

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

DẠNG 1: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT: $a(a+1) = k^2$

Bài 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + x - y^2 = 0$

HD:

$$x(x+1) = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$$

Bài 2: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + y^2 + 3xy = x^2y^2$

HD:

$$(x+y)^2 = x^2y^2 - xy = xy(xy-1)$$

Bài 3: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 - x + 2y = 1$

HD:

$$x^2 - x = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = x(x-1)$$

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

HD:

$$(x+y)^2 = x^2y^2 + xy = xy(xy+1)$$

DẠNG 2: ĐƯA VỀ TỔNG CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8y^2 + 8xy + 4y - 8 = 0$

HD:

$$(2x+2y)^2 + (2y+1)^2 = 9 = 0^2 + 3^2$$

Bài 2: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + y^2 - x - y = 8$

HD:

$$\text{Nhân với 4 ta được: } (4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$$

Bài 3: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

HD:

$$(x-2y)^2 + y^2 = 169$$

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$

HD:

$$(x-2y)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Bài 5: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^2 + 13y^2 - 6xy = 100$

HD:

$$(x-3y)^2 + 4y^2 = 100$$

Bài 6: Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 64$

HD:

$$t^2 + (t-y)^2 = 64 \text{ nếu đặt } x^3 = t$$

Bài 7: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 4$

HD:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = 4$$

Bài 8: Giải phương trình nghiệm nguyên: $(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y$

HD:

$$x^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2 = 4x^2y \Rightarrow (x^2 - y)^2 + x^2(y-1)^2 = 0$$

Bài 9 : Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 6x + 5 = 0$

HD :

$$\begin{aligned} (x^2 - 2xy + y^2) - 6x + 2y + x^2 + 5 &= 0 \Rightarrow (x-y)^2 - 2(x-y) - 4x + x^2 + 5 = 0 \\ \Rightarrow (x-y-1)^2 + (x-2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Bài 10: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 4y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$

HD:

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 0$$

Bài 11: Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$$

HD:

$$(2x)^2 - 4x(y+z) + (y^2 + 2yz + z^2) + (y^2 - 6y) + (z^2 - 10z) + 34 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - x - y)^2 + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 10z + 25) = 0$$

Bài 12: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + y^2 - x - y = 8$

HD:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{2} \Rightarrow (2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 34$$

Bài 13: Giải phương trình nghiệm nguyên: $m^2 + n^2 = 9m + 13n - 20$

HD:

$$\text{Nhân } 4 \left(4m^2 - 36m + 81\right) + \left(4n^2 - 52n + 169\right) = 170$$

Bài 14: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$

HD:

$$(x-3y)^2 = 4(25-y^2), \text{ mà } y^2 \leq 25, y^2 \text{ là số chính phương nên } \Rightarrow y$$

Bài 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$

HD :

$$\text{Ta có phương trình trở thành : } x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 = 16 \Rightarrow (x-2y)^2 + y^2 = 16, \text{ Vì } x, y \text{ là số nguyên nên}$$

$$(x-2y) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (x-2y)^2 + y^2 = 16 = 0 + 16 = 16 + 0$$

Bài 16: Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

HD:

$$(x-y)^2 = -x^2y^2 + 35xy - 60 \Rightarrow (x-y)^2 = 5(xy-3)(4-xy)$$

$$\text{Giả sử có } x, y \text{ nguyên thỏa mãn: } VT \geq 0 \Rightarrow 5(xy-3)(4-xy) \geq 0 \Rightarrow 3 \leq xy \leq 4.$$

$$\text{Do } x, y \text{ nguyên nên } xy=3 \text{ hoặc } xy=4$$

$$\text{Nếu } xy=3 \text{ thì } (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x=y \text{ và } xy=3 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Nếu } xy=4 \text{ thì } (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x=y=2$$

Bài 17: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn bất phương trình:

$$10x^2 + 20y^2 + 24xy + 8x - 24y + 51 < 0$$

HD:

$$\text{Biến đổi: } (3x+4y)^2 + (x+4)^2 + (2y-6)^2 - 1 < 0 \text{ khi } 3x+4y=0, x+4=0, 2y-6=0$$

Bài 18: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + y^2 - 8x + 3y = -18$

Bài 19: CMR: phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^5 + 29x - 30y = 10$

Bài 20: Tìm các số x,y nguyên dương thỏa mãn: $y^2(x+1) = 1567 + x^2$

Bài 21: Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2 + xy - 3x - 3y + 7 = 0$

Bài 22: Chứng minh rằng không có các số nguyên x,y,z thỏa mãn :

$$4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4$$

HD:

$$\text{Ta có } 2z^2 : 4 \Rightarrow z : 2, \text{ Ta có : } [4x(x+1) - 8y^3 + 2z^2] : 8 \text{ mà } 4 \text{ không chia hết cho } 8 \\ (\text{nên không tồn tại } x, y, z)$$

Bài 23 : Tìm x, y thỏa mãn : $x^2 + 6y^2 + 2xy + 2x + 32y + 46 = 0$

Bài 24: Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + 3y + 2z - 4$

HD:

Vì x, y, z là các số nguyên nên:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + 3y + 2z - 4 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + (z - 1)^2 \leq 0$$

DẠNG 3 : ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 4x - y^2 = 1$

HD :

$$(x^2 + 4x + 4) - y^2 = 5$$

Bài 2 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x - y + 2xy = 6$

HD:

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow x(1 + 2y) - y = 6 \Leftrightarrow x(1 + 2y) - y - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$2x(1 + 2y) - (2y + 1) = 11 \Leftrightarrow (2x - 1)(2y + 1) = 11$$

Bài 3 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + xy + 3y = 11$

HD :

$$\left(x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}\right) - \left(\frac{y^2}{4} - 3y\right) = 11 \Rightarrow \left(\frac{2x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 3}{2}\right)^2 = 2$$

$$(2x + y)^2 - (y - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow (2x + y + y - 3)(2x + y - y + 3) = 8$$

Bài 4 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 25 = y(y + 6)$

HD :

$$x^2 - (y^2 + 6y) = 25 \Rightarrow x^2 - (y^2 + 6y + 9) = 16 \Rightarrow (x + y + 3)(x - y - 3) = 16 \text{ mà}$$

$$x - y - 3 + x + y + 3 = 2x \text{ là 1 số chẵn nên 2 số đều chẵn}$$

Bài 5 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2$

HD :

