

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG HỆ THỨC VI-ÉT

Lời nói đầu	1
Chủ đề 1. Phương trình bậc hai một ẩn	4
1. Kiến thức cần nhớ	4
2. Bài tập vận dụng	5
Dạng 1. Giải phương trình bậc hai một ẩn	5
Dạng 2. Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm	6
Dạng 3. Nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ của phương trình bậc hai	7
Dạng 4. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm chung	10
Dạng 5. Chứng minh trong một hệ các phương trình bậc 2 có một phương trình có nghiệm.	13
Dạng 6. Ứng dụng của phương trình bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức và tìm GTNN và GTLN	
Chủ đề 2. Khai thác các ứng dụng của định lý Vi-ét	17
A. Kiến thức cần nhớ	17
B. Các ứng dụng của định lý vi-et	17
Dạng 1: Giải phương trình bậc 2 bằng cách tính nhẩm nghiệm	17
Dạng 2: Tính giá trị biểu thức giữa các nghiệm của phương trình	18
Dạng 3. Tìm hia số khi biết tổng và tích	22
Dạng 4. Phân tích tam thức tam thức bậc hai thành nhân tử	24
Dạng 5. Tìm tham số để phương trình bậc hai có một nghiệm $x = x_1$. Tìm nghiệm thứ hai	25
Dạng 6. Xác định tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn một hệ điều kiện cho trước	26
Dạng 7. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó hoặc hai nghiệm của nó liên quan đến hai nghiệm của một phương trình đã cho	30
Dạng 8. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình bậc hai, không phụ thuộc vào tham số.	32
Dạng 9. Chứng minh hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai, hoặc hai nghiệm của phương trình bậc 2.	34
Dạng 10. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai, so sánh các nghiệm của phương trình bậc hai với một số cho trước.	37
Dạng 11. Nghiệm chung của hai hay nhiều phương trình, hai phương trình	41

tương đương

Dạng 12. Ứng dụng của hệ thức vi-et các bài toán số học	44
Dạng 13. Ứng dụng của hệ thức vi-et giải phương trình, hệ phương trình	46
Dạng 14. Ứng dụng hệ thức vi-et chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, tìm GTLN và GTNN	51
Dạng 15. Vận dụng định lý vi-et vào các bài toán hàm số	54
Dạng 16. Ứng dụng định lý Vi-ét trong các bài toán hình học	57
Bài tập rèn luyện tổng hợp	60
Hướng dẫn giải	68
Bài tập không lời giải	98

CHỦ ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1/ Định nghĩa:

Phương trình bậc 2 một ẩn là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn, a, b, c là các hệ số cho trước và $a \neq 0$.

2/ Giải phương trình bậc 2.

2.1 Phương trình bậc 2 khuyết:

- Với $c = 0$ phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

- Với $b = 0$ phương trình có dạng:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \quad (*)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$-\frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ ac < 0 \end{cases} \quad (a \text{ và } c \text{ trái dấu})$$

Với điều kiện trên ta có: $(*) \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

2.2 Giải phương trình bậc hai một ẩn đầy đủ bằng công thức nghiệm.

Phương trình bậc 2 một ẩn: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$

Xét biệt số: $\Delta = b^2 - 4ac$

+) Nếu $\Delta < 0$ phương trình (1) vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta = 0$ phương trình (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

+) Nếu $\Delta > 0$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Trường hợp: $b = 2b'$ ta có: $\Delta' = b'^2 - ac$. Khi đó:

+) Nếu $\Delta' < 0$ phương trình (1) vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta' = 0$ phương trình (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

+) Nếu $\Delta' > 0$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

2.3 Trường hợp đặc biệt có thể nhầm nhanh nghiệm:

Phương trình bậc 2 một ẩn: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Giải phương trình bậc hai một ẩn

★**Thí dụ 1.** Giải phương trình: $mx^2 - 2(m-3)x + m - 4 = 0$ (m là tham số) (1)

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để tập nghiệm của phương trình có một phần tử.

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 1$ ta có: $x^2 + 4x - 3 = 0$

Ta có: $\Delta' = 2^2 - 1 \cdot (-3) = 4 + 3 = 7$

Do đó: $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{1} = -2 + \sqrt{7}; \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{1} = -2 - \sqrt{7}$

Khi $m = 1$ thì phương trình có nghiệm là: $x_1 = -2 + \sqrt{7}; \quad x_2 = -2 - \sqrt{7}$

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-3)^2 - m(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < \frac{9}{2}$$

Vậy điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $0 \neq m < \frac{9}{2}$

c) Để phương trình (1) chỉ có một phần tử thì hoặc (1) có nghiệm kép hoặc là phương trình bậc nhất.

Với $m = 0$ phương trình có dạng: $6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Với $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc 2, có nghiệm kép khi:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 - m(m-4) = 0 \Leftrightarrow -2m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2} \text{ (thỏa mãn } m \neq 0)$$

Vậy khi $m = 0$ hoặc $m = \frac{9}{2}$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có một phần tử.

2. Tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm

Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ mà ta lại có: $\Delta = b^2 - 4ac$ nên khi $ac < 0$ thì $\Delta > 0$. Do đó với nhiều trường hợp phức tạp ta chỉ cần xét $ac < 0$ để chứng minh phương trình đó luôn có nghiệm.

★**Thí dụ 2.** Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi a, b :

$$(a+1)x^2 - 2(a+b)x + (b-1) = 0 \quad (1)$$

(Nâng cao phát triển Vũ Hữu Bình – tập 2)

Hướng dẫn giải

- Với $a = -1$ phương trình (1) trở thành:

$$-2(b-1)x + (b-1) = 0 \Leftrightarrow 2(b-1)x = (b-1)$$

+ Nếu $b \neq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm: $x = 0,5$.

+ Nếu $b = 1$ thì phương trình có vô số nghiệm.

- Với $a \neq -1$ thì phương trình (1) là phương trình bậc 2 có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (a+b)^2 - (a+1)(b-1) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - ab + a - b + 1 \\ &= a^2 + ab + b^2 + (a-b) + 1 \\ &= \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 + (a-b) + 1 \\ &= \frac{3}{4}(a+b)^2 + \left[\frac{1}{2}(a-b) + 1 \right]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó với $a \neq -1$ phương trình (1) cũng luôn có nghiệm

Vậy phương trình (1) có nghiệm với mọi a, b .

