) = 0$, kết luận về bất phương trình nhận được.

Trường hợp 2: $f(m) > 0$, tìm được tập nghiệm x, rồi lập luận theo điều kiện nghiệm x thỏa mãn.

Trường hợp 3: $f(m) < 0$, tìm được tập nghiệm x, rồi lập luận theo điều kiện nghiệm x thỏa mãn.

Ví dụ 1: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Rút gọn B.

b) Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$, tìm giá trị của m để x thỏa mãn $P = m - 2$

Lời giải

a) Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - 7\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-5\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

b) Ta có:

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \text{ với điều kiện: } x > 0, x \neq 9, x \neq 4$$

$$P = m - 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = m - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = m\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (m-3)\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-3}$$

Ta có: $x > 0, x \neq 9, x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} \neq 2, \sqrt{x} \neq 3$

Để x thỏa mãn $P = m - 2$ thì:
$$\begin{cases} \frac{3}{m-3} > 0 \\ \frac{3}{m-3} \neq 2 \\ \frac{3}{m-3} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \neq \frac{9}{2} \\ m \neq \frac{15}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

a) Rút gọn P .

b) Tìm m để với mọi giá trị $x > 4$ thì $m(\sqrt{x}-1).P < x-1$

Lời giải

a) Ta có: với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{x} \cdot (2+\sqrt{x}) - 8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-4+(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{-4x+8\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2x}{\sqrt{x}-1}$

b) Với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$ ta có $P = \frac{2x}{\sqrt{x}-1}$

$$m(\sqrt{x}-1).P < x-1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{2x}{\sqrt{x}-1} < x-1 \Leftrightarrow m.2x < x-1 \Leftrightarrow (2m-1)x < -1$$

Trường hợp 1: Khi $2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < -1$ (vô lý).

Trường hợp 2: Khi $2m-1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{1-2m}$, khi đó để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x > 4$ thì:

$$\frac{1}{1-2m} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{1-2m} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-4+8m}{1-2m} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8m-3}{1-2m} \leq 0$$

$$\text{Mà } 1-2m > 0 \Rightarrow 8m-3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{8}.$$

Trường hợp 3: Khi $2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{1}{1-2m} < 0$, khi đó mọi giá trị x là âm nên không thỏa mãn điều kiện và yêu cầu bài toán.

Vậy với $m \leq \frac{3}{8}$ thì bất phương trình thỏa mãn với mọi $x > 4$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của m để mọi $x > 2$ ta có: $P \cdot (x + \sqrt{x} + 1) - 3 > m(x - 1) + \sqrt{x}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 1$.

$$P = \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(2x + \sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{x(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 1)}{x\sqrt{x} - 1}$$

$$P = \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{(\sqrt{x} - 1)(x - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$P = \frac{2x + \sqrt{x} - 1 - x + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

b) Ta có: $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

$$P \cdot (x + \sqrt{x} + 1) - 3 > m(x - 1) + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot (x + \sqrt{x} + 1) - 3 > m(x - 1) + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 3 > m(x - 1) + \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 - m(x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)x + m - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)x > 3 - m \quad (*)$$

Trường hợp 1: Khi $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow 0 > 2$ (vô lý).

Trường hợp 2: Khi $1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow x < \frac{3 - m}{1 - m}$, khi đó:

+ Nếu $\frac{3 - m}{1 - m} < 2$ tức là $x < 2$ thì mọi giá trị $x > 2$ sẽ không thỏa mãn bất phương trình.

+ Nếu $\frac{3-m}{1-m} > 2$ tức là $2 < x < \frac{3-m}{1-m}$ thì chỉ có một số giá trị $x > 2$ thỏa mãn bất phương trình (Tập nghiệm của bất phương trình (*) không chứa hết các giá trị $x > 2$)

$\Rightarrow$ Trường hợp 2 không thỏa mãn với mọi giá trị $x > 2$.

Trường hợp 3: Khi $1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1 \Rightarrow x > \frac{3-m}{1-m}$, khi đó để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x > 2$ thì:

$$\frac{3-m}{1-m} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3-m}{1-m} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m+1}{1-m} \leq 0$$

Mà $1-m > 0 \Rightarrow m+1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -1$ kết hợp với $m < 1$ ta được $m \leq -1$

Vậy với $m \leq -1$ thì bất phương trình thỏa mãn với mọi $x > 2$.

Ví dụ 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của a để có x thỏa mãn: $P(\sqrt{x}+1) > \sqrt{x}+a$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 4$.

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \right)$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4-x}$$

$$P = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{-4}$$

$$P = 1 - \sqrt{x}$$

b) Ta có: $P = 1 - \sqrt{x}$ với $x > 0$; $x \neq 4$.

$$P(\sqrt{x}+1) > \sqrt{x}+a$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) > \sqrt{x}+a$$

$$\Leftrightarrow 1-x > \sqrt{x}+a$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1 < -a \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}+\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} - 1 < -a$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - a$$

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2} \right)^2 > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - a \Rightarrow a < 1$$

Vậy với $a < 1$ thì có x thỏa mãn: $P(\sqrt{x} + 1) > \sqrt{x} + a$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 1$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bình Định vòng 2 năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $B = (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Giang chuyên toán năm 2019-2020)

Cho x, y là các số thực dương và

$$P = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}y} + \sqrt{y + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y^2}x} + \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1 = \sqrt[3]{P^2}$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ khi $x = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bến Tre vòng 2 năm 2019-2020)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Cao Bằng vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tìm tất các giá trị của x để $P \geq 1$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Cần thơ chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ trong đó $x > 1, x \neq 2$.

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị biểu thức A là số nguyên.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh ĐAK NONG vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}} - 1 \right)$.

Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Gia lai chuyên tin năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai không chuyên năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{a-4}{\sqrt{a}+2} : \frac{a-4\sqrt{a}+4}{2\sqrt{a}-4}$, với $a \geq 0, a \neq 4$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Gia lai vòng 2 năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 1 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{xy} + y} - \frac{3x}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) : \frac{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{2x + 2\sqrt{xy} + 2y}$

- a) Rút gọn biểu thức M .
 b) Tìm các số nguyên x sao cho biểu thức M có giá trị nguyên.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{x+24}{x-\sqrt{x}-2} : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right]$,

(với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$).

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam thi chung năm 2019-2020)

Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12}.$

2. $B = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{2a}{a + \sqrt{a}} \right) : \frac{1}{a - 1},$ (với $a > 0, a \neq 1$).

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Tin năm 2019-2020)

1) Tìm điều kiện xác định: $A = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{2}{x-2}$

2) Rút gọn: $B = 5\sqrt{12} - \sqrt{27}$

3) Rút gọn: $C = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - 1$

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình Chuyên Toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1} + \frac{1}{\sqrt{a} + 2} - 1$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm giá trị của a để $|A| = 2$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình dành cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020) Rút gọn:

$A = (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3) + 6$

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên Vòng 2 năm 2019-2020)

a) Cho a là số thực khác 1 và -1 . Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} \div \frac{a^3 + 1}{a^3 - 1} - \frac{2a}{a-1}.$

b) Cho các số thực x, y, a thoả mãn $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a.$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương chuyên toán năm 2019-2020)

Cho $P = 1 + \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} - \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x}{1 - x\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}.$

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $P = \frac{4}{5}$.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Hải phòng vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0$).