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2 \Rightarrow (a + 1 + y)(a + 1 - y) = 1 \text{ với } a = x^2 + 3x$$

Bài 6 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - y^2 = 1999$

HD:

$$(x - y)(x + y) = 1999$$

Bài 7: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 2y = xy$

HD:

$$\left(x^2 - 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}\right) - \left(\frac{y^2}{4} + 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot 2 + 4\right) = -4 \Rightarrow (x - 2y - 2)(x + 2) = -16$$

Bài 8: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x - y = 6 - 2xy$

HD :

$$2xy + x - y = 6 \Leftrightarrow x(2y + 1) - y - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$2x(2y+1)-(2y+1)=11 \Leftrightarrow (2x-1)(2y+1)=11$$

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 2x^2y^2$

HD:

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 - x^2 - y^2 &= 0 \Rightarrow x^2(2y^2 - 1) - y^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2x^2(y^2 - 1) - (2y^2 - 1) &= 1 \Rightarrow (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = 1 \end{aligned}$$

Bài 10: Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy = 4(x + y)$

HD :

$$\begin{aligned} xy - 4x - 4y &= 0 \Leftrightarrow x(y - 4) - 4y + 16 = 16 \\ \Leftrightarrow x(y - 4) - 4(y - 4) &= 16 \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16 \end{aligned}$$

Bài 11: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x(x-1)(x-7)(x-8) = y^2$

HD:

$$(x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 7) = y^2 \Leftrightarrow a(a + 7) = y^2$$

Bài 12: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x(x-8) = y^2 - 116$

HD:

$$x^2 - 8x + 16 - y^2 = -110 \Rightarrow (x - 4)^2 - y^2 = -110$$

Bài 13: Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy + 3x - 5y = -3$

HD:

$$x(y + 3) - 5y - 15 = -18 \Rightarrow x(y + 3) - 5(y + 3) = -18$$

Bài 14: Giải phương trình nghiệm nguyên : $6x^2y^3 + 3x^2 - 10y^3 = 2$

HD:

$$3x^2(2y^3 + 1) - 10y^3 - 5 = 2 \Rightarrow 3x^2(2y^3 + 1) - 5(2y^3 + 1) = 2$$

Bài 15: Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$

HD:

$$\begin{aligned} \left[y^2 + 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot (3x + 2) + \frac{(3x + 2)^2}{4} \right] + \left(2x^2 - \frac{(3x + 2)^2}{4} + 3x + 2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(y + \frac{3x + 2}{2} \right)^2 + \frac{8x^2 - 9x^2 - 12x - 4 + 12x + 8}{4} &= 0 \Rightarrow (2y + 3x + 2)^2 - x^2 = -4 \end{aligned}$$

Bài 16: Giải phương trình nghiệm nguyên : $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 1$

HD:

$$4y + 2x = xy \Rightarrow x(y - 4) - 2x = 0$$

Bài 17 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

HD:

$$\Leftrightarrow 3(x + y) = xy \Leftrightarrow x(y - 3) - 3y = 0$$

Bài 18 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy - x - y = 2$

HD:

$$\Leftrightarrow x(y-1)-y+1=3 \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)=3 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=3$$

Bài 19 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x + xy + y = 9$

HD:

$$x(y+1)+y+1=10 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=10$$

Bài 20 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 2x - 11 = y^2$

HD :

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x-1-y)(x-1+y) = 12$$

Bài 21 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^3 - y^3 = xy + 8$

HD :

$$\text{Ta có : } (x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases} \Rightarrow ft \Leftrightarrow a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a-1) \Rightarrow -b = \frac{a^3 - 8}{3a-1}$$

$$27(a^3 - 8) : 3a - 1 \Rightarrow 27a^3 - 1 - 215 : 3a - 1 \Rightarrow 3a - 1 \in U(215)$$

Bài 22 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}$

HD :

$$\text{Ta có : } \Leftrightarrow 6(x+y)+1=xy \Leftrightarrow xy-6x-6y=1 \Leftrightarrow x(y-6)-6y+36=37$$

$$\Leftrightarrow x(y-6)-6(y-6)=37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37$$

Bài 23 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 - 2xy - 5x + y + 19 = 0$

HD :

$$\text{Ta có : } \Leftrightarrow 2x(x-y)-(x-y)-4x+19=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x-1)-4x+2=-17$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x-1)-2(2x-1)=-17 \Leftrightarrow (2x-1)(x-y-2)=-17$$

Bài 24 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 2y^2 + 2xy + y - 2 = 0$

HD :

$$\text{Ta có : } \Leftrightarrow x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 2 = 0$$

Có $\Delta' = y^2 - (2y^2 + y - 2) = -y^2 - y + 2$, Để phương trình có nghiệm thì :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$$

Bài 25 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + (3-2y)x + 2y^2 - 3y + 2 = 0$

HD :

Có $\Delta' = 1 - 4y^2$, để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1, x = -2$$

Bài 26 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $3x^2 + 4y^2 + 6x + 3y - 4 = 0$

HD :

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 6x) + (4y^2 + 3y) = 4$$

Bài 27 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3 = 0$

HD :

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 + 2y + 1) = 4 \Leftrightarrow (x-2y)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Bài 28 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$

HD :

$$\text{Xét : } \Delta_y = x^2 - 4 \Rightarrow \Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Rightarrow x = \pm$$

Bài 29 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - (y+5)x + 5y + 2 = 0$

HD :

Theo vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y + 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 5y + 2 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2)$$

Bài 30 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 2x - 11 = y^2$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } (x-1)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y) = 12$$

Bài 31 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

HD :

Chuyển phương trình thành bậc hai với x

$$\Leftrightarrow x^2 + (3y-1)x + (y^2 - y + 3) = 0, \text{ có :}$$

$\Delta = y^2 - 2y - 11$, Điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương

$$\Rightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2 \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = 5, y = -3$$

Bài 32 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy - 2x + 3y = 27$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } (x+3)(y-2) = 21$$

Bài 33 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x(y+3) - y = 38$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } (x-1)(y+3) = 35$$

Bài 34 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $3xy + x + y = 17$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } (3x+1)(3y+1) = 52$$

Bài 35 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + x + 1 = xy - y$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } (x-1)(y-x-2) = 3$$

Bài 36 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } x(y+1)^2 = 243y \Rightarrow (y+1)^2 \in U(243) \Rightarrow (x; y) = (54; 2); (24; 8)$$

Bài 37 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về : } 2x^2 - 5x + 19 = y(2x-1) \Rightarrow y = \frac{2x^2 - 5x + 19}{2x-1}$$

Bài 38 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $y(x-1) = x^2 + 2$

HD :

$$\text{Đưa phương trình về dạng : } y = x + 1 + \frac{3}{x-1}$$

Bài 39 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $15x^2 - 7y^2 = 9$

HD :

Ta có : $y^2 : 3 \Rightarrow y : 3 \Rightarrow y = 3y_1 \Rightarrow 5x^2 - 21y_1^2 = 3 \Rightarrow x : 3 \Rightarrow x = 3x_1$
 $\Rightarrow 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1 \Rightarrow y_1^2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow$ Vô nghiệm

Bài 40 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $29x^2 - 28y^2 = 2000$

HD :

Đưa phương trình về thành : $x^2 \equiv 5 \pmod{7}$, Vô nghiệm

Bài 41 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $1999x^2 - 2000y^2 = 2001$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 \equiv -1 \pmod{4}$, Vô nghiệm

Bài 42 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2$

Phương trình có nghiệm $x = y = 0$, xét $x, y \neq 0 \Rightarrow x^2 - 7$ là 1 số chính phương

Đặt : $x^2 - 7 = a^2 \Rightarrow (x - a)(x + a) = 7 \Rightarrow$ Tìm x

$(0; 0), (4; -1), (4; 2), (-4; 1), (-4; -2)$

Bài 43 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x + xy + y = 9$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x + 1)(y + 1) = 10$

Bài 44 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $y^2 = x(x + 1)(x + 7)(x + 8)$

HD :

Đưa phương trình thành :

$$y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = z^2 + 7z \Rightarrow 4y^2 = (2z + 7)^2 - 49$$

$$\Rightarrow 49 = (2z - 2y + 7)(2z + 2y + 7)$$

Bài 45 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1)$

HD :

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1 \Rightarrow (x + 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^2$$

Vì VP là 1 số lẻ $\Rightarrow (x + 1), (x^2 + 1)$ là số lẻ ,

$$\text{Giả sử : } (x + 1; x^2 + 1) = d \Rightarrow d \text{ lẻ, Mà : } \begin{cases} 1 + x : d \\ 1 + x^2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 : d \\ 1 + x^2 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + x)(1 + x^2) \text{ là số chính phương} \Rightarrow x + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow x = 0$$

Bài 46 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

HD :

$$\text{Ta có : } x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Rightarrow (x + y)^2 = x^2y^2 + xy = xy(xy + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 47 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x + y + xy = x^2 + y^2$

HD :

Đưa phương trình về dạng :

$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0$, Điều kiện để phương trình có nghiệm là :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 < 0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \leq 4 \Rightarrow (y-1)^2 \leq 1$$

Từ đó ta có : $y = 0, 1, 2$

Bài 48 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 + (3y-1)x + (2y^2 - y + 3) = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

Làm giống bài trên

Bài 49 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $y[2y^2 + (x^2 - 3x)y + (x + 3x^2)] = 0$

TH1 : $y=0 \Rightarrow \dots$

TH2 : $y \neq 0 \Rightarrow 2y^2 + (x^2 - 3x)y + (x + 3x^2) = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 x(x-8)$ phải là 1 số

chính phương

$$\Rightarrow x(x-8) = a^2 (a \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x-4-a)(x-4+a) = 16 \Rightarrow \text{Tìm } x$$

Đáp án : $(x ; y) = (9 ; -6), (9 ; -21), (8 ; -10), (-1 ; -1), (m ; 0)$ với m là số nguyên

Bài 50 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $7(x+y) = 3(x^2 - xy + y^2)$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $3x^2 - (3y+7)x + 3y^2 - 7y = 0$

Để phương trình có nghiệm thì Δ phải là 1 số chính phương

Bài 51 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x+y)$

HD :

Cách 1 : Đánh giá miền cực trị của x :

$$9x^2 = -3(x+y)^2 + 28(x+y) = \frac{14^2}{3} - 3\left[(x+y) - \frac{14}{3}\right]^2 \leq \frac{196}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 7 \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4\}$$

Cách 2 : Tính Δ

Bài 52 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 + (y-2)x + y^2 - y = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

Bài 53 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + xy + y^2 = x + y$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 + (y-1)x + y^2 - y = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

Bài 54 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 - 3yx + 3y^2 - 3y = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

Bài 55 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 2xy + 5y = y + 1$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x^2 - 2yx + 5y^2 - y - 1 = 0$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

Bài 56 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 4y^2 = 1$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $(x - 2y)(x + 2y) = 1$

Bài 57 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - y^2 = 91$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $(x - y)(x + y) = 91$

Bài 58 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^3 + xy = 7$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $x(2x^2 + y) = 7$

Bài 59 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$x^3 - y^3 - (7x - 7y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 7(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0$$

$$\text{TH1 : } x = y$$

$$\text{TH2 : } x^2 + xy + y^2 = 7 \Rightarrow (x - y)^2 = 7 - 3xy \Rightarrow xy < \frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Bài 60 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x + 2y)(3x + 4y) = 96$

Chú ý : Vì $(x + 2y) + (3x + 4y) = 2(2x + 3y)$ là 1 số chẵn nên có tính chất cùng chẵn

Bài 61 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy + 3x - 5y = -3$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $x(y + 3) - 5y - 15 = -18 \Rightarrow x(y + 3) - 5(y + 3) = -18$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(y + 3) = -18$$

Bài 62 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x + y + 1 = xyz$

HD :

Giả sử : $x \leq y$

$$\text{TH1 : } x = y \Rightarrow 2x + 1 = x^2z \Rightarrow x(xz - 2) = 1 \Rightarrow x = y = 1, z = 3$$

$$\text{TH2 : } x < y \Rightarrow xyz < 2y + 1 \Rightarrow xyz \leq 2y \Leftrightarrow xz \leq 2 \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 2 \text{ hoặc } x = 2, y = 2, z = 1$$

Bài 63 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 - 2xy - 5x + 5y = -19$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $2x(x-y)-5(x-y)=-19 \Leftrightarrow (2x-5)(x-y)=-19$

Bài 64 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $4x+11y=4xy$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(4x-11)(y-1)=1$

Bài 65 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2-656xy-657y^2=1983$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x+y)(x-567y)=1983$

Bài 66 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $7x-xy-3y=0$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x+3)(7-y)=21$

Bài 67 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $y^2(x+1)=1576+x^2$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x+1)(y^2-x+1)=1577=19.83$

Bài 68 : Giải phương trình nghiệm nguyên :

$$x^2+2003x+2004y+y=xy+2004xy^2+2005$$

HD :

Đưa phương trình về dạng : $(x-1)(x+2004-2004y^2-y)=1$

Bài 69: Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $2x^3-2y^2+5xy+1=0$

DẠNG 4 : ĐƯA VỀ ƯỚC SỐ

Bài 1 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 - 3x + 9 = -xy + 2y$

HD :

Phương trình tương đương với : $y(x-2) = x^2 - 3x + 9$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 9 : 2 - x$$

Với $x=2$ không phải là nghiệm khi đó ta có : $y = \frac{x^2 - 3x + 9}{2 - x}$

Bài 2 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2y + 2y = x + 4$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $y(x^2 + 2) = x + 4 \Rightarrow y = \frac{x + 4}{x^2 + 2}$

Bài 3 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2y + 2y - 2x + 1 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $y(x^2 + 2) = 2x - 1 \Rightarrow y = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

Bài 4 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình về dạng : $x^3 + 3x - 5 = x^2y + 2y = y(x^2 + 2)$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2}$$

Bài 5 : Tìm x nguyên để biểu thức sau nguyên : $A = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x - 7}{x^2 + 3}$

HD :

Ta có : $A = (x-2) + \frac{4x-1}{x^2+3} \Rightarrow (4x-1) : x^2+3 \Rightarrow (4x-1)(4x+1) : x^2+3$

Bài 6 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $7(x-1) + 3y = 2xy$

HD :

ta có : $7x - 7 + 3y = 2xy \Rightarrow 7(x-1) = 2xy - 3y = y(2x-3)$

$$\Rightarrow y = \frac{7x-7}{2x-3}$$

Bài 7 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2y + xy + y - x - 1 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình thành : $y(x^2 + x + 1) = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$

Bài 8 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2y - 2x + 2y + 1 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$y(x^2 + 2) = 2x - 1 \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x^2+2}$$

Bài 9 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 - x^2y - 2x^2 - 3y - 7x - 7 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình trở thành :

$$x^3 - 2x^2 - 7x - 7 = x^2y + 3y = y(x^2 + 3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 - 2x^2 - 7x - 7}{x^2 + 3}$$

Bài 10 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3x + 4y - xy = 16$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$xy - 3x - 4y = -16 \Leftrightarrow x(y - 3) - 4y + 12 = -4$$

$$x(y - 3) - 4(y - 3) = -4 \Rightarrow (y - 3)(x - 4) = -4$$

Bài 11 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $xy - 3x - 4y = 9$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$x(y - 3) - 4y + 12 = 21 \Leftrightarrow (x - 4)(y - 3) = 21$$

Bài 12 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $2xy - 5 = 6x + y$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$2xy - 6x - y = 5 \Leftrightarrow 2x(y - 3) - y + 3 = 8$$

$$(y - 3)(2x - 1) = 8$$

Bài 13 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $(y + 2)x^2 + 1 = x^2$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$y + 2 = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2} - 2$$

Bài 14 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + 2xy + x + 1 + 3y = 15$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$x^2 + x + 1 - 15 = -y(2x + 3) \Rightarrow -y = \frac{x^2 + x - 14}{2x + 3}$$

Bài 15 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $5x + 25 = 8y^2 - 3xy$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$3xy + 5x = 8y^2 - 25 \Rightarrow x(3y + 5) = 8y^2 - 25$$

$$x = \frac{8y^2 - 25}{3y + 5}$$

Bài 16 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$(2xy^2 - 2y^2) - (xy - y) - (x^2 - x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x - 1) - y(x - 1) - x(x - 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)(2y^2 - y - x) = -1$$

Bài 17 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$x^2 = \frac{y^2 - 1}{y + 2}$$

Bài 18 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $5x - 3y = 2xy - 11$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$2xy - 5x + 3y = 11 \Leftrightarrow x(2y - 5) = 11 - 3y \Rightarrow x = \frac{11 - 3y}{2y - 5}$$

Bài 19 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $xy - 2x - 3y + 1 = 0$

HD :

Biến đổi phương trình ta có :

$$y = 2 + \frac{5}{x - 3}$$

Bài 20 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $y(x + 1) = x^2 + 2$

HD :

Biến đổi phương trình ta có :

$$y = x + 1 + \frac{3}{x - 1}$$

Bài 21 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x - 3y + 5xy = 39$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$y = \frac{2x - 39}{3 - 5x} \Rightarrow |2x - 39| \geq |3 - 5x| \Rightarrow -12 \leq x \leq 6 \\ \Rightarrow (2x - 39)^2 \geq (3 - 5x)^2$$

Bài 22 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $5x - 3y = 2xy - 11$

HD :

Biến đổi phương trình về dạng :

$$y = 2 + \frac{x + 5}{2x + 3} \Rightarrow |x + 5| \geq |2x + 3| \Rightarrow (x + 5)^2 \geq (2x + 3)^2$$

Bài 23 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

HD :

Đưa phương trình trở thành :

$$(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$$

$$\text{TH1 : } y = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{TH2 : } y \neq 1 \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 3 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Bài 24 : Tìm các cặp $(x ; y)$ nguyên sao cho A có giá trị nguyên : $A = \frac{x^2 + x + 1}{xy - 1}$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$yA = x + 1 + \frac{x + y + 1}{xy - 1} \Rightarrow x + y + 1 \geq xy - 1 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) \leq 3$$

Bài 25 : Tìm các cặp số nguyên dương x, y, z biết : $2(y + z) = x(yz - 1)$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$x = \frac{2y+2z}{yz-1} \Rightarrow 2y+2z \geq yz-1 \Rightarrow yz-1-2y-2z \leq 0$$

Bài 26 : Tìm các cặp nguyên dương a, b biết A có giá trị nguyên : $A = \frac{a^2-2}{ab+2}$

HD :

Biến đổi phương trình thành :

$$2(a+b):(ab+2) \Rightarrow 2(a+b) = k(ab+2)$$

Chứng minh $k=1 \Rightarrow a=4, b=3$

Bài 27 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x^2 - y^2 = 2003$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $(x-y)(x+y) = 2003$

Bài 28 : Có tồn tại hay không hai số nguyên x, y thỏa mãn : $3x^2 + 7y^2 = 2002$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$3 \cdot \frac{x^2}{7} + y^2 = 286 \Rightarrow x^2 : 7 \text{ và } x^2 < 286 \Rightarrow 7 \leq |x| \leq 16 \text{ và } x : 7 \Rightarrow |x| = 7, |x| = 14$$

$$\text{Với } |x| = 7 \Rightarrow y^2 = 165(l)$$

$$\text{Với } |x| = 14 \Rightarrow y^2 = 202(l)$$

Bài 29 : Có tồn tại hay không hai số nguyên x, y thỏa mãn :

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2006$$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1) : 3$

Tương tự ta có: $y^3 - y : 3, z^3 - z : 3$, Mà $2006 \not\equiv 3$, Vậy không tồn tại x, y, z

Bài 30 : Tìm các cặp số tự nhiên thỏa mãn : $x^2 + 3^y = 3026$

HD:

$$\text{Xét } y = 0 \Rightarrow x^2 = 3026 - 1 = 3025 \Rightarrow x = 55$$

$$\text{Xét } y > 0 \Rightarrow 3^y : 3 \text{ còn } x^2 : 3 \text{ dư } 0 \text{ hoặc } 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 3^y : 3 \text{ dư } 0 \text{ hoặc dư } 1, \text{ Mà } 3026 \text{ chia } 3 \text{ dư } 2 \Rightarrow \text{ Vô lý}$$

Bài 31 : Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên : $x^2 - 2^y = 2005$

HD:

Với $y < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Nếu $y = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ Phương trình cũng vô nghiệm

$$\text{Nếu } y > 3 \Rightarrow 2^y : 8 \Rightarrow PT \Leftrightarrow x^2 - 2005 = 2^y : 8$$

$$\Rightarrow x^2 \equiv 5 \pmod{8} \text{ (Vô lý) do số chính phương chia } 8 \text{ dư } 0 \text{ hoặc } 1 \text{ hoặc } 4$$

Bài 32: Tìm tất cả các tam giác vuông có các cạnh là 1 số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi

HD:

Gọi x, y là các cạnh của hình vuông ($1 \leq x \leq y < z$)

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 = z^2 \text{ và } xy = 2(x+y+z) \quad (2)$$

$$\text{Khi đó ta có: } z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = z^2 + 4z + 4 \Rightarrow (x+y-2)^2 = (z+2)^2 \Rightarrow (x+y-2) = (z+2)$$

Thay $z = x + y - 4$ vào (2) ta được

Bài 33 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $5x - 3y = 2xy - 11$

HD:

$$\text{Đưa phương trình thành: } y = \frac{5x+11}{2x+3} = 2 + \frac{x+5}{2x+3} \Rightarrow 2(x+5):2x+3 \Rightarrow 7:2x+3$$

Bài 34 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 2x - 11 = y^2$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } (x^2 - 2x + 1) - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x-1-y)(x-1+y) = 12$$

Bài 35 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $y(x-1) = x^2 + 2$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } y = \frac{x^2+2}{x-1} = x+1 + \frac{3}{x-1}$$

Bài 36 : Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$x(y+1)^2 = 243y \quad \text{Vì } y \nmid (y+1)^2 \Rightarrow 243:(y+1)^2$$

Bài 37 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x + y = xy$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$(x-1)(y-1) = 1$$

Bài 38 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $xy + 1 = x + y$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } (x-1)(y-1) = 0$$

Bài 39 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} = (x-1) + \frac{3}{x-5}$$

Bài 40 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 - y^3 = xy + 8$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$(x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8, \text{ Đặt: } \begin{cases} x-y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$a^3 + 3ab = b + 8 \Rightarrow -b = \frac{a^3 - 8}{3a - 1} \Rightarrow a^3 - 8 : 3a - 1 \Rightarrow 27(a^3 - 8) : 3a - 1$$

$$27a^2 - 1 - 215 : 3a - 1 \Rightarrow 3a - 1 \in U(215)$$

Bài 41 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $xy - 2x - 3y + 1 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$y = \frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}$$

Bài 42 : Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2$ (1)

Phương trình đã cho có nghiệm: $x = y = 0$

Xét: $x, y \neq 0$, từ (1) $\Rightarrow x^2 - 7$ là 1 số chính phương

Đặt $x^2 - 7 = a^2 \Rightarrow (x - a)(x + a) = 7 \Rightarrow$ Tìm đc x

$\Rightarrow (0; 0), (4; -1), (4; 2), (-4; -1), (-4; -2)$

Bài 43 : Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$3x^2 - 6x + 3 = 16 - 4y^2 \Rightarrow 3(x - 1)^2 = 4(4 - y^2)$$

$$\Rightarrow 4 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow y = 1, y = 2$$

Bài 44: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^2 + xy - 2017x - 2018y - 6051 = 0$

DẠNG 5: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1 : Tìm tất cả x,y nguyên thỏa mãn : $x^4 + x^2 + 1 = y^2$

HD:

Ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow y^2 = x^4 + x^2 + 1 > x^4 = (x^2)^2$ (1)

Mặt khác $y^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \leq (x^2 + 1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(x^2)^2 < y^2 \leq (x^2 + 1)^2 \Rightarrow y^2 = (x^2 + 1)^2$

$$\Rightarrow x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Bài 2 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$

HD :

Ta có : $x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 = y^4 + 2y^2 + 1 + y^2 = (y^2 + 1)^2 + y^2 \geq (y^2 + 1)^2$

Mặt khác : $x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 = y^4 + 4y^2 + 4 - y^2 - 3 = (y^2 + 2)^2 - (y^2 + 3) < (y^2 + 2)^2$

Khi đó : $(y^2 + 1)^2 \leq x^4 < (y^2 + 2)^2 \Rightarrow x^4 = (y^2 + 1)^2$

$$x^4 = y^4 + 2y^2 + 1 \Rightarrow y^4 + 3y^2 + 1 = y^4 + 2y^2 + 1 \Rightarrow y = 0, x = \pm 1$$

Bài 3 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

HD :

Ta có : $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - y^2 \leq (y + 1)^3$ (1)

mặt khác : $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + 5y^2 + 2 > (y - 1)^3$

Khi đó : $(y - 1)^3 < x^3 \leq (y + 1)^3$

$$\text{TH1 : } x^3 = y^3 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{2}(l) \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

$$\text{TH2 : } x^3 = (y+1)^3 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Bài 4 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $1+x+x^2+x^3=y^3$

HD :

$$\text{Ta có : } 1+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow y^3 = (1+x+x^2) + x^3 > x^3$$

$$\text{Mặt khác : } y^3 = x^3 + 3x^2 + 12x + 8 - 5x^2 - 11x - 7 = (x+2)^2 - (5x^2 + 11x + 7) < (x+2)^3$$

$$\text{Khi đó : } x^3 < y^3 < (x+2)^3 \Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Bài 5 : Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là 1 số chính phương :

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$$

HD :

$$\text{Đặt } x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$$

$$\Rightarrow (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3) = y^2$$

$$\Rightarrow y^2 > (x^2 + x)^2 \quad (1)$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh } (x^2 + x)^2 < y^2 < (x^2 + x + 2)^2$$

$$\text{Thật vậy : } y^2 - (x^2 + x)^2 = x^2 + x + 3 > 0 \Rightarrow y^2 > (x^2 + x)^2$$

$$y^2 = (x^2 + x + 2)^2 = 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$y^2 = (x^2 + x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bài 6 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

HD :

$$\text{Ta có : } 4x^2 + 6y^2 + 8x = 38 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2.2x.2 + 4 + 6y^2 = 42$$

$$(2x+2)^2 + 6y^2 = 42 \geq (2x+2)^2 \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x+2)^2 : 4 \Rightarrow \text{Tìm } x \Rightarrow \text{Tìm } y$$

Bài 7 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + 2y^2 = 5$

HD :

Ta có : $2y^2 : 2$ mà $5 : 2$ dư 1 $\Rightarrow x^2$ chia 2 dư 1 $\Rightarrow x^2$ chia 8 dư 1 $\Rightarrow 2y^2 + x^2$ chia 8 dư 1 hoặc 3

mà 5 chia 8 dư 5 $\Rightarrow$ Vô lý

vậy không có giá trị x, y nguyên thỏa mãn

Bài 8 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $9x+5=y(y+1)$

HD:

$$\text{Nhân với 4 ta có : } 36x+20=4y^2+4y \Rightarrow 36x+21=4y^2+4y+1=(2y+1)^2$$

$$\text{Do } 36x+21:3 \Rightarrow 2y+1:3 \Rightarrow (2y+1)^2:9, \text{ mà } 36x+21 \not\equiv 9 \Rightarrow \text{Vô lý}$$

vậy không tồn tại x, y nguyên

Bài 9 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

HD:

$$\text{Ta có : } 2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 3(7-y^2)$$

$$\Rightarrow 7 - y^2 : 2 \Rightarrow y^2 \text{ là số lẻ } < 7 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Bài 10 : Tìm x, y nguyên sao cho : $2^x + 3 = y^2$

HD :

$$\text{Xét } x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{Xét } x = 1 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow \text{Vô lý}$$

Với $x \geq 2 \Rightarrow 2^2 : 4 \Rightarrow VT : 4 \text{ dư } 3 \Rightarrow y \text{ là số lẻ} \Rightarrow y = 2k + 1 \Rightarrow y^2 = 4k^2 + 4k + 1 : 4 \text{ dư } 1 \text{ (vl)}$

Vậy không tồn tại x, y nguyên

Bài 11 : Tìm x, y nguyên sao cho : $2^x + 57 = y^2$

HD :

TH1 : x là số lẻ :

$\Rightarrow x = 2n + 1 (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^x = 2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2(3+1)^n = 2(B(3)+1)^n = B(3)+2 \text{ chia } 3 \text{ dư } 2$

VP là 1 số chính phương chia 3 không dư 2

TH2 : x là số chẵn :

$$\Rightarrow x = 2n (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow y^2 - 2^{2n} = 57 \Rightarrow (y + 2^n)(y - 2^n) = 3 \cdot 19$$

Thấy $y + 2^n > 0 \Rightarrow y - 2^n > 0$ và $y + 2^n > y - 2^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 2^n = 57 \\ y - 2^n = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y + 2^n = 19 \\ y - 2^n = 3 \end{cases}$$

Bài 12 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 4 = y^2$

HD :

$$\text{Ta có: } (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + (3x^2 + 6x + 4) = y^2 > (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 + x^2 + 2x + 3 \\ \Rightarrow y^2 > (x^2 + 2x + 1)^2 + (x^2 + 2x + 3)$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } y^2 \leq (x^2 + 2x + 3)^2$$

$$\text{Khi đó: } x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 4 \leq x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 + 12x + 6x^2$$

$$\text{Vậy } (x^2 + 2x + 1)^2 < y^2 \leq (x^2 + 2x + 3)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = (x^2 + 2x + 2)^2 \text{ hoặc } y^2 = (x^2 + 2x + 3)^2$$

Bài 13 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$

HD :

$$\text{Giả sử: } 1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow VT = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 20 \geq 4x^2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: Với } x=1 \Rightarrow y^2 + z^2 + yz = 19 > y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 \Rightarrow y^2 < \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow y^2 < 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ Nếu } y=1 \Rightarrow Z \text{ không có giá trị, Nếu } y=2 \Rightarrow z=3$$