★**Thí dụ 3.** Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi m :

$$x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0 \quad (1)$$

(Nâng cao phát triển Vũ Hữu Bình – tập 2)

Hướng dẫn giải

Ta có: $ac = -(m^2 - 4m + 5) = -(m^2 - 4m + 4) - 1 = -(m-2)^2 - 1 < 0$

Do đó phương trình luôn có nghiệm.

Nhận xét:

- Nếu $ac \leq 0$ và $a \neq 0$ thì $\Delta \geq 0$ chúng ta cũng có thể kết luận được phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm nghiệm.
- Nếu chỉ mỗi $ac \leq 0$ chúng ta chưa thể kết luận được phương trình có nghiệm, chẳng hạn với phương trình $m^2x - mx - 1 = 0$ có $ac = -m^2 \leq 0$ nhưng với $m = 0$ thì phương trình đó có dạng $0x = 1$ (vô nghiệm).

2. Nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ của phương trình bậc hai

★**Thí dụ 4.** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$. Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Bình năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m - 4) = m^2 - m + 4$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ' phải là số chính phương.

Do đó:

$$\begin{aligned} m^2 - m + 4 &= k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 16 &= 4k^2 \\ \Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 4k^2 &= -15 \\ \Leftrightarrow (2m - 1 - 2k)(2m - 1 + 2k) &= -15 \end{aligned}$$

Do k^2 luôn lớn hơn 0 nên không ảnh hưởng tới giá trị cần tìm của m ta giả sử $k \geq 0$, khi đó ta có: $(2m - 1 + 2k) \geq (2m - 1 - 2k)$.

Vì thế ta có các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} +) \begin{cases} 2m - 1 - 2k = -1 \\ 2m - 1 + 2k = 15 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = 4 \end{cases} \\ +) \begin{cases} 2m - 1 - 2k = -3 \\ 2m - 1 + 2k = 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 2 \end{cases} \\ +) \begin{cases} 2m - 1 - 2k = -5 \\ 2m - 1 + 2k = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ k = 2 \end{cases} \\ +) \begin{cases} 2m - 1 - 2k = -15 \\ 2m - 1 + 2k = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ k = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại các giá trị $m = -3, m = 0, m = 1, m = 4$ vào phương trình ta thấy đều thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy khi $m = -3, m = 0, m = 1, m = 4$ phương trình có nghiệm nguyên.

Cách khác: ta có thể vận dụng lý vi-ét như sau:

Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm nguyên của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m; \quad x_1 x_2 = m - 4.$

Suy ra $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 - 1 = 15 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = -15.$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -1 \\ 2x_2 - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow m = 4$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -5 \\ 2x_2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -15 \\ 2x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -3 \\ 2x_2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

Thử lại $m = 0, m = 1, m = -3, m = 4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

★**Thí dụ 5.** Tìm các số nguyên n để phương trình sau có các nghiệm và số nguyên:

$$x^2 - (4+n)x + 2n = 0 \quad (1)$$

(Nâng cao phát triển Vũ Hữu Bình – tập 2)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = (4+n)^2 - 4 \cdot 2n = 16 + 8n + n^2 - 8n = n^2 + 16$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương. Do đó:

$$n^2 + 16 = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n^2 - k^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow (n+k)(n-k) = -16$$

Ta thấy $(n+k) - (n-k) = 2k$ nên $(n+k)$ và $(n-k)$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do tích là 16 nên là cùng chẵn. Mặt khác $(n+k) \geq (n-k)$ do đó:

$n+k$	8	4	2
$n-k$	-2	-4	-8

n	3	0	-3
---	---	---	----

Thử lại cả giá trị $n = -3, 0, 3$ ta thấy đều thỏa mãn điều kiện phương trình có nghiệm nguyên.

Vậy $n = -3, 0, 3$ là các giá trị cần tìm.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình $a(a+3)x^2 - 2x - (a+1)(a+2) = 0$ (a là tham số, nguyên).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ.

b) Xác định a để phương trình có các nghiệm đều nguyên.

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2011-2012)

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm hữu tỷ:

- Với $a(a+3) = 0$ hay $a = 0$ hoặc $a = -3$:

Phương trình trở thành: $-2x - 2 = 0$ có nghiệm là $x = -1$

- Với $a(a+3) \neq 0$ hay $a \neq 0$ và $a \neq -3$ thì phương trình cho là phương trình bậc hai.

$$\begin{aligned} & a(a+3)x^2 + 2x - (a+1)(a+2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 + 3a)x^2 - 2(x+1) - (a^2 + 3a) = 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 + 3a)(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)[(a^2 + 3a)(x-1) - 2] = 0 \end{aligned}$$

Nên phương trình cho có 2 nghiệm:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} = 1 + \frac{2}{a(a+3)} \end{aligned}$$

Vì a nguyên nên suy ra phương trình cho luôn có nghiệm hữu tỷ.

Cách khác: Nếu thí sinh tính $\Delta' = (a^2 + 3a + 1)^2 > 0, \forall a$

Vì a nguyên nên $\sqrt{\Delta'} = a^2 + 3a + 1$ là số nguyên

Vậy phương trình cho luôn có nghiệm hữu tỷ.

b) Xác định a để các nghiệm của phương trình đều là nghiệm nguyên:

- Nếu $a = 0$ hoặc $a = -3$: phương trình có 1 nghiệm nguyên $x = -1$.

- Nếu $a \neq 0, a \neq -3$ phương trình đã cho là phương trình bậc 2, ta có:

$$\begin{aligned}
& a(a+3)x^2 + 2x - (a+1)(a+2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (a^2 + 3a)x^2 - 2(x+1) - (a^2 + 3a) = 0 \\
& \Leftrightarrow (a^2 + 3a)(x-1)(x+1) - 2(x+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)[(a^2 + 3a)(x-1) - 2] = 0
\end{aligned}$$

Nên phương trình cho có 2 nghiệm:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1 \\
x_2 &= \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} = 1 + \frac{2}{a(a+3)}
\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ nguyên nên để phương trình có các nghiệm đều nguyên thì x_2 cũng phải là nghiệm nguyên.

Nghĩa là: 2 phải chia hết cho $a(a+3)$.

$$\text{Khi đó ta có các khả năng xảy ra : } \begin{cases} a(a+3) = -2 \\ a(a+3) = -1 \\ a(a+3) = 2 \\ a(a+3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 3a + 1 = 0 \\ a^2 + 3a - 2 = 0 \\ a^2 + 3a - 1 = 0 \end{cases}$$

Vì a nguyên nên chỉ có phương trình $a^2 + 3a + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên $a = -1$ hoặc $a = -2$.