Rút gọn biểu thức P . Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{5}$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \sqrt{2x+15} - 8\sqrt{2x-1}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

b) Tìm x để $A = 3$.

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Hậu Giang chuyên toán năm 2019-2020)

Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị đúng của biểu thức $A = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2019$.

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum cho tất cả các thí sinh năm 2019-2020)

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức $\frac{x+1}{x-3}$ có nghĩa.

b) Chứng minh đẳng thức $\left(1 - \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right) = 1-a$ ($a \geq 0, a \neq 1$).

Câu 25. (Trường chuyên tỉnh Kon Tum vòng 2 năm 2019-2020)

1) Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

2) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ tại $x = 2020 - 2\sqrt{2019}$

Câu 26. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt{4}+3$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{(6-\sqrt{5})^2}$

Câu 27. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai Vòng 1 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $H = \frac{2x^2+2x}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức H .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $\sqrt{x} - H < 0$

Câu 28. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng vòng 2 năm 2019-2020)

Tính giá trị biểu thức: $T = (2\sqrt{3} + 1)(3\sqrt{2} - 1)\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}\sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$.

Câu 29. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020)

Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P = \frac{2019}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3}{x - 9}$.

Câu 30. (Trường chuyên tỉnh Nam Định cho lớp chuyên KHTN năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) : \left(\frac{a^2 + a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm các giá trị nguyên của a để P nhận giá trị là số nguyên.

Câu 31. (Trường chuyên tỉnh Nam Định chuyên toán năm 2019-2020)

Cho $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x(2 - x)$.

Câu 32. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXX năm 2019-2020)

Tìm điều kiện xác định của biểu thức: $P = \frac{2019}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3}{x - 9}$.

Câu 33. (Trường chuyên tỉnh Nam Định lớp chuyên KHXX năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $a = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$.

Câu 34. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020)

Với $x > 0$, xét hai biểu thức: $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 9}{x + 3\sqrt{x}}$.

Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} > \frac{5}{3}$.

Câu 35. (Trường chuyên tỉnh Ninh Bình chuyên toán năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức : $C = \frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}-1}}{3-\sqrt{2}}.$

Câu 36. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên Vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 \right).$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $P = 2A - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 37. (Trường chuyên tỉnh PTNK (VÒNG 1) năm 2019-2020)

Tìm a, biết: $\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{2a+1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a+1})}{a(\sqrt{a}+1)} = 1.$

Câu 38. (Trường chuyên tỉnh Quảng Nam Vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2 - x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A = 6$.

Câu 39. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Câu 40. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh Vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức : $A = \frac{-4x-9\sqrt{x}+3}{x+3\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$).

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 41. (Trường chuyên tỉnh Sơn La Vòng 2 năm 2019-2020)

a) Rút gọn biểu thức:

$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

b) Cho $x = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$ hãy tính $B = (x^2 + 4x - 2)^{2019}$

Câu 42. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình vòng 1 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y) - xy}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$ (với $x > 0; y > 0$).

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Biết $xy = 16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 43. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên chuyên tin năm 2019-2020)

Cho: $x = \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}}$.

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng minh x là số nguyên tố.

Câu 44. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang chuyên tin năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

Câu 45. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang Vòng 2 năm 2019-2020)

Cho $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}} - 1$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^3(x^2 + 3x + 9)^3$

Câu 46. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang chuyên toán năm 2019-2020)

Tính tổng: $S = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019^2} + \sqrt{2019^2 - 2}}$

Câu 47. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh Vòng 2 năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $T = \frac{(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2})(a-1)}{a - \sqrt{a} - 2}$ với $a > 0, a \neq 4$.

Câu 48. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long vòng 2 năm 2019-2020)

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

a) Cho biểu thức:

Tìm điều kiện xác định của P và giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.

b) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt[3]{46\sqrt{5}-61} + \sqrt{69-28\sqrt{5}}$.

Câu 49. (Trường chuyên tỉnh An Giang Vòng 2 năm 2019-2020)

Rút gọn: $A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} \right)^2$.

Câu 50. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu thi chung năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $A = (3\sqrt{5} - \sqrt{27} - \sqrt{20})\sqrt{5} + 3\sqrt{15}$.

Câu 51. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$

Câu 52. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán dự bị năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} + \frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2} - \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) (x-1)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả số nguyên tố x để $P \leq 1$.

Câu 53. (Trường chuyên tỉnh Long An chuyên toán năm 2019-2020)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2x - 2}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh: $P \leq 3$.

Câu 54. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị Vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{2x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Tìm tất cả các giá trị của x để $A \leq 0$.

Câu 55. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế vòng 2 năm 2019-2020)

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$.

Tìm x để $P = 3$.

Câu 56. (Trường chuyên tỉnh Yên Bái vòng 2 năm 2019-2020)

Cho biểu thức: $A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 57. (Trường chuyên tỉnh Chuyên ĐHSPT vòng 1 năm 2019-2020)

Cho các số thực x, y, a thoả mãn $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}} = a$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

Câu 58. (Chuyên Nam Định 2018)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2 y^2}{(1+x)(1-y)}$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}} < 2018$.

Câu 59. (Chuyên Hà Tĩnh 2018)

Cho x, y, z là các số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ là số hữu tỉ

Câu 60. (Chuyên Bình Định 2018)

Cho biểu thức: $T = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a-b} \right)$, với $a \neq b, a > 0, b > 0$

- a) Rút gọn biểu thức T
- b) Chứng tỏ $T > 1$

Câu 61. (Chuyên Cà Mau 2018)

Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = 4\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{405} \quad \text{b) } B = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$$

Câu 62. (Chuyên Lam Sơn 2018)

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2018}\right)$

Câu 63. (Chuyên Hưng Yên 2018)

Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{-1}{-x^2+\sqrt{x}}$ và $B = x^4 - 5x^2 - 8x + 2025$ với

$x > 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $T = B - 2A^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 64. (Chuyên Bến Tre 2018)

Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}$ với a, b là hai số thực dương

a) Rút gọn biểu thức $P: \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)}$

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 2019 + 2\sqrt{2018}$ và $b = 2020 + 2\sqrt{2019}$

Câu 65. (Chuyên Hà Nam 2018)

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{a^2 - 2a + 1}$ ($0 < a < 1$)

1) Rút gọn Q

2) So sánh Q, Q^3

Câu 66. (Chuyên Lâm Đồng 2018)

Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Câu 67. (Chuyên Đồng Nai 2018)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{a}{\sqrt{a} + 2} + \frac{a + \sqrt{a}}{a + 3\sqrt{a} + 2} \right) \cdot \frac{4 - a}{\sqrt{a}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các số thực dương a sao cho P đạt giá trị lớn nhất

Câu 68. (Chuyên Nguyễn Trãi 2018)

Cho $x = a + 1 - \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$, ($a > 0$); $P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

Rút gọn P theo a

Câu 69. (Chuyên Năng Khiếu TP. Hồ Chí Minh 2018)

Biết $0 < x \leq y$ và

$$\left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 2(x + 2y)} \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) = \frac{5}{3}. \text{ Tính } \frac{x}{y}$$

Câu 70. (Chuyên Bắc Ninh 2018)

Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}, |a| > |b| > 0$

Câu 71. (Chuyên Hải Dương 2016)

Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x}} + 2\sqrt{a}$ với $a > 0, x > 0$.