TH2 : Với $x=2$ làm tương tự

Bài 14 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

HD:

$$\text{Giả sử: } 1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{2; 3\}$$

Làm tương tự bài trên

Bài 15 : Tìm các số nguyên dương a, b, c đôi 1 khác nhau thỏa mãn :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = A$$

Có giá trị nguyên

HD:

Ta có: $Aabc = ab + bc + ca + a + b + c \Rightarrow a, b, c$ có cùng tính chẵn lẻ:

$$\text{Giả sử : } a < b < c \text{ Nếu } a \geq 3 \Rightarrow b \geq 5, c \geq 7 \Rightarrow A < 1(l) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Nếu $a=1 \Rightarrow b \geq 3, c \geq 5 \Rightarrow 1 < A < 3 \Rightarrow A=2$ thay $a=1$ và $A=2$ vào ta được:

$$2(b+c)+1=bc \text{ hay } (b-2)(c-2)=5 \Rightarrow b=3, c=7$$

Nếu $a=2$, xét tương tự $\Rightarrow (2;4;4), (1;3;7)$ và các hoán vị

Bài 16 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x + y + z + 9 = xyz$

HD:

$$\text{Ta có: } GT \Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{9}{xyz} = 1$$

$$\text{Giả sử: } x \geq y \geq z \geq 1$$

$$\text{Khi đó: } VT \leq \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{9}{z^2} = \frac{12}{z^2} \Rightarrow z^2 \leq 12 \Rightarrow z \in \{1; 2; 3\}$$

$$\text{Với } z=1 \Rightarrow x+y = xy - 10 \Rightarrow \text{tự làm}$$

Bài 17 : Tìm tất cả các số nguyên tố p để tổng tất cả các ước tự nhiên của p^4 là số chính phương

HD:

Ta có:

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = m^2 \Rightarrow (2p^2 + p)^2 < 4m^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow$$

$$4m^2 = (2p^2 + p + 1)^2 \Rightarrow p = 3$$

Bài 18 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$

HD:

$$\text{Biến đổi thành: } (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2 + 2y - y^2$$

Bài 19 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - xy + y^2 = 5$

HD:

$$\text{Biến đổi thành: } (2x - y)^2 = 20 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{20}{3} \Rightarrow y^2 = 0, 1, 4$$

Xét các TH $\Rightarrow x$

Bài 20: Tìm các nghiệm nguyên dương x, y của phương trình : $y^2 = x^2 + 12x + 1995$

HD:

$$\text{Biến đổi thành: } y^2 = (x+6)^2 + 1959 \geq 1959 \Rightarrow y \geq 45$$

Lại có: $-1959 = (x+6)^2 - y^2 = (x+y+6)(x-y+6)$, Với $x+y \geq 52$ và $1959=3.653$

Bài 21 : Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} = 3$

HD:

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 = 3xyz$$

$$\text{Cô si ta có: } VT \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^4} \Rightarrow 3xyz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^4} \Rightarrow xyz \leq 1, \text{ Do } x, y, z > 0$$

và x, y, z nguyên nên ta có các nghiệm là:

$(1; 1; 1)$, $(1; -1; -1)$ và các hoán vị

Bài 22: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

HD :

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow y=1 \text{ hoặc } y=-1$$

$$\text{Với } x \neq 0 \Rightarrow 4y^2 = (2x^2 + x + 2)^2 - 5x^2 < (2x^2 + x + 2)^2$$

$$\Rightarrow (2x^2 + x)^2 < 4y^2 < (2x^2 + x + 2)^2 \Rightarrow x=3, x=-1$$

Bài 23: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $y^3 = 1 + x + x^2 + x^3$

HD :

Từ phương trình ta có :

$$x^3 < y^3 < (x+2)^3 \Rightarrow y^3 = (x+1)^3$$

Bài 24: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$

HD :

Giả sử :

$$x \geq y \geq z \geq t \Rightarrow 2xyzt = 5(x+y+z+t)+10 \leq 20x+10 \Rightarrow yzt \leq 15 \Rightarrow t^3 \leq 15 \Rightarrow t \leq 2$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow 2xyz = 5(x+y+z)+15 \leq 15x+15 \Rightarrow 2yz \leq 30 \Rightarrow 2z^2 \leq 30 \Rightarrow z \leq 3$$

$$\text{TH1 : } z=1 \Rightarrow 2xy = 5(x+y)+20 \Rightarrow 4xy = 10(x+y)+40 \Rightarrow (2x-5)(2y-5)=65$$

Giải các TH và với $t=2$

Bài 25: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $xyz = 4(x+y+z)$

HD :

$$\text{Giả sử : } x \geq y \geq z \Rightarrow xyz = 4(x+y+z) \leq 12x \Rightarrow yz \leq 12 \Rightarrow z^2 \leq 12 \Rightarrow z \in \{1; 2; 3\}$$

Bài 26: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $xy + yz + zx = xyz + 2$

HD :

$$\text{Giả sử : } x \geq y \geq z \geq 1$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq xy + xy + xy = 3xy \Rightarrow 3xy \geq xyz + 2 \Rightarrow 3xy > xyz \Rightarrow z < 3 \Rightarrow z = 1, 2$$

Bài 27: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$

HD :

$$\text{Giả sử : } x \geq y \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq \frac{2}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{2x-1}{xy} < \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{y} \Rightarrow y < 6 \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Bài 28: Tìm 3 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

HD :

Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z , Ta có :

$$x + y + z = xyz, \text{ Giả sử : } 1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow xyz = x + y + z \leq 3z \Rightarrow xy \leq 3 \Rightarrow xy \in \{1; 2; 3\}$$

$$\text{Với } xy = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

$$\text{Với } xy = 2 \Rightarrow x = 1, y = 2$$

$$\text{Với } xy = 3 \Rightarrow x = 1, y = 3$$

Bài 29: Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn phương trình : $2^x + 3^x = 5^x$

HD :

$$\text{Ta có : } \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow \text{ Vô lý}$$

$$\text{Với } x=1 \text{ đúng}$$

$$\text{Với } x \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5} \Rightarrow VT < VP$$

Bài 30: Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn tại số nguyên x sao cho $x(x+1) = k(k+2)$

