

CHUYÊN ĐỀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai ta thường thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của biểu thức (nếu đề chưa cho điều kiện). Chú ý điều kiện căn thức, điều kiện mẫu, và điều kiện phân chia.
- Bước 2: Phân tích mẫu thành nhân tử, kết hợp phân tích tử bằng các phép biến đổi đơn giản.
- Bước 3: Bỏ ngoặc, thu gọn các biểu thức một cách hợp lý. Kết hợp điều kiện bài toán để kết luận.

Ví dụ minh họa 1: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} \quad (x \geq 0, x \neq 4)$

b) $B = (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$

Lời giải

a) Với $(x \geq 0, x \neq 4)$ ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}-10}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} = 2$$

b) $B = (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}}$

$$= (2\sqrt{3}-1)^2 (2+\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{20+2\sqrt{(4+3\sqrt{3})^2}}$$

$$= (3\sqrt{3}+4)^2 - 8\sqrt{20+2(4+3\sqrt{3})} = (3\sqrt{3}+4)^2 - 8\sqrt{28+6\sqrt{3}}$$

$$= (3\sqrt{3}+4)^2 - 8\sqrt{(3\sqrt{3}+1)^2} = 43+24\sqrt{3} - 8(3\sqrt{3}+1) = 35$$

Ví dụ minh họa 2: Cho biểu thức $P = \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} + 1 \right) : \left(\frac{a+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - 1 \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P .

b) Tìm a để $P = 5$.

c) Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$

d) Tìm a để P là một số nguyên.

e) Tìm a để $P < 1$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Rút gọn: $P = \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right) : \left(\frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - 1 \right)$

$$= \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right] : \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} + 2} - 1 \right] = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$$

b) Với $\begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$P = 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 = 5(\sqrt{a} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + 1 = 5\sqrt{a} - 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{a} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{9}{4} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy với $a = \frac{9}{4}$ thì $P = 5$.

c) Khi $a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$, thay vào biểu thức P đã được rút gọn, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + 1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - 1}$$
$$= \frac{|\sqrt{2} + 1| + 1}{|\sqrt{2} + 1| - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

d) Ta có: $P = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a} - 1 + 2}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{2}{\sqrt{a} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}$

Để P là một số nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{a} - 1}$ phải là một số nguyên, suy ra $\sqrt{a} - 1$ phải là ước nguyên của 2.

Do đó: $\begin{cases} \sqrt{a} - 1 = 2 \\ \sqrt{a} - 1 = 1 \\ \sqrt{a} - 1 = -1 \\ \sqrt{a} - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 3 \\ \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = 0 \\ \sqrt{a} = -1 \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 4 \\ a = 0 \end{cases}$

Vậy với $a = \{0; 4; 9\}$ thì P đạt giá trị nguyên.

$$\begin{aligned}
 \text{e) Để } P < 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 1 < 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1-(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a}-1} < 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{a}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1 \\
 &\Leftrightarrow a < 1. \text{ Kết hợp điều kiện suy ra: } 0 \leq a < 1 \\
 \text{Vậy với } 0 \leq a < 1 &\text{ thì } P < 1.
 \end{aligned}$$

Ví dụ minh họa 3:

Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M .
- b) Tính giá trị của M , biết rằng $x = (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3-\sqrt{8}$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}} \\
 &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{xy}+1)}{1+\sqrt{xy}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}
 \end{aligned}$$

b) Với $x = (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3-\sqrt{8} = 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$

$$M = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{3}-1-(\sqrt{2}-1) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

B. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

I. CÁC DẠNG TOÁN

Bài toán rút gọn tổng hợp thường có các bài toán phụ: tính giá trị biểu thức khi cho giá trị của ẩn; tìm điều kiện của biến để biểu thức lớn hơn (nhỏ hơn) một số nào đó; tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên; tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, ... Do vậy, ta phải áp dụng các phương pháp tương ứng, thích hợp cho từng dạng toán. (Vd 2).

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2$ (với $a \geq 0; a \neq 1$)

Bài 2: Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} \right)$ với $a \geq 0; a \neq 1$

3. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com

Bài 3: Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$ với $x > 0; x \neq 2$

Bài 5: Rút gọn biểu thức: $Q = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0; a \neq 4$

Bài 6: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Bài 7: Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

Bài 8: Rút gọn biểu thức: $N = \left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} \right) \cdot (a\sqrt{b}-b\sqrt{a})$ (với $a > 0; b > 0; a \neq b$)

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Với $a \geq 0; a \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} \right)^2 = \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+\sqrt{a^2})}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \right)^2 \\ &= (1+2\sqrt{a}+\sqrt{a^2}) \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = (1+\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

Bài 2. Với $a \geq 0; a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} \right) = \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{-(\sqrt{a}-1)} \right) \\ &= (\sqrt{a}+1)(1-\sqrt{a}) = 1-a \end{aligned}$$

Vậy $M = 1-a$.

Bài 3.