Câu 72. (Chuyên Vĩnh Long 2018)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$. Tìm giá trị của A tại $x = 14 + 6\sqrt{5}$.

b) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{12 - \sqrt{80 - 32\sqrt{3}}} - \sqrt{12 + \sqrt{80 - 32\sqrt{3}}}$.

Câu 73. (Chuyên Bắc Giang 2018)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}}$.

Câu 74. (Chuyên Quảng Nam 2018)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ab}} + 1 \right) : \left(\frac{2a\sqrt{b}+2\sqrt{ab}}{1-ab} \right)$.

với $a > 0; b > 0$ và $ab \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị lớn nhất của A khi $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Câu 75. (Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 2018)

Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{a-1} + 1 - \sqrt{a} \right) \sqrt{\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a}}$ ($a > 1$)

Câu 76. (Chuyên Điện Biên 2018)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5}$, ($x \geq 0; x \neq 25$).

a) Rút gọn P . Tìm các số thực x để $P > -2$.

b) Tìm các số tự nhiên x là số chính phương sao cho P là số nguyên.

Câu 77. (Chuyên Đà Nẵng 2018)

Cho biểu thức $A = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$

Chứng minh rằng: $A \geq \frac{3}{4}$

Câu 78. (Chuyên Đà Nẵng 2018)

Cho biểu thức: $Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : \frac{y}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$ với $x > y > 0$.

1. Rút gọn Q .
2. Xác định giá trị của Q khi $x = 3y$.

Câu 79. (HSG TP. Hải Phòng 2018)

Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A không phụ thuộc giá trị của biến.

Câu 80. (HSG Quận Hồng Bàng 2018)

Cho biểu thức $P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$.

- a) Tìm điều kiện của x, y để biểu thức P xác định và rút gọn P ;
- b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$.

Câu 81. (HSG Quận Lê Chân 2018)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ($a > b > 0$)

Chứng minh rằng khi $a - b = 1$ thì $P \geq 2\sqrt{2} + 2$.

Câu 82. (HSG Quận Ngô Quyền 2018)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy} \right)$.

- a) Rút gọn biểu thức P ;
- b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Câu 83. (HSG Quận Thủy Nguyên 2018)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$. (với $x > 0; x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P ;
- b) Với giá trị của x ta có $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Câu 84. (HSG Thanh Hóa 2017)

Cho biểu thức $P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Câu 85. (HSG Hải Dương 2017)

Cho biểu thức $A = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1}$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{4}$)

Câu 86. (HSG Hải Phòng 2017)

Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 87. (HSG Hải Dương 2016)

Cho biểu thức: $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ (với $-1 \leq x \leq 1$).

Tính giá trị của biểu thức P khi $x = -\frac{1}{2019}$

Câu 88. (HSG Thái Bình 2011)

Chứng minh rằng: $\frac{87}{89} < \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2011\sqrt{2010}} < \frac{88}{45}$

Câu 89. (HSG Chuyên Hưng Yên 2019-2020)

Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{20} - 20\sqrt{\frac{1}{5}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}(5-\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+1)(5+\sqrt{x}) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} \\ &= \frac{(5\sqrt{x}-x) - (x+6\sqrt{x}+5) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{-2x-10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$$

Vậy $0 \leq x < 25$

Câu 2.

$$\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right) = 8 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} + 2\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{9-5}$$

$$= 8 - 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + 2\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - 2 = 6 - 2\sqrt{5} + 2 + 2\sqrt{5} + 2 = 10.$$

$$\sqrt{2}(3+\sqrt{5})\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right) = 4(3+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5})\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 4(3+\sqrt{5}) - (3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)$$

$$= 12 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2 = 10 + 2\sqrt{5}.$$

$$\sqrt{2}(3-\sqrt{5})\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right) = 4(3-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 4(3-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)$$

$$= 12 - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 = 10 - 2\sqrt{5}.$$

Do đó:

$$A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right) + \sqrt{2}(3-\sqrt{5})\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}{\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)} = \frac{10 + 2\sqrt{5} + 10 - 2\sqrt{5}}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Vậy $A = 2$.

Cách khác:

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = 2 - \frac{4}{5+\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = 2 - \frac{4}{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{Do đó: } A = 4 - \left(\frac{4}{5+\sqrt{5}} + \frac{4}{5-\sqrt{5}}\right) = 4 - \frac{20-4\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}}{25-5} = 4 - \frac{40}{20} = 2.$$

Vậy $A = 2$.

Câu 3.

$$B = (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$$

$$= 91 + 52\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 48 - 8\sqrt{\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{13-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 43 + 24\sqrt{3} - 8 \left(\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} \right) \\
&= 43 + 24\sqrt{3} - 8(2\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}) \\
&= 35
\end{aligned}$$

Câu 4.

Đặt $a = \sqrt[3]{x}$; $b = \sqrt[3]{y}$ ($a, b > 0$), ta có

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt{a^3 + a^2 + a^2b} + \sqrt{b^3 + b^2 + ab^2} + \sqrt{a+b+1} \\
&= (a+b+1)\sqrt{a+b+1}
\end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{P^2} = a+b+1 = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + 1..$$

Câu 5.

Ta có $x-2 = \sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 1 + 4} = 2..$$

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5$$

$$= (x^4 - 4x^3 + x^2) + (2x^3 - 8x^2 + 2x) + (10x^2 - 40x + 10) - 5 = -5 \Rightarrow A = \frac{-5}{2}.$$

Câu 6.

$$A = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{(1-\sqrt{5})^2 - (1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{5}+5-1-2\sqrt{5}-5}{1-5}}{\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}} = 1$$

Câu 7.

a) Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

Biến đổi được

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)}$$

$$1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b) } P \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \geq 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 2 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2-\sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 2 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 1 \end{cases} \text{ (không xảy ra).}$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $1 < x \leq 4$.

Câu 8.

a)

$$A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4x+4}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$A = \frac{|\sqrt{x-1}-1| + 1 + \sqrt{x-1}}{|x-2|} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$\text{Nếu } 1 < x < 2 \text{ thì } A = \frac{2}{1-x}$$

$$\text{Nếu } x > 2 \text{ thì } A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

b) - Nếu $1 < x < 2$ thì không có giá trị nguyên.

$$\text{- Nếu } x > 2 \text{ thì } A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$+ \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad (l)$$

$$+ \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5 \quad (n)$$

Câu 9.

Điều kiện: $a > 0, a \neq 1$.

$$P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4(\sqrt{a}+1)}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Câu 10.