HD :

$$\text{Ta có : } x^2 + x = k^2 + 2k \Rightarrow x^2 + x + 1 = (k+1)^2$$

$$\text{Do } x > 0 \Rightarrow x^2 < x^2 + x + 1 = (k+1)^2 \quad (1)$$

$$\text{và } x > 0 \Rightarrow (k+1)^2 = x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2 \text{ Vô lý}$$

Bài 31: Tìm x nguyên để biểu thức sau là 1 số chính phương : $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$

HD :

$$\text{Đặt } x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2 \Rightarrow y^2 = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$$

$$\text{Ta cần chứng minh : } a^2 < y^2 < (a+2)^2 \text{ với } a = x^2 + x$$

Bài 32: Tìm 3 số nguyên dương đôi 1 khác nhau thỏa mãn : $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^2$

HD :

$$\text{Giả sử : } x < y < z \Rightarrow \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \Rightarrow x+y+z \leq 9 \text{ và không xảy ra}$$

đầu =

$$\Rightarrow x+y+z \leq 8, \text{ mà } x+y+z \geq 1+2+3=6 \Rightarrow x+y+z \in \{6; 7; 8\}$$

$$\text{Kết hợp với phương trình đầu} \Rightarrow (x; y; z) = (1; 2; 3)$$

Bài 33: Tìm tất cả các bộ 3 số tự nhiên không nhỏ hơn 1 sao cho tích của 2 số bất kỳ cộng với 1 chia hết cho số còn lại

HD :

$$\text{Giả sử 3 số đã cho là : } a \geq b \geq c \geq 1 \Rightarrow \frac{ab+1}{c}, \frac{bc+1}{a}, \frac{ca+1}{b} \in \mathbb{Z}$$

Nhân theo vế ta được : $\frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc} \Rightarrow ab+bc+ca+1=abc$

$$\Rightarrow ab+bc+ca+1=k.abc$$

$$\text{Vì } ab+bc+ca+1 \leq 4abc \Rightarrow k \leq 4$$

$$\text{nếu } k=4 \Rightarrow a=b=c=1 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Nếu } k=3 \text{ thì } 3abc \leq 4ab \Rightarrow c \leq 1 \Rightarrow a=2, b=1$$

$$\text{nếu } k=2, \text{ hoặc } k=1 \text{ xét tương tự}$$

Bài 34 : Tìm 3 số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng

HD :

Gọi 3 số nguyên dương cần tìm là x, y, z , ta có :

$$xyz = 2(x+y+z)$$

$$\text{Giả sử : } x \leq y \leq z \Rightarrow xyz = 2(x+y+z) \leq 2.3z = 6z \Rightarrow xy \leq 6$$

Xét các TH của xy

Bài 35: Tìm 4 số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

HD :

Gọi 4 số nguyên dương cần tìm là : $x, y, z, t \Rightarrow x+y+z+t = xyz$

$$\text{Giả sử : } t \geq z \geq y \geq x \geq 1 \Rightarrow xyz = x+y+z+t \leq 4t \Rightarrow xyz \leq 4 \Rightarrow xyz \in \{1; 2; 3; 4\}$$

Xét các TH của xyz

Bài 36 : Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên dương: $x^{17} + y^{17} = 19^{17}$

HD :

$$\text{Giả sử : } x^{17} + y^{17} = 19^{17} \text{ và } 1 \leq x \leq y \leq 19$$

$$\Rightarrow 19^{17} \geq (y+1)^{17} \Rightarrow 19^{17} \geq y^{17} + 17.y^{16}$$

$$\text{vậy } x > 17 \Rightarrow x=y=18$$

thử lại ta thấy $x=y=18$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nguyên dương

Bài 37 : Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x và y sao cho $x^2 + y$ và $y^2 + x$ đều là số chính phương

HD :

$$\text{Giả sử : } y < x, \text{ Ta có : } x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2$$

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương thỏa mãn ban đầu

Bài 38: Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là 1 số chính phương: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

HD :

$$\text{Giả sử : } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$$

$$\Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x+2)^2 > (2x^2 + x)^2, \text{ Nên :}$$

$$(2y)^2 > (2x^2 + x + 1)^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Bài 39 : Giải phương trình nghiệm nguyên: $(x+2)^4 - x^4 = y^3$

HD :

$$\text{ta có : } y^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 1),$$

$$\text{Đặt } y = 2x \Rightarrow z^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

$$\text{Thấy ngay : } x = -1 \Rightarrow y = 0 \text{ (t/m)}$$

Chứng minh phương trình sau không có nghiệm

Bài 40 : Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1991}$ chỉ có 1 số hữu hạn nghiệm nguyên dương

HD :

Giả sử : $0 < x \leq y \leq z$, Ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1991} \leq \frac{3}{x}$

$\Rightarrow 1991 < x \leq 3.1991 \Rightarrow x$ có hữu hạn giá trị

Với mỗi giá trị của $x \Rightarrow y < \frac{2.1991x}{x-1991} \leq 2^2.1991$ giá trị

$\Rightarrow$ Tương ứng với z

Bài 41: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 25 = y(y+6)$

HD:

$x^2 - 25 = y(y+6) \Rightarrow x^2 - (y+3)^2 = 16 \Rightarrow (x+y+3)(x-y-3) = 16$

Bài 42: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$

HD:

Phương trình đã cho viết lại thành: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Ta thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình:

Nếu $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

Nếu $x < 2$ thì dễ thấy $x=0$ và $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình

Nếu $x < 0$ ta đặt $x = -y (y > 0)$ nên $y \geq 1$, Ta có :

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{-y} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-y} = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y = 1,$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải lớn hơn 1 do $y \geq 1$

Bài 43: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

HD:

Phương trình $\Leftrightarrow (x-y)^2 = -x^2y^2 + 35xy - 60 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(xy-3)(4-xy)$

Giả sử x, y nguyên thỏa mãn VT ≥ 0

$\Rightarrow 5(xy-3)(4-xy) \geq 0 \Rightarrow 3 \leq xy \leq 4$, Do x, y nguyên nên $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$

Với: $\begin{cases} xy = 3 \\ (x-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Với $\begin{cases} xy = 4 \\ (x-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$