

CHUYÊN ĐỀ

QUAN HỆ CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ

Lời nói đầu	1
Phần 1. Một số kiến thức cần nhớ	3
1. Định nghĩa phép chia hết	3
2. Một số tính chất cần nhớ	3
3. Một số dấu hiệu chia hết	3
Phần 2. Các dạng toán thường gặp	4
Dạng 1. Chứng minh tích các số nguyên liên tiếp chia hết cho một số cho trước	4
Dạng 2. Phân tích thành nhân tử	5
Dạng 3. Sử dụng phương pháp tách tổng	6
Dạng 4. Sử dụng hằng đẳng thức	8
Dạng 5. Sử dụng phương pháp xét số dư	10
Dạng 6. Sử dụng phương pháp phản chứng	11
Dạng 7. Sử dụng phương pháp quy nạp	12
Dạng 8. Sử dụng phương pháp Dirichlet	13
Dạng 9. Sử dụng đồng dư	14
Dạng 10. Sử dụng tính chất chia hết và định lý Fermat nhỏ	16
Dạng 11. Các bài toán chia hết với đa thức	16
Dạng 12. Tìm giá trị của biến để chia hết	18
Tổng kết phương pháp giải toán	20
Phần 3. Tuyển chọn các bài toán quan hệ chia hết trong các đề thi toán THCS	21
Phần 4. Hướng dẫn các bài toán chia hết trong các đề thi toán THCS	28

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Định nghĩa phép chia.

Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho $a = bq + r$, với $0 \leq r < |b|$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư.

Khi a chia cho b thì các số dư $r \in \{0; 1; 2; 3; \dots; |b| - 1\}$

- Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a . Ký hiệu: $a : b$ hay $b | a$.

Vậy a chia hết cho b khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

- Nếu $r \neq 0$, khi đó ta nói a chia b có số dư là r .

2. Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1. Mọi số nguyên khác 0 luôn chia hết cho chính nó.
- Tính chất 2. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên b chia hết cho số nguyên c thì số nguyên a chia hết cho số nguyên c .
- Tính chất 3. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và ngược lại thì $a = \pm b$.
- Tính chất 4. Nếu $a : b : m$ và $(b, m) = 1$ thì $a : m$.
- Tính chất 5. Nếu hai số nguyên a và b cùng chia hết cho m thì $(a \pm b) : m$.
- Tính chất 6. Nếu a chia hết cho m và n , trong đó $(m, n) = 1$ thì $a : mn$.
- Tính chất 7. Nếu số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên c chia hết cho số nguyên d thì tích ac chia hết cho tích bd .
- Tính chất 8. Trong n số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số nguyên chia hết cho n .
- Tính chất 9. Nếu $a - b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên thì $a^n - b^n$ ($n \in \mathbb{N}$) chia hết cho $a - b$.
- Tính chất 10. Nếu $a + b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên và n là số tự nhiên lẻ thì $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$.

3. Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, với $a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau.

- Dấu hiệu chia hết cho 2: Số tự nhiên A chia hết cho 2 khi và chỉ khi $a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

- Dấu hiệu chia hết cho 5: Số tự nhiên A chia hết cho 5 khi và chỉ khi $a_0 \in \{0; 5\}$

Từ đó suy ra A chia hết cho 10 khi và chỉ khi $a_0 = 0$.

- Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25: Số tự nhiên A chia hết cho 4(hoặc 25) khi và chỉ khi $\overline{a_1a_0}$ chia hết cho 4 (hoặc 25).
- Dấu hiệu chia hết cho 8 và 125: Số tự nhiên A chia hết cho 8(hoặc 125) khi và chỉ khi $\overline{a_2a_1a_0}$ chia hết cho 8 (hoặc 125).
- Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9: Số tự nhiên A chia hết cho 3(hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số A chia hết cho 3(hoặc 9).
- Dấu hiệu chia hết cho 11: Số tự nhiên A chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 **Dạng 1: Chứng minh tích các số nguyên liên tiếp chia hết cho một số cho trước**

Cơ sở phương pháp: Đây là dạng toán cơ bản thường gặp khi chúng ta mới bắt đầu học chứng minh các bài toán chia hết. Sử dụng các tính chất cơ bản như: tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6. Chúng ta vận dụng linh hoạt các tính chất cơ bản này để giải các bài toán chứng minh chia hết về tích các số nguyên liên tiếp.

★**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng:

- Tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6
- Tích của 2 số chẵn liên tiếp chia hết cho 8
- Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120

Lời giải

- Trong 3 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 2 nên tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 (do $(2, 3) = 1$)
- Hai số chẵn liên tiếp có dạng $2n$ và $(2n + 2)$ với $n \in \mathbb{Z}$
Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng $4n(n + 1)$
Do n và $n + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1) : 2$
Vì thế $4n(n + 1) : 8$
- Ta có $120 = 3.5.8$
Do 5 số nguyên liên tiếp có 3 số liên tiếp nên theo ý a) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

5 số nguyên liên tiếp có 2 số chẵn liên tiếp nên theo ý b) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 8.

Mặt khác 5 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 5 nên tích chúng cũng chia hết cho 5.

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 120

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng tích của 3 số chẵn liên tiếp chia hết cho 48

Lời giải

Ba số chẵn liên tiếp có dạng $2n$, $(2n + 2)$ và $(2n + 4)$ với $n \in \mathbb{Z}$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng $8n(n + 1)(n + 2)$

Do n , $(n + 1)$ và $(n + 2)$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1)(n + 2) : 6$

Vì thế $n(n + 1)(n + 2) = 6m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

Do đó tích của 3 số chẵn liên tiếp là $8n(n + 1)(n + 2) = 48m : 48$

Vậy bài toán được chứng minh

Dạng 2: Phân tích thành nhân tử

Cở sở phương pháp: Để chứng minh $A(x)$ chia hết cho p ta phân tích $A(x) = D(x).p$, còn nếu không thể đưa ra phân tích như vậy ta có thể viết $p = k.q$

- Nếu $(k, q) = 1$ ta chứng minh $A(x)$ chia hết cho k và q .
- Nếu $(k, q) \neq 1$ ta viết $A(x) = B(x).C(x)$ rồi chứng minh $B(x)$ chia hết cho k và $C(x)$ chia hết cho q .

★**Thí dụ 3.** Chứng minh với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 6

Lời giải

a) Ta có:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Biểu thức là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên một trong 3 số chia hết cho 2, và một trong 3 số chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $(n^3 - n) : 6$

★**Thí dụ 4.** Chứng minh $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128 với n là số lẻ

Lời giải

a) Ta có:

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1) = (n^2 - 1)^2(n^2 + 1)$$

Vì n là số lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) Ta có:

$$(n^2 - 1)^2 = \left[(2k+1)^2 - 1 \right]^2 = (4k^2 + 4k)^2 = [4k(k+1)]^2$$

Ta có $k(k+1)$ chia hết cho 2 nên $[4k(k+1)]^2 : 64$

$$\text{Mặt khác: } n^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) : 2$$

$$\text{Do đó } n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2 (n^2 + 1) : 128 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Bình phương của một số lẻ là số lẻ

★**Thí dụ 5.** Cho 3 số nguyên dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = x - y, b = y - z \Rightarrow z - x = -(a + b)$$

$$\text{Do đó ta cần chứng minh: } a^5 + b^5 - (a+b)^5 \text{ chia hết cho } -5ab(a+b)$$

$$\text{Ta có: } a^5 + b^5 - (a+b)^5 = -(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4)$$

$$= -5ab(a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2)$$

$$= -5ab[(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b)]$$

$$= -5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$$

Do đó bài toán được chứng minh.

Dạng 3: Sử dụng phương pháp tách tổng

Cơ sở phương pháp: Để chứng minh $A(x)$ chia hết cho p ta biết đổi $A(x)$ thành tổng các hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho p .

★**Thí dụ 6.** Chứng minh m, n là số nguyên ta có:

$$\text{a) } n(n^2 + 11) : 6 \quad \text{b) } mn(m^2 - n^2) : 6 \quad \text{c) } n(n+1)(2n+1) : 6$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } n(n^2 + 11) = n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n$$

$$\text{Để chứng minh: } (n-1)n(n+1) : 6, 12n : 6 (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do đó: } n(n^2 + 11) : 6$$

$$\text{b) Ta có: } mn(m^2 - n^2) = mn[(m^2 - 1) - (n^2 - 1)] = mn(m^2 - 1) - mn(n^2 - 1)$$

$$\text{Do: } mn(m^2 - 1) = n(m-1)m(m+1) : 6, mn(n^2 - 1) = m(n-1)n(n+1) : 6$$

Do đó: $mn(m^2 - n^2) : 6$

c) Ta có: $n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+2+n-1) = n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)$

Do: $n(n+1)(n+2) : 6$, $(n-1)n(n+1) : 6$

Do đó: $n(n+1)(2n+1) : 6$

★**Thí dụ 7.** Chứng minh rằng: n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau với n là số tự nhiên.

Lời giải

Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau ta chứng minh $(n^5 - n) : 10$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)[(n^2 - 4) + 5] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

Nhận xét: $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 5 do đó chia hết cho 10.

Mặt khác $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 nên $5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 10.

Do đó $(n^5 - n) : 10$ vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 8.** a) Chứng minh rằng $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{Z}$

b) Chứng minh rằng $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên với mọi n là số nguyên chẵn

Lời giải

a) Ta có: $\frac{7n}{15} = n - \frac{8n}{15} = n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3}$

$$\text{Do đó: } \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + n - \frac{n}{5} - \frac{n}{3} = \frac{n^5 - n}{5} + \frac{n^3 - n}{3} + n$$

Từ các thí dụ trên ta dễ dàng chứng minh được: $(n^5 - n) : 5$, $(n^3 - n) : 3$ do đó bài toán được chứng minh.

b) Do n là số nguyên chẵn nên $n = 2m$ (với $m \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Do đó: } \frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24} = \frac{m}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Theo ý c) thí dụ 6 ta có $n(n+1)(2n+1) : 6$ do đó bài toán được chứng minh

★**Thí dụ 9.** Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có: $ax^2 + bx + c = ax^2 - ax + (a+b)x + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c$.

Dễ thấy: $\frac{x(x-1)}{2} \in \mathbb{Z}$ vì x và $(x-1)$ là hai số nguyên liên tiếp.

Do đó: $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $2a, a+b, c \in \mathbb{Z}$.

Dạng 4: Sử dụng hằng đẳng thức

Cở sở phương pháp: Nếu a, b là các số nguyên thì:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với n là số tự nhiên và $a \neq b$.

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên chẵn và $a \neq -b$.

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên lẻ và $a \neq -b$.

$(a+b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

$(a+1)^n = a^n + 1$ $(a-1)^n = a^n + (-1)^n$, n là số tự nhiên.

★**Thí dụ 10.** Với n là số tự nhiên chẵn. Chứng minh rằng: $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323$.

Lời giải

Ta có: $323 = 17 \cdot 19$. Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$

Ta có: $(20^n - 1) : (20 - 1) \Rightarrow (20^n - 1) : 19$

Mặt khác n là số chẵn nên $(16^n - 3^n) : (16 + 3) \Rightarrow (16^n - 3^n) : 19$

Do đó $(20^n - 1) + (16^n - 3^n) : 19 \Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 19$ (1)

Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1^n)$

Ta có: $(20^n - 3^n) : (20 - 3) \Rightarrow (20^n - 3^n) : 17$

Mặt khác n là số chẵn nên $(16^n - 1^n) : (16 + 1) \Rightarrow (16^n - 1^n) : 17$ (2)

Do $(17, 19) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra: $20^n + 16^n - 3^n - 1 : 323$.

★**Thí dụ 11.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$ b) $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$ c) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$

Lời giải

a) Ta có: $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$
 $= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n)$

Do đó $133 \cdot 11^n : 133$ và $12(144^n - 11^n) : (144 - 11)$ hay $12(144^n - 11^n) : 133$

Nên $133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n) \Rightarrow 11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$ (đpcm)

b) Ta có: $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n} = 51 \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n$
 $= (59 - 8) \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n)$

Vì $(64^n - 5^n) : (64 - 5) \Rightarrow (64^n - 5^n) : 59$

Nên $59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n) : 59 \Rightarrow 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$ (đpcm)

c) Ta có: $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + (19 - 7) \cdot 6^n = 19 \cdot 6^n + 7(25^n - 6^n)$

Vì $(25^n - 6^n) : (25 - 6) \Rightarrow 7(25^n - 6^n) : 19$

Nên $19 \cdot 6^n + 7(25^n - 6^n) : 19 \Rightarrow 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$ (đpcm)

★**Thí dụ 12.** Chứng minh rằng $A = 1993^{1997} + 1997^{1993} : 30$

Lời giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 1993^{1997} + 1997^{1993} = (1980 + 13)^{1997} + (2010 - 13)^{1993} \\ &= 1980c + 13^{1997} + 2010d - 13^{1993} \\ &= 1980c + 2010d + 13^{1993}(13^4) \\ &= 30(66c + 67d + 952 \cdot 13^{1993}) : 30. \end{aligned}$$

★**Thí dụ 13.** (Chuyên sư phạm Hà Nội 1997 – 1998)

Chứng minh rằng $C = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$ ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$, $(a+1)^n = ac + 1$, $(a-1)^n = ac + (-1)^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên

Ta có:

$$\begin{aligned}
C &= 25^n + 5^n - 18^n - 12^n \\
&= (21+4)^n + 5^n - (14+4)^n - (7+5)^n \\
&= 21c + 4^n + 5^n - 14d - 4^n - 7e - 5^n \\
&= 7(3c - 2d - e) : 7.
\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
C &= (26-1)^n + 5^n - (13+5)^n - (13-1)^n \\
&= 26f + (-1)^n + 5^n - 13g - 5^n - 13h - (-1)^n \\
&= 13(2f - g - h) : 13.
\end{aligned}$$

Vì $(13, 7) = 1$ nên $C : 7 \cdot 13 = 91$.

★**Thí dụ 14.** (Chuyên sư phạm Hà Nội 2001)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có: $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$ chia hết cho

$$B = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Lời giải

Ta có công thức quen thuộc $B = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{Lại có: } 2A = (n^5 + 1) + [(n-1)^5 + 2^5] + [(n-2)^5 + 3^5] + \dots + (1 + n^5)$$

Nhận thấy mỗi số hạng đều chia hết cho $(n+1)$ nên $2A : (n+1)$ (1)

Lại có $2A - 2n^5 = [(n-1)^5 + 1^5] + [(n-2)^5 + 2^5] + \dots$ chia hết cho n

Do $2n^5 : n$ nên $2A : n$ (2)

Do $2n^5 : n$ nên $2A : n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2A$ chia hết cho $n(n+1)$ do đó $2A : 2B \Rightarrow A : B$ (đpcm)

Dạng 5: Sử dụng phương pháp xét số dư

Cơ sở phương pháp: Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p ta xét số n có dạng $n = kp + r$ với $r \in \{0; 1; 2; \dots; p-1\}$.

★**Thí dụ 15.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6

Lời giải

Trong 2 số n và $(7n+1)$ phải có một số chẵn nên $n(2n+1)(7n+1) : 2$

Mà $(3, 2) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n+1)(7n+1):3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n+1)(7n+1) = 3k(6k+1)(21k+1):3$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n+7 = (6k+9):3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1):3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n+1 = (21k+15):3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1):3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6.

★**Thí dụ 16.** Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$ (*)

Chứng minh rằng $(x+y+z)$ chia hết cho 27

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu 3 số x, y, z chia cho 3 có số dư khác nhau thì $(x-y), (y-z), (z-x)$ sẽ đều không chia hết cho 3 do đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ sẽ không chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số $(x+y+z)$ sẽ chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu 3 số x, y, z có 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì $(x-y), (y-z), (z-x)$ sẽ có một hiệu chia hết cho 3 do đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ sẽ chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số $(x+y+z)$ sẽ không chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy 3 số x, y, z chia cho 3 phải cùng số dư, khi đó $(x-y), (y-z), (z-x)$ sẽ đều chia hết cho 3 nên tích $(x-y)(y-z)(z-x)$ sẽ chia hết cho 27. Mặt khác theo giả thiết (*) ta có $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$ nên $(x+y+z)$ chia hết cho 27. Vậy bài toán được chứng minh.

📁 **Dạng 6: Sử dụng phương pháp phản chứng**

Cơ sở phương pháp: Để chứng minh $A(x)$ không chia hết cho n ta giả sử $A(x)$ chia hết cho n sau đó dùng lập luận để chỉ ra mâu thuẫn để chỉ ra điều giả sử là sai.

★**Thí dụ 17.** Chứng minh rằng $n^2 + n - 16$ không chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Giả sử $n^2 + n - 16$ chia hết cho 25.

Do $n^2 + n - 16$ chia hết cho 25 nên cũng chia hết cho 5.

Ta có: $n^2 + n - 16 = (n+3)(n-2) - 10$

Do $n^2 + n - 16$ và 10 chia hết cho 5 nên $(n + 3)(n - 2)$ chia hết cho 5 (1)

Mặt khác $(n + 3)$ và $(n - 2)$ có hiệu bằng 5 nên chúng cùng chia hết cho 5 hoặc cùng không chia hết cho 5, lại do (1) nên $(n + 3)$ và $(n - 2)$ cùng chia hết cho 5 suy ra ta có $(n + 3)(n - 2)$ chia hết cho 25.

Tức là $n^2 + n - 16$ chia cho 25 dư 15 mâu thuẫn với giả sử, vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 18.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n^3 chia hết cho 3 thì n cũng chia hết cho 3

Lời giải

Giả sử n không chia hết cho 3. Khi đó n có dạng $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ (với k là số tự nhiên)

Nếu $n = 3k + 1$ thì $n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho 3

Nếu $n = 3k + 2$ thì $n^3 = (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8$ không chia hết cho 3

Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn suy ra n phải chia hết cho 3 vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 19.** Chứng minh 2 số dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì mỗi số đều phải chia hết cho 3

Lời giải

Giả sử 2 số nguyên dương a, b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn số đó là a . Khi đó $a = 3k + 1$ hoặc $a = 3k + 2$ với k là số tự nhiên, ta có $a^2 = 9k^2 + 6k + 1$ nếu a chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ luôn có dạng $3m + 1$ hoặc $3m + 2$, nghĩa là không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 7: Sử dụng phương pháp quy nạp

Cơ sở phương pháp: Để kiểm tra mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ ta làm như sau:

- 1) Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
- 2) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

★**Thí dụ 20.** Chứng minh rằng $n(2n^2 + 7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Với $n = 1$ thì ta có: $n(2n^2 + 7) = 1 \cdot (2 + 7) = 9 : 3$, do đó bài toán đúng với $n = 1$

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ tức là:

$$k(2k^2 + 7) : 3 \text{ hay } k(2k^2 + 7) = 3x \left(x \in \mathbb{N}^* \right),$$

ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} (k+1) \left[2(k+1)^2 + 7 \right] &= (k+1)(2n^2 + 4n + 9) \\ &= 2n^3 + 4n^2 + 9n + 2n^2 + 4n + 9 \\ &= (2n^3 + 7n) + (6n^2 + 6n + 9) \\ &= 3x + 3(2n^2 + 2n + 3) = 3y : 3 \end{aligned}$$

Do đó $n(2n^2 + 7)$ chia hết cho 3 với $n = k + 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

★**Thí dụ 21.** Chứng minh rằng $A = 4n^2 + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

Với $n = 1$ thì ta có: $A = 18$ chia hết cho 9, do đó bài toán đúng với $n = 1$

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ tức là:

$$4k^2 + 15k - 1 : 9 \text{ hay } 4k^2 + 15k - 1 = 9x \left(x \in \mathbb{N}^* \right) \Leftrightarrow 4k^2 = 9x - 15k + 1,$$

ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\ &= 4(9x - 15k + 1) + 15k + 14 \\ &= 36x - 45k + 18 : 9 \end{aligned}$$

Do đó $A = 4n^2 + 15n - 1$ chia hết cho 9 với $n = k + 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 8: Sử dụng nguyên lý Dirichlet

Cơ sở phương pháp: Đầu tiên ta phải nắm được nguyên lý Dirichle: “Nhất $m = kn + 1$ con thỏ vào k ($k < n$) chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $n + 1$ con thỏ”

Áp dụng nguyên lý Dirichle vào bài toán chia hết như sau: “Trong $m = kn + 1$ số có ít nhất $n + 1$ số chia hết cho k có cùng số dư”

★**Thí dụ 22.** Chứng minh trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Lời giải

Lấy 101 số nguyên bất kì chia cho 100 thì theo nguyên lý Dirichle có có ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 100. Suy ra trong 101 số đã cho tồn tại ít nhất 2 số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

★**Thí dụ 23.** Cho 2014 số tự nhiên bất kì $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2014}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2014 hoặc tổng một số số chia hết cho 2014.

Lời giải

Xét 2014 số: $S_1 = x_1; S_2 = x_1 + x_2; \dots; S_{2014} = x_1 + x_2 + \dots + x_{2014}$

Nếu tồn tại S_i với $i = 1, 2, 3, \dots, 2014$ chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

Nếu không tồn tại S_i với $i = 1, 2, 3, \dots, 2014$ chia hết cho 2014. Dem 2014 số này chia cho 2014 nhận được 2014 số dư. Giá trị của các số dư nhận được thuộc vào tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 2013\}$. Vì 2014 số dư mà chỉ có 2013 giá trị nên theo nguyên lý Dirichlet có 2 số dư bằng nhau.

Kí hiệu hai số đó là S_m, S_n có cùng số dư khi chia cho 2014
 $\{m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < m \leq 2014\}$

Thì hiệu: $S_m - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m$ chia hết cho 2014.

Dạng 9: Xét đồng dư

Tóm tắt lý thuyết về đồng dư:

Định nghĩa: Cho a, b là số nguyên (n là số nguyên dương). Ta nói a đồng dư với b theo modun n và kí hiệu $a \equiv b \pmod{n}$ nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n .

Như vậy: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b):n$. Ví dụ: $2019 \equiv 9 \pmod{5}$

Một số tính chất cơ bản:

1) Với mọi số nguyên a ta có: $a \equiv a \pmod{n}$

2) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$

3) $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

4) $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 4)

$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{n}$
 $\Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \equiv (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \pmod{n}$

5) $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 5)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{n} \\ \Rightarrow (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \equiv b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \pmod{n}$$

$$6) a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung của a và b sao cho $(d, m) = 1$ thì

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$$

$$8) \text{ Nếu } a \equiv b \pmod{m} \text{ và } d \text{ là ước chung của } a, b, m \text{ thì } \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

9) Nếu $a \equiv r \pmod{m}$ và $0 \leq r < m$, thì r chính là số dư của phép chia a cho m .

Cơ sở phương pháp: Sử dụng định nghĩa và các tính chất của đồng dư thức để giải bài toán chia hết.

★**Thí dụ 24.** Chứng hai số: $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$

Chứng minh rằng A và B đều là bội số của 7

Lời giải

$$\text{Ta có: } 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} - 1 : 7$$

Vậy A là bội của 7.

$$\text{Từ } 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\text{Mà } 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} + 1 : 7$$

Vậy B là bội của 7.

★**Thí dụ 25.** Tìm số dư của phép chia: $1532^5 - 1$ cho 9.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9}$$

$$\text{Mà } 2^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$$

Vậy số dư của phép chia $1532^5 - 1$ cho 9 là 4.

★**Thí dụ 26.** Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$$

$$\text{Do } 25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7 \cdot 25^n \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\text{Mà } 7.6^n + 12.6^n = 19.6^n : 19 \Rightarrow 7.25^n + 12.6^n : 19 \Rightarrow A = 7.5^{2n} + 12.6^n : 19$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 10: Sử dụng tính chất chia hết và áp dụng định lý Fermat nhỏ

Cơ sở phương pháp: Sử dụng tính chất chia hết và áp dụng định lý Fermat nhỏ để giải toán.

Định lý Fermat nhỏ: Với mọi số nguyên a và số nguyên tố p thì $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Chứng minh:

Ta có: $a^p \equiv a \pmod{p} \Leftrightarrow a(a^{p-1} - 1) : p$

+) Nếu $a : p$ thì bài toán được chứng minh.

+) Nếu a không chia hết cho p thì ta có $2a, 3a, 4a, \dots, (p-1)a$ cũng không chia hết cho p

Gọi $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ lần lượt là số dư khi chia cho $a, 2a, 3a, 4a, \dots, (p-1)a$ cho p thì chúng thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ và đôi một khác nhau. Vì chẳng hạn $r_1 = r_3$ thì $(3a - a) : p$ hay $2a : p$ thì p chỉ có thể bằng 2 mà $p = 2$ thì bài toán không đúng.

Do đó: $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$.

Ta có:

$$a \equiv r_1 \pmod{p}$$

$$2a \equiv r_2 \pmod{p}$$

.....

$$(p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p}$$

Nhân theo vế suy ra: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot a^{p-1} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Vì ƯCLN $(a, p) = 1$ nên $a^p \equiv a \pmod{p}$

Vậy với mọi số nguyên a và số nguyên tố p thì $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Cách phát biểu khác của định lý Fermat nhỏ như sau:

Với mọi số nguyên a và số nguyên tố p , ƯCLN $(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

★**Thí dụ 27.** Cho p và q là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho pq .

Lời giải

Vì q là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

Do đó: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$

Vì vai trò của p, q bình đẳng nên ta dễ dàng suy ra: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Do $\text{UCLN}(p, q) = 1$ nên $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ hay $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho pq .

★**Thí dụ 28.** (Đề thi HSG lớp 9 TP Hải Phòng 2014-2015)

Với p là số nguyên tố, đặt $n = \frac{2^{2p} - 1}{3}$. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2^n - 2$ không chia hết cho n .

Lời giải

Với $p = 2$, ta có $n = 5 \Rightarrow 2^5 - 2 = 30 : 5$

Với $p = 3$, ta có $n = 21 \Rightarrow 2^{21} - 2 = 8^7 - 2 \not\equiv 7 \Rightarrow 2^{21} - 2 = 8^7 - 2 \not\equiv 21$

Với $p > 3$, ta có $2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$, $n - 1 = \frac{4(2^{p-1} - 1)(2^{p-1} + 1)}{3}$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{3}$ (1)

Theo định lý Fermat nhỏ ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (2)

Từ (1), (2) và $(p, 3) = 1$ suy ra $2^{p-1} - 1 : 3p$ mặt khác $n - 1 : 2p \Rightarrow 2^{n-1} - 1 : 2^{2p} - 1 : n$
 $2^{2p} - 1 : n \Rightarrow 2^{n-1} - 1 : n \Rightarrow 2^n - 2 : n$.

Vậy $p = 3$ là giá trị phải tìm.

Dạng 11: Các bài toán quan hệ chia hết với đa thức

★**Thí dụ 29.** Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$.

Tính $2a - 3b$

Lời giải

Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$ nên:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$

Vậy $2a - 3b = 0$

★**Thí dụ 30.** Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Lời giải

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó : $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

Do đó : $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

★**Thí dụ 31.** Chứng minh rằng: $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Lời giải

Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Ta có $f(0) = (-1)^{2018} + 1^{2018} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số x

Ta có $f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2018} + (1^2 - 1 + 1)^{2018} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số $x - 1$ mà các thừa số x và $x - 1$ không có nhân tử chung do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$

Vậy $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Dạng 12: Tìm điều kiện biến để chia hết

★**Thí dụ 32.** Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Lời giải

Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$$(4a - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) : (a^2 + 3) \quad (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a + 1 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (16a^2 - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 49:(a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3 = 7 \\ a^2 + 3 = 49 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta được $a = 2$ và $a = -2$ đều thỏa mãn.

★**Thí dụ 33.** Tìm số tự nhiên n để $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3$ chia hết cho 10.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3 = 2(2n^2 + 6n + 7)$$

$$\begin{aligned} A:10 &\Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 7:5 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2:5 \Leftrightarrow 2(n^2 + 3n + 1):5 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1:5 \end{aligned}$$

Do đó $n(n+3)$ có tận cùng là 4 hoặc 0 hay n có tận cùng là 1 hoặc 6

★**Thí dụ 34.** Tìm số nguyên dương n để $(n+3)(n+4)$ chia hết cho $3n$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (n+3)(n+4):3n \Leftrightarrow n^2 + 7n + 12:3n \Leftrightarrow n^2 + n + 12:3n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 + n + 12:n & (1) \\ n^2 + n + 12:3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } 12:n \Rightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } n(n+1):3 \Rightarrow \begin{cases} n = 3k \\ n = 3k + 2 \end{cases} (k \in \mathbb{N})$$

Loại các số có dạng $n = 3k + 1$ ở (1) ta được:

n	2	3	6	12
$3n$	6	9	18	36
$n^2 + n + 12$	18	24	54	168

Chỉ có $n = 2$ và $n = 6$ thì $n^2 + n + 12$ chia hết cho $3n$ do đó: $(n+3)(n+4):3n$

Vậy $n = 2$ và $n = 6$.

TỔNG KẾT CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ÁP DỤNG

Để làm giải tốt các bài toán về chia hết, chúng ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp đã nêu trên, ở nhiều bài toán chia hết chúng ta có thể giải bằng nhiều phương pháp, nhưng có khi cũng một bài toán nhìn có vẻ tương tự như vậy nhưng chỉ có một phương pháp có thể giải quyết. Để mô phỏng về điều này tôi sẽ trích một bài viết của tác giả Nguyễn Đức Tấn trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ:

Bài toán: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Cách 1: (Sử dụng phương pháp xét số dư)

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3k(k+1) + 1$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 9k(k+1) + 3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3(3k^2 + 5k + 2) + 1$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 2: (Sử dụng phương pháp tách tổng)

Ta có: $n^2 + n + 1 = (n-1)(n+2) + 3$

Do $(n+2) - (n-1) = 3$ nên $(n+2)$ và $(n-1)$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3

Nếu $(n+2):3; (n-1):3 \Rightarrow (n-1)(n+2):9$ nên $(n-1)(n+2) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(n+2)$ và $(n-1)$ đều không chia hết cho 3 thì $(n-1)(n+2) + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 3: (Sử dụng phương pháp phản chứng)

Giả sử $(n^2 + n + 1):9$. Đặt $n^2 + n + 1 = 9m$ ($m \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow n^2 + n + 1 - 9m = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta = 36m - 3 = 3(12m - 1)$

Ta thấy Δ không thể là số chính phương do chỉ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên (*) không có nghiệm. Vô lý!

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Cách 4: Ta có: $4(n^2 + n + 1) = (2n+1)^2 + 3$

Nếu $(2n+1):3 \Rightarrow (2n+1)^2:9$ nên $(2n+1)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(2n+1)$ không chia hết cho 3 thì $(2n+1)^2$ không chia hết cho 9 nên $(2n+1)^2 + 3$ sẽ không chia hết cho 3 vì thế cũng sẽ không chia hết cho 9.

Vậy $4(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9 nên $n^2 + n + 1$ sẽ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Các bạn rèn luyện khả năng sử dụng các phương pháp trong chứng minh các bài toán về chia hết thông qua các bài toán tương tự sau:

1) Chứng minh: $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

2) Chứng minh: $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 49.

3) Chứng minh: $n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.

Tuy nhiên với bài toán:

Chứng minh: $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên n .

Ta dễ thấy với các cách 1, 2, 3 có lẽ chúng ta phải bó tay, khai thác các giải 4 chú ý $343 = 7^3$ ta có lời giải thật “dễ thương” sau:

$$9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 = (3n+1)^3 - 49.$$

Nếu $(3n+1):7 \Rightarrow (3n+1)^3 : 7^3 = 343$ nên $(3n+1)^3 - 49$ sẽ không chia hết cho 343.

Nếu $(3n+1)$ không chia hết cho 7 thì $(3n+1)^3 - 49$ không chia hết cho 7 nên

$(3n+1)^3 - 49$ không chia hết cho $343 = 7^3$.

Vậy $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ sẽ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên n .

Do đó để giải toán chúng ta cần linh hoạt và nắm vững các phương pháp giải để có thể vận dụng tốt ở các bài toán khác nhau!

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Chứng minh rằng $a^5 - a : 30$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Câu 2. a) Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

b) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

Câu 3. Chứng minh rằng: $A = \left[n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Chứng minh rằng $n^3 - 28n$ chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

Câu 5. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Câu 6. Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 7. Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Câu 8. Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 9. Chứng minh rằng

- a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17
- b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 10. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Thủy Nguyên 2018-2019)

Chứng minh rằng $A = n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

Câu 11. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Hà 2016-2017)

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

Câu 12. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Kinh Môn 2013-2013)

Cho a, b là số nguyên thỏa mãn: $2a^2 + 3ab + 2b^2$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 7.

Câu 13. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang 2018-2019)

Cho n là số nguyên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

Câu 14. (Đề thi HSG Thành Phố Hải Phòng 2018-2019)

Cho biểu thức $P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}$ với $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q = a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \dots + a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

Câu 15. (Đề thi Chọn HSG lớp 9 THCS Hiệp An 2018-2019)

Cho x là số tự nhiên chẵn. Chứng tỏ rằng biểu thức $M = \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{12}$ có giá trị là số nguyên.

Câu 16. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh 2013-2014)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Câu 17. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 20. (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Hoàng Hóa năm 2014-2015)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x ; y)$ với $x > 1, y > 1$ sao cho

$(3x + 1) \vdots y$ đồng thời $(3y + 1) \vdots x$.

Câu 21. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoàng Hóa 2015-2016)

Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$ chia hết cho 125.

Câu 22. (đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thanh Oai 2012-2013)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

Câu 23. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc 2016-2018)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh $A = xy$ chia hết cho 12

Câu 24. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoài Nhon 2018-2019)

Chứng minh rằng số tự nhiên $A = 1.2.3....2017.2018. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$

chia hết cho 2019.

Câu 25. Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2010$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 26. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 27. Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 28. (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên.

Chứng minh rằng: Nếu $f(x) \vdots 7$ với $\forall x \in \mathbb{Z}$ thì từng hệ số của $f(x)$ cũng $\vdots 7$

Câu 29. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2 + 12x + 30$

Câu 30. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 31. (đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thạch Hà 2016-2017)

Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5

Câu 32. (Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam 2018-2019)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20} - 1$ chia hết cho 100

Câu 33. (Đề thi HSG lớp 9 TP Thanh Hóa 2016-2017)

Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Câu 34. (Đề thi HSG huyện Lê Ninh 2018-2019)

Cho $N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên. Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

Câu 35. Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 36. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì:

$$5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$$

Câu 37. Chứng minh rằng $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

Câu 38. Tìm đa thức $f(x)$ biết: $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 5; $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 7; $f(x)$ chia cho $(x - 2)(x - 3)$ được thương là $x^2 - 1$ và đa thức dư bậc nhất với x

Câu 39. Cho số tự nhiên $n > 3$.

Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Câu 40. (Đề thi HSG lớp 9 TP Hải Phòng 2017-2018)

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho p .

Câu 41. (Trích đề Chuyên toán Sư Phạm Hà Nội 2019-2020)

Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

Câu 42. (Trích đề Phổ Thông năng khiếu Hồ Chí Minh 2019-2020)

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho $2^n + 1$ chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho $2^m - 1$ với mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \leq n$.

Câu 43. (Trích đề Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số $M = 9 \cdot 3^{4n} - 8 \cdot 2^{4n} + 2019$ chia hết cho 20.

Câu 44. (Trích đề Chuyên Nam Định 2018-2019)

Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn $n^3 + 2019$ chia hết cho 6.

Câu 45. (Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội 2018-2019)

Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y^2; xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5.

Chứng minh $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5

Câu 46. (Trích đề Chuyên Nam Định 2016-2017)

Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc$ và $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết cho $a + b + c + 1$.

Câu 47. (Trích đề Chuyên Bình Định 2018-2019)

Cho n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho số 323

Câu 48. (Trích đề Chuyên Lam Sơn 2018-2019)

Cho n số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên k ta đặt $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$

Chứng minh rằng $S_{2019} : S_1$

Câu 49. (Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!$ (1) với x, y, z là ẩn và $9!$ là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1).

Câu 50. (Trích đề Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1$ chia hết cho 24

Câu 51. (Trích đề Chuyên Phan Bội Châu 2018-2019)

Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương

Câu 52. (Trích đề Chuyên Lâm Đồng 2018-2019)

Với n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng: $(20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323$

Câu 53. (Trích đề Chuyên Hải Dương 2018-2019)

Đặt $N = a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}$, $M = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5$ ($a_1, a_2, \dots, a_{2018} \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30

Câu 54. (Trích đề Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh nếu $a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}$ chia hết cho 6 thì $a^{2018} + b^{2019} + c^{2020}$ cũng chia hết cho 6

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 55. (Trích đề Chuyên Hải Dương 2016-2017)

Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết: $M = n \cdot 4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

Câu 56. (Trích đề Chuyên Quảng Ngãi 2018-2019)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n không chia hết cho 81.

Câu 57. (Trích đề Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $4(m+n)^2 - mn$ chia hết cho 225. CMR : mn cũng chia hết cho 225

Câu 58. (Chuyên toán Thanh Hóa 2018-2019)

Cho n là số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên dương k đặt $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Chứng minh $S_{2019} \vdots S_1$.

Câu 59. (Trích đề Chuyên Hòa Bình 2015-2016)

Chứng minh rằng nếu p và $(p+2)$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Câu 60. (Trích đề Chuyên Phú Thọ 2015-2016)

Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Câu 61. (Trích đề Chuyên Bình Phước 2017-2018)

Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Câu 62. (Trích đề Chuyên Quảng Nam 2015-2016)

Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + \dots + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho $n(n+1)$

Câu 63. (Trích đề Chuyên Quảng Nam 2016-2017)

Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

Câu 64. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Đồng Nai 2019)

Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

Câu 66. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng A 2019)

Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Câu 67. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng B 2019)

Chứng minh rằng $A = 4^n + 17$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Câu 68. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2019)

Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Câu 69. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bình Phước 2019)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Câu 70. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Khánh Hòa 2018)

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Câu 71. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2018)

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p .

Câu 72. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2017)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.
2. Cho x, y, z là các số dương khác nhau đôi một và $x^3 + y^3 + z^3$ chia hết cho $x^2y^2z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$

Câu 73. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Nam 2017)

Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Câu 74. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Long 2016)

Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

Câu 75. (Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2016)

Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2(c^2 - 8d^3)$.

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 76. (Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2015)

Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a, b, c trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (a - b + c)^3$ Chia hết cho 96

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\ &= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1) \end{aligned}$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 2. a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n+1)^3 + 2(n+1) = \dots \\ &= n(n+1)(n+2) + 3(n+1) \end{aligned}$$

Khi đó: $3(n+1) : 3$; $n(n+1)(n+2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3 $\Rightarrow A : 3$

b) Ta có:

$$a = 13k + 2, b = 13n + 3$$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13n + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1) : 13$$

Câu 3. Ta có: $A = [n^3(n^2 - 7)^2 - 36n]$

$$\begin{aligned} &= n[n(n^2 - 7) - 6][n(n^2 - 7) + 6] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\ &= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n[(n^2 - 1) - 6(n+1)][n(n^2 - 1) - 6(n-1)] \\ &= n(n+1)(n^2 - n - 6)(n-1)(n^2 + n - 6) = n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3) \end{aligned}$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A : 7 \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 4. Ta có: $n = 2k$, với k là số nguyên; $n^3 - 28n = (2k)^3 - 28(2k) = 8k^3 - 56k$

$$\begin{aligned} &= 8k(k^2 - 7) = 8k(k^2 - 1 - 6) \\ &= 8k(k^2 - 1) - 48k = 8k(k-1)(k+1) - 48k \end{aligned}$$

$k(k-1)(k+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên

$8k(k-1)(k+1) - 48k$ chia hết cho 48

Câu 5. Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó n lẻ nên n có dạng $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$

Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = (2k+1).2k.(2k+2) = 4.k.(k+1)(2k+1)$

Vì k và $(k+1)$ là 2 số tự nhiên liên tiếp suy ra:

$$k(k+1):2 \Rightarrow 4k(k+1)(2k+1):8 \Rightarrow (n^3 - n):8$$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1);(2) suy ra

$$(n^3 - n):24 \quad (\text{dpcm})$$

Câu 6. Ta có:

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 7. Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \\ &= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\ &= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } C &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3 \\ &= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1) \\ &= n(n+1)(n+2) + 3(n+1) \end{aligned}$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1):3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

Câu 8. Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} + \dots):2010 \quad (1)$$

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots):2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có dpcm.

Câu 9.

$$\text{a) Ta có: } 8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17 \text{ chia hết cho 17}$$

b) Ta có:

$$19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} + 69^{18} - 69^{17} + \dots + 69^{18}) = 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} + 69^{18} - 69^{17} + \dots + 69^{18})$$

chia hết cho 44

Câu 10.

Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 3k + 2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 9k + 4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ thì $A = 9k^2 + 15k + 8$ không chia hết cho 3.

Do đó A không chia hết cho 3 với mọi số nguyên n .

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n .

Câu 11. Ta có : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$

$$\begin{aligned} &= (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) + (24n - 24) = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + 24(n - 1) \\ &= n[(n^3 + n^2) + (5n^2 + 5n) + (6n + 6)] + 24(n - 1) = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6) + 24(n - 1) \\ &= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 24(n - 1) \end{aligned}$$

Vì $n; n + 1; n + 2; n + 3$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4. Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ chia hết $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ và $24(n - 1)$ chia hết cho 24 nên $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

Câu 12. Ta có: $2a^2 + 3ab + 2b^2 : 7$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 - 2ab) + 7ab : 7 \Rightarrow 2(a - b)^2 + 7ab : 7$$

$$\text{Do } 7ab : 7 (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2(a - b)^2 : 7 \text{ do } (2, 7) = 1$$

$$\text{Từ đó ta có } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : 7$$

$$\text{Vậy } (a^2 - b^2) : 7$$

Câu 13. Vì n là số nguyên không chia hết cho 3 nên $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{- Xét } n = 3k + 1 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+1)} = 3^{6k} \cdot 3^2 = (3^3)^{2k} \cdot 9 = 27^{2k} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+1} = 3^{3k} \cdot 3 = (3^3)^k \cdot 3 = 27^k \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 9 + 3 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{- Xét } n = 3k + 2 \text{ ta có: } 3^{2n} = 3^{2(3k+2)} = 3^{6k} \cdot 3^4 = (3^3)^{2k} \cdot 81 = 27^{2k} \cdot 81 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3^n = 3^{3k+2} = 3^{3k} \cdot 3^2 = (3^3)^k \cdot 9 = 27^k \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$\text{Suy ra: } P = 3^{2n} + 3^n + 1 \equiv 3 + 9 + 1 = 13 \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy, với n là số nguyên không chia hết cho 3 thì $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

Câu 14. Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$$x^5 - x = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) : 6 \quad (1) \quad (\text{vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp})$$

Với $x = 5q$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x \div 5$

Với $x = 5q \pm 1$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x \div 5$

Với $x = 5q \pm 2$ ($q \in \mathbb{Z}_+$) thì $x^5 - x \div 5$

Suy ra $x^5 - x \div 5$ (2) mà $(5, 6) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $x^5 - x \div 30$

Xét hiệu $Q - P = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + (a_3^5 - a_3) + \dots + (a_{2019}^5 - a_{2019})$

Vì $x^5 - x \div 30$ nên $Q - P \div 30$

Mà theo bài ra $P \div 30$ nên $Q \div 30$

Câu 15. Vì a là số tự nhiên chẵn nên $a = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \frac{8k^3}{24} + \frac{4k^2}{8} + \frac{2k}{12} = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \\ &= \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \end{aligned}$$

Ta có : $k(k+1) \div 2 \Rightarrow k(k+1)(2k+1) \div 2$

Ta cần chứng minh $k(k+1)(2k+1) \div 3$

+ Nếu $k = 3n$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $k(k+1)(2k+1) \div 3$

+ Nếu $k = 3n + 1$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $2k+1 \div 3$

+ Nếu $k = 3n + 2$ (với $n \in \mathbb{N}$) thì $k+1 \div 3$

Như vậy $\forall k \in \mathbb{N}$ ta có $k(k+1)(2k+1)$ luôn chia hết cho 2 và cho 3. Mà $(2, 3) = 1 \Rightarrow$

$k(k+1)(2k+1) \div 6$

Vậy A có giá trị nguyên.

Câu 16. Với $n = 0$ ta có $A(0) = 19 \div 19$

Giả sử A chia hết cho 19 với $n = k$ nghĩa là: $A(k) = 7 \cdot 5^{2k} + 12 \cdot 6^k \div 19$

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với $n = k + 1$ nghĩa là phải chứng minh:

$$A(k+1) = 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 12 \cdot 6^{k+1} \div 19$$

Ta có: $A(k+1) = 7 \cdot 5^{2(k+1)} + 12 \cdot 6^{k+1} \div 19$

$$\begin{aligned}
& 7 \cdot 5^{2k} \cdot 5^2 + 12 \cdot 6^n \cdot 6 \\
& = 7 \cdot 5^{2k} \cdot 6 + 7 \cdot 5^{2k} \cdot 19 + 12 \cdot 6^n \cdot 6 \\
& = 8 \cdot A(k) + 7 \cdot 5^{2k} \cdot 19 : 19
\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Câu 17. Ta có:

$$\begin{aligned}
5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} &= 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n} \\
&= 5^n (59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n) \\
&59 \cdot 5^n : 59 \text{ và } 8 \cdot (64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59
\end{aligned}$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 18. Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$\begin{aligned}
A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\
&= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016})
\end{aligned}$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 19. a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b) \left[(a+b)^2 - 3ab \right]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b) \left[(a+b)^2 - 3ab \right]$ chia hết cho 9

$$\text{b) } n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1) \\
&\Leftrightarrow (n-1)(n+1) : (n+1)(n^2 - n + 1) \\
&\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1 \\
&\Rightarrow n(n-1) : n^2 - n + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 &\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1) \\
&\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1
\end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

$$+) \quad n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) \quad n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 20.

Để thấy $x \neq y$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x > y$.

Từ $(3y + 1) \vdots x \Rightarrow 3y + 1 = p.x \quad (p \in \mathbb{N}^*)$.

Vì $x > y$ nên $3x > 3y + 1 = p.x \Rightarrow p < 3$. Vậy $p \in \{1; 2\}$

- Với $p = 1: \Rightarrow x = 3y + 1 \Rightarrow 3x + 1 = 9y + 4 \vdots y \Rightarrow 4 \vdots y$

Mà $y > 1$ nên $y \in \{2; 4\}$

+ Với $y = 2$ thì $x = 7$.

+ Với $y = 4$ thì $x = 13$.

- Với $p = 2: \Rightarrow 2x = 3y + 1 \Rightarrow 6x = 9y + 3 \Rightarrow 2(3x + 1) = 9y + 5$

Vì $3x + 1 \vdots y$ nên $9y + 5 \vdots y$ suy ra $5 \vdots y$, mà $y > 1$ nên $y = 5$,

suy ra $x = 8$.

Tương tự với $y > x$ ta cũng được các giá trị tương ứng.

Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là: $(7; 2); (2; 7); (8; 5); (5; 8); (4; 13); (13; 4);$

Câu 21. Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n - 4)(n + 2)(n + 6)$.

Thử với $n = 1; 2; 3$ thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với $n = 4$ thì $F = 0$ chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: $n = 4$.

Câu 22. Theo đề bài có: $a + b^2 = k(a^2b - 1) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb \quad (1)$$

$$\text{Với } ka^2 - b = m \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow m + b = ka^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $(m - 1)(b - 1) = mb - b - m + 1$

$$= a + k - ka^2 + 1 = (a + 1)(k + 1 - ka) \quad (3)$$

Vì $m > 0$ theo (1) nên $(m - 1)(b - 1) \geq 0$. Từ (3)

$$\Rightarrow k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow k + 1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a - 1) = 0 \\ k(a - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2, k = 1 \end{cases}$$

* Nếu $a = 1$ từ (3) $\Rightarrow (m - 1)(b - 1) = 2 \Rightarrow b = 2$ hoặc $b = 3$

$$\Rightarrow (a; b) = (1; 2) \text{ và } (1; 3)$$

* Nếu $a = 2, k = 1 \Rightarrow (m - 1)(b - 1) = 0$

$$\text{Khi } m = 1 \text{ từ (1)} \Rightarrow (a; b) = (2; 3)$$

$$\text{Khi } b = 1 \Rightarrow (a; b) = (2; 1)$$

Thử lại ta có đáp số $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1)$

Câu 23.

- Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \quad (\text{Vô lí})$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

$$\text{TH1: } \begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ y \equiv \pm 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4} \quad (\text{vô lí})$$

TH2: Trong hai số x, y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ y \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ y^2 \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod{8} \quad (\text{vô lí})$$

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 24.

Ta có

$$B = 1.2.3.....n. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) (*) \text{ là số tự nhiên. Thật vậy:}$$

Với $n=1$ thì $B=1 \in \mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Với $n=2$ thì $B=3 \in \mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$, nghĩa là $B = 1.2.3.....k. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{N}$.

Cần chứng minh (*) đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là

$$B = 1.2.3.....(k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(k+1)}\right) \in \mathbb{N}.$$

Ta có:

$$B = 1.2.3.....(k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(k+1)}\right) = 1.2.3..... \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) (k+1) + 1.2.3.....k$$

$$\text{Có } \begin{cases} 1.2.3..... \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N} \\ k+1 \in \mathbb{N} \\ 1.2.3.....k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow B \in \mathbb{N}.$$

Vậy $1.2.3.....n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n = 2k$ thì $1.2.3.....2k \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)$

là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}\right)(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018}\right) \cdot 1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases} 1011:3 \\ 1342:673 \end{cases} \Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018:2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1009}\right) \cdot 1010.1011.....1342.....2018:2019.$

Và $\begin{cases} 3:3 \\ 673:673 \end{cases} \Rightarrow 1.2.3.....673.....1009:2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009 \cdot \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \dots + \frac{1}{2018}\right) \cdot 1010.1011.....2018:2019.$

Vậy số tự nhiên $A = 1.2.3.....2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho

2019.

Câu 25. Ta có:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010 \\
 &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2010
 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2010 = t^2 - 2t + 1995$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1995$ cho t ta có số dư là 1995

Câu 26. Ta có: $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2) \cdot (x-1) \cdot q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta có: $a=2; b=4$

Câu 27. Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x-3$ dư $x+2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x+2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2) \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 - 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6 \text{ chia hết cho } x^2 + 2 \text{ mà } x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$$

Thử lại ta thấy $x=1; x=-2$ thỏa mãn

Vậy với $x=1; x=-2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Câu 28. Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Do $f(0) = e$ nên $e \div 7$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(1) = a + b + c + d + e \div 7 \\ f(-1) = a - b + c - d + e \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \div 7 \\ b + d \div 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e \div 7 \\ f(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + c \div 7 \\ 4b + d \div 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c \div 7 \\ 4a + c \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a \div 7 \\ c \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \div 7 \\ c \div 7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b + d \div 7 \\ 4b + d \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b \div 7 \\ d \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \div 7 \\ d \div 7 \end{cases}$$

Vậy các hệ số của $f(x)$ đều chia hết cho 7.

Câu 29.

$$\text{Ta có: } (x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = \dots = (x^2 + 12x + 27)(x^2 + 12x + 35) + 2033$$

Đặt $x^2 + 12x + 30 = t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (t-3)(t+5) + 2033$
 $= t^2 + 2t - 15 + 2033 = t(t+2) + 2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033 = (x^2 + 12x + 30)(x^2 + 12x + 32) + 2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9) + 2033$ cho $x^2 + 12x + 30$ là 2018.

Câu 30. Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó
 $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Câu 31. Ta có: $P(0) = d : 5$

$$P(1) = a + b + c + d : 5 \Rightarrow a + b + c : 5 \quad (1)$$

$$P(-1) = -a + b - c + d : 5 \Rightarrow -a + b - c : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2b : 5 \Rightarrow b : 5$ vì $(2, 5) = 1$, suy ra $a + c : 5$

$$P(2) = 8a + 4b + 2c + d : 5 \Rightarrow 8a + 2c : 5 \Rightarrow a : 5 \Rightarrow c : 5$$

Câu 32.

Ta có $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2 + 1$ và $p^2 - 1$ là các số chẵn

$\Rightarrow p^4 - 1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20} - 1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4; 25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Câu 33. Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Câu 34. Ta có :

$$N = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15 = (k^4 - k^2) + (2k^3 - 2k) - (15k^2 - 15)$$

$$= (k^2 - 1)(k^2 + 2k - 15) = (k - 1)(k + 1)(k - 3)(k + 5)$$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số (nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16

Vậy k phải là số nguyên lẻ

Câu 35.

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a + 1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b + 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a + 1)^2 + (5b + 2)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1) : 5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 36. Ta có: $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91

Câu 37. Ta có:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11})$$

$$= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40$$

$$= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40$$

$$\text{Vậy } A : 40$$

Câu 38. Gọi dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $ax + b$

Ta có: $f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + ax + b$

Theo bài ra: $f(2) = 5$ nên ta có: $2a + b = 5$; $f(3) = 7$ nên $3a + b = 7$

$$\Rightarrow a = 2; b = 1$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = (x-2)(x-3)(x^2-1) + 2x + 1$

Câu 39. Ta có: $2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2$ (1)

Ta chứng minh $ab : 3$ (2)

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 40.

Theo giả thiết $p - 5$ chia hết cho 8 nên đặt $p = 8k + 5$ (k là số tự nhiên)

Ta có $\left[(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \right] : (ax^2 - by^2) \Rightarrow a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} : p$

$$\Rightarrow (a^{4k+2} + b^{4k+2})x^{8k+4} - b^{4k+2}(x^{8k+4} + y^{8k+4}) : p$$

$$\text{Mà } a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : a^2 + b^2 = p \text{ và } b < p \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} : p (*)$$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) ta suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p .

Nếu cả hai không chia hết cho p , theo định lý Fec-ma ta có

$$x^{8k+4} \equiv y^{8k+4} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{p} \text{ mâu thuẫn với } (*)$$

Vậy cả hai số x, y cùng chia hết cho p .

Câu 41. Do $a^3 + b^3 + c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7}$, suy ra $x^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}$.

$$\text{Do đó } a^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}, b^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}, c^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}.$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod{7}$, tức $a^3 + b^3 + c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7)=1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 42.

a) $n=3k$ suy ra $2^n + 1 = 8^k + 1 \equiv (-1)^k + 1 \pmod{9}$. Suy ra k lẻ, $k=2t+1$.

Suy ra $n=3(2t+1)=6t+3$.

Nếu $n=3k+1$ ta có $2^n + 1 = 3 \cdot 8^k + 1 \equiv (-1)^k \cdot 3 + 1 \pmod{9}$ suy ra $2^n + 1$ không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1:** Ta có $2^{km} - 1 : 2^m - 1$. Từ $2^{2n} = (2^n + 1)(2^n - 1)$.

Đặt $2n = km + q$ ($0 \leq q < m$).

Khi đó $2^{2n} - 1 = 2^{km+q} - 2^q + 2^q - 1 = 2^q(2^{km} - 1) + 2^q - 1$ chia hết cho $2^m - 1$, suy ra $2^q - 1$ chia hết cho m mà $0 \leq 2^q - 1 < 2^m - 1$, suy ra $q=0$.

Do đó $2^n = km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n + 1 = 2^{k'm} + 1 = 2^{k'm} - 1 + 2$ chia hết cho $2^m - 1$, suy ra 2 chia hết cho $2^m - 1$ vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ nên $n=km'$, suy ra $2^{km'} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$, mà $2^m - 1$ chia hết cho $2^{m'} - 1$ nên $2^{km'} + 1$ chia hết cho $2^{m'} - 1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'} - 1$ vô lý vì $m' > 1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}(2^m - 1) : 2^m - 1$, suy ra $2^n - 2^{n-m} : 2^m - 1$, mà $2^n + 1 : 2^m - 1$ suy ra $2^{n-m} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km} + 1$ chia hết cho $2^m - 1$.

Giả sử $n = km + q$, $0 \leq q < m$.

Chọn k như trên, ta có $2^q + 1$ chia hết cho $2^m - 1$. Mà $q < m$ nên $2^q + 1 = 2^m - 1$, giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Câu 43.

$$M = 9 \cdot 3^{4n} - 8 \cdot 2^{4n} + 2019 = 9 \cdot 81^n - 8 \cdot 16^n + 2019$$

Ta có:

$$81 \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 81^n \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 1(\text{mod } 4)$$

$$8.16^n \equiv 0(\text{mod } 4)$$

$$\Rightarrow M \equiv 1 - 0 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0(\text{mod } 4)$$

$$\text{hay } M : 4 \quad (1)$$

Lại có:

$$81 \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 81^n \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 9.81^n \equiv 9 \equiv 4(\text{mod } 5)$$

$$16 \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 16^n \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 8.16^n \equiv 8 \equiv 3(\text{mod } 5)$$

$$\Rightarrow M \equiv 4 - 3 + 2019 \equiv 2020 \equiv 0(\text{mod } 5)$$

$$\text{hay } M : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M : BCNN(4, 5)$ hay $M : 20$ (đpcm)

Câu 44.

Đặt $n = 6q + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Khi đó $n^3 + 2019$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 3$ chia hết cho 6.

Nếu r chẵn thì $r^3 + 3$ lẻ, do đó $r^3 + 3$ không chia hết cho 6. Suy ra $r \in \{1, 3, 5\}$.

Với $r = 1 \Rightarrow r^3 + 3 = 4$ không chia hết cho 6.

Với $r = 3 \Rightarrow r^3 + 3 = 30 : 6$.

Với $r = 5 \Rightarrow r^3 + 3 = 128$ không chia hết cho 6.

Suy ra $n = 6q + 3$. Mà $0 \leq n \leq 2019 \Rightarrow 0 \leq q \leq 336$.

Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Câu 45. Ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 - 2xy - y) + (xy - 2y^2 - x) &= x^2 - xy - 2y^2 - x \\ &= x^2 + xy - (2xy + y^2) - (x + y) = (x + y)(x - 2y - 1) \end{aligned}$$

Lại có: $x^2 - 2xy - y, xy - 2y^2 - x$ chia hết cho 5

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y - 1) \text{ chia hết cho } 5$$

TH1: Nếu $x + y$ chia hết cho 5 thì $y \equiv -x(\text{mod } 5)$

$$\Rightarrow 0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv x^2 + 2x^2 + x = x(3x + 1)(\text{mod } 5), \text{ do vậy } x \text{ chia hết cho } 5 \text{ hoặc chia } 5 \text{ dư } 3.$$

+) Nếu x chia hết cho 5 thì y cũng vậy, bài toán được chứng minh

+) Nếu x chia cho 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2, thì

$$2x^2 + y^2 + 2x + y \equiv 2.9 + 4 + 2.3 = 30 \equiv 0 \pmod{5}$$

Ta cũng có điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $x - 2y - 1$ chia hết cho 5 thì $x \equiv 2y + 1 \pmod{5}$

$$\Rightarrow 0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv (2y + 1)^2 - 2y(y + 1) - y = y + 1 \pmod{5}$$

Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 nên:

$$2x^2 + y^2 + 2x + y = 2.16 + 16 + 2.4 + 4 = 60 \equiv 0 \pmod{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 46. Giả sử $a; b; c$ là các số nguyên không âm thỏa mãn đề bài, ta có:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 6abc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc \quad (1)$$

$$\text{Phân tích } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3abc(a + b + c)$ hay

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1).$$

Do $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết cho $a + b + c + 1$ nên ta được 1 chia hết cho $a + b + c + 1$

Suy ra $a = b = c = 0$.

Thử lại: $a = b = c = 0$ thỏa mãn. Vậy có duy nhất bộ số $(a; b; c) = (0; 0; 0)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Ta có: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$\Rightarrow a^n - b^n = m(a - b) \quad (a, b, n, m \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

Vì n là số tự nhiên chẵn nên $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A =$

$$20^n - 3^n + 16^n - 1 = 400^k - 9^k + 256^k - 1$$

Áp dụng (*), có:

$$A = (400^k - 1^k) + (256^k - 9^k) = 399x + 247y = 19 \cdot 21x + 19 \cdot 13y \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A : 19 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ chẵn} \quad (1)$$

và có:

$$A = (400^k - 9^k) + (256^k - 1^k) = 391p + 255q = 17 \cdot 23p + 17 \cdot 15q \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A : 17 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ chẵn} \quad (2)$$

mà 17 và 19 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra: $A : 17 \cdot 19$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Vậy $20^n - 3^n + 16^n - 1 : 323$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Câu 48. Ta có ngay: $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ta sẽ chứng minh S_{2019} chia hết cho n và $\frac{n+1}{2}$

Giả sử n lẻ thì $\frac{n+1}{2}$ nguyên. Sử dụng khai triển Newton ta có:

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots + b^{2k}) : (a+b)$$

Do vậy:

$$2(1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019}) = (1^{2019} + n^{2019}) + (2^{2019} + (n-1)^{2019}) + \dots + (n^{2019} + 1^{2019}) : (n+1)$$

$$2(1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019}) = (1^{2019} + (n-1)^{2019}) + (2^{2019} + (n-2)^{2019}) + \dots + ((n-1)^{2019} + 1^{2019}) + 2.n^{2019} : n$$

Do $(n; n+1) = 1$ nên $2(1^{2019} + 2^{2019} + \dots + n^{2019})$ chia hết cho $n(n+1)$

Do vậy $S_{2019} : S_1$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 49. a) Chứng minh rằng.....

Ta có: $9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3 : 2 \Rightarrow x : 2 \Rightarrow x = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow 8m^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9! \Leftrightarrow 4m^3 + y^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9 \text{ là số chẵn}$$

$$\Rightarrow y^3 : 2 \Rightarrow y : 2 \Rightarrow y = 2n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 4m^3 + 8n^3 + 2z^3 = 1.3.4.5.6.7.8.9$$

$$\Leftrightarrow 2m^3 + 4n^3 + z^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9 \text{ là số chẵn}$$

$$\Rightarrow z^3 : 2 \Rightarrow z : 2 \Rightarrow z = 2p \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2m^3 + 4n^3 + 8p^3 = 1.2.3.5.6.7.8.9$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 2n^3 + 4p^3 = 1.3.5.6.7.8.9$$

$$\text{Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có } \begin{cases} m:2 \\ n:2 \\ p:2 \end{cases} (m; n; p \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2m:4 \\ y = 2n:4 \\ z = 2p:4 \end{cases}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại.....

Theo ý a) ta có thể đặt $x = 4a; y = 4b; z = 4c \quad (a; b; c \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow a^3 + 2b^3 + 4c^3 = \frac{9!}{4^3} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3} = 1.3.5.6.7.9 \text{ là số chẵn}$$

$$\Rightarrow a:2 \Rightarrow a = 2u \quad (u \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 8u^3 + 2b^3 + 4c^3 = 1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3 + b^3 + 2c^3 = 1.3.3.5.7.9 = 1.5.7.3^4$$

Lại có:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.5.7.3^4) : 3^4 \Rightarrow (1.5.7.3^4) : 9 \\ x^3 \equiv 0; \pm 1 \pmod{9} \end{array} \right. (x \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow a; b; c : 9 \Rightarrow (4u^3 + b^3 + 2c^3) : 9^3$$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 50.

Ta có nhận xét sau: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$ (1)

Lại có: $-1 \equiv 23 \pmod{24}$ (2)

Cộng vế theo vế của (1); (2) ta được: $p^2 - 1 \equiv 24 \pmod{24} \equiv 0 \pmod{24}$

Vậy $p^2 - 1$ chia hết cho 24 với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 51.

$$n^3 - 1 = (n-1) \cdot (n^2 + n + 1) : p$$

$$(p-1) : n \Rightarrow p-1 \geq n \Rightarrow p \geq n+1$$

Vì $p \geq n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

$$\text{Do đó: } (n-1)(n^2 + n + 1) : p \Leftrightarrow (n^2 + n + 1) : p$$

$$\text{Đặt: } p-1 = kn, \quad k \geq 1 \Rightarrow p = kn+1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (n^2 + n + 1) : (kn+1) \Rightarrow kn+1 \leq n^2 + n + 1$$

$$\Leftrightarrow kn \leq n^2 + n \Leftrightarrow k \leq n+1$$

$$k(n^2 + n + 1) - n(kn+1) : (kn+1)$$

$$\Rightarrow [(k-1)n + k] : (kn+1)$$

$$k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n + k > 0$$

$$\Rightarrow (k-1)n + k \geq kn+1$$

$$\Rightarrow k \geq n+1$$

$$\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2 + n + 1$$

$$\Rightarrow n + p = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Vậy $n + p$ là một số chính phương.

Câu 52. +) Chứng minh hằng đẳng thức

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$$

$$= a^n - b^n$$

+) Vì n là số chẵn, đặt $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ta có:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = 20^{2k} + 16^{2k} - 3^{2k} - 1 = 400^k + 256^k - 9^k - 1$$

Để chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323$, ta cần chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ chia hết cho 19 và 17

Ta có:

$$\begin{aligned}
400^k - 1^k &= (400 - 1)(400^{k-1} + 400^{k-2} \cdot 1 + 400^{k-3} \cdot 1^2 + \dots + 400 \cdot 1^{k-2} + 1^{k-1}) \\
&= 399 \cdot (400^{k-1} + 400^{k-2} \cdot 1 + 400^{k-3} \cdot 1^2 + \dots + 400 \cdot 1^{k-2} + 1^{k-1}) \\
&= 19 \cdot 21 \cdot (400^{k-1} + 400^{k-2} \cdot 1 + 400^{k-3} \cdot 1^2 + \dots + 400 \cdot 1^{k-2} + 1^{k-1}) : 19 \\
256^k - 9^k &= (256 - 9)(256^{k-1} + 256^{k-2} \cdot 9 + \dots + 9^{k-2} \cdot 256 + 9^{k-1}) \\
&= 247 \cdot (256^{k-1} + 256^{k-2} \cdot 9 + \dots + 9^{k-2} \cdot 256 + 9^{k-1}) \\
&= 13 \cdot 19 \cdot (256^{k-1} + 256^{k-2} \cdot 9 + \dots + 9^{k-2} \cdot 256 + 9^{k-1}) : 19 \\
&\Rightarrow (400^k - 1^k + 256^k - 9^k) : 19
\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{aligned}
400^k - 9^k &= (400 - 9)(400^{k-1} + 400^{k-2} \cdot 9 + \dots + 9^{k-2} \cdot 400 + 9^{k-1}) \\
&= 17 \cdot 23 \cdot (400^{k-1} + 400^{k-2} \cdot 9 + \dots + 9^{k-2} \cdot 400 + 9^{k-1}) : 17 \\
256^k - 1 &= (256 - 1)(256^{k-1} + 256^{k-2} \cdot 1 + \dots + 256 \cdot 1^{k-2} + 1^{k-1}) \\
&= 17 \cdot 15 \cdot (256^{k-1} + 256^{k-2} \cdot 1 + \dots + 256 \cdot 1^{k-2} + 1^{k-1}) : 17 \\
&\Rightarrow 400^k - 9^k + 256^k - 1 : 17
\end{aligned}$$

Như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (400^k + 256^k - 9^k - 1) : 19 \\ 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (400^k + 256^k - 9^k - 1) : 17 \end{cases} &\Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : (19 \cdot 17) \\
&\Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323
\end{aligned}$$

Như vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 53. Ta có : $N = a_1 + a_2 + \dots + a_{2018}$; $M = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5$ ($a_1; a_2, \dots, a_{2018} \in \mathbb{Z}^+$)

Xét hiệu

$$\begin{aligned}
M - N &= a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{2018}^5 - a_1 - a_2 - \dots - a_{2018} \\
&= (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + \dots + (a_{2018}^5 - a_{2018})
\end{aligned}$$

$$Ta \text{ có } a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 + 1)(a^2 - 1) = a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ với } 2, 3, 5 \text{ đều là các số nguyên tố}$$

Ta có: $a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$ có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp $a - 1; a; a + 1$ nên

$a(a - 1)(a + 1)$ sẽ chia hết cho 2 và 3

Nếu a chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4 thì lần lượt $a, a - 1, a + 1$ sẽ chia hết cho 5

Nếu a chia 5 dư 2 hoặc 3 thì $a + 1$ sẽ chia hết cho 5

Vậy $a(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1)$ sẽ chia hết cho cả 2; 3; 5 nên sẽ chia hết cho 30

Do vậy $M - N$ chia hết cho 30 do đó M cũng chia hết cho 30

Ta có điều phải chứng minh

Câu 54. Ta có:

$$\begin{aligned} & a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - (a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}) \\ &= a^{2016}(a^2 - 1) + b^{2017}(b^2 - 1) + c^{2018}(c^2 - 1) \\ &= a^{2015} \cdot a(a-1)(a+1) + b^{2016} \cdot (b-1)(b+1) + c^{2017} \cdot c(c-1)(c+1) \end{aligned}$$

Ta có tích 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 6, do có 1 số chẵn và 1 số chia hết cho 3. Do vậy:

$a(a-1)(a+1); b(b-1)(b+1); c(c-1)(c+1)$ đều chia hết cho 6 nên

$$\left[a^{2018} + b^{2019} + c^{2020} - (a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}) \right] : 6$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 55.

+) $n = 2k$ (k nguyên dương): $M = 2k \cdot 4^{2k} + 3^{2k} = 2k \cdot 16^k + 9^k$. Ta có: 16^k và 9^k cùng dư với 2^k chia 7.

$\Rightarrow M$ cùng dư với $(2k \cdot 2^k + 2^k) = 2^k \cdot (2k + 1)$ chia 7 $\Rightarrow (2k + 1)$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k$ chia 7 dư 3, hay $k = 7q + 3 \Rightarrow n = 14q + 6$ ($q \in \mathbb{N}$).

+) $n = 2k + 1$ (k nguyên dương): $M = (2k + 1) \cdot 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 4(2k+1) \cdot 16^k + 3 \cdot 9^k$

$\Rightarrow M$ cùng dư với $(k + 4) \cdot 2^k + 3 \cdot 2^k = (k + 7) \cdot 2^k$ chia 7.

$\Rightarrow k$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k = 7p$ ($p \in \mathbb{N}$).

Vậy $n = 14q + 6$ hoặc $n = 14p + 1$, với p và q là các số tự nhiên.

Câu 56.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì n không chia hết cho 81.

Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3 - 9n + 27 : 81$,

suy ra $n^3 - 9n + 27 : 3$ hay $n :$

$\Rightarrow n = 3k$ khi đó n

mà $n^3 - 9n + 27 : 81$ nên k

Nhưng k

không chia hết cho 3 với mọi k .

Vậy với mọi số tự nhiên n thì

không chia hết cho 81.

Câu 57.

Đặt $A = 4(m+n)^2 - mn$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4A &= 16(m+n)^2 - 4mn = 16(m+n)^2 - [(m+n)^2 - (m-n)^2] \\ &= 15(m+n)^2 + (m-n)^2\end{aligned}$$

$$A:225 = 15^2 \Rightarrow \begin{cases} (m-n):3 \\ (m-n):5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-n)^2:9 \\ (m-n)^2:25 \end{cases} \Rightarrow (m-n)^2:225$$

$$\Rightarrow (m+n)^2:15 \Rightarrow \begin{cases} (m+n):3 \\ (m+n):5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-n):15 \\ (m+n):15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m:15 \\ n:15 \end{cases} \Rightarrow mn:225$$

Vậy $4(m+n)^2 - mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225

Câu 58.

Ta có $S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng tỏ $2S_{2019} : n(n+1)$.

Ta có nhận xét sau: Với a, b nguyên dương bất kì thì $(a^{2019} + b^{2019}) : (a+b)$.

Thật vậy :

$$a^{2019} + b^{2019} = (a+b)(a^{2018} - a^{2017}b + \dots - ab^{2017} + b^{2018}) : (a+b).$$

Xét hai trường hợp:

+) Nếu n lẻ: Từ nhận xét trên ta có

$$\begin{aligned}2S_{2019} &= 2n^{2019} + 2[1^{2019} + (n-1)^{2019}] + 2[2^{2019} + (n-2)^{2019}] + \\ &\quad \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] : n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2S_{2019} &= 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2[2^{2019} + (n-1)^{2019}] + \\ &\quad \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right] : (n+1)\end{aligned}$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $2S_{2019} : n(n+1)$.

+) Nếu n chẵn: Ta có

$$\begin{aligned}2S_{2019} &= 2n^{2019} + 2[1^{2019} + (n-1)^{2019}] + 2[2^{2019} + (n-2)^{2019}] + \\ &\quad \dots + 2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right] + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n}{2}\right)^{2019}\right] : n \\ 2S_{2019} &= 2(1^{2019} + n^{2019}) + 2[2^{2019} + (n-1)^{2019}] + \\ &\quad \dots + 2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+4}{2}\right)^{2019}\right] + 2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right] : (n+1)\end{aligned}$$

Suy ra $2S_{2019} : n(n+1)$.

Vậy $S_{2019} : S_1$.

Câu 59.

Ta có: $p+(p+2)=2(p+1)$

Vì p lẻ nên $(p+1):2 \Rightarrow 2(p+1):4$ (1)

Vì $p, (p+1), (p+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và $(p+2)$ nguyên tố nên $(p+1):3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[p+(p+2)]:12$ (đpcm)

Câu 60.

Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k+1 \Rightarrow n^2+4 = 5k+5:5; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên n^2+4 không là số nguyên tố

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k+4 \Rightarrow n^2+16 = 5k+20:5; k \in \mathbb{N}^*$.

Nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 : 5$ hay $n : 5$

Câu 61.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 62.

Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015} + b^{2015} = (a+b)(a^{2014} + a^{2013}b + \dots + ab^{2013} + b^{2014}) \Rightarrow a^{2015} + b^{2015} : (a+b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$$2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] : n$$

$$2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] : n$$

...

$$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] + 2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2[2^{2015} + (n-1)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $A : n(n+1)$

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A : n(n+1)$

Câu 63. Ta có:

$$Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - (16a^2 - 16) \\ = (a-1)(a+1)^3 - 16(a^2 - 1).$$

Với a lẻ, $a = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = 2k(2k+2)^3 = 16k(k+1)^3 : 16$.

Mà $16(a^2 - 1) : 16$ nên Q chia hết cho 16.

Với a chẵn, $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = (2k-1)(2k+1)^3$ là số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.

Vậy a là số nguyên lẻ.

Câu 64.

+) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Dirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2 . Khi đó ta có $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a+b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) : 4$, (đpcm).

Chú ý:

Ta có thể giải bài toán này bằng cách vận dụng tính chất sau của số chính phương: “Một số chính phương chia cho 4 thì sẽ có số dư là 0 hoặc 1”. Khi đó lập luận như cách làm trên ta thu được điều phải chứng minh. Tuy nhiên trong khi làm bài thi nếu vận dụng tính chất này thì học sinh phải chứng minh lại.

Bình luận: Với cách làm trên ngắn gọn, đầy đủ song một số học sinh cảm thấy hơi trừu tượng (do nguyên lý Dirichlet học sinh ít ôn tập không nằm trong chương trình SGK mà ở sách tham khảo). bài toán trên có thể trình bày như sau:

Trong ba số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số hoặc chẵn hoặc lẻ

Gọi hai số chính phương chọn ra là a^2 và b^2 (a, b nguyên)

+ TH1: a, b cùng chẵn: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1)^2 - (2k_2)^2 = 4(k_1^2 - k_2^2) \therefore$ chia hết cho 4
; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$:

+ TH2: a, b cùng lẻ: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1+1)^2 - (2k_2+1)^2 = 4(k_1^2 + k_1 - k_2^2 - k_2) \therefore$ chia hết cho 4; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

Vậy trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65.

Cách 1: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c):2$, theo (1) Suy ra: $b.c:2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c:2 \Rightarrow a(b+c):2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì $b.c$ chẵn nên $a(b+c)$ chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c) \Leftrightarrow abc = a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vậy thì abc là số lẻ, còn $b+c$ là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên $b+c$ chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn.

Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

Câu 66.

Ta có $A = 2^{2^n} + 4^n + 16 = (2^{2^n} - 1) + (4^n - 1) + 18$

Đặt $2^{2^n} = 2^{2^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra $2^{2^n} - 1 = 2^{2^k} - 1 = 4^k - 1 : 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n} - 1 : 3; 4^n - 1 : 3; 18 : 3$

$\Rightarrow A = 2^{2^n} + 4^n + 16 : 3$

Câu 67.

Ta có $A = 4^n + 17 = (4^n - 1) + 18$

Với mọi n nguyên dương ta có: $4^n - 1 : 3; 18 : 3$

$\Rightarrow A = 4^n + 17 : 3$

Câu 68.

Giả sử $2n+1=m^2, 3n+1=k^2$ ($m, k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1):4$, Suy ra: n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(3, 8) = 1$ nên

Từ $3n+1=k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1):8 \Rightarrow n:8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì $2n+1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì $3n+1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 3 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vậy $n \div 5 \quad (2)$

Vì $(5, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Câu 69.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Ta có n chẵn $\Rightarrow n = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra

$$n^3 + 20n + 96 = (2k)^3 + 40k + 96 = 8(k^3 + 5k) + 96 = 8[(k^3 - k) + 6k] + 96 = 8(k^3 - k) + 48k + 48.2$$

Do $k-1; k; k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$$\Rightarrow k^3 - k = (k-1).k.(k+1) \div 6 \Rightarrow 8(k^3 - k) \div 48, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

Câu 70.

$$\text{Ta có } p = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Vì a, b là các số nguyên dương nên, ta có $a^2 + ab + b^2 > 1$.

Do p nguyên tố nên $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow p=3b^2+3b+1$

$$\Rightarrow 4p = 3(4b^2 + 4b + 1) + 1 = 3(2b+1)^2 + 1 \text{ (đpcm).}$$

Câu 71.

Do $p-5 \div 8$ nên $p = 8k+5 \ (k \in \mathbb{N})$

Vì $(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \div (ax^2 - by^2) \div p$ nên $a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} \div p$

Nhận thấy $a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} = (a^{4k+2} + b^{4k+2})x^{8k+4} - b^{4k+2}(x^{8k+4} + y^{8k+4})$

Do $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \div (a^2 + b^2) = p$ và $b < p$ nên $x^{8k+4} + y^{8k+4} \div p \quad (*)$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p .

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fermat ta có :

$$x^{8k+4} = x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad y^{8k+4} = y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{p}. \text{ Mâu thuẫn với } (*). \text{ Vậy cả hai số } x \text{ và } y \text{ chia hết cho } p.$$

Câu 72.

1. Ta có :

$$p^{2016} - 1 = (p^4)^{504} - 1^{504} = (p^4 - 1).A = (p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A \in \mathbb{N})$$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra $p-1, p+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 4 \quad (2)$$

Vì $p-1, p, p+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1) \vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1) \vdots 3 \quad (3)$

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k \pm 1; 5k \pm 2$

- Nếu $p = 5k \pm 1$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5n + 1$

- Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5l - 1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4 - 1 = 5q \vdots 5 \quad (4) \quad (n, l, q \in \mathbb{N})$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016} - 1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử

$x < y < z$. Khi đó, gọi t là thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2 y^2 z^2$. Suy ra :

$$x^3 + y^3 + z^3 = tx^2 y^2 z^2 \Leftrightarrow z = tx^2 y^2 - \frac{x^3 + y^3}{z^2} > tx^2 y^2 - \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = tx^2 y^2 - x - y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2 y^2 - x - y < 0$ (*) thì $t < \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2 y} < 2 \Rightarrow t = 1$

Thay $t = 1$ vào (*), ta được $x^2 y^2 - x - y < 0 \Rightarrow xy - x - y < 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) < 1$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y-1) < 0 \quad (\text{vô lý})$$

Vậy $tx^2 y^2 - x - y \geq 0 \quad (2)$

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2 \geq (tx^2 y^2 - x - y)^2 \quad (3)$

- Mặt khác vì $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2 y^2 z^2$ nên $x^3 + y^3 : z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2 \quad (4)$

- Từ (3) và (4) suy ra :

$$x^3 + y^3 \geq (tx^2 y^2 - x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq t^2 x^4 y^4 - 2tx^2 y^2 (x+y) + x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2tx^2 y^2 (x+y) > t^2 x^4 y^4$$

$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3 + y^3 + 2tx^2 y^2 (x+y)}{tx^3 y^3}$$

$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \quad (5)$$

- Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 3 \Rightarrow txy \geq 6 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t.2^3} + \frac{1}{t.2^3} > 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{t.x^3} + \frac{1}{t.y^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy $x = 1$. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \quad (6)$$

- Nếu $y \geq 4$ thì $ty \geq 4 > 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t \cdot 4^3} \geq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3}$.

Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy $y \in \{2; 3\}$ (Vì $y > x = 1$)

+ Nếu $y = 2$ thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9; z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3.$

+ Nếu $y = 3$ thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28; z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 3 \end{cases} \text{ .(Loại)}$

- Thử lại ta thấy $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2 y^2 z^2$ là $t = 1$.

Câu 73.

Cách 1:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad (1)$$

Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$.

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5k + 1 \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5l + r \quad (l \in \mathbb{Z}, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\})$$

$$\Rightarrow n^2 = 5l_1^2 + r_1^2 \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, r_1^2 \in \{0; 1; 4\}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3:

$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 24a^2 - b^2 = -1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases} a^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \\ b^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \equiv 0(\text{mod } 5)$

Nếu $a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ thì $25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (vô lí).

Suy ra $a^2 - b^2 \equiv 0(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 = b^2 - a^2 \equiv 0(\text{mod } 5)$ (*)

Vì a không chia hết cho 5 nên $a \equiv \pm 1, \pm 2(\text{mod } 5)$.

Với $a \equiv \pm 1(\text{mod } 5) \Rightarrow a^2 \equiv 1(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv -1(\text{mod } 5)$ (trái với (*))

Với $a \equiv \pm 2(\text{mod } 5) \Rightarrow a^2 \equiv 4(\text{mod } 5) \Rightarrow 23a^2 + 1 \equiv 3(\text{mod } 5)$ (trái với (*))

Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 74.

Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $q = 3k+1$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q = 3k+2$, khi đó do $p = q+2$ nên $p = 3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q = 6(k+1):12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Câu 75.

Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + (c^3 + d^3) + 3cd(c+d) &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \end{aligned}$$

Để thấy $3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $(a+b)^3 + (c+d)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $(a+b)^3 + (c+d)^3 = (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Chú ý: Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu $x^3 + y^3$ chia hết cho 3 thì $x+y$ chia hết cho 3.

Câu 76. Đặt $a+b-c=z$; $b+c-a=x$; $a+c-b=y$ thì $x+y+z=a+b+c$

Ta có $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z) = 3.2c.2a.2b = 24abc$

Do 3 số a, b, c có 2 số chẵn nên abc chia hết cho 4 do đó $24abc$ chia hết cho $24.4 = 96$

Vậy bài toán được chứng minh.

Hết