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{x - 1 + x - 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{2x - 10}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Câu 11.

$$P = \frac{a-4}{\sqrt{a}+2} : \frac{a-4\sqrt{a}+4}{2\sqrt{a}-4} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}+2} : \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{2(\sqrt{a}-2)} = (\sqrt{a}-2) : \frac{\sqrt{a}-2}{2} = (\sqrt{a}-2) \cdot \frac{2}{\sqrt{a}-2} = 2$$

Câu 12.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}+\sqrt{5}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Câu 13.

a). Điều kiện: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \neq y$; $x \neq 1$

$$M = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 3x + x + \sqrt{xy} + y}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} \cdot \frac{2(x + \sqrt{xy} + y)}{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})};$$

$$M = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)} \cdot \frac{2(x + \sqrt{xy} + y)}{(x-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$M = \frac{2}{x-1}$$

b). Để M có giá trị nguyên khi $x-1$ là ước của 2.

Các ước nguyên của 2 là $\pm 1; \pm 2$.

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vì $x \geq 0$; $x \neq 1$ nên có $x = 0$; $x = 2$; $x = 3$ thỏa mãn bài ra.

Câu 14.

1. Rút gọn biểu thức A .

$$A = \frac{x+24}{x-\sqrt{x}-2} : \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right]$$

$$A = \frac{x+24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \left[\frac{(x-9) - (x-4) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right]$$

$$A = \frac{x+24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \left[\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right]$$

$$A = \frac{x+24}{\sqrt{x}+1}$$

2) Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

$$M = \frac{x+24}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1+25}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{25}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{25}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta có $\sqrt{x}+1 + \frac{25}{\sqrt{x}+1} \geq 10$

Do đó $M \geq 8$.

Đẳng thức xảy ra khi $(\sqrt{x}+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=5 \Leftrightarrow x=16$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 8, đạt được khi $x = 16$.

Câu 15.

$$1. A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12}$$

$$= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= 0$$

$$2. B = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2a}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{1}{a-1} \text{ với } a > 0, a \neq 1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right) \cdot (a-1)$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot (a-1)$$

$$= 3a + 1$$

Câu 16.

$$1..ĐK: \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$2.. B = 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$3..ĐK: \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}; C = \sqrt{a} + 1 - 1 = \sqrt{a}$$

Câu 17.

1).Điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$

$$A = \frac{3(a+\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+2} - 1$$

$$A = \frac{3(a+\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2) + \sqrt{a}-1 - (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

$$2). |A| = \frac{\sqrt{a}+1}{|\sqrt{a}-1|} \text{ để } |A| = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{|\sqrt{a}-1|} = 2$$

Học sinh giải phương trình và tìm ra giá trị của $\begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{1}{9} \end{cases}$

Câu 18.

$$A = (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3) + 6 = 5 - 9 + 6 = 2$$

Câu 19.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } P &= \frac{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + 3} \div \frac{a^3 + 1}{a^3 - 1} - \frac{2a}{a-1} = \frac{\frac{(a+1)^2 + 3(a-1)^2}{(a-1)^2}}{\frac{(a-1)^2 + 3(a+1)^2}{(a+1)^2}} \div \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{(a-1)(a^2 + a + 1)} - \frac{2a}{a-1} \\ &= \frac{4(a^2 - a + 1)}{4(a^2 + a + 1)} \cdot \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} \cdot \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} - \frac{2a}{a-1} = \frac{a+1}{a-1} - \frac{2a}{a-1} = \frac{1-a}{a-1} = -1. \end{aligned}$$

Vậy $P = -1$.

b) Đặt $s = \sqrt[3]{x^2}$ và $t = \sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3 + s^2t} + \sqrt{t^3 + t^2s} = a$.

Do $s, t \geq 0$ nên $\sqrt{s^3 + s^2t} = s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3 + t^2s} = t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t} = a$ hay $(s+t)^3 = a^3$.

Suy ra $s+t = \sqrt[3]{a^3}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 20.

$$\text{a) } P = 1 + \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P = 1 + \left(-\sqrt{x} + \frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} \right)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1) + x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(1-\sqrt{x})x + 1 - x + x\sqrt{x} + x}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{x+1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x - 4\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy để $P = \frac{4}{5}$ thì $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$

Câu 21.

$$P = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} : \frac{\sqrt{x} + 3}{x - \sqrt{x} + 1}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 3}.$$

$$P \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4..$$

Vậy $0 \leq x \leq 4$ thỏa mãn bài toán..

Câu 22.

$$\text{a) Ta có } A = \sqrt{2x + 15 - 8\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2x - 1 - 2.4.\sqrt{2x - 1} + 16}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2x - 1} - 4)^2} = |\sqrt{2x - 1} - 4|.$$

Biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{b) } A = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{2x - 1} - 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} - 4 = 3 \\ \sqrt{2x - 1} - 4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 1} = 7 \\ \sqrt{2x - 1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Câu 23.

$$\text{Ta có } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\text{Khi đó } A = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 + 2020$$

$$= (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2020 = 2020.$$

Câu 24.

$$\text{a) Điều kiện của } x \text{ để biểu thức } \frac{x+1}{x-3} \text{ có nghĩa là } x-3 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \neq 3.$$

b). Chứng minh đẳng thức $\left(1 - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a \quad (a \geq 0, a \neq 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(1 - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) &= \left(1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right) \\ &= (1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a}) \\ &= 1 - a. \end{aligned}$$

Câu 25.

1) Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)}{8} \\ &= \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot (3\sqrt{5} + 5 - 3 - \sqrt{5})}{8} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \cdot (2\sqrt{5} + 2)}{8} \\ &= \frac{(\sqrt{5} - 1) \cdot 2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{8} \\ &= \frac{2 \cdot (5 - 1)}{8} = 1 \end{aligned}$$

2) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ tại $x = 2020 - 2\sqrt{2019}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x = 2020 - 2\sqrt{2019} &= 2019 - 2\sqrt{2019} + 1 = (\sqrt{2019} - 1)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{2019} - 1 \end{aligned}$$

$$Q = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2}$$

$$Q = 2\sqrt{x} + 1$$

$$\Rightarrow Q = 2(\sqrt{2019} - 1) + 1 = 2\sqrt{2019} - 1$$

Câu 26.

a). $\sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$

b). $\sqrt{5} + \sqrt{(6 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} + |6 - \sqrt{5}|$
 $= \sqrt{5} + 6 - \sqrt{5} = 6$

Câu 27.

a). $H = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2x(x+1)}{(x-1)(1+x)} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$
 $= \frac{2x + \sqrt{x} - 1 - (\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1}$
 $= \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$

b). Ta có $\sqrt{x} - H < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$

Mà $x \geq 0; x \neq 1$, suy ra: $0 \leq x < 4; x \neq 1$

Vậy: Với $0 \leq x < 4; x \neq 1$ thì $\sqrt{x} + H < 0$

Câu 28.

Tính được $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 1$

và $\sqrt{19 + 6\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 1$

Đưa được về dạng $T = \left[(2\sqrt{3})^2 - 1^2 \right] \left[(3\sqrt{2})^2 - 1^2 \right]$

Tính đúng kết quả $T = 187$

Câu 29.

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 3 \neq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9. \end{cases}$

Câu 30.

1). Với $a > 0, a \neq 1$ ta có $\frac{a^2 + a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} = a\sqrt{a}$.

$$\text{Và } \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}.$$

$$= \frac{4a\sqrt{a}}{a-1}.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{4a\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{4}{a-1}.$$

2). Với a nguyên thì P nhận giá trị là số nguyên khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a-1 = -4 \\ a-1 = -2 \\ a-1 = -1 \\ a-1 = 1 \\ a-1 = 2 \\ a-1 = 4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -1 \\ a = 0 \\ a = 2 \\ a = 3 \\ a = 5 \end{cases} \text{ Đối chiếu với điều kiện ta có } a = 2, a = 3, a = 5 \text{ (thỏa mãn)..}$$

Câu 31.

$$\begin{aligned} + \text{ Có } x^2 &= \left(\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \right)^2 = 6 + 2\sqrt{3^2 - (5+2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2(\sqrt{3}-1) = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2. \end{aligned}$$

$$+ \text{ Do } x > 0 \text{ nên } x = \sqrt{3}+1.$$

$$+ \text{ Suy ra } (x-1)^2 = 3 \text{ hay } x^2 - 2x = 2, \text{ do đó } P = -2.$$

Câu 32.

$$\text{Biểu thức xác định khi } \begin{cases} x-3 > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 9. \end{cases}$$

Câu 33.

1). Với $a > 0, a \neq 1$ ta có $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$.

$$= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - a + 2\sqrt{a} - 1 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1}.$$

$$= \frac{4a\sqrt{a}}{a-1}.$$

Do đó $P = \frac{4a\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{4}{a-1}$.

2). Ta có $a = \sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} = 2\sqrt{2}+1$.

Do đó $P = \sqrt{2}$.

Câu 34.

$$B = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) + (2\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-9+2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}.$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$$

Với $x > 0$ ta có: $\frac{A}{B} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} > \frac{5}{3}.$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+9 > 5\sqrt{x} \text{ (vì } 3\sqrt{x} > 0 \text{ } \forall x > 0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{81}{4}.$$

Câu 35.

Ta có: $C = \frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{33+\sqrt{128}}}-1}}{3-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6\sqrt{7-\sqrt{(4\sqrt{2}+1)^2}-1}}}{3-\sqrt{2}}.$

$$= \frac{5\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}-1}}{3-\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{5\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{5(3-\sqrt{2})}{3-\sqrt{2}} = 5.$$

Câu 36.

a) Rút gọn biểu thức A.

Điều kiện: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} &= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-9 - (x-4) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

$$\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 = \frac{x-2 - (x-\sqrt{x}-2)}{x-\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

b) Tìm x để $P = 2A - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)^2 + 3 \leq 3. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\max P = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 37.

Điều kiện: $a > 0$ và $a \neq 1$. Ta có:

$$(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 = (a+1+2\sqrt{a}) - (a+1-2\sqrt{a}) = 4\sqrt{a}$$

và

$$(\sqrt{2a+1} + \sqrt{a+1})(\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}) = (2a+1) - (a+1) = a.$$

Do đó, phương trình đã cho có thể được viết lại thành $\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} = 1$.

Phương trình này tương đương với $\frac{(\sqrt{a}+1) - (\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = 1$ hay $\frac{2}{a-1} = 1$.

Như thế, ta có $a-1=2$ hay $a=3$ (thỏa mãn).

Vậy có duy nhất một giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề bài là $a=3$.

Câu 38.

Với $x \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2 - x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(x\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3} \\ &= (x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \\ &= (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} \\ &= (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1) \\ &= x - 3\sqrt{x} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A=6 &\Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 6 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-4=0 \quad (\text{vì } \sqrt{x}+1 > 0 \quad \forall x \geq 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x=16 \quad (\text{TMDK})$$

Vậy với $x=16$ thì $A=6$.

Câu 39.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{6} \Rightarrow P \geq 2 + 2\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$ (tmdk)

Câu 40.

$$\begin{aligned}
\text{a). } A &= \frac{-4x-9\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{(1-5\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.
\end{aligned}$$

$$\text{b). } A = \frac{1-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = -5 + \frac{6}{\sqrt{x}+1}. \text{ Với mọi } x \geq 0 \text{ ta có: } \sqrt{x}+1 \geq 1 \text{ nên } \frac{6}{\sqrt{x}+1} \leq 6$$

Do đó $A = -5 + \frac{6}{\sqrt{x}+1} \leq 1$. Giá trị lớn nhất của A là 1 đạt được khi $x = 0$.

Câu 41.

$$\text{a) } A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \text{ Với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3} = 1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{21+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5}+1)^2} = 2\sqrt{5}+1$$

$$\text{Nên } x = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{5}+4} = \frac{2}{2\sqrt{5}+4} = \sqrt{5}-2$$

$$\text{Vậy } B = (x^2 + 4x - 2)^{2019} = (-1)^{2019} = -1$$

Câu 42.

1. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y) - xy}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \\ &= \frac{2\sqrt{xy} + y + x}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y - \sqrt{xy})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y - \sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \text{ với } x > 0; y > 0.$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}} = 2\sqrt{\sqrt{16}} = 4$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{\sqrt{16}} = 1$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 4$

Vậy $\min P = 1$ tại $x = y = 4$.

Câu 43.

Ta có:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} \\
\Rightarrow x^3 &= 140 + 3\sqrt[3]{(70 + \sqrt{4901})(70 - \sqrt{4901})} \left(\sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} \right) \\
&\Leftrightarrow x^3 = 140 - 3x \\
&\Leftrightarrow x^3 + 3x - 140 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 5)(x^2 + 5x + 28) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 5 \quad \left(\text{do } x^2 + 5x + 28 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{87}{4} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \right)
\end{aligned}$$

Vì vậy x là số nguyên tố..

Câu 44.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } A > 0 &\Rightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})} \\
A^2 &= 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\
A^2 &= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2 \\
\Rightarrow A &= \sqrt{5} + 1..
\end{aligned}$$

Câu 45.

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}} - 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}} \\
\Rightarrow (x + 1)^3 &= 4 - 6(x + 1) \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 9x = -3 \\
P &= x^3(x^2 + 3x + 9)^3 = (x^3 + 3x^2 + 9x)^3 \\
P &= -27
\end{aligned}$$

Câu 46.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } S &= \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019^2 - 2} + \sqrt{2019^2}} \\
\Rightarrow S &= \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - 3} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{5 - 7} + \dots + \frac{\sqrt{2019^2 - 2} - \sqrt{2019^2}}{2019^2 - 2 - 2019^2} \\
\Rightarrow S &= \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \dots + \sqrt{2019^2 - 2} - \sqrt{2019^2}}{-2} \\
\Rightarrow S &= \frac{1 - \sqrt{2019^2}}{-2} = \frac{1 - 2019}{-2} = 1009
\end{aligned}$$

Vậy $S = 1009$

Câu 47.

Rút gọn biểu thức $T = \frac{(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2})(a-1)}{a - \sqrt{a} - 2}$ với $a > 0, a \neq 4$.

$$(\sqrt{2a} - 2\sqrt{2})(a-1) = \sqrt{2}(\sqrt{a} - 2)(a-1)$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$$

$$a - \sqrt{a} - 2 = (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 2)$$

$$\text{Vậy } T = \sqrt{2}(\sqrt{a} - 1).$$

Câu 48.

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy giá trị cần tìm là $x = 4$.

b)

$$\sqrt[3]{46\sqrt{5}-61} = \sqrt[3]{(2\sqrt{5})^3 - 3(2\sqrt{5})^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1^2 - 1^3} = \sqrt[3]{(2\sqrt{5}-1)^3} = 2\sqrt{5}-1.$$

$$\sqrt{69-28\sqrt{5}} = \sqrt{49-2 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{(7-2\sqrt{5})^2} = 7-2\sqrt{5}.$$

$$A = \sqrt[3]{46\sqrt{5}-61} + \sqrt{69-28\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}-1 + 7-2\sqrt{5} = 6.$$

Câu 49.

$$A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(1+\sqrt{3})^2 - 4}{2(1+\sqrt{3})} \right)^2 - \left(\frac{(1-\sqrt{3})^2 - 4}{2(1-\sqrt{3})} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} \right)^2 - \left(\frac{-2\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} \right)^2 \\
&= \frac{3}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{3}{(1-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4+2\sqrt{3}} - \frac{3}{4-2\sqrt{3}} \\
&= \frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12} = -\frac{12\sqrt{3}}{4} = -3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vậy $A = -3\sqrt{3}$.

Cách khác:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \right) &= \frac{(1+\sqrt{3})^2 - 4}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\
\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} \right) &= \frac{(1-\sqrt{3})^2 - 4}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \\
\blacklozenge A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{3}{(1+\sqrt{3})^2} - \frac{3}{(1-\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{3}{4+2\sqrt{3}} - \frac{3}{4-2\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}}{16-12} = -\frac{12\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Vậy $A = -3\sqrt{3}$.

Câu 50.

$$\begin{aligned}
A &= (3\sqrt{5} - \sqrt{27} - \sqrt{20})\sqrt{5} + 3\sqrt{15} \\
&= (3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})\sqrt{5} + 3\sqrt{15} \\
&= (\sqrt{5} - 3\sqrt{3})\sqrt{5} + 3\sqrt{15} \\
&= 5 - 3\sqrt{15} + 3\sqrt{15} = 5.
\end{aligned}$$

Câu 51.

a) Rút gọn biểu thức A .

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Ta có:

$$A = \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 4\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x} - 3) + 8(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(x + 8)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Ta có :

$$x = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

$$A = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 8}{\sqrt{3} - 1 + 1} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 2$$

Câu 52.

a) Ta có:

$$\frac{x - 2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 3$$

$$\frac{x\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 2} = x - 2\sqrt{x} + 4$$

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{-4\sqrt{x}}{x - 1}$$

$$P = x - 5\sqrt{x} + 1$$

b) Tìm tất cả số nguyên tố x để $P \leq 1$

$$P \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 5$$

$$x = 2, x = 3, x = 5, x = 7, x = 11, x = 13, x = 17, x = 19, x = 23.$$

Câu 53

a). $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$

$$\frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2x - 2}{\sqrt{x} + 1} = (2\sqrt{x} - 1) - 2(\sqrt{x} - 1)$$

$$\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2x - 2}{\sqrt{x} + 1} = x + \sqrt{x} + 1$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$\text{b). } P \leq 3 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 \leq 3(x - \sqrt{x} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0.$$

Câu 54.

$$A = 2(\sqrt{x} - 1) + x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x}$$

$$= x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$$

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Đối chiếu điều kiện giá trị cần tìm $0 \leq x < 1$.

Câu 55.

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có

$$P = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$P = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 56.

Điều kiện: $x > 0$.

$$\begin{aligned} A &= \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \\ &= \left(\frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) - (x - \sqrt{x} + 1)}{(x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) \\ &= \left(\frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} \right) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Ta có $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

Suy ra A nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}$ là ước nguyên của 2.

Hay $\sqrt{x} \in \{-1; 1; -2; 2\}$.

Ta có: $\sqrt{x} = -1$ (Vô nghiệm).

$\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

$\sqrt{x} = -2$ (Vô nghiệm).

Vậy để A nguyên thì $x \in \{1; 4\}$.

Câu 57.

Đặt $s = \sqrt[3]{x^2}$ và $t = \sqrt[3]{y^2}$ thì đẳng thức đề bài có thể viết lại thành $\sqrt{s^3+s^2t} + \sqrt{t^3+t^2s} = a$.

Do $s, t \geq 0$ nên $\sqrt{s^3+s^2t} = s\sqrt{s+t}$, $\sqrt{t^3+t^2s} = t\sqrt{s+t}$.

Từ đó ta có $(s+t)\sqrt{s+t} = a$ hay $(s+t)^3 = a^2$.

Suy ra $s+t = \sqrt[3]{a^2}$. Đây là kết quả cần chứng minh.

Câu 58. a) Điều kiện: $x \neq -y; x \neq -1; y \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^3+x^2-y^2+y^3-x^3y^2-x^2y^3}{(x+y)(1-y)(1+x)} = \frac{x^2-xy+y^2+x-y-x^2y^2}{(1-y)(1+x)} \\ &= \frac{x^2+x^2y+x-y}{1+x} \\ &= x+xy-y. \end{aligned}$$

b) Đặt $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{2}{n(n+1)}} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Áp dụng đẳng thức trên ta được $S = \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)$

$$= 2018 - \frac{1}{2018} < 2018. \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Câu 59.

Từ giả thiết đã cho ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow xz + yz = xy \Leftrightarrow 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz} = \sqrt{(x + y - z)^2} = |x + y - z|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ là một số hữu tỉ}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 60.

a) Rút gọn T:

Với $a \neq b, a > 0, b > 0$, ta có:

$$T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a^3}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}-\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}, \text{ với } a \neq b, a > 0, b > 0.$$

b) Chứng tỏ $T > 1$

$$\text{Ta có: } T = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}, \text{ với } a \neq b, a > 0, b > 0. \text{ (kết quả câu 1.a)}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} + 1 > 1 \text{ (vì } \sqrt{ab} > 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0 \text{ với)}$$

$$a \neq b, a > 0, b > 0)$$

$$\text{Vậy } T > 1$$

Câu 61.

Ta có ngay:

$$\begin{aligned} A &= 4\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{405} \\ &= 8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$B = \sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1} + \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}$$

$$= |2\sqrt{2}-1| + |2\sqrt{2}+1| = 2\sqrt{2}-1 + 2\sqrt{2}+1 = 4\sqrt{2} \quad (\text{do } 2\sqrt{2}-1 > 0)$$

Câu 62. Ta có: $1+2=3=\frac{2.3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2}=\frac{2}{2.3}$

$$1+2+3=6=\frac{3.4}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2+3}=\frac{2}{3.4}$$

.....

$$1+2+3+\dots+2018=\frac{2018.2019}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+2+3+\dots+2018}=\frac{2}{2018.2019}$$

$$P=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\dots\left(1-\frac{2}{2018.2019}\right)$$

$$=\frac{2.3-2}{2.3} \cdot \frac{3.4-2}{3.4} \dots \frac{2018.2019-2}{2018.2019}$$

$$=\frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \dots \frac{4074340}{2018.2019}$$

$$=\frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{2016.2019}{2017.2018} \cdot \frac{2017.2020}{2018.2019}$$

$$=\frac{(1.2 \dots 2017) \cdot (4.5 \dots 2020)}{(2.3 \dots 2018) \cdot (3.4.5 \dots 2019)} = \frac{1.2020}{2018.3} = \frac{2020}{6054} = \frac{1010}{3027}$$

Câu 63.

a) Điều kiện $x > 0; x \neq 1$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{-1}{-x^2+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} \cdot (x^2-\sqrt{x})$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x} \cdot (x+\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = x-1$$

b) Ta có: $T = B - 2A^2$

$$= x^4 - 5x^2 - 8x + 2025 - 2(x-1)^2$$

$$= x^4 - 5x^2 - 8x + 2025 - 2x^2 + 4x - 2$$

$$= x^4 - 7x^2 - 4x + 2023$$

$$= x^4 - 8x^2 + 16 + x^2 - 4x + 4 + 2003$$

$$= (x^2-4)^2 + (x-2)^2 + 2003$$

$$\text{Vì } (x^2-4)^2 \geq 0, (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow T \geq 2003$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Vậy với } T_{\min} = 2003 \Leftrightarrow x = 2$$

Câu 64.

a) Rút gọn biểu thức $P: \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b)}$

Điều kiện : $a > 0, b > 0$

$$P = \frac{\sqrt{ab} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{1 + \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 + \sqrt{ab})}{1 + \sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow P: \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b)} = P \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b)$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a+b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

b) Ta có:

$$\begin{cases} a = 2019 + 2\sqrt{2018} \\ b = 2020 + 2\sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2018} + 1)^2 \\ b = (\sqrt{2019} + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{2018} + 1 \\ \sqrt{b} = \sqrt{2019} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2018} + 1 - (\sqrt{2019} + 1) = \sqrt{2018} - \sqrt{2019}$$

Câu 65. 1) Điều kiện $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{a^2 - 2a + 1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a}(\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a})} \right) \left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2} - \frac{1}{a}} \right) \sqrt{a^2 - 2a + 1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \right) \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{|a|} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{(a-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1}{a} \right) |a-1| \quad (do \quad a > 0) \\ &= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} (1-a) \quad (do \quad 0 < a < 1) \\ &= \frac{(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})}{(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} (1-a) \\ &= \frac{1+a-1-a}{1+a+1-a-2\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \cdot (1-a) \\ &= \frac{2a}{2-2\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} (1-a) \end{aligned}$$

$$= -(1-a) = a-1$$

2) Điều kiện $0 < a < 1$

$$\text{Ta có: } Q^3 = (a-1)^3$$

Xét hiệu :

$$\begin{aligned} Q^3 - Q &= (a-1)^3 - (a-1) \\ &= (a-1) \left[(a-1)^2 - 1 \right] = (a-1)(a-1-1)(a-1+1) = a(a-1)(a-2) \end{aligned}$$

Mà

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a-1 < 0 \Rightarrow a(a-1)(a-2) > 0 \\ a-2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q^3 - Q > 0 \Leftrightarrow Q^3 > Q$$

Vậy $Q^3 > Q$

Câu 66.

$$\begin{aligned} A &= (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} \\ &= \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{16 - 15} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot 1 \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

Câu 67.

a) Điều kiện $a > 0$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a}{\sqrt{a}+2} + \frac{a+\sqrt{a}}{a+3\sqrt{a}+2} \right) \cdot \frac{4-a}{\sqrt{a}} \\ &= \left[\frac{a}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)} \right] \cdot \frac{4-a}{\sqrt{a}} \\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} \right) \cdot \frac{4-a}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}+2} \cdot \frac{(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+1)(2-\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \\ &= (\sqrt{a}+1)(2-\sqrt{a}) = -a + \sqrt{a} + 2 \end{aligned}$$

b) Điều kiện $a > 0$. Ta có:

$$P = -a + \sqrt{a} + 2 = -\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}P = \frac{9}{4} \text{ khi } a = \frac{1}{4}$$

Câu 68.

Điều kiện $a > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} x &= a+1 - \sqrt{1+a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}} \\ &= a+1 - \sqrt{\frac{a^2+2a+1+a^4+2a^3+2a^2}{(a+1)^2}} \\ &= a+1 - \sqrt{\frac{a^4+2a^3+a^2+2a+1+2a^2}{(a+1)^2}} \\ &= a+1 - \sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{(a+1)^2}} \\ &= a+1 - \left| \frac{a^2+a+1}{a+1} \right| = a+1 - \frac{a^2+a+1}{a+1} \left(\text{do } \frac{a^2+a+1}{a+1} > 0 \right) \\ &= \frac{a^2+2a+1-a^2-a-1}{a+1} = \frac{a}{a+1} < 1 \forall a > 0 \\ \Rightarrow 0 < x < 1 \quad \forall a > 0 \\ \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2\sqrt{x}+1} + 1}{\sqrt{x^2-2x+1}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + 1}{\sqrt{(x-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x}-1| + 1}{|x-1|} = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{1-x} = \frac{2}{1-\frac{a}{a+1}} = \frac{2(a+1)}{a+1-a} = 2a+2 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2a+2$

Câu 69.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 2(x+2y)} \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{x}{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) = \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{x+y+2\sqrt{xy}+x+y-2\sqrt{xy}}{x-y+2x+4y} + \frac{y\sqrt{y}+x\sqrt{x}}{\sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{2(x+y)}{3(x+y)} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y-\sqrt{xy})}{\sqrt{xy} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{x+y-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} = \sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$$

Vậy $\frac{x}{y} = 1$

Câu 70. $P = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}, \quad |a| > |b| > 0$

$$= \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 + b^2})^2}{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(a - \sqrt{a^2 + b^2})} \cdot \frac{b^2}{4\sqrt{a^2(a^2 - b^2)}}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 + b^2 + 2a\sqrt{a^2 + b^2} - (a^2 + a^2 + b^2 - 2a\sqrt{a^2 + b^2})}{a^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \frac{b^2}{4|a|\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{4a\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4|a|\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{|a|\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} & \text{khi } a > 0 \\ -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

Câu 71.

$$A = \sqrt{\frac{a + x^2 - 2x\sqrt{a}}{x}} + \sqrt{\frac{a + x^2 + 2x\sqrt{a}}{x}} = \sqrt{\frac{(x - \sqrt{a})^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x + \sqrt{a})^2}{x}}$$

$$= \frac{|x - \sqrt{a}| + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

+) Với $x \geq \sqrt{a}$ thì $|x - \sqrt{a}| = x - \sqrt{a}$ nên $A = \frac{x - \sqrt{a} + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$

+) Với $0 < x < \sqrt{a}$ thì $|x - \sqrt{a}| = -(x - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - x$

nên $A = \frac{\sqrt{a} - x + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$

Câu 72.

a) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} \right] \sqrt{x}.$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}.$$

Ta có $x = 14 + 6\sqrt{5} = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 5 = (3 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} = |3 + \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5}.$

Khi đó, ta có: $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5} + 2 \cdot (3 + \sqrt{5}) + 4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{24 + 8\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{8}.$

b) Ta có $A^2 = 24 - 8\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = (2\sqrt{3} - 2)^2$

$$\Rightarrow A = \pm(2\sqrt{3} - 2)$$

Do $A < 0$ nên $A = 2 - 2\sqrt{3}.$

Câu 73.

a) + Biến đổi $\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

+ Biến đổi $\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

+ Ta có $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1} : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$

+ Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, với điều kiện $x > 0, x \neq 1.$

b) Ta có:

$$A \geq \frac{1+\sqrt{2018}}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2018}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2018}}$$

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{2018} \Rightarrow 0 < x \leq 2018$$

Vì $x > 0, x \neq 1$ và x nguyên nên $x \in \{2; 3; 4; \dots; 2018\}$. Suy ra có 2017 giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán.

Câu 74. Ta có:

$$A = \frac{2+2\sqrt{a}}{1-ab} : \frac{2a\sqrt{b}+2\sqrt{ab}}{1-ab}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{a})}{2\sqrt{ab}(1+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{Khi } a > 0; b > 0, \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow b = 4; a = 4. \text{ Vậy giá}$$

trị lớn nhất của A là $\frac{1}{4}$ khi $a = b = 4$

Câu 75.

Ta có:

$$P = \left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{a-1} + 1 - \sqrt{a} \right) \sqrt{\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a}} \quad (a > 1)$$

$$P = \left(\frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} + 1 - \sqrt{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a}}$$

$$P = \left(\frac{1-\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-1} + 1 - \sqrt{a} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \quad (\text{Do } a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1 \Rightarrow \sqrt{a}-1 > 0)$$

$$P = \frac{1-\sqrt{a}+a+\sqrt{a}-1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$P = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = 1$$

Câu 76.

$$\text{a) } P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{3x+4\sqrt{x}-5}{x-4\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{3x+4\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5) + (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1) - (3x+4\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}$$

$$= \frac{-x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)}$$

$$= -\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)} = -\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$$

$$\text{Ta có } P > -2 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} > -2 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 5 \\ \sqrt{x} > 12 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25.$$

$$+ \text{ Với } \sqrt{x} > 12 \Leftrightarrow x > 144.$$

Câu 77.

Điều kiện : $x > 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= 2(\sqrt{x}-1) + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x}-1 \\ &= 1 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \\ \text{Vậy } A &\geq \frac{3}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \quad (\text{tm}) \end{aligned}$$

Câu 78.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } Q &= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) : \frac{y}{x-\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{x^2-x^2+y^2}{y\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{x-y})^2}{\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}} = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} \\ \text{Vậy } Q &= \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} \text{ với } x > y > 0. \end{aligned}$$

b) Ta có:

Thay $x = 3y$ (thỏa mãn ĐK) vào biểu thức Q , ta được:

$$Q = \frac{\sqrt{3y-y}}{\sqrt{3y+y}} = \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{4y}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ khi } x = 3y.$$

Câu 79.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y} \text{ với } x, y \geq 0 \text{ và } x \neq y \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y} + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
&= \frac{3\sqrt{x}(x - \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\
&= \frac{3\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của biến với $x, y \geq 0$ và $x \neq y$.

Câu 80.

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0, y \neq 1, x + y \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x(\sqrt{x} + 1) - y(1 - \sqrt{y}) - xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + x - \sqrt{xy} + y - xy)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}.
\end{aligned}$$

$$b) \quad P = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{y}) - (\sqrt{y} + 1) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{y}) = 1$$

$$\text{Ta có: } 1 + \sqrt{y} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Thay vào phương trình trên $P = 2$

$$\text{Ta được } (x; y) \in \{(4; 0); (2; 2)\}$$

Câu 81.

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a > b > 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\
&= \frac{(a-b) \cdot (\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}) + (a-b) \cdot (\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\
&= \frac{2(a-b) \cdot \sqrt{a+b}}{2b\sqrt{a-b}} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b}} = \frac{a^2+b^2}{b}
\end{aligned}$$

Vì $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1$ khi đó theo BĐT AM - GM:

$$P = \frac{a^2+b^2}{b} = \frac{(b+1)^2+b^2}{b} = \frac{2b^2+2b+1}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

Câu 82.

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0, xy \neq 1$.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy}) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})(1-\sqrt{xy})}{1-xy} : \left(\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}+x\sqrt{y}+\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-x\sqrt{y}-\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy} \cdot \frac{1-xy}{1+x+y+xy} \\
&= \frac{2(\sqrt{x}+y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}
\end{aligned}$$

$$b) \text{ Với } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2.$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{5-2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+2}{13}.$$

Câu 83.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
 &= \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \\
 &= \frac{x+3\sqrt{x}+2-x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; x \neq 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=9 \quad (\text{tm})$$

$$\text{Vậy } x=9 \text{ thì } \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$$

Câu 84.

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.
 \end{aligned}$$

Ta có với điều kiện $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 > \sqrt{x}+1 > 1$

$$\Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$$

Do P nguyên nên suy ra $P=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 85.

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = 2x.$$

$$\text{Do đó } B = 1 - \sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1} = 1 - |2\sqrt{x} - 1| = 1 - (1 - 2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}.$$

Câu 86.

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= 3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + 2\sqrt{9 - (5 + 2\sqrt{3})} \\ &= 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= 6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 6 + 2(\sqrt{3} - 1)4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a > 0 \text{ nên } a = \sqrt{3} + 1. \text{ Do đó } (a - 1)^2 = 3 \text{ hay } a^2 - 2a - 2 = 0.$$

Câu 87.

$$P = \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\Rightarrow P^2 = (1-x) \left(2 + 2\sqrt{1-(1-x^2)} \right) = 2(1-x)(1+|x|)$$

$$\text{Mà } P = \sqrt{1-x} + (1-x)\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x} - (1-x)\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow P = \sqrt{2}(1-x)$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2019} \Rightarrow P = \frac{2019}{2018} \sqrt{2}.$$

Câu 88.

Với n là số nguyên dương ta có:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)n} = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } A &= \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2011\sqrt{2010}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} > 1 - \frac{2}{89} = \frac{87}{89}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow A < 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2010}} - \frac{2}{\sqrt{2011}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2011}} \right) < 2 \left(1 - \frac{1}{45} \right) = \frac{88}{45}$$

Câu 89.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{20} - 20 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = 2|2-\sqrt{5}| + 2\sqrt{5} - 20 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= 2(\sqrt{5}-2) + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 4 + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -4 \end{aligned}$$