Vậy: $a \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì phương trình cho có các nghiệm đều nguyên.

3. Tìm giá trị của tham số để hai phương trình có nghiệm chung

Bài toán. Hai phương trình bậc hai $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ (*) và $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ (**) với $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ là các tham số, xác định giá trị của tham số để 2 phương trình có nghiệm chung.

Phương pháp giải.

Bước 1. Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình khi đó:

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ hệ phương trình ta xác định được giá trị của tham số.

Bước 2. Thay giá trị của tham số vào phương trình (*) và (**) tính ra nghiệm chung và kết luận.

★**Thí dụ 5.** Tìm giá trị của m để hai phương trình sau có nghiệm chung

$$x^2 - (m+4)x + m + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0 \quad (2)$$

Hướng dẫn giải

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2), khi đó:

$$\begin{cases} x_0^2 - (m+4)x_0 + m + 5 = 0 & (1) \\ x_0^2 - (m+2)x_0 + m + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế (1) và (2) ta được:

$$-2x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

Thay $x_0 = 2$ vào hệ ta được: $m = 1$.

Thay $m = 1$ vào phương trình (1) và (2) ta được phương trình:

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

hai phương trình trên có nghiệm chung là 2.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

★ **Thí dụ 5.** Cho hai phương trình:

$$x^2 + mx + 1 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + x + m = 0 \quad (4)$$

Tìm giá trị của m để:

- Hai phương trình có nghiệm chung.
- Hai phương trình tương đương.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (3) và (4), khi đó:

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 & (3) \\ x_0^2 + x_0 + m = 0 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế (3) và (4) ta được:

$$mx_0 + 1 - x_0 - m = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Thay $x_0 = 1$ vào hệ ta được: $m = -2$.

Thử lại:

- Thay $m = 1$ vào phương trình (3) và (4) ta đều được phương trình: $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên loại.

- Thay $m = -2$ vào phương trình (1) và (2) ta được phương trình:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

hai phương trình trên có nghiệm chung là $x = 1$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

b) Hai phương trình tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

Trường hợp 1: Hai phương trình đã cho đều vô nghiệm:

$$\begin{cases} \Delta_3 = m^2 - 4 < 0 \\ \Delta_4 = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < 2.$$

Trường hợp 2: Hai phương trình có nghiệm chung, theo câu a nếu $m = -2$ thì (3) và (4) đều có nghiệm chung là 1 nhưng phương trình (3) chỉ có 1 nghiệm là $x = 1$ còn phương trình (4) có nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$, nên chúng không cùng tập nghiệm, nên chúng không tương đương.

Vậy phương trình (3) và (4) tương đương khi: $\frac{1}{4} < m < 2$

★Thí dụ 5. Tìm giá trị của m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

$$x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m = 0 \quad (5)$$

Hướng dẫn giải

Phương trình (5) tương đương:

$$(x^2 + x + 1 - m)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 - m = 0 & (6) \\ x^2 - x - m = 0 & (7) \end{cases}$$

Để phương trình (5) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (6) và (7) đều phải có 2 nghiệm phân biệt và các nghiệm của 2 phương trình này không được trùng nhau.

Điều kiện để phương trình (6) và (7) có 2 nghiệm phân biệt là:

$$\begin{cases} \Delta_{(6)} = 4m - 3 > 0 \\ \Delta_{(7)} = 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}.$$

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (6) và (7), khi đó:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 + 1 - m = 0 \\ x_0^2 - x_0 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m > \frac{3}{4}$.

3. Chứng minh trong một hệ các phương trình bậc hai có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Phương pháp: Để chứng minh có ít nhất một phương trình bậc hai trong hệ phương trình bậc hai có nghiệm ta chứng minh tổng các biệt thức delta lớn hơn hoặc bằng 0.

★**Thí dụ 5.** Cho a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng ít nhất một phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1);$$

$$x^2 + bx + 1 = 0 \quad (2);$$

$$x^2 + cx + 1 = 0 \quad (3).$$

Hướng dẫn giải

Ba phương trình lần lượt có:

$$\Delta_1 = a^2 - 4, \quad \Delta_2 = b^2 - 4, \quad \Delta_3 = c^2 - 4$$

$$\text{Do đó: } \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = (a^2 + b^2 + c^2) - 12$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= (a^2 + b^2 + c^2) - 12 \\ &= (a^2 + 4) + (b^2 + 4) + (c^2 + 4) - 24 \\ &\geq 2|2a| + 2|2b| + 2|2c| - 24 \\ &= 4(|a| + |b| + |c|) - 24 \\ &\geq 4(a + b + c) - 24 \\ &= 4 \cdot 6 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Do đó: $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$. tổng 3 biệt số delta của 3 phương trình bằng lớn hơn 0 nên có ít nhất một biệt số delta lớn hơn bằng 0.

Vậy trong 3 phương trình có một phương trình có nghiệm.

★**Thí dụ 5.** Cho hai phương trình $x^2 + 6ax + 2b = 0$ và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ với a, b là các số thực. Chứng minh nếu $3a + 2b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

(Chuyên Tây Ninh năm 2019-2020)

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta'_1 = 9a^2 - 2b, \Delta'_2 = 4b^2 - 3a$

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 = (3a-1)^2 + (2b-1)^2 + 3a + 2b - 2$$

Do $3a + 2b \geq 2$ nên $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$

Suy ra có ít nhất một trong hai giá trị Δ'_1, Δ'_2 không âm hay ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

3. Ứng dụng của phương trình bậc hai trong việc chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp: Để một phương trình bậc 2 có nghiệm thì ta cần có biệt thức $\Delta \geq 0$, vận dụng linh hoạt điều này chúng ta có thể tìm được miền giá trị của một biểu thức.

★ **Thí dụ 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x^2 + 3x - 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 + 3x - 1 - y = 0$. (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì: $\Delta = 3^2 - 4(-1-y) = 13 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{13}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\Delta = 0$ hay $x = -\frac{3}{2}$.

Vậy Min $y = -\frac{13}{4}$ khi $x = -\frac{3}{2}$.

★ **Thí dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, do đó P luôn xác định với mọi x.

Ta có: $P = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow (P-1)x^2 - Px + P-1 = 0$

Với $P = 1$ thì $x = 0$.