Với $x > 0$:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} = 1
\end{aligned}$$

Vậy khi $x > 0$ thì $B = 1$.

Bài 4. Với $x > 0; x \neq 2$, ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x}+x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \\
&= \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = 1
\end{aligned}$$

Vậy $P = 1$.

Bài 5. Với $a > 0; a \neq 4$:

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \\
&= \left(\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} \\
&= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} \\
&= \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)
\end{aligned}$$

Vậy, $Q = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$

Bài 6. Với $x \geq 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} \\ &= \left(\frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right) \times \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \frac{x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \times \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

Bài 7.

Với $x > 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2) - (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{x-4}. \end{aligned}$$

Bài 8.

Với $(a > 0; b > 0; a \neq b)$.

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} \right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) \cdot \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{b-a}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \right) \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$= b-a$$

Vậy biểu thức có giá trị $N = b-a$

Dạng 2. Rút gọn biểu thức – tính giá trị của biểu thức khi cho giá trị của ẩn

Các bước thực hiện:

- Rút gọn, chú ý điều kiện của biểu thức
- Rút gọn giá trị của biến nếu cần
- Thay vào biểu thức rút gọn

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của P khi $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

Bài 2. Cho biểu thức: $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x khi $A = \frac{4}{2015}$

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Bài 4. Cho biểu thức: $Q = \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2-y^2}$ với $x \neq y$.

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm x để $P = 2$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1.

a) Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4} \\
 &= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+2) - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+x+2\sqrt{x}-2x+4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2+x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(x+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}.
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$.

b) Ta có: $x = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ thỏa mãn điều kiện xác định

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{9+4\sqrt{5}+1}{2+\sqrt{5}-2} = \frac{10+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}+4$$

Vậy với $x = 9 + 4\sqrt{5}$ thì $P = 2\sqrt{5} + 4$.

Bài 2.

a) Với $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{4x+2}{x^2-1} = \frac{x+1-x+1+4x+2}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{4x+4}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x-1} \text{ với } x \neq \pm 1
 \end{aligned}$$

Vậy: $A = \frac{4}{x-1}$ với $x \neq \pm 1$

$$\text{b) Khi } A = \frac{4}{2015} \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = \frac{4}{2015} \Rightarrow x-1 = 2015$$

$$\Leftrightarrow x = 2016 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy khi $A = \frac{4}{2015}$ thì $x = 2016$.

Bài 3. Cho biểu thức $P\left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Với $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } P &= \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\&= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\&= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ (đpcm)}\end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Bài 4. Với $x \neq y$:

$$\text{a) } Q = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\text{b) Với } x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Suy ra: } Q = \frac{x+y}{x-y} = \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{3-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})} = \frac{3+2\sqrt{3}}{-3}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{3+2\sqrt{3}}{-3}.$$

Bài 5.

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{3x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{3x-\sqrt{x}+2-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}
 \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$, để $P = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy với $x = 16$ thì $P = 2$.

Dạng 3. Rút gọn biểu thức – tìm x để biểu thức rút gọn đạt giá trị nguyên

- Rút gọn biểu thức
- Lấy tử chia cho mẫu tách biểu thức thành tổng của một số nguyên và một biểu thức có tử là một số nguyên
- Trong biểu thức mới tạo thành, ta cho mẫu là các ước nguyên của tử để suy ra x.

Bài 1. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2}$ với $(a > 0; a \neq 1; a \neq 2)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $(x \geq 0; x \neq 1)$.

a) Rút gọn Q .

b) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $(x > 0)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để P có giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$ với $(a > 0; a \neq 9)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để P có giá trị nguyên.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Với $(a > 0; a \neq 1; a \neq 2)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \frac{a+2}{a-2} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right] : \frac{a+2}{a-2} \\ &= \frac{a+\sqrt{a}+1-(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} : \frac{a+2}{a-2} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} : \frac{a+2}{a-2} = \frac{2(a-2)}{a+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } P &= \frac{2(a-2)}{a+2} - \frac{2a-4}{a+2} = \frac{2a+4-8}{a+2} \\ &= \frac{2a+4}{a+2} - \frac{8}{a+2} = 2 - \frac{8}{a+2} \end{aligned}$$

P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi: $8 : a+2$ hay $(a+2)$ là ước nguyên của 8.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = \pm 1 \\ a+2 = \pm 2 \\ a+2 = \pm 4 \\ a+2 = \pm 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; a = -3 \\ a = 0; a = -4 \\ a = 2; a = -6 \\ a = 6; a = -10 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $a > 0; a \neq 1; a \neq 2$ ta suy ra $a = 2$ hoặc $a = 6$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$.

a) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) + x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \left(\frac{x^2-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x} \\ &= \frac{x+2017}{x} \end{aligned}$$

b) Ta có: $P = \frac{x+2017}{x} = 1 + \frac{2017}{x}$

$\Rightarrow$ Để P là số nguyên $\Leftrightarrow 2017 : x$ hay x là ước nguyên của 2017 (chú ý 2017 là số nguyên tố).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2017 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2017 \end{cases} \quad \text{kết hợp điều kiện } x \neq 0; x \neq \pm 1, \text{ suy ra: } x = 2017.$$

Vậy, với $x = 2017$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $(x \geq 0; x \neq 1)$.

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x})^3-1^3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\
&= \left(\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

b) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

$$Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}$$

Để Q có giá trị nguyên thì $3:(\sqrt{x}-3)$ hay $\sqrt{x}-3$ là ước nguyên của 3.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \sqrt{x}-3=3 \\ \sqrt{x}-3=1 \\ \sqrt{x}-3=-1 \\ \sqrt{x}-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=6 \\ \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=36 \\ x=16 \\ x=4 \\ x=0 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy với $x = \{0; 4; 16; 36\}$ thì Q đạt giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}$ với $(x > 0)$.

a) Với $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1-x}{x}
\end{aligned}$$

b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để P có giá trị nguyên.

Để P có giá trị nguyên thì $P = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$ phải là số nguyên.

Do đó x là ước nguyên của 1. Suy ra:
$$\begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy với $x = 1$ thì P đạt giá trị nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$ với $(a > 0; a \neq 9)$.

a) Với $a > 0; a \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}+3+\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}+3} \end{aligned}$$

b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để P có giá trị nguyên.

Để $P = \frac{2}{\sqrt{a}+3}$ đạt giá trị nguyên thì $\sqrt{a}+3$ phải là ước nguyên của 2.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \sqrt{a}+3=2 \\ \sqrt{a}+3=1 \\ \sqrt{a}+3=-1 \\ \sqrt{a}+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=-1 \\ \sqrt{a}=-2 \\ \sqrt{a}=-4 \\ \sqrt{a}=-5 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy với không có giá trị $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn để P đạt giá trị nguyên.

Dạng 4. Rút gọn biểu thức – tìm x để biểu thức thỏa bằng hoặc lớn hơn (nhỏ hơn) một số cho trước

- Rút gọn

- Cho biểu thức rút gọn thỏa điều kiện ta được phương trình hoặc bất phương trình, chú ý điều kiện của ẩn trong bài toán.

Bài 1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức.

b) Tìm các giá trị của x để $A < 0$.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện và rút gọn biểu thức.

b) Tìm các giá trị của x để $P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-1}$ (với $a > 0; a \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của a để $P < 0$

Bài 5. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm các giá trị của x để $M > 0$

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là: $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

b) Để $A < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện, suy ra: $A < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}-1+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \end{aligned}$$

b) $P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x-2005+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} (\sqrt{x}-1)^2 = x-2005+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{3}+\sqrt{2}| = x-2005+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}+\sqrt{2} = x-2005+\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2005 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 3.

a) Với $x > 0; x \neq 1$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-1}{x}. \end{aligned}$$

b) Với $x > 0; x \neq 1$ thì $\frac{x-1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) > x \Leftrightarrow 2x-2 > x$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ (thỏa điều kiện). Vậy với } x > 2 \text{ thì } P > \frac{1}{2}.$$

Bài 4.

a) Với $a > 0; a \neq 1$:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}-1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1} \right) \cdot (\sqrt{a}-1) = \sqrt{a}-1$$

b) Với $a > 0; a \neq 1$ thì $P < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0; a \neq 1 \\ \sqrt{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1.$

Vậy với $0 < a < 1, x > 2$ thì $P < 0.$

Bài 5. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

a) Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$. Khi đó:

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right)$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b) Để $M > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} > 0$ mà $x > 0, x \neq 1$ nên $\sqrt{x} > 0$

Do đó: $M > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy $x > 1$ thì $M > 0.$

Dạng 5. Rút gọn biểu thức – tìm x để biểu thức đạt giá trị lớn nhất (gtln), giá trị nhỏ nhất (gtnn)

- Rút gọn

- Biến đổi biểu thức (BT) về dạng:

+ Số không âm + hằng số $\Rightarrow$ GTNN.

VD: $A^2 + m \geq m$. Khi đó GTNN của biểu thức bằng m xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$.

+ Hằng số - số không âm $\Rightarrow$ GTLN.

VD: $M - A^2 \leq M$. Khi đó GTLN của biểu thức bằng M xảy ra khi và chỉ khi $A = 0$.

+ Sử dụng bất đẳng thức Cô-si: Cho hai số dương a và b , ta có:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ $|A| + |B| \geq |A + B|$

Bài 1. Cho các biểu thức sau:

$$M = x + \sqrt{x} - 1 \quad N = -x + \sqrt{x-1} + 2$$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

b) Tìm giá trị lớn nhất của N .

Bài 2. Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. Cho biểu thức:

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm giá trị lớn nhất P .

Bài 4. Cho hai biểu thức:

$$P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \text{ và } Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} \text{ với } x > 0; x \neq 4$$

a) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức Q .

c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

a) Tìm điều kiện xác định. Rút gọn A .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho các biểu thức sau:

$$M = x - \sqrt{x} - 1 \quad N = -x + \sqrt{x-1} + 2$$

a) Điều kiện: $x \geq 0$

$$M = x - \sqrt{x} - 1 = x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$$

$$\text{Suy ra, } M_{\min} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \right]_{\min} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

b) Điều kiện: $x \geq 1$.

$$N = -x + \sqrt{x-1} + 2 = -x + 1 + \sqrt{x-1} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

$$= -\left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$= -\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{Suy ra, } N_{\max} \Leftrightarrow \left[-\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \right]_{\max} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } M_{\max} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Bài 2. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot (\sqrt{x}+1) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

b) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$

$$P_{\min} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)_{\min}$$

Vi $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+1)_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow P_{\min} = 1 - \frac{2}{\sqrt{0}+1} = -1$$

Vậy, $P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x=0$

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3x-9\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6) - (2x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6-2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy $P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$

b) $P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} = \frac{-5(\sqrt{x}+3)+17}{\sqrt{x}+3} = -5 + \frac{17}{\sqrt{x}+3}.$

$$P_{\max} \Leftrightarrow \left(\frac{17}{\sqrt{x}+3} \right)_{\max}$$

Vì $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \frac{17}{\sqrt{x}+3} > 0 \end{cases} P_{\max} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{x}_{\min} \Leftrightarrow x=0$

Vậy, $P_{\max} = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x=0.$

Bài 4. Cho biểu thức: $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Với $x=9$. Ta có: $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = \frac{12}{3-2} = 12$

b) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{x-4} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

c) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất: $\frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số không âm $\sqrt{x}$ và $\frac{3}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{P}{Q}$ là $\left(\frac{P}{Q}\right)_{\min} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x=3.$

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

b) $A = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ với $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x} > 0; \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương $\sqrt{x} > 0; \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$, suy ra:

$$A = \frac{x+2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy $A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Dạng 6. Nâng cao phát triển tư duy

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}; Q = x^4 - 7x^2 + 15$ (với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì $Q - 4P$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{2}{x^2-2x+1} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

c) Tính giá trị của P khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$

d) Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị tương ứng của x

Bài 3. Cho $A = \frac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 4. Cho biểu thức: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x+1}$

- a) Rút gọn M ;
b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

- a) Chứng minh rằng $P = \sqrt{ab}$.
b) Tính giá trị biểu thức P khi $a = 3 - \sqrt{5}$ và $b = 0,5$.
c) Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}; Q = x^4 - 7x^2 + 15$ (với $x > 0, x \neq 1$)

- a) Rút gọn P
b) Với giá trị nào của x thì $Q - 4P$ đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn

$$a) P = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1) = x-1$$

$$b) Q - 4P = x^4 - 7x^2 + 15 - 4(x-1)$$

$$= (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x^2 - 4)^2 + (x - 2)^2 - 1$$

$$\rightarrow Q - 4P \geq -1$$

Dấu "=" xảy ra khi: $x = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất $Q - 4P$ là -1

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{2}{x^2-2x+1} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

c) Tính giá trị của P khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$

d) Tìm giá trị lớn nhất của P và giá trị tương ứng của x

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$P = \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$P = \left(\frac{x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$P = \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2}$$

$$P = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

$$\text{Vậy } P = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

b) Ta có $P > 0$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện đề bài, ta được $0 < x < 1$

Vậy với $0 < x < 1$ thì $P > 0$

c) Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = 3 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} - 2)^2$ thì

$$P = -\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - 1 \right)$$

$$P = -|\sqrt{3}-2| (|\sqrt{3}-2| - 1)$$

$$P = (\sqrt{3}-2)(1-\sqrt{3})$$

$$P = \sqrt{3} - 3 - 2 + 2\sqrt{3}$$

$$P = 3\sqrt{3} - 5$$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $P = 3\sqrt{3} - 5$

$$\text{d) Ta có } P = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x} - x = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{Nhận thấy: } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thì P đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$

$$\text{Bài 3. Cho } A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}} \text{ với } x > 4$$

a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|} = \frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên $A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất đẳng thức}$$

Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4$ là ước số nguyên

dương của 16. Hay $x-4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x \in \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có: $A = \frac{2(m^2+4)}{m} = 2m + \frac{8}{m}$ suy

ra $m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}$.

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

Bài 4. Cho biểu thức: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x+1}$

a) Rút gọn M ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

Hướng dẫn

a) Ta có: $M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + (2\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{3}{3 + (2\sqrt{x} - 1)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{3 + 4x + 4\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{3 + 4x - 4\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{3}{4x - 4\sqrt{x} + 4} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1 + x + \sqrt{x} + 1}{(x + 1)^2 - x} \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{2020}{x + 1}$$

$$M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \cdot \text{TXĐ: } x \geq 0.$$

b) Ta có: $x^2 + x + 1 \geq 1$. Vì $x \geq 0$

nên $M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2020}{1} = 2020$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 2020 khi $x = 0$.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b} + \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab} - a} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

a) Chứng minh rằng $P = \sqrt{ab}$.

b) Tính giá trị biểu thức P khi $a = 3 - \sqrt{5}$ và $b = 0,5$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$.

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a}} \right) = \frac{a - (2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Hay $P = \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{ab}.$

b) Khi $a = 3 - \sqrt{5}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 \Rightarrow P = \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$

c) Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 4ab \Rightarrow 4ab \leq 8 \Rightarrow ab \leq 2.$ Vậy $P \leq \sqrt{2},$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = 4b^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b = 1.$

Vậy GTLN của P là $\sqrt{2}.$

II. TRẮC NGHIỆM RÈN PHẢN XẠ

Bài 4- Rút gọn biểu thức chứa căn

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ là:

- A. $5 - 2\sqrt{5}$. B. 4. C. $2 + 2\sqrt{5}$. D. 1.

Câu 2. Giá trị của biểu thức $\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ là:

- A. $2\sqrt{2}$. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 3. Giá trị của biểu thức $\sqrt{32} + \sqrt{50} - 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$ là:

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 4. Giá trị của biểu thức $\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$ là:

- A. $\sqrt{5}$. B. $-5\sqrt{5}$. C. $10\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{5}$.

Câu 5. Rút gọn biểu thức $5\sqrt{a} + 2\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} - \sqrt{25a}$ với $a > 0$ ta được

- A. $\sqrt{a}$. B. $4\sqrt{a}$. C. $2\sqrt{a}$. D. $-\sqrt{a}$.

Câu 6. Rút gọn biểu thức $3\sqrt{8a} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{32a}{25}} - \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2a}} - \sqrt{2a}$ với $a > 0$

ta được:

- A. $\frac{47}{10}\sqrt{a}$. B. $\frac{21}{5}\sqrt{a}$. C. $\frac{47}{10}\sqrt{2a}$. D. $\frac{47}{5}\sqrt{2a}$.

Câu 7. Giá trị của biểu thức $(\sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ là:

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 8. Giá trị của biểu thức $(\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ là:

- A. 6. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $2\sqrt{a} - \sqrt{9a^3} + a^2\sqrt{\frac{16}{a}} + \frac{2}{a^2}\sqrt{36a^5}$ với $a > 0$ ta được

- A. $14\sqrt{a} + a\sqrt{a}$. B. $14\sqrt{a} - a\sqrt{a}$. C. $14\sqrt{a} + 2a\sqrt{a}$. D. $20\sqrt{a} - 2a\sqrt{a}$.

Câu 10. Rút gọn biểu thức $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2a} + \frac{4}{5}\sqrt{200a}\right) : \frac{1}{8}$ ta được

- A. $66\sqrt{2a}$. B. $52\sqrt{2a}$. C. $54\sqrt{a}$. D. $54\sqrt{2a}$.

Câu 11. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 - 2ab + b^2}} = a.$

B. $\frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 - 2ab + b^2}} = |a|.$

C. $\frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 - 2ab + b^2}} = ab.$

D. $\frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 - 2ab + b^2}} = a-b.$

Câu 12. Với đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 2\sqrt{a}.$

B. $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a}.$

C. $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 2.$

D. $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 2\sqrt{b}.$

Câu 13. Chọn khẳng định đúng?

A. $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-3a}{2}.$

B. $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{3a}{2}.$

C. $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-a}{2}.$

D. $\left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{a}{2}.$

Câu 14. Chọn khẳng định đúng?

A. $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{a(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = 2a.$ **B.** $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{a(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{2}{a}.$

C. $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{a(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = -2a.$ **D.** $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{a(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = -\frac{a}{2}.$

Câu 15. Cho biểu thức $P = \frac{2x}{\sqrt{x} + 1}$. Giá trị của P khi $x = 9$ là

A. $\frac{9}{2}.$

B. $\frac{9}{4}.$

C. 9.

D. 18.

Câu 16. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ $x \geq 0; x \neq 1$. Giá trị của P khi $x = 4$ là:

A. 4.

B. 2.

C. -2.

D. $\frac{2}{3}.$

Câu 17. Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$. Giá trị của P khi $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$ là

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 18. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$.

Giá trị của P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ là:

- A. $4 + 3\sqrt{2}$. B. $4 - 3\sqrt{2}$. C. 3. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 19. Cho biểu thức $P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. So sánh P với 4

- A. $P > 4$. B. $P < 4$. C. $P = 4$. D. $P \leq 4$.

Câu 20. Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$. So sánh A với 1

- A. $B > 1$. B. $B < 1$. C. $B = 1$. D. $B \leq 1$.

Câu 21. Cho biểu thức $P = \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$. Tìm x biết $P = \sqrt{x}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 22. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$. Tìm các giá trị của x biết

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$$

- A. $x = 0; x = 5$. B. $x = 0$. C. $x = 0; x = 25$. D. $x = 5; x = 1$.

Câu 23. Cho $P = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

Có bao nhiêu giá trị $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 24. Cho $A = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \sqrt{27} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} - \frac{3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

Chọn câu đúng

- A. $B > A > 0$. B. $A < B < 0$. C. $A < 0 < B$. D. $B < 0 < A$.

Câu 25. Cho $A = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$. Có bao nhiêu giá trị của x để A có giá trị nguyên

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 26. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Rút gọn biểu thức A ta được:

A. $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$. **B.** $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$. **C.** $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$. **D.** $A = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$.

Câu 27. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Tìm x để $A = 2$

A. 12. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 25.

Câu 28. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Rút gọn biểu thức B ta được:

A. $B = x - \sqrt{x}$. **B.** $B = \sqrt{x} - x$. **C.** $B = \sqrt{x} + x$. **D.** $B = x + 2\sqrt{x}$.

Câu 29. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Tìm x để $B > 0$.

A. $x > 1$. **B.** $x < 2$. **C.** $0 < x < 1$. **D.** $x \leq 1$.

Câu 30. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Tìm giá trị lớn nhất của B .

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 31. Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Rút gọn biểu thức P ta được

A. $P = \frac{4x}{\sqrt{x} - 3}$. **B.** $P = \frac{4x}{\sqrt{x} + 3}$. **C.** $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$. **D.** $P = \frac{-4x}{\sqrt{x} - 3}$.

Câu 32. Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Tìm x để

$P = -1$

A. $x = \frac{9}{16}$. **B.** $x = \frac{9}{16}; x = -1$. **C.** $x = \frac{3}{4}; x = -1$. **D.** $x = \frac{3}{4}$.

Câu 33. Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

- A.** $m = \frac{5}{18}$. **B.** $m > -\frac{5}{18}$. **C.** $m < \frac{5}{18}$. **D.** $m > \frac{5}{18}$.

Câu 34. Cho biểu thức $C = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Rút gọn biểu

thức trên ta được:

- A.** $C = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$. **B.** $C = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$. **C.** $C = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$. **D.** $C = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3}$.

Câu 35. Cho biểu thức $C = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Tìm x để $C < 1$

- A.** $0 \leq x < 9$. **B.** $0 \leq x < 9; x \neq 4$. **C.** $4 < x < 9$. **D.** $0 < x < 4$.

Câu 36. Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0; x \neq 1$

Rút gọn biểu thức C ta được

- A.** $C = \frac{x - 2}{\sqrt{x}}$. **B.** $C = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$. **C.** $C = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$. **D.** $C = \frac{\sqrt{x}}{x + 2}$.

Câu 37. Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0; x \neq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của C .

- A.** $C = 1$. **B.** $C = \sqrt{2}$. **C.** $C = 2$. **D.** $C = 2\sqrt{2}$.

Câu 38. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{x + 4}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$

Rút gọn P .

- A.** $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$. **C.** $P = \frac{3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$. **D.** $P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$.

Câu 39. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{x + 4}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$

Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên dương.

A. $x = 1; x = 36$. **B.** $x = 1; x = 36$. **C.** $x = 4; x = 6$. **D.** $x = 16; x = 36$.

HƯỚNG DẪN

Bài 4- Rút gọn biểu thức chứa căn

Câu 1. Đáp án A.

$$\begin{aligned}\sqrt{(4-\sqrt{5})^2} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} &= \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} - \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} = \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \\ &= |4-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-1| = 4-\sqrt{5} - \sqrt{5}+1 = 5-2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Câu 2. Đáp án A.

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{7-2\sqrt{10}} &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-\sqrt{2}| = \sqrt{2}+\sqrt{5} - \sqrt{5}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Câu 3. Đáp án B.

$$\sqrt{32} + \sqrt{50} - 3\sqrt{8} - \sqrt{18} = \sqrt{16\cdot 2} + \sqrt{25\cdot 2} - 3\sqrt{4\cdot 2} - \sqrt{9\cdot 2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0..$$

Câu 4. Đáp án B.

$$\begin{aligned}\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80} &= \sqrt{25\cdot 5} - 4\sqrt{9\cdot 5} + 3\sqrt{4\cdot 5} - \sqrt{16\cdot 5} = 5\sqrt{5} - 4\cdot 3\sqrt{5} + 3\cdot 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -5\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Câu 5. Đáp án D.

$$\begin{aligned}5\sqrt{a} + 2\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} - \sqrt{25a} &= 5\sqrt{a} + 2\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4}} - a\frac{\sqrt{4a}}{a} - 5\sqrt{a} \\ &= 5\sqrt{a} + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 5\sqrt{a} = -\sqrt{a}.\end{aligned}$$

Câu 6. Đáp án C.

$$\begin{aligned}3\sqrt{8a} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{32a}{25}} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2a}} - \sqrt{2a} &= 3\sqrt{4\cdot 2a} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{16\cdot 2a}}{\sqrt{25}} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2a}} - \sqrt{2a} \\ &= 3\cdot 2\sqrt{2a} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2a}}{5} - \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2a}}{2a} - \sqrt{2a} = 6\sqrt{2a} + \frac{1}{5}\sqrt{2a} - \frac{1}{2}\sqrt{2a} - \sqrt{2a} \\ &= \sqrt{2a}\cdot\left(6 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{47}{10}\sqrt{2a}\end{aligned}$$

Câu 7. Đáp án D.

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{7-2\sqrt{10}} &= (\sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2} = (\sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{2})|\sqrt{5}-\sqrt{2}| = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = 5-2 = 3.\end{aligned}$$

Câu 8. Đáp án B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}} &= (\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot 1+1} = (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} \\ &= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5-1 = 4. \end{aligned}$$

Câu 9. Đáp án A.

$$\begin{aligned} \text{Với } a > 0 \text{ ta có } 2\sqrt{a} - \sqrt{9a^3} + a^2\sqrt{\frac{16}{a}} + \frac{2}{a^2}\sqrt{36a^5} \\ &= 2\sqrt{a} - \sqrt{9a^2 \cdot a} + a^2 \frac{\sqrt{16a}}{a} + \frac{2}{a^2} \cdot \sqrt{36a^4 \cdot a} \\ &= 2\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 4a\sqrt{a} + \frac{2}{a^2} \cdot 6a^2\sqrt{a} = 2\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 4a\sqrt{a} + 12\sqrt{a} = 14\sqrt{a} + a\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Câu 10. Đáp án D.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2a} + \frac{4}{5}\sqrt{200a} \right) : \frac{1}{8} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + \frac{4}{5}\sqrt{100} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \right) \cdot 8 \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + \frac{32}{5} \cdot 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{2} - 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 64\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} \\ &= 2\sqrt{2a} - 12\sqrt{2a} + 64\sqrt{2a} = 54\sqrt{2a} \end{aligned}$$

Câu 11. Đáp án B.

$$\text{Ta có } \frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{(a-b)}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{|a-b|} = \frac{(a-b)}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{(a-b)} = |a|$$

Câu 12. Đáp án A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Câu 13. Đáp án B.

$$\text{Ta có } \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{8} - 2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 2} - 2} - \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-a}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-2} - \frac{6\sqrt{6}}{3} \right] \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \right) = \left[\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} - 2\sqrt{6} \right] \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} \right) \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \right) = \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{3a}{2}
\end{aligned}$$

Câu 14. Đáp án C.

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có } \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{a(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\
&= \left(\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) \cdot a(\sqrt{7}-\sqrt{5}) \\
&= \left(\frac{-\sqrt{7}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} \right) \cdot a(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \left[\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} - 2\sqrt{6} \right] \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{6}} \right) \\
&= (-\sqrt{7}-\sqrt{5}) \cdot a(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -a(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -2a.
\end{aligned}$$

Câu 15. Đáp án A.

$$\text{Ta có } P = \frac{2.9}{\sqrt{9}+1} = \frac{18}{3+1} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Câu 16. Đáp án B.

$$\text{Thay } x = 4 \text{ (thỏa điều kiện) vào } P \text{ ta được } P = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}-1} = \frac{2}{2-1} = 2.$$

Câu 17. Đáp án B.

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có } x = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-3} = 4+2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1
\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó ta có } P = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1+1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}+2} = 2$$

Câu 18. Đáp án A.

$$\text{Ta có } x = 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{2}+1$ vào biểu thức P ta được

$$P = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 4 + 3\sqrt{2}.$$

Câu 19. Đáp án A.

$$\begin{aligned} \text{Ta xét: } P - 4 &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{x + 2\sqrt{x} + 2 - 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x - 2\sqrt{x} + 1) + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 + 1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0, \forall x > 0 \text{ và } \sqrt{x} > 0, \forall x > 0$$

$$\text{nên } P - 4 > 0 \Leftrightarrow P > 4 \text{ với } x > 0$$

Câu 20. Đáp án A.

$$\text{Cách 1: Ta có } B = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} + 2) + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 > 0 \text{ suy ra}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 2} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} > 1 \text{ hay } B > 1$$

Cách 2: ta xét hiệu

$$B - 1 = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \frac{\sqrt{x} + 3 - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Vì } 1 > 0 \text{ và } \sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 > 0 \text{ nên } \frac{1}{\sqrt{x} + 2} > 0$$

$$\text{Hay } B - 1 > 0 \Leftrightarrow B > 1.$$

Câu 21. Đáp án A.

$$\text{Với } x \geq 0 \text{ ta có } P = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} &= \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} \\ \Rightarrow 3\sqrt{x} - 1 &= x + \sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 (TM) \end{aligned}$$

Câu 22. Đáp án C.

Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 = x-3\sqrt{x}+2$$

$$\Leftrightarrow x-5\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=25(tm) \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là $x=0; x=25$

Câu 23. Đáp án B.

Ta có $P = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ thì $2: (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \in (2) = \{1; -1; 2; -2\}$ Mà $\sqrt{x}+1 > 0$

với $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 2\}$

+) $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0$

+) $\sqrt{x}+1=2 \Leftrightarrow x=1$

Vậy có hai giá trị của x thỏa mãn điều kiện.

Câu 24. Đáp án C.

Ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \sqrt{9 \cdot 3} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+1-4\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$$

và $B = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$$= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5}-5}{1} + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4}$$

$$= \frac{12\sqrt{5}-20+5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4} = \sqrt{5}$$

Ta thấy $A = \frac{1-3\sqrt{3}}{2} < 0$ (do $1-3\sqrt{3} < 0$) và $B = \sqrt{5} > 0$ nên $A < 0 < B$

Câu 25. Đáp án A.

Ta có: $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(2\sqrt{x}+4)-5}{\sqrt{x}+2} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$

Ta có $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 > 0 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} > 0$ suy ra

$2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} < 2$ hay $A < 2(1)$

Lại có $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{5}{2}$ suy ra $2 - \frac{5}{\sqrt{x}+2} \geq 2 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow A \geq -\frac{1}{2}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $-\frac{1}{2} \leq A < 2$ mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{0;1\}$

+ Với $A = 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9(tm)$

Vậy với $x = \frac{1}{4}; x = 9$ thì A đạt giá trị nguyên. Hay có 2 giá trị của x thỏa mãn đề bài.

Câu 26. Đáp án A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Câu 27. Đáp án C.

Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

Xét $A = 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16(TM)$

Vậy $x = 16$.

Câu 28. Đáp án B.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } B &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \\
&= \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} \\
&= \frac{x-\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} = \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2} = \sqrt{x}-x
\end{aligned}$$

Vậy $B = \sqrt{x} - x$

Câu 29. Đáp án C.

Theo câu trước ta có $B = \sqrt{x} - x$ Xét $B > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0$ Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta

$$\text{có } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có $0 < x < 1$

Câu 30. Đáp án D.

Ta có $B = \sqrt{x} - x$ với $x \geq 0; x \neq 1$

$$\text{Khi đó } B = \sqrt{x} - x = -\left(x - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Nhận thấy } \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} (TM)$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$

Câu 31. Đáp án A.

Điều kiện $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\sqrt{x}(2-\sqrt{x})+8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{8\sqrt{x}+4x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}} \\
&= \frac{4\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-3} = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$

Câu 32. Đáp án A.

Với điều kiện: $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$. Ta có: $P = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 3(\sqrt{x}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(4\sqrt{x}-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1(ktm) \\ \sqrt{x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{16}(tm) \end{cases}$$

Với $x = \frac{9}{16}$ thì $P = -1$.

Câu 33. Đáp án D.

$$\forall x > 9 : m(\sqrt{x}-3)P > x+1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$$

$$\Leftrightarrow m.4x > x+1 \Leftrightarrow m > \frac{x+1}{4x}$$

Ta có: với mọi giá trị $x > 9$ thì $x+1 > 9+1 = 10$

$$4x > 4.9 = 36$$

$$\text{Vậy } m > \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Câu 34. Đáp án C.

$$\text{Ta có } x - 5\sqrt{x} + 6 = x - 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 6 = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 3(\sqrt{x}-2) = (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$$

$$\text{nên } C = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + (\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

Vậy $C = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

Câu 35. Đáp án B.

Theo câu trước ta có $C = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

Đề $C < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} < 0$

Mà $4 > 0$ nên $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 9$

Kết hợp điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ suy ra $0 \leq x < 9; x \neq 4$.

Câu 36. Đáp án B.

ta có $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot (\sqrt{x} - 1) = \frac{x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot (\sqrt{x} - 1) = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $C = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

Câu 37. Đáp án D.

Theo câu trước ta có: $C = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

Xét $C = \frac{x + 2}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

Với $x > 0, x \neq 1$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{x}$ và $\frac{2}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow C \geq 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 2(tm)$$

Dấu “=” xảy ra khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 38. Đáp án A.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left(\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \quad (x \neq 9) \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$$

Câu 39. Đáp án D.

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}.$$

Để P nhận giá trị là số nguyên dương thì

$$\begin{cases} P \in \mathbb{Z} \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{\sqrt{x}-3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{3+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-3) \in U(3)(1) \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} > 0(2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3) \in \{1; 3\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 1 \\ \sqrt{x} - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16(tm) \\ x = 36(tm) \end{cases}$$

Nhận thấy với $x = 16; x = 36$ vẫn thỏa mãn (2).

Nên $x = 16$ hoặc $x = 36$ thì P nguyên dương.

----- **Toán Học Sơ Đồ** -----