

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình trùng phương

- Phương trình trùng phương là phương trình có dạng: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Cách giải: Đặt ẩn phụ $t = x^2$ ($t > 0$) để đưa phương trình về phương trình bậc hai: $at^2 + bt + c = 0$ ($a \neq 0$).

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ở Bước 2.

Bước 4. So sánh các nghiệm tìm được ở Bước 3 với điều kiện xác định và kết luận.

3. Phương trình đưa về dạng tích

Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2. Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

4. Một số dạng khác của phương trình thường gặp

- Phương trình bậc bốn dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ với $a+b=c+d$

- Phương trình đối xứng bậc bốn có dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$)

- Phương trình hồi quy có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$) trong đó $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$

- Phương trình bậc bốn dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

- Phương trình phân thức hữu tỉ. Trong phần này chúng ta xét một số dạng sau:

$$\bullet \frac{mx}{ax^2+bx+d} + \frac{nx}{ax^2+cx+d} = p$$

$$\bullet \frac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c} + \frac{ax^2+px+c}{ax^2+qx+c} = d$$

$$\bullet \frac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c} + \frac{px}{ax^2+qx+c} = d$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải phương trình trùng phương

Phương pháp giải: Xét phương trình trùng phương:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Bước 1. Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta được phương trình bậc hai:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Bước 2. Giải phương trình bậc hai ẩn t từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình trùng phương đã cho.

1.1. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0;$

b) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 84 = 0.$

1.2. Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0;$

b) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0;$

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Phương pháp giải: Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của ẩn.

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình bậc hai nhận được ở *Bước 2*.

Bước 4. So sánh các nghiệm tìm được ở *Bước 3* với điều kiện xác định và kết luận.

2.1. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2};$

$$b) \frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5};$$

$$c) \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) = \frac{3}{14-x}.$$

2.2. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+5} = \frac{x-7}{x-1} + 3;$$

$$b) \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{x-3};$$

$$c) \frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2 - 5x + 6};$$

Dạng 3. Phương trình đưa về dạng tích

Phương pháp giải: Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

Bước 1. Chuyển vế và phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2. Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

3.1. Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$b) (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 - (x+2)^3 = 0;$$

3.2. Giải các phương trình sau:

$$a) 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 = 0;$$

$$b) (x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2.$$

Dạng 4. Giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải:

Bước 1. Đặt điều kiện xác định (nếu có);

Bước 2. Đặt ẩn phụ, đặt điều kiện của ẩn phụ (nếu có) và giả phương trình theo ẩn mới;

Bước 3. Tìm nghiệm ban đầu và so sánh với điều kiện xác định và kết luận.

4.1. Giải các phương trình sau:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$;

b) $(x^2 + 16x + 60)(x^2 + 17x + 60) = 6x^2$;

c) $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

4.2. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$;

b) $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$;

c) $\frac{x}{x+1} - 10\frac{x+1}{x} = 3$.

Dạng 5. Phương trình chứa biểu thức trong dấu căn

Phương pháp giải: Làm mất dấu căn bằng cách đặt ẩn phụ hoặc lũy thừa hai vế.

Chú ý: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

5.1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-6}\sqrt{x+9} = 3 - \sqrt{x}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$.

5.2. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = (1 - x)\sqrt{3x - 2}$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{7x+1} = \sqrt{14x-6}$.

Dạng 6. Một số dạng khác

Phương pháp giải: Ngoài các phương pháp trên, ta còn dùng các phương pháp hằng đẳng thức, thêm bớt hạng tử, hoặc đánh giá hai vế... để giải phương trình.

6. Giải các phương trình sau bằng phương pháp thêm bớt hạng tử hoặc dùng hằng đẳng thức:

a) $x^4 = 24x + 32$;

b) $x^3 = -3x^2 + 3x - 1$;

c) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$;

7. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đánh giá:

a) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} = 1$;

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12 + 9} = 6.$

8. Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 4x - 6|2x - 1| + 6 = 0;$

b) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11.$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

10. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 6x^2 - 16 = 0;$ b) $(x + 1)^4 + (x + 1)^2 - 20 = 0.$

11. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(1-x)(x+2)};$ b) $\frac{x}{x+4} + \frac{2x}{2-x} = \frac{8(x+1)}{(2-x)(x+4)}.$

12. Giải các phương trình sau:

a) $(x + 1)(x-3)(x^2 - 2x) = -2;$

b) $(6x + 5)^2 (3x + 2)(x + 1) = 35.$

c) $(x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = 2x^2;$

d) $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2.$

13. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0;$ b) $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}.$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1.1.

a) Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta có: $t^2 + 5t - 6 = 0$

Giải ra ta được $t = 1$ (TM) hoặc $t = -6$ (loại)

Từ đó tìm được $x = \pm 1$

b) Đặt $(x+1)^2 = t \geq 0$

Sau khi tìm được t ta tìm được $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$.

1.2. a) $x \in \emptyset$ b) $x = \pm 1$

2.1.

a) ĐK: $x \neq 1$ và $x \neq 2$

Quy đồng mẫu thức, giải được: $x = \pm\sqrt{19} - 3$

b) Tìm được $x = -17$ hoặc $x = -1 \pm \sqrt{31}$

c) Tìm được $x = 5$

2.1. a) $x = -\frac{5}{4}$ hoặc $x = 5$ b) $x = 1$ c) $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 5$

3.1.

a) Đưa PT về dạng: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 3) = 0$

Từ đó tìm được $x \in \{\pm\sqrt{2}; -3\}$

b) Tìm được $x = 4$

3.2. a) $x = 1$ hoặc $x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$ b) $x = \frac{1}{2}; x = 0$ hoặc $x = \frac{10}{3}$

4.1.

a) Đặt $y = x^2 + 3x + 1$. Giải ra ta được $y = \pm 3$

Từ đó tìm được $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

b) Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Với $x = 0$, thay vào thấy không là nghiệm

Trường hợp 2. Với $x \neq 0$, chia cả hai vế của PT cho x^2 sau đó đặt $x + 16 + \frac{60}{x} = y$. Giải ra ta được $y = 2$

hoặc $y = -3$.

Từ đó tìm được $x = 15$ hoặc $x = -4$.

c) Trường hợp 1. Xét $x = 0$, thay vào thấy không là nghiệm.

Trường hợp 2. Xét $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu cho x sau đó đặt $y = 3x + \frac{2}{x}$. Giải ra ta được $y = -11$ hoặc $y = 2$.

Từ đó tìm được $x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$

4.2.

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$ hoặc $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) $x = 4$ hoặc $x = -5$

c) $x = \frac{5}{4}$ hoặc $x = -\frac{2}{3}$

5.1.

a) ĐK: $x \geq 0$; Biến đổi phương trình ta được

$$|\sqrt{x} - 3| = 3 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$$

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}$

5.2. a) $x = 1$

b) $x = 1$ hoặc $x = 5$

6. a) Thêm $4x^2$ ở cả hai vế của PT, ta được $(x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2$

Giải ra ta được $x = 1 \pm \sqrt{5}$

b) Tìm được $x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}$

c) Tìm được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

7. a) ĐK: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt[4]{1-x} \geq 1-x$ và $\sqrt[4]{x} \geq x \Rightarrow VT \geq 1-x+x=1=VP$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$

Kết luận

b) Tìm được $x = \frac{1}{2}$.

8. Đặt $|2x-1|=t(t \geq 0) \Rightarrow t^2-6t+5=0$. Tìm được t từ đó tìm được $x \in \{-2; 0; 1; 3\}$

b) PT $\Leftrightarrow \left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + 2x \frac{5x}{x+5} = 11$

Đặt $\frac{x^2}{x+5}=t$, tìm được $t=-11$ hoặc $t=1$

Từ đó tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

10. a) $x = \pm 2\sqrt{2}$

b) $x=1$ hoặc $x=-3$

11. a) $x = \frac{2}{5}$

b) Vô nghiệm

12. a) $x = 1 \pm \sqrt{3}$ hoặc $x = 1 \pm \sqrt{2}$

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

c) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$

d) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

13. a) $x = -1$ hoặc $x = 1 \pm \sqrt{7}$

b) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

B.NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1. Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$

Bài 2. Giải phương trình $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=7$

Bài 3. Giải phương trình $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

Bài 4. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $x^4 + (3m-1)x^3 - (3m-2)x^2 + (3m-1)x + 1 = 0$ (m là tham số)

Bài 5. Giải phương trình $\frac{4x^2+16}{x^2+6} - \frac{3}{x^2+1} = \frac{5}{x^2+3} + \frac{7}{x^2+5}$

Bài 6. Giải phương trình $(x^2+x+2)(x^2+2x+2)=2x^2$

Bài 7. Giải phương trình $3(x^2+2x-1)^2 - 2(x^2+3x-1)^2 + 5x^2 = 0$

Bài 8. Giải các phương trình:

$$a)x^4 = 24x + 32 \quad b)x^4 = 4x + 1 \quad c)x^4 = 2x^2 - 12x + 8$$

Bài 9. Giải phương trình $\frac{x}{x^2 - x - 2} - \frac{3x}{x^2 - 5x - 2} - 2 = 0$

Bài 10. $\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}.$

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Giải phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \Rightarrow t^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2}$$

$$3t^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} - 8 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3t^2 + 8$$

Khi đó phương trình trở thành $3t^2 + 8 = 10t \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 8 = 0$

$$\text{Giải ra ta được } t_1 = 2; t_2 = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 2 \text{ ta được } \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\text{Giải ra ta được } x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}$$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{4}{3} \text{ ta được } \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\text{Giải ra ta được } x_3 = -2; x_4 = 6$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{3 + \sqrt{21}; 3 - \sqrt{21}; -2; 6\}$

Bài 2. Giải phương trình $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 7$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 7 \Leftrightarrow 2(64x^2+112x+49)(4x^2+7x+3) = 7$

Đặt $y = 4x^2 + 7x + 3$ thì $64x^2 + 112x + 49 = 16y + 1$

Phương trình đã cho có dạng $2(16y+1)y = 7 \Leftrightarrow 32y^2 + 2y - 7 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = \frac{7}{16}; y_2 = \frac{-1}{2}$

• Với $y = \frac{7}{16}$ ta được $4x^2 + 7x + 3 = \frac{7}{16} \Leftrightarrow 64x^2 + 112x + 41 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{-7+2\sqrt{2}}{8}; x_2 = \frac{-7-2\sqrt{2}}{8}$

• Với $y = -\frac{1}{2}$ ta được $4x^2 + 7x + 3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8x^2 + 14x + 7 = 0$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-7+2\sqrt{2}}{8}; \frac{-7-2\sqrt{2}}{8} \right\}$

Bài 3. Giải phương trình $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với

$$x^2 - 2 \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} + 2 \frac{x^2}{x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^2 + 2 \frac{x^2}{x+1} - 3 = 0$$

Đặt $\frac{x^2}{x+1} = y$ phương trình có dạng $y^2 + 2y - 3 = 0$

Giải ra ta được $y_1 = 1; y_2 = -3$

• Với $y = 1$ ta được $\frac{x^2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Giải ra ta được $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

• Với $y = -3$ ta được $\frac{x^2}{x+1} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Bài 4. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $x^4 + (3m-1)x^3 - (3m-2)x^2 + (3m-1)x + 1 = 0$ (m là tham số)

Hướng dẫn giải

Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được

$$x^2 + (3m-1)x - (3m-2) + (3m-1)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (3m-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) - (3m-2) = 0 \quad (1)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ điều kiện $y \geq 2$ hoặc $y \leq -2$ tức là $|y| \geq 2$

Khi đó phương trình có dạng $y^2 - 2 + (3m-1)y - (3m-2) = 0 \Leftrightarrow y^2 + (3m-1)y - 3m = 0 \quad (2)$

Giải ra ta được $y_1 = 1; y_2 = -3m$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn

$$|y| \geq 2 \Leftrightarrow |-3m| \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3} \text{ hoặc } m \leq \frac{-2}{3}$$

Vậy với $|m| < \frac{2}{3}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 5. Giải phương trình $\frac{4x^2+16}{x^2+6} - \frac{3}{x^2+1} = \frac{5}{x^2+3} + \frac{7}{x^2+5}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+16}{x^2+6}-\frac{3}{x^2+1}&=\frac{5}{x^2+3}+\frac{7}{x^2+5} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4x^2+16}{x^2+6}-3\right)+\left(1-\frac{3}{x^2+1}\right)+\left(1-\frac{5}{x^2+3}\right)+\left(1-\frac{7}{x^2+5}\right)&=0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2+6}+\frac{x^2-2}{x^2+1}+\frac{x^2-2}{x^2+3}+\frac{x^2-2}{x^2+5}&=0 \\ \Leftrightarrow (x^2-2)\left(\frac{1}{x^2+6}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5}\right)&=0\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{x^2+6}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+5} \neq 0 \text{ nên } x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Bài 6. Giải phương trình $(x^2+x+2)(x^2+2x+2)=2x^2$

Hướng dẫn giải

Nhận xét. $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế cho x^2 ta được:

$$\left(x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{2}{x}+2\right)=2$$

Đặt $x+\frac{2}{x}+1=y$ phương trình có dạng $y.(y+1)=2$

$$y^2+y-2=0 \text{ giải ra ta được } y=1; y=-2$$

Trường hợp 1. Với $y=1$ ta có $x+\frac{2}{x}+1=1 \Leftrightarrow x^2+2=0$, phương trình vô nghiệm

Trường hợp 1. Với $y=-2$ ta có $x+\frac{2}{x}+1=-2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0$. Giải ra ta được $x=-1; x=-2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1; -2\}$

Bài 7. Giải phương trình $3(x^2+2x-1)^2-2(x^2+3x-1)^2+5x^2=0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét. $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế của hai phương trình cho x^2 ta

$$\text{được: } 3\left(x+2-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+3-\frac{1}{x}\right)^2+5=0$$

Đặt $x + 2 - \frac{1}{x} = y$ phương trình có dạng $3y^2 - 2(y+1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

Giải ra ta được $y = 1; y = 3$

Trường hợp 1. Với $y = 1$ ta có $x + 2 - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2. Với $y = 3$ ta có $x + 2 - \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Giải ra ta được $x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; x_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

Bài 8. Giải các phương trình:

$$a) x^4 = 24x + 32 \quad b) x^4 = 4x + 1 \quad c) x^4 = 2x^2 - 12x + 8$$

Hướng dẫn giải

$$a) x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x + 6 \\ x^2 + 2 = -2x - 6 \end{cases}$$

• Giải phương trình $x^2 + 2 = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = 1 + \sqrt{5}; x_2 = 1 - \sqrt{5}$

Giải phương trình $x^2 + 2 = -2x - 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 0$ vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm là: $S = \{1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$

$$b) x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (\sqrt{2}.x + \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{2}.x + \sqrt{2} \\ x^2 + 1 = -\sqrt{2}.x - \sqrt{2} \end{cases}$$

• Giải phương trình $x^2 + 1 = \sqrt{2}.x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}.x + 1 - \sqrt{2} = 0$

Giải ra ta được $x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$

• Giải phương trình $x^2 + 1 = -\sqrt{2}x - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1 = 0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \right\}$

c) $\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2x - 3 \\ x^2 + 1 = -2x + 3 \end{cases}$

• Giải phương trình $x^2 + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$. Vô nghiệm

• Giải phương trình $x^2 + 1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

Giải ra ta được $x_1 = 1 - \sqrt{3}; x_2 = 1 + \sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$

Bài 9. Giải phương trình $\frac{x}{x^2 - x - 2} - \frac{3x}{x^2 - 5x - 2} - 2 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐKXD: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \neq 0 \\ x^2 - 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Khi $x \neq 0$ thì phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{x - 1 - \frac{2}{x}} - \frac{3}{x - 5 - \frac{2}{x}} - 2 = 0$

Đặt $t = x - \frac{2}{x}$ ta được phương trình biểu thị theo t là $\frac{1}{t - 1} - \frac{3}{t - 5} = 2$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = 3$

Với $t = 2 \Rightarrow x - \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Với $t = 3 \Rightarrow x - \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{ 1 \pm \sqrt{3}; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

Bài 10. $\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \notin \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. **Biến đổi phương trình thành**

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{(x+5)(x+7)} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} + \frac{x+5}{(x+4)(x+6)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{x+6}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{x+2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{x+5}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} \right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} \right) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right)$$

$$\Leftrightarrow (2x+7) \left(\frac{1}{x^2+7} + \frac{1}{x^2+7x+10} - \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} = 0(*) \end{cases}.$$

Đặt $u = x^2 + 7x$ **thì phương trình (*) có dạng**

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u+10} + \frac{1}{u+6} + \frac{1}{u+12} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+6} \right) + \left(\frac{1}{u+10} - \frac{1}{u+12} \right) = 0 \Leftrightarrow u^2 + 18u + 90 = 0.$$

Mặt khác $u^2 + 18u + 90 = (u+9)^2 + 9 > 0$ với mọi u . Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy phương trình

đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\frac{7}{2}$.

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Phương trình $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 2. Phương trình $2x^4 - 9x^2 + 7 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 3. Phương trình $(x+1)^4 - 5(x+1)^2 - 84 = 0$ có tổng các nghiệm là?

- A. $-\sqrt{12}$. B. -2 . C. -1 . D. $2\sqrt{12}$.

Câu 4. Phương trình $(2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 - 9 = 0$ có tổng các nghiệm là:

- A. 1. B. -2 . C. -1 . D. $2\sqrt{2}$.

Câu 5. Phương trình $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-9}{x^2 - 5x + 6}$ có số nghiệm là:

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 6. Phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-4} = 0$ có số nghiệm là:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 7. Phương trình $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) = \frac{3}{14-x}$ có nghiệm là:

- A. $x = \sqrt{2}$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Câu 8. Phương trình $\left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \left(\frac{2+x}{2-x} + 1\right) = \frac{2}{3x}$ có nghiệm là:

- A. $x = -1; x = \frac{2}{3}$. B. $x = 1; x = -\frac{2}{3}$. C. $x = 3$. D. $x = -1; x = -\frac{2}{3}$.

Câu 9. Tích các nghiệm của phương trình $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$ là:

- A. $\frac{10}{3}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 10. Tổng các nghiệm của phương trình $(2x^2 - 3)^2 = 4(x-1)^2$ là:

- A. $\frac{10}{3}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $3x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = 0$ là:

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 12. Tổng các nghiệm của phương trình $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$ là:

- A. -3 . B. 3 . C. 1 . D. -4 .

Câu 13. Tổng các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 48$ là:

- A. $-\frac{5}{4}$. B. -5 . C. $-\frac{5}{2}$. D. 5 .

Câu 14. Hai nghiệm của phương trình $\frac{x}{x+1} - 10\frac{x+1}{x} = 3$ là $x_1 > x_2$. Tính $3x_1 + 4x_2$.

- A. -3 . B. 3 . C. 7 . D. -7 .

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\frac{2x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{2x} = 2$ là?

- A. 2 . B. 3 . C. 1 . D. 0 .

Câu 16. Phương trình $x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 . B. 3 . C. 0 . D. 2 .

Câu 17. Phương trình $5(x+2)\sqrt{x-1} = x^2 + 7x + 10$ có nghiệm là?

- A. $x = 5; x = 10$. B. $x = 5; x = 10; x = -2$.
C. $x = 5$. D. $x = 10$.

Câu 18. Phương trình $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$ có nghiệm là:

- A. $x = -1$. B. $x = \frac{7}{8}$. C. $x = 1$. D. $x = \frac{8}{7}$.

Câu 19. Phương trình $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = x + 2$ có nghiệm là:

- A. $x = -1; x = 3$. B. $x = 1; x = -3$. C. $x = -1$. D. $x = 3$.

Câu 20. Phương trình $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12x + 19} = 6$ có nghiệm là $\frac{a}{b}$ ($a, b > 0$). Tính $a - b$.

- A. -1 . B. 4 . C. -2 . D. 2 .

Câu 21. Giải phương trình $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$?

- A. $x = 0$. B. $x = \frac{5}{4}$. C. $x_1 = 0; x_2 = \frac{5}{4}$. D. Đáp án khác.

Câu 22. Giải phương trình $\frac{1}{x-1+\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{x-1-\sqrt{x^2-2x+5}} = 1$.

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án C.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$ ta được phương trình $t^2 - 6t - 7 = 0$ (*)

Nhận thấy $a - b + c = 1 + 6 - 7 = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = -1(L); t_2 = 7(N)$

Thay lại cách đặt ta có $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 2. Đáp án D.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$ ta được phương trình $2t^2 - 9t + 7 = 0$ (*)

Nhận thấy $a + b + c = 2 + (-9) + 7 = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = 1(N); t_2 = \frac{7}{2}(N)$

Thay lại cách đặt ta có

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 3. Đáp án B.

Đặt $(x+1)^2 = t (t \geq 0)$ ta được phương trình $t^2 - 5t - 84 = 0$ (*)

Ta có $\Delta = 361$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = \frac{5+\sqrt{361}}{2} = 12(N); t_2 = \frac{5-\sqrt{361}}{2} = -7(L)$

Thay lại cách đặt ta có $(x+1)^2 = 12 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{12}$ Suy ra tổng các nghiệm là $-1 + \sqrt{12} - 1 - \sqrt{12} = -2$

Câu 4. Đáp án C.

Đặt $(2x+1)^2 = t (t \geq 0)$ ta được phương trình $t^2 - 8t - 9 = 0$ (*)

Ta $a - b + c = 1 - (-8) + (-9) = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = 1(tm); t_2 = -9(ktm)$

Thay lại cách đặt ta có $(2x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

Suy ra tổng các nghiệm là $0 + (-1) = -1$.

Câu 5. Đáp án C.

Điều kiện: $x \neq 2; x \neq 3$

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-9}{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \frac{2x(x-3)-5(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-9}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow 2x^2 - 11x + 19 = 0$$

Nhận thấy $\Delta = 11^2 - 4.19.2 = -31 < 0$ nên phương trình $2x^2 - 11x + 19 = 0$ vô nghiệm. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 6. Đáp án B.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-4} = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)} + \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-4)} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-4) + (x-1)(x-4) + (x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 + x^2 - 5x + 4 + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 4^2 - 3.(-1) = 19 > 0$$

$$\text{Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: } \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}(tm) \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}(tm) \end{cases}$$

Câu 7. Đáp án D.

Điều kiện: $x \neq 1; x \neq -1; x \neq 14$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1 \right) = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} : \frac{1+x-1+x}{1-x} = \frac{3}{14-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{1-x}{2x} = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{3}{14-x}$$

$$\Rightarrow 28 - 2x = 3x + 3 \Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = 5(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$

Câu 8. Đáp án B.

Điều kiện: $x \neq 2; x \neq -2; x \neq 0$

$$\text{Ta có } \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{2+x}{2-x} + 1 \right) = \frac{2}{3x} \Leftrightarrow \frac{(2+x)^2 - (2-x)^2}{(2-x)(2+x)} : \frac{2+x+2-x}{2-x} = \frac{2}{3x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{2-x}{4} = \frac{2}{3x} \Leftrightarrow \frac{2x}{2+x} = \frac{2}{3x}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

Phương trình này có $a + b + c = 3 + (-1) + (-2) = 0$

nên có hai nghiệm phân biệt $x = 1; x = -\frac{2}{3}(TM)$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = -\frac{2}{3}$

Câu 9. Đáp án B.

$$\text{Ta có } (x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x^2 - x + 5 \\ x^2 + 2x - 5 = -x^2 + x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 10 \\ 2x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nên tích các nghiệm là $\frac{10}{3} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Câu 10. Đáp án B.

Ta có $(2x^2 - 3)^2 = 4(x-1)^2$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 = 2(x-1) \\ 2x^2 - 3 = -2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $2x^2 - 2x - 1 = 0$ có $\Delta' = 3 > 0$ nên có hai nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Phương trình $2x^2 + 2x - 5 = 0$ có $\Delta'_1 = 11 > 0$ nên có hai nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}; x = \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$

Nên tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{11}}{2} + \frac{-1-\sqrt{11}}{2} = 0$

Câu 11. Đáp án C.

Ta có $3x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x+1) + 5(x+1) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = -5(L) \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 12. Đáp án A.

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8 \Leftrightarrow x(x+3)(x+1)(x+2) = 8 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 8$

Đặt $x^2 + 3x + 1 = t$, thu được phương trình

$$(t-1)(t+1) = 8 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases}$$

+) Với $t = 3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ có } \Delta = 17 \Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

+) Với $t = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = -3$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$ có $\Delta = -7 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

Suy ra tổng các nghiệm là $\frac{-3+\sqrt{17}}{2} + \frac{-3-\sqrt{17}}{2} = -3$.

Câu 13. Đáp án B.

Ta có $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 48 \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 48$

Đặt $x^2+5x+5 = t$, thu được phương trình $(t-1)(t+1) = 8 \Leftrightarrow t^2-1 = 48 \Leftrightarrow t^2 = 49 \Leftrightarrow \begin{cases} t=7 \\ t=-7 \end{cases}$

+) Với $t=7 \Rightarrow x^2+5x+5=7 \Leftrightarrow x^2+5x-2=0$ có $\Delta=33 \Rightarrow x_1 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}; x_2 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$

+) Với $t=-7 \Rightarrow x^2+5x+5=-7 \Leftrightarrow x^2+5x+12=0$ có $\Delta=-23 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}; x_2 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$.

Suy ra tổng các nghiệm là $\frac{-5+\sqrt{33}}{2} + \frac{-5-\sqrt{33}}{2} = -5$.

Câu 14. Đáp án D.

Điều kiện: $x \neq 0; x \neq -1$

Đặt $\frac{x}{x+1} = t (t \neq 0)$, khi đó phương trình đã cho trở thành $t - 10 \cdot \frac{1}{t} = 3 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$

Ta có $\Delta = 49 \Rightarrow t_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5;$

$t_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} = -2(TM)$

+) Với $t=5$ suy ra $\frac{x}{x+1} = 5 \Rightarrow 5x+5 = x \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$ (nhận)

+) Với $t=-2$ suy ra $\frac{x}{x+1} = -2 \Rightarrow -2x-2 = x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ (nhận)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = -\frac{2}{3} > x_2 = -\frac{5}{4}$

Nên $3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -7$

Câu 15. Đáp án C.

Điều kiện: $x > \frac{1}{4}$

Đặt $\frac{2x}{\sqrt{4x-1}} = t (t \geq 0)$, khi đó phương trình đã cho trở thành $t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$ (*)

Ta có $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $t_1 = 1(tm); t_2 = -2(ktm)$

+) Với $t = 1$ suy ra $\frac{2x}{\sqrt{4x-1}} = 1 \Rightarrow 2x = \sqrt{4x-1} \Rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(tm).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Câu 16. Đáp án A.

Điều kiện: $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2 + \sqrt{3x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2 + \sqrt{3x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(TM) \\ \sqrt{3x-2} = 2-x(*) \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình (*): } \sqrt{3x-2} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 3x-2 = (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x=1 \Rightarrow x=1(TM) \\ x=6 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 17. Đáp án B.

Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Ta có $5(x+2)\sqrt{x-1} = x^2 + 7x + 10$

$$\Leftrightarrow 5(x+2)\sqrt{x-1} = (x+2)(x+5) \Leftrightarrow (x+2)(x+5) - 5(x+2)\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x+5-5\sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(ktm) \\ x+5=5\sqrt{x-1} (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*): $5\sqrt{x-1} = x+5$

Với $x \geq 1$ ta có $25(x-1) = (x+5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 10x + 50 = 0 \Leftrightarrow x(x-5) - 10(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-10)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10(tm) \\ x=5(tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=5; x=10$.

Câu 18. Đáp án D.

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2+x+1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2+x+1 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 7x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{7}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{8}{7}$.

Câu 19. Đáp án A.

$$\text{Ta có } \sqrt{2x^2+6x+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x^2+6x+1 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-3x+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x(x-3)+(x-3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x+1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-1; x=3$.

Câu 20. Đáp án A.

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2-4x+5} + \sqrt{12x^2-12x+19} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+4} + \sqrt{12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16} = 6$$

Nhận thấy $\sqrt{(2x-1)^2+4} \geq 2; \sqrt{12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+16 \geq 4$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{(2x-1)^2+4} = 2 \\ \sqrt{12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+16 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $a=1; b=2 \Rightarrow a-b=-1$

Câu 21. Đáp án B.

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

Điều kiện: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^4-x^2} = (x-1)^2 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4-x^2} = 2x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2 \geq 0 \\ x^4-x^2 = 4x^2-4x^3+x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 4x^3-5x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2(4x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x-5 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

PT Kết hợp với điều kiện ban đầu $x \geq 1$ ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{4}$.

Câu 22. Đáp án D.

$$\frac{1}{x-1+\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{x-1-\sqrt{x^2-2x+5}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}} + \frac{1}{x-1-\sqrt{(x-1)^2+4}} = 1$$

Đặt $x-1=t$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{t+\sqrt{t^2+4}} + \frac{1}{t-\sqrt{t^2+4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{t-\sqrt{t^2+4}+t+\sqrt{t^2+4}}{(t+\sqrt{t^2+4})(t-\sqrt{t^2+4})} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{t^2 - t^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow \frac{2t}{-4} = 1 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Thử lại thấy $x = -1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

PHIẾU SỐ 1

Dạng 1: Phương trình trùng phương

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad \text{b) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \qquad \text{c) } \frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2$$

Bài 2. Tìm các giá trị của m để phương trình ẩn x sau: $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bài 3. Giải các pt sau:

$$\text{a) } 1 - \frac{8}{x-4} = \frac{5}{3-x} - \frac{8-x}{x+2} \qquad \text{b) } \frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$$

Dạng 3. Phương trình đưa về phương trình tích

Bài 4. Giải các phương trình:

$$\text{a) } (2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0 \qquad \text{b) } (2x^2 + x)^2 - (2x - 1)^2 = 0$$

Bài 5. Giải phương trình $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$

Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 6. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \qquad \text{b) } (x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$$

$$\text{c) } \frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

Dạng 5. Phương trình bậc 4 dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ **với** $a+b=c+d$

Bài 7. Giải phương trình $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

Bài 8. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Dạng 6. Phương trình đối xứng bậc bốn, phương trình hồi quy

Bài 9. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Bài 10. Giải phương trình $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Dạng 7. Phương trình vô tỉ

Bài 11. Giải phương trình

a) $\sqrt{2x-1} = 8-x$

b) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$

Bài 12. Giải phương trình

a) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 24} = 18$

b) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Dạng 1: Phương trình trùng phương

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

c) $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$

Hướng dẫn-Đáp số

a) Đặt $x^2 = t \geq 0$ đưa phương trình về: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = 4$ (thỏa mãn)

+ Với $t = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$

+ Với $t = 4 \Rightarrow x_3 = 2; x_4 = -2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \{\pm 1; \pm 2\}$

b) Phương trình có nghiệm $S = \{\pm 2\}$

c) Phương trình có nghiệm $x = 0$

Bài 2. Tìm các giá trị của m để phương trình ẩn x sau: $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

Hướng dẫn-Đáp số

Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta được $t^2 - 6t + m - 1 = 0$ (1)

Để pt đã cho có 4 nghiệm thì pt (1) phải có 2 nghiệm dương pb

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m-1) > 0 \\ m-1 > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 10$$

Vậy với $1 < m < 10$ thì pt đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bài 3. Giải các pt sau:

a) $1 - \frac{8}{x-4} = \frac{5}{3-x} - \frac{8-x}{x+2}$

b) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

Hướng dẫn-Đáp số

a) Điều kiện: $x \neq -2; x \neq 3; x \neq 4$

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu:

$$(3-x)(x+2)(x-4) - 8(3-x)(x+2) = 5(x-4)(x+2) - (8-x)(x-4)(3-x) \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 72x + 128 = 0$$

Giải ra ta được: $x_1 = 8; x_2 = 2\frac{2}{7}$ (thỏa mãn)

Vậy pt có 2 nghiệm $x_1 = 8; x_2 = 2\frac{2}{7}$

b) Pt có nghiệm $x = 3$

Dạng 3. Phương trình đưa về phương trình tích

Bài 4. Giải các phương trình:

a) $(2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$

b) $(2x^2 + x)^2 - (2x - 1)^2 = 0$

Hướng dẫn-Đáp số

a) $(2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 3x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2$

Giải (2) ta được $x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy pt có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Pt có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \right\}$

Bài 5. Giải phương trình $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$

Hướng dẫn-Đáp số

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0 &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 3) = 0 \end{aligned}$$

Giải ra ta được tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$

Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 6. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \quad \text{b) } (x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81 \quad \text{c) } \frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

Hướng dẫn-Đáp số

$$\text{a) Đặt } x^2 + 5x = y \text{ ta được pt } y^2 - 2y = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = -4 \Rightarrow x^2 + 5x = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy pt có tập nghiệm $S = \{\pm 1; -4; -6\}$

b) Pt có tập nghiệm $S = \{3; 3 \pm \sqrt{20}\}$

c) Pt có tập nghiệm $S = \{1; -5; -1 \pm \sqrt{6}\}$

Dạng 5. Phương trình bậc 4 dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ **với** $a+b=c+d$

Bài 7. Giải phương trình $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

Hướng dẫn-Đáp số

Ta có $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 14x + 45)(x^2 + 14x + 48) = 40$$

Đặt $x^2 + 5x + 45 = y$ phương trình thành $y(y+3) = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -8 \end{cases}$

$$\text{Với } y = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -10 \end{cases}$$

Với $y = -8$ suy ra x vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4; x = -10$

Bài 8. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Hướng dẫn-Đáp số

Ta viết dưới dạng $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$$

Giải tương tự ta được tập nghiệm $S = \{0; -5\}$

Dạng 6. Phương trình đối xứng bậc bốn, phương trình hồi quy

Bài 9. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

Hướng dẫn-Đáp số

+) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

+) $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ta được phương trình $2(y^2 - 2) + 3y - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

Theo cách đặt, giải pt tìm được tập nghiệm $S = \left\{ -2 \pm \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$

Bài 10. Giải phương trình $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Hướng dẫn-Đáp số

+) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

+) $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$$

Giải tương tự tìm được tập nghiệm $S = \left\{ 1; 5; \frac{5}{2}; 2 \right\}$

Dạng 7. Phương trình vô tỉ

Bài 11. Giải phương trình

a) $\sqrt{2x-1} = 8-x$

b) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$

Hướng dẫn-Đáp số

a) Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$

Bình phương hai vế, ta được: $2x-1 = 64-16x+x^2 \Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn); $x=13$ (loại)

Vậy pt có nghiệm $x=5$

b) Pt có nghiệm $x=-1$

Bài 12. Giải phương trình

a) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 24} = 18$

b) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

Hướng dẫn-Đáp số

a) $S = \{-3; 4\}$

b) $S = \{-2; 2\}$

PHIẾU SỐ 2

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $(x+2)^2 - 3x - 5 = (1-x)(1+x)$

b) $(x-1)^3 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1$

c) $x(x^2 - 6) - (x-2)^2 = (x+1)^3$

d) $(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x+7)(x-7) = 12x - 23$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

b) $(x+1)^4 - 5(x+1)^2 - 84 = 0$

Bài 3: Tìm các giá trị của m để phương trình ẩn số x: $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có 4 nghiệm.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $1 - \frac{8}{x-4} = \frac{5}{3-x} - \frac{8-x}{x+2}$

b) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

Bài 5: Giải các phương trình:

a) $(2x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0$

b) $(2x^2 + x)^2 - (2x-1)^2 = 0$

Bài 6: Giải phương trình sau: $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$

Bài 7: Chứng minh rằng khi a và c trái dấu thì phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ chỉ có hai nghiệm và chúng là hai số đối nhau.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$

c) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

Bài 9: Giải phương trình: $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

Bài 10: Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Bài 11: Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Bài 12: Giải các phương trình sau:

a) $(x+4)^4 + (x+2)^4 = 82$

b) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

Bài 13: Giải phương trình sau: $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a) Ta có: $(x+2)^2 - 3x - 5 = (1-x)(1+x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 3x - 5 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4.2.(-2) = 1 + 16 = 17 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2.2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2.2} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

b) Ta có: $(x-1)^3 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.2.2 = 49 - 16 = 33 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7 + \sqrt{33}}{2.2} = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{2.2} = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}$$

c) Ta có: $x(x^2 - 6) - (x-2)^2 = (x+1)^3$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x - x^2 + 4x - 4 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4.4.5 = 25 - 80 = -55 < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Ta có: $(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x+7)(x-7) = 12x - 23$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + x^2 - 4x - 4 + x^2 - 49 = 12x - 23$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 1.1 = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 1$

Bài 2:

a) Đặt $x^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $t^2 + 5t - 6 = 0$

Giải phương trình ta được $t = 1$ (tm) hoặc $t = -6$ (1)

Với $t = 1$, ta có $x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = -1$

b) Đặt $(x+1)^2 = t \geq 0$, đưa về phương trình $t^2 - 5t - 84 = 0$

Giải phương trình ta được $t = 12$ (tm) hoặc $t = -7$ (1)

Với $t = 12$, ta có $(x+1)^2 = 12 \Rightarrow x_1 = -1 + 2\sqrt{3}; x_2 = -1 - 2\sqrt{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -1 + 2\sqrt{3}; x_2 = -1 - 2\sqrt{3}$

Bài 3:

Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta được $t^2 - 6t + m - 1 = 0$ (1)

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm, thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m-1) > 0 \\ m-1 > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 10$$

Vậy với $1 < m < 10$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài 4:

a) Điều kiện: $x \neq -2; x \neq 3; x \neq 4$

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu:

$$(3-x)(x-4)(x+2) - 8(3-x)(x+2) = 5(x-4)(x+2) - (8-x)(x-4)(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 72x + 128 = 0$$

Giải ra ta được: $x_1 = 8; x_2 = 2\frac{2}{7}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 8; x_2 = 2\frac{2}{7}$

b) Điều kiện: $x \neq -2; x \neq 2$

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu:

$$(x-1)(x-2)+2(x+2)=12 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(1) \\ x=3(tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm: $x=3$

Bài 5:

$$a) (2x^2-5x+2)(x^2+3x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0(1) \\ x^2+3x+1=0(2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được: $2x^2-5x+2=0$ ta được: $x_1=\frac{1}{2}; x_2=2$

Giải (2) ta được: $x^2+3x+1=0$ ta được: $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; x_4=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$b) (2x^2+x)^2-(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow (2x^2+x-2x+1)(2x^2+x+2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-x+1)(2x^2+3x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x+1=0(1) \\ 2x^2+3x-1=0(2) \end{cases}$$

Giải (1): $\Delta=1-4.2.1=-7<0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Giải (2): $2x^2+3x-1=0$ ta được $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

Bài 6:

$$x^4+x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1-x^2+4x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow (x^2-x+3)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+3=0(1) \\ x^2+x-1=0(2) \end{cases}$$

Giải (1): $x^2-x+3=0$ có $\Delta=-11<0 \Rightarrow$ vô nghiệm.

Giải (2): $x^2+x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Bài 7:

Đặt $x^2 = m \geq 0$

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow am^2 + bm + c = 0$

Vì a và c trái dấu nên $\frac{a}{c} < 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là m_1 và m_2

Theo hệ thức Vi – ét ta có: $m_1 \cdot m_2 = \frac{c}{a}$

Vì a và c trái dấu nên $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 < 0$ hay m_1 và m_2 trái dấu nhau.

Vì m_1 và m_2 trái dấu nhau nên có 1 nghiệm bị loại, giả sử loại m_1 .

Khi đó $x^2 = m_2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{m_2}$

Vậy phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ chỉ có hai nghiệm và chúng là hai số đối nhau khi a và c trái dấu.

Bài 8:

a) Đặt $x^2 + 5x = y$. Ta được: $y^2 - 2y = 24 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 6 \end{cases}$

.Với $y = -4 \Rightarrow x^2 + 5x = -4 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$

.Với $y = 6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{-1; -4; 1; -6\}$

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81 \Leftrightarrow (x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) - 81 = 0$

Đặt $x^2 - 6x = y$. Ta được: $y^2 - 2(y + 9) - 81 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 99 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ y = -9 \end{cases}$

.Với $y = 11 \Rightarrow x^2 - 6x = 11 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{20} \\ x = 3 - \sqrt{20} \end{cases}$

.Với $y = -9 \Rightarrow x^2 - 6x = -9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy tập nghiệm $S = \{3 + \sqrt{20}; 3 - \sqrt{20}; 3\}$

c) Điều kiện: $x \neq 0; x^2 + x - 5 \neq 0$

Đặt $\frac{x^2 + x - 5}{x} = y$

Ta được: $y + \frac{3}{y} + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$

.Với $y = -1 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$

.Với $y = -3 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_3 = 1; x_4 = -5$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1 \pm \sqrt{6}; 1; -5\}$

Bài 9: Ta có: $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$

$\Leftrightarrow (x^2 + 14x + 45)(x^2 + 14x + 48) = 40$

Đặt: $x^2 + 14x + 45 = y$, ta có: $y(y+3) = 40 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -8 \end{cases}$

.Với $y = 5 \Rightarrow x^2 + 14x + 45 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -10 \end{cases}$

.Với $y = -8 \Rightarrow x^2 + 14x + 45 = -8 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 53 = 0$: vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{-4; -10\}$

Bài 10:

Ta viết dưới dạng: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$

Đặt $x^2 + 5x + 4 = y$, ta có: $y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -6 \end{cases}$

.Với $y = 4$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

.Với $y = -6$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$: vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; -5\}$

Bài 11:

a) $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0$ chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ta có phương trình:

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{.Với } y = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{.Với } y = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \left\{-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$

b) $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0$ chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$$

Đặt $x + \frac{5}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$. Ta có phương trình:

$$2(y^2 - 10) - 21y + 74 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 21y + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{.Với } y = 6 \Rightarrow x + \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\text{.Với } y = \frac{9}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; 5; \frac{5}{2}; 2\right\}$

Bài 12:

$$\text{a) Đặt } x + 3 = y, \text{ ta được: } (y+1)^4 + (y-1)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Với $y = 2 \Rightarrow x = -1$

Với $y = -2 \Rightarrow x = -5$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-1; -5\}$

b) Đặt $x - 3 = y$. Phương trình có dạng: $(y+1)^6 + (y-1)^6 = 64$

Khai triển và rút gọn ta được:

$$y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^4 + 16y^2 + 31) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Với $y = 1 \Rightarrow x = 4$

Với $y = -1 \Rightarrow x = 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{4; 2\}$

Bài 13.

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0$ chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x :

$$\frac{4}{x+1+\frac{3}{x}} + \frac{5}{x-5+\frac{3}{x}} = -\frac{3}{2}$$

Đặt $x + \frac{3}{x} - 2 = y$ phương trình có dạng: $\frac{4}{y+3} + \frac{5}{y-3} + \frac{3}{2} = 0$. ĐK: $y \neq \pm 3$

Quy đồng, khử mẫu rồi rút gọn ta được: $y^2 + 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -7 \end{cases}$

Với $y = 1 \Rightarrow x + \frac{3}{x} - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$: vô nghiệm.

$$\text{Với } y = -7 \Rightarrow x + \frac{3}{x} - 2 = -7 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

-----**Toán Học Sơ Đò**-----