Với $P \neq 1$, ta có: $\Delta = P^2 - 4(P-1)^2 = -3P^2 + 8P - 4$.

$$\geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{2}{3} \quad (1) \quad \text{hoặc} \quad P \leq 2 \quad (2)$$

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi $x = -1$.

Dấu bằng ở (2) xảy ra khi $x = -1$.

Vậy $\text{Min}P = \frac{2}{3}$ khi $x = -1$, $\text{Max}P = 2$ khi $x = 1$.

★**Thí dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{3y+1}$ với x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2y^2 + 2y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2y^2 - 1}{2}$.

$$P = \frac{2xy}{3(-x^2y^2 - 1) + 1} = -\frac{2xy}{3x^2y^2 + 1} \Leftrightarrow 3Px^2y^2 + 2xy + P = 0 \quad (1)$$

Trường hợp 1: $P = 0$ thì $xy = 0$.

Trường hợp 2: $P \neq 0$ ta có (1) là phương trình bậc hai với ẩn là xy , do đó để phương trình

có nghiệm thì: $\Delta = 4 - 12P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. $= 4 - 12P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\text{Max}P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{2}{3}$.

$\text{Min}P = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = -\frac{2}{3}$.

★**Thí dụ 5.** Tìm số thực x, y, z thỏa mãn:

$$x + y + z = 1 \quad (1) \quad \text{và} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \quad (2)$$

sao cho x đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Từ (1) suy ra $z = 1 - x - y$, thay vào biến đổi ta được

$$5y^2 + 6(x-1)y + 4x^2 - 6x - 1 = 0. \quad (3)$$

Để phương trình (3) có nghiệm thì:

$$= 9(x-1)^2 - 20x^2 + 30x + 5 = -11x^2 + 12x + 14 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - \sqrt{190}}{11} \leq x \leq \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$$

Vì x đặt giá trị lớn nhất nên

$$x = \frac{6 + \sqrt{190}}{11} \Rightarrow y = \frac{15 - 3\sqrt{190}}{55}; z = \frac{10 - 2\sqrt{190}}{55}.$$

CHỦ ĐỀ 2. KHAI THÁC CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định lý thuận:

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai x_1, x_2 thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

2. Định lý đảo:

Nếu có hai số x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$ thì chúng là nghiệm của pt: $t^2 - St + P = 0$

(Điều kiện để tồn tại hai số x_1, x_2 là $S^2 - 4P \geq 0$)

Chú ý: Trước khi áp dụng hệ thức Vi-ét cần tìm điều kiện để pt có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0) \end{cases}$$

B/ CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT:

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG CÁCH TÍNH NHẨM NGHIỆM:

1) Phương pháp:

Từ định lý Vi-ét ta có: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có:

+) $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

+) $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm là $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$

2) Ví dụ minh họa.

★ **Thí dụ 5.** Giải các phương trình sau:

a) $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$

b) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

c) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

d) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0 (m \neq 1)$

(Bài 31-SGK Toán 9, tập 2)

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Đa số HS khi gặp yêu cầu giải phương trình thường tính ngay Δ hoặc Δ' mà không để ý đến các trường hợp đặc biệt $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$. Thậm chí có em khi gặp phương trình có các hệ số là số vô tỷ như pt b), c) hoặc pt có chứa tham số như pt d)

thì tỏ ra ái ngại. Rõ ràng nếu ta để ý sẽ thấy các pt trong VD trên đều có dạng đặc biệt có thể nhẩm nghiệm ngay mà không phải tính Δ hoặc Δ'

a) Vì pt đã cho có $a+b+c=1,5+(-1,6)+0,1=0$ nên pt có hai nghiệm là :

$$x_1=1, x_2=\frac{0,1}{1,5}=\frac{1}{15}.$$

b) Vì pt đã cho có $a+b+c=(2-\sqrt{3})+2\sqrt{3}+[-(2+\sqrt{3})]=0$ nên pt có hai nghiệm là:

$$x_1=1, x_2=\frac{-(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}=\frac{-(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}=-(7+4\sqrt{3})$$

c) Vì pt đã cho có $a-b+c=\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})-1=0$ nên pt có hai nghiệm là:

$$x_1=-1, x_2=\frac{-(-1)}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) Vì $m \neq 1$ nên pt đã cho là pt bậc hai, có $a+b+c=(m-1)-(2m+3)+m+4=0$ nên pt có hai nghiệm là:

$$x_1=1, x_2=\frac{m+4}{m-1}.$$

Trong trường hợp giải pt đơn giản ta cũng có thể nhẩm nghiệm dựa vào định lý Vi-ét:

★**Thí dụ 5.** Giải phương trình:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Vì $2+5=7; 2 \cdot 5=10$ nên $x_1=2, x_2=5$ là nghiệm của pt đã cho.

b) Vì $(-3)+(-5)=-8; (-3) \cdot (-5)=15$ nên $x_1=-3, x_2=-5$ là nghiệm của pt đã cho.

Như vậy trước khi HS giải pt, giáo viên cần tạo cho HS thói quen nhẩm nghiệm trước khi tính theo công thức nghiệm.

II. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1) Phương pháp: Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có thể biểu thị các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm theo $S=x_1+x_2$ và $P=x_1 \cdot x_2$

Ví dụ:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) = x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2$$

$$\frac{1}{x_1 - \alpha} + \frac{1}{x_2 - \alpha} = \frac{x_1 + x_2 - 2\alpha}{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)} = \frac{S - 2\alpha}{P - \alpha S + \alpha^2}$$

Chú ý: Khi tính giá trị của một biểu thức giữa các nghiệm thông thường ta biến đổi sao cho trong biểu thức đó xuất hiện tổng và tích các nghiệm rồi áp dụng định lý Vi-ét để giải.

2) Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 5.** Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$

- Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$
- Chứng minh $Q = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 + x_2^4$ chia hết cho 5

(Trích bài trong báo Toán học & Tuổi thơ)

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt vì $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -1$

$$a) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2(-1) = 3$$

$$b) \quad Q = (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 3 + 3^2 - 2(-1)^2 = 10 \Rightarrow Q : 5$$

Chú ý : Ta có thể chứng minh biểu thức $M = x_1^{2008} + x_2^{2008} + x_1^{2010} + x_2^{2010}$ cũng chia hết cho 5.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 - ax + a - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị biểu thức:

$$M = \frac{2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2}$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta kiểm tra xem phương trình đã cho có nghiệm hay không.

Ta có: $\Delta = (-a)^2 - 4(a-1) = (a-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 .

áp dụng định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = a; x_1x_2 = a-1$

$$M = \frac{2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2}{x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2}{x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{2a^2 - 5(a-1)}{a(a-1)} = \frac{2a^2 - 5a + 5}{a(a-1)}$$

★**Thí dụ 5.** Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$. Ký hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$ với n là số nguyên dương.

- Tính S_1, S_2, S_3 .
- Tìm một hệ thức giữa S_n, S_{n+1}, S_{n+2} .

(Bài 281, sách Nâng cao, phát triển toán 9, tập 2)

Hướng dẫn giải

Phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$ có $\Delta = (-6)^2 - 4 = 32 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 6; x_1x_2 = 1$

$$S_1 = x_1 + x_2 = 6$$

$$\text{a) Ta có: } S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6^2 - 2.1 = 34$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 6^3 - 3.1.6 = 198$$

$$\text{b) Ta có: } S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n) = 6S_{n+1} - S_n.$$

Chú ý: Ta còn chứng minh được trường hợp tổng quát: phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $S_n = x_1^n + x_2^n$ thì S_n, S_{n+1}, S_{n+2} liên hệ với nhau bởi hệ thức: $a.S_{n+2} + b.S_{n+1} + c.S_n = 0$.

Vận dụng hệ thức trên cho ta lời giải thú vị của nhiều bài toán.

★**Thí dụ 5.** Cho a, b là nghiệm của phương trình $30x^2 - 4x = 2010$. tính giá trị của biểu

thức:
$$M = \frac{30(a^{2010} + b^{2010}) - 4(a^{2009} + b^{2009})}{a^{2008} + b^{2008}}$$

Hướng dẫn giải

Ta thấy phương trình đã cho có $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = a; x_2 = b \Rightarrow S_n = a^n + b^n.$$

áp dụng hệ thức ở chú ý trên ta có $AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n = 0$

Ta có:

$$S_n = a^{2008} + b^{2008}$$

$$S_{n+1} = a^{2009} + b^{2009}$$

$$S_{n+2} = a^{2010} + b^{2010}$$

$$\Rightarrow 30S_{n+2} - 4S_{n+1} - 2010S_n = 0$$

$$\Rightarrow 30S_{n+2} - 4S_{n+1} = 2010S_n$$

$$\Rightarrow M = \frac{2010S_n}{S_n} = 2010$$

★**Thí dụ 5.** Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = (2 + 3\sqrt{2})^6 + (2 - 3\sqrt{2})^6$$

$$B = \frac{1}{(2 + 3\sqrt{2})^6} + \frac{1}{(2 - 3\sqrt{2})^6}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_1 = 2 + 3\sqrt{2}, x_2 = 2 - 3\sqrt{2}$ thì $x_1 + x_2 = 4; x_1 x_2 = -14$ do đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 14 = 0$. Khi đó hệ thức ở chú ý trên có dạng: $S_{n+2} = 4S_{n+1} + 14S_n$. Ta tính được:

$$S_1 = 4, S_2 = 44, S_3 = 4.44 + 14.4 = 232$$

$$S_4 = 4.232 + 14.44 = 1544$$

$$S_5 = 4.1544 + 14.232 = 9424$$

$$\Rightarrow A = S_6 = 4.9424 + 14.1544 = 59312$$

$$B = \frac{S_6}{14^6} = \frac{59312}{16.47059} = \frac{3707}{47059}$$

III. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH

1) Phương pháp: áp dụng định lý Vi-ét đảo: Nếu hai số u, v có $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ thì u, v là

ng nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để tồn tại hai số u, v là $S^2 \geq 4P$.

Chú ý: Các hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = a \\ u.v = b \end{cases}; \begin{cases} u^2 + v^2 = a \\ u \pm v = b \end{cases}; \begin{cases} u^3 + v^3 = a \\ u \pm v = b \end{cases}$ đều có thể đưa về hệ

$$\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$$

2) Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 5.** Tính các kích thước của hình chữ nhật ABCD. Biết diện tích và chu vi của nó theo thứ tự là $2a^2$ và $6a$.

(Bài 39-SGK Toán 9 Tập 2, trang 129)

Hướng dẫn giải

Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y ($x, y > 0$). Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x+y=3a \\ x.y=2a^2 \end{cases}$$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 3at + 2a^2 = 0$

Ta có $\Delta = (-3a)^2 - 4.2a^2 = a^2 \Rightarrow t_1 = a; t_2 = 2a$.

Vậy các kích thước của hình chữ nhật là $a, 2a$.

★**Thí dụ 5.** Tìm hai số u, v trong các trường hợp sau:

a) $u+v=4; u.v=19$

b) $u-v=10; u.v=24$

c) $u^2+v^2=85; uv=18$

Hướng dẫn giải

a) Ta có u, v là hai nghiệm của phương trình:

$x^2 - 4x + 19 = 0$. Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 19 = -15 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy không tìm được hai số u, v .

b) Ta có : $(u-v)^2 = (u+v)^2 - 4uv \Rightarrow (u+v)^2 = (u-v)^2 + 4uv = 100 + 4.24 = 196$

$\Rightarrow u+v=14$ hoặc $u+v=-14$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} u+v=14 \\ u.v=24 \end{cases} \Rightarrow u, v$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 14t + 24 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-7)^2 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$t_1 = 12; t_2 = 2 \Rightarrow u = 12, v = 2$ vì $u - v = 10$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} u+v=-14 \\ u.v=24 \end{cases} \Rightarrow u, v$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2 + 14t + 24 = 0$.

Ta có $\Delta' = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$t_1 = -12; t_2 = -2 \Rightarrow u = -2, v = -12$ vì $u - v = 10$.

Vậy $\begin{cases} u=12 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-12 \end{cases}$

Chú ý : Ta có thể giải cách khác như sau;

Ta có $\begin{cases} u-v=10 \\ uv=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+(-v)=10 \\ u.(-v)=-24 \end{cases} \Rightarrow u, -v$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 10t - 24 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-5)^2 - (-24) = 49 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $t_1 = -2, t_2 = 12$

$\Rightarrow \begin{cases} u=-2 \\ -v=12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=12 \\ -v=-2 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u=12 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-12 \end{cases}$

c) Ta có $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 85 + 36 = 121 \Rightarrow u+v=11$ hoặc $u+v=-11$.

Giải tiếp ta được $\begin{cases} u=9 \\ v=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=9 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-9 \\ v=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-2 \\ v=-9 \end{cases}$.

★**Thí dụ 5.** Tìm các số p, q của phương trình $x^2 + px + q = 0$ sao cho các nghiệm x_1, x_2 của nó thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1.x_2 = q \end{cases}$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = 25$$

$$\text{Suy ra } x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 5[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = 35$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = p^2 - q = 7$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} p^2 - 4q = 25 \\ p^2 - q = 7 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ trên ta được } \begin{cases} p = 1 \\ q = -6 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} p = -1 \\ q = -6 \end{cases} \text{ đều thỏa mãn điều kiện } \Delta = p^2 - 4q > 0$$

$$\text{Vậy } (p; q) = (1; -6) \text{ hoặc } (-1; -6)$$

IV. PHÂN TÍCH TAM THỨC BẬC HAI THÀNH NHÂN TỬ

1) Phương pháp: Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$) có $\Delta \geq 0$.

$$\text{Khi đó theo Vi-ét ta có: } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Do đó:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \right] = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Vậy nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

★**Thí dụ 5.** Phân tích thành nhân tử:

$$a) 2x^2 - 5x + 3$$

$$b) 3x^2 + 8x + 2$$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$. Do đó ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x - 3).$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; x_2 = \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}$. Do đó ta có:

$$3x^2 + 8x + 2 = 3\left(x - \frac{4 - \sqrt{10}}{3}\right)\left(x + \frac{4 + \sqrt{10}}{3}\right)$$

ứng dụng này hs rất hay sử dụng để phân tích các mẫu thành nhân tử trong các bài tập rút gọn

V. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ MỘT NGHIỆM $x = x_1$ CHO TRƯỚC. TÌM NGHIỆM THỨ HAI.

1) Phương pháp:

- Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $x = x_1$ cho trước ta có thể làm như sau:

Cách 1:

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm

$$\Delta \geq 0 (\Delta' \geq 0) \quad (*)$$

- Thay $x = x_1$ vào phương trình đã cho tìm giá trị của tham số
- Đối chiếu giá trị vừa tìm được với điều kiện (*) để kết luận

Cách 2: - Thay $x = x_1$ vào phương trình đã cho tìm được giá trị của tham số.

- Thay giá trị tìm được của tham số vào phương trình và giải phương trình

Nếu sau khi thay giá trị của tham số vào phương trình đã cho mà có $\Delta < 0$ thì kết luận không có giá trị nào của tham số để phương trình có nghiệm x_1 cho trước

- Để tìm nghiệm thứ hai ta có thể làm như sau;

Cách 1: Thay giá trị của tham số tìm được vào phương trình rồi giải phương trình

Cách 2: Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tổng 2 nghiệm để tìm nghiệm thứ hai.

Cách 3: Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tích hai nghiệm để tìm nghiệm thứ hai.

★ **Thí dụ 5.** Với giá trị nào của k thì:

a) Phương trình $2x^2 + kx - 10 = 0$ có một nghiệm $x = 2$. Tìm nghiệm kia

b) Phương trình $(k-5)x^2 - (k-2)x + 2k = 0$ có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm kia

c) Phương trình $kx^2 - kx - 72 = 0$ có một nghiệm $x = -3$. Tìm nghiệm kia ?

Hướng dẫn giải

a) Nếu $x = 2$ là một nghiệm của phương trình thì:

$$2 \cdot 4 + 2k - 10 = 0 \Leftrightarrow 2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

Với $k = 1$ ta có :

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

Cách 1: ta có $\Delta = 1 + 80 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+9}{4} = 2; x_2 = \frac{-1-9}{4} = -2,5$

Cách 2: Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 \cdot x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{-5}{x_1} = \frac{-5}{2} = -2,5$

Cách 3: Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \frac{-k}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{2} - x_1 = -0,5 - 2 = -2,5$

b) Tương tự câu a) ta có $k = 3$, nghiệm kia $x_2 = 1,5$

c) Tương tự câu a) ta có $k = 6$, nghiệm kia $x_2 = 4$

VI. XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN HỆ MỘT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

“Điều kiện cho trước” ở đây có thể là các nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn một đẳng thức hoặc bất đẳng thức hoặc để một biểu thức của các nghiệm của phương trình bậc hai đạt GTLN, GTNN v.v...

1) Phương pháp: - Xác định giá trị của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm

$$x_1, x_2$$

$$\text{- áp dụng định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 \cdot x_2 = g(m) \end{cases} (*)$$

- Kết hợp hệ (*) với điều kiện bài ra để suy ra điều kiện của tham số m

Chú ý: Sau khi tìm được tham số ta phải đối chiếu với điều kiện phương trình có nghiệm.

2) Ví dụ minh họa

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 - 6x + m = 0$. Tính giá trị của m biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1 - x_2 = 4$

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2 - 6x + m = 0$ có $\Delta = 9 - m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 9 (*)$

Theo định lý VI-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1 x_2 = m & (2) \end{cases}$

Theo bài ra ta có: $x_1 - x_2 = 4$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = 5; x_2 = 1$. Thay vào (2) ta có $m = 5$ thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy với $m = 5$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 - x_2 = 4$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 26$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4 \quad (*)$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^3 + x_2^3 = 26 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 26 \Leftrightarrow 4^3 - 3m \cdot 4 = 26 \Leftrightarrow 64 - 12m = 26 \Leftrightarrow m = \frac{19}{6}$$

Giá trị này của m không thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy không có giá trị nào của m để $x_1^3 + x_2^3 = 26$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 + 2m - 3) = 7 - 6m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 7 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{6} \quad (*)$

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 2m - 3 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5} \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_1 x_2} - 5 \right) = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta suy ra $x_1 x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases} \quad (**)$

Mặt khác từ (3) suy ra
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 2, \\ x_1 x_2 = 5 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+4) = 0 \end{cases}$$

Suy ra $m = 2$ (loại) hoặc $m = -4$ (thỏa mãn * và **)

Vậy $m = -4$ thì
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình bậc hai tham số m : $2x^2 - (m+3)x + m = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm GTNN của biểu thức $P = |x_1 - x_2|$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10_THPT năm học 2009-2010, Sở GD-ĐT Nghệ An)

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho có: $\Delta = (m+3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 = (m+1)^2 + 8 > 0$ với mọi m suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra ta có: $P = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} &= \sqrt{\left(\frac{m+3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{m^2 + 6m + 9 - 8m}{4}} = \frac{\sqrt{m^2 - 2m + 9}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(m-1)^2 + 8}}{2} \geq \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=1$

Vậy GTNN của P bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow m=1$

Nhận xét: Với bài toán trên HS có thể tính các nghiệm x_1, x_2 theo m rồi thay vào biểu thức P để giải.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 - (m-2)x - m^2 + 3m - 4 = 0$.

- Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Tìm m để tỷ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có $a.c = 1 \cdot (-m^2 + 3m - 4) = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0$ với mọi m suy ra

phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m .

b) Vì phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên $x_1 = -2x_2$ hoặc $x_2 = -2x_1$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 0$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 \\ x_1x_2 = -m^2 + 3m - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 4 + 2(m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Nhận xét: ở bài toán trên nếu HS chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt bằng cách chứng minh $\Delta > 0$ thì việc đi tìm lời giải cho câu b) sẽ rất vất vả. Vì chứng minh được phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu suy ra $x_1 = -2x_2$ và $x_2 = -2x_1$ do đó vận dụng định lý Vi-ét một cách khéo léo cho ta một lời giải đẹp !

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ đạt GTLN

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có:

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) = -m^2 - 6m - 5 = 4 - (m-3)^2$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - (m-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m+3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1.$$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1x_2 = \frac{m^2 + 4m + 3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= \left| \frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 2(m+1) \right| = \frac{1}{2} |(m^2 + m + 3m + 3) + 4(m+1)| \\ &= \frac{1}{2} |m(m+1) + 3(m+1) + 4(m+1)| \\ &= \frac{1}{2} |(m+1)(m+3) + 4(m+1)| = \frac{1}{2} |(m+1)(m+7)| \\ &= \frac{1}{2} (-m-1)(m+7) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{-m-1+m+7}{2} \right)^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(Vì $-m-1 \geq 0; m+7 \geq 0$ và áp dụng bất đẳng thức Cô-si)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow -m-1 = m+7 \Leftrightarrow m = -4$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\text{Max } A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$

VII. LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC TRỊNH BẬC HAI MỘT ẨN KHI BIẾT HAI NGHIỆM CỦA NÓ HOẶC HAI NGHIỆM CÓ LIÊN QUAN TỚI HAI NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH ĐÃ CHO.

1) Phương pháp: Để lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm là α và β ta cần phải tính $\alpha + \beta$ và $\alpha\beta$, áp dụng định lý Vi-ét đảo ta có phương trình cần lập là:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

2) Ví dụ minh họa

★**Thí dụ 5.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là hai số cho trong các trường hợp sau:

a) -5 và $\frac{1}{3}$ b) $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $-5 + \frac{1}{3} = -\frac{14}{3}$ và $(-5) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$

Vậy phương trình bậc hai nhận -5 và $\frac{1}{3}$ làm nghiệm là: $x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 14x - 5 = 0$

b) Ta có $(3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 6$ và $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 4$

Vậy phương trình bậc hai nhận $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$ làm nghiệm là: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 + px - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số cho trong các trường hợp sau:

a) $-x_1$ và $-x_2$ b) $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn giải

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

a) Ta có: $(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = p$

$$(-x_1)(-x_2) = x_1x_2 = -5$$

$\Rightarrow -x_1, -x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - px - 5 = 0$

b) Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-p}{-5} = \frac{p}{5}$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{-1}{5}$$

Suy ra $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - \frac{p}{5}x - \frac{1}{5} = 0$

★**Thí dụ 5.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 7x + 3 = 0$. Hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là: $2x_1 - x_2$ và $2x_2 - x_1$.

Hướng dẫn giải

Phương trình: $x^2 - 7x + 3 = 0$ có: $\Delta = (-7)^2 - 3 \cdot 4 = 37 > 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$$

Ta có: $2x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1 = x_1 + x_2 = 7$

$$(2x_1 - x_2) \cdot (2x_2 - x_1) = 9x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 9 \cdot 3 - 7^2 = -71$$

Vậy $2x_1 - x_2$ và $2x_2 - x_1$ là nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - 7x - 71 = 0$

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng tồn tại một phương trình bậc hai có các hệ số hữu tỉ có một nghiệm là: $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương trình bậc hai cần tìm có dạng $x^2 + ax + b = 0 (a, b \in \mathbb{Q})$

Ta có: $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = 2\sqrt{6} - 5$

Theo giả thiết $2\sqrt{6} - 5$ là nghiệm của phương trình cần tìm nên:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{6}-5)^2 + a(2\sqrt{6}-5) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 49 - 20\sqrt{6} + 2\sqrt{6}a - 5a + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (49 - 5a + b) + (2a - 20)\sqrt{6} &= 0(*)\end{aligned}$$

Nếu $2a - 20 \neq 0$ thì $\sqrt{6} = \frac{49 - 5a + b}{2a - 20} \in \mathbb{Q}$. Vô lý vì $\sqrt{6}$ là số vô tỷ

Vậy $2a - 20 = 0 \Rightarrow a = 10$. Thay $a = 10$ vào phương trình (*) ta được $b = 1$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + 10x + 1 = 0$.

Cách 2: Gọi $x_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = -2\sqrt{6} - 5$.

$$\text{Ta được: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2\sqrt{6} - 5 - 2\sqrt{6} - 5 = -10 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -(2\sqrt{6} - 5)(2\sqrt{6} + 5) = 1 \end{cases}$$

Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 10x + 1 = 0$.

VIII. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO THAM SỐ:

1) Phương pháp: Để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số trong phương trình bậc hai ta làm như sau:

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

- Theo hệ thức Vi-ét ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases} (*)$

- Khử tham số từ hệ (*) ta được hệ thức cần tìm (thông thường ta dùng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế).

2) Ví dụ minh họa.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình bậc hai $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0 (m \neq 1)$. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m .

Hướng dẫn giải

Vì phương trình đã cho là phương trình bậc hai nên $m \neq 1$

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m-1)(m-4) = 5m - 4$. Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{5}$$

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S = \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = P = \frac{m-4}{m-1} = 1 - \frac{3}{m-1} \end{cases}$$

Do đó:
$$\begin{cases} S = 2 + \frac{2}{m-1} \\ 2P = 2 - \frac{6}{m-1} \end{cases} \Rightarrow 3S + 2P = 8 \text{ hay } 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 8.$$

Chú ý: Ta có thể khử m ở ví dụ trên như sau:

Cách 2:

Từ $S = \frac{2m}{m-1} \Rightarrow Sm - S = 2m \Rightarrow m(S - 2) = S \Rightarrow m = \frac{S}{S-2}$

Thế vào $P = \frac{m-4}{m-1}$ ta có: $\frac{\frac{S}{S-2} - 4}{\frac{S}{S-2} - 1} \Leftrightarrow P = \frac{-3S+8}{2} \Leftrightarrow 2P + 3S = 8$

Cách 3: Xét biểu thức $aP + bS$, trong đó a, b là những số phải xác định để khử tham số m ra khỏi hệ thức đó. Ta có:

$$\begin{aligned} aS + bP &= \frac{2am + b(m-4)}{m-1} = \frac{(2a+b)m - 4b}{m-1} \\ &= \frac{(2a+b)m - (2a+b) + 2a - 3b}{m-1} = \frac{(2a+b)(m-1) + 2a - 3b}{m-1} \\ &= 2a + b + \frac{2a - 3b}{m-1} \end{aligned}$$

Để biểu thức $aS + bP$ không phụ thuộc vào m thì ta phải có:

$$2a - 3b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thay vào biểu thức, ta được:

$$3S + 2P = 2.3 + 2 = 8 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 8$$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $8x^2 - 4(m-2)x + m(m-4) = 0$. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với m , suy ra vị trí của các nghiệm với hai số -1 và 1

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có:

$$\Delta' = 4(m-2)^2 - 8m(m-4) = -4(m^2 - 4m - 4)$$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 8 \Leftrightarrow (m-2)^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow |m-2| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m-2 \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{2} \leq m \leq 2+2\sqrt{2}$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4(m-2)}{8} = \frac{m-2}{2} & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m(m-4)}{8} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $m = 2(x_1 + x_2 + 1)$. Thay vào (2) ta được:

$$8x_1x_2 = 2(x_1 + x_2 + 1)[2(x_1 + x_2 + 1) - 4]$$

$$\Leftrightarrow 8x_1x_2 = 2(x_1 + x_2 + 1)2(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 8x_1x_2 = 4[(x_1 + x_2)^2 - 1] \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Vậy hệ thức cần tìm là: $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Từ hệ thức trên suy ra:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1^2 \leq 1 \\ 0 \leq x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_1| \leq 1 \\ |x_2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

IX. CHỨNG MINH HỆ THỨC GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HOẶC HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI:

★**Thí dụ 5.** Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + px + 1 = 0$. b, c là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + qx + 2 = 0$. Chứng minh hệ thức: $(b-c)(b-a) = pq - 6$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} a + b = -p \\ a \cdot b = 1 \end{cases}$$

Vì p, q là hai nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 2 = 0$ nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} b + c = -q \\ b \cdot c = 2 \end{cases}$$

Ta có: $(b-a)(b-c) = b^2 - ab - bc + ac = b^2 + ab + bc + ac - 2(ab + bc)$

$$\begin{aligned}
&= b(a+b) + c(a+c) - 2(ab+bc) \\
&= (a+b)(b+c) - 2(ab+bc) \\
&= (-p)(-q) - 2(1+2) = pq - 6
\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng nếu a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và b_1, b_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ thì:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) = q^2 - p^2.$$

Hướng dẫn giải

Vì a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -p \\ a_1 a_2 = 1 \end{cases}$$

Vì b_1, b_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = -q \\ b_1 b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } (a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)(a_2 + b_2) &= [(a_1 - b_1)(a_2 + b_2)][(a_2 - b_1)(a_1 + b_2)] \\
&= (a_1 a_2 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 b_2)(a_1 a_2 + a_2 b_2 - a_1 b_1 - b_1 b_2) \\
&= (1 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - 1)(1 + a_2 b_2 - a_1 b_1 - 1) \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 b_2 - a_1 b_1) \\
&= a_1 a_2 b_2^2 - a_1^2 b_1 b_2 - a_2^2 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_1^2 \\
&= b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 \\
&= (b_1^2 + b_2^2 + 2) - (a_1^2 + a_2^2 + 2) \\
&= (b_1 + b_2)^2 - (a_1 + a_2)^2 \\
&= (-q)^2 - (-p)^2 = q^2 - p^2
\end{aligned}$$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2$. Chứng minh: $b^3 + a^2 c + ac^2 = 3abc$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = x_2^2$.

Cách 1: Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_2^2 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_2^3 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow (x_2^2 + x_2)^3 = \frac{-b^3}{a^3} \\
&\Rightarrow x_2^6 + x_2^3 + 3x_2^3(x_2^2 + x_2) = \frac{-b^3}{a^3} \\
&\Rightarrow (x_2^3)^2 + x_2^3 + 3x_2^3(x_2^2 + x_2) = \frac{-b^3}{a^3} \\
&\Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{c}{a} + 3\frac{c}{a}\left(\frac{-b}{a}\right) = \frac{-b^3}{a^3} \Rightarrow ac^2 + a^2c - 3abc = -b^3 \\
&\Rightarrow b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc
\end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1^2)(x_1 - x_2^2) &= 0 \Leftrightarrow x_1(x_2 - x_1^2) + x_2^2(x_1^2 - x_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = x_1^3 + x_2^3 \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow -(x_1 + x_2)^3 + x_1x_2 + (x_1x_2)^2 = -3(x_1 + x_2)x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{-b}{a}\right)^3 + \frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{-b}{a}\right)\frac{c}{a} \quad (*) \\
&\Leftrightarrow b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc
\end{aligned}$$

Chú ý: Phần đảo ở (*) xảy ra khi $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, nghĩa là với điều kiện $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ ta

phải kiểm tra điều kiện có nghiệm của phương trình được thỏa mãn.

★**Thí dụ 5.** Cho các phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

$$cx^2 + dx + a = 0 \quad (2)$$

Biết rằng phương trình (1) có các nghiệm m và n, phương trình (2) có các nghiệm p và q. Chứng minh rằng: $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$.

Hướng dẫn giải

Vì m, n là các nghiệm của phương trình (1) nên theo Vi-ét ta có: $m \cdot n = \frac{c}{a}$

Vì p, q là các nghiệm của phương trình (2) nên theo VI-ét ta có: $p \cdot q = \frac{a}{c}$. Ta có:

$$m^2 + n^2 \geq 2|m.n| = 2\left|\frac{c}{a}\right|$$

$$p^2 + q^2 \geq 2|p.q| = 2\left|\frac{a}{c}\right|$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 2\left(\left|\frac{c}{a}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right) \geq 2.2 = 4$$

Vậy: $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$

X. XÉT DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI, SO SÁNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI MỘT SỐ CHO TRƯỚC:

1) Phương pháp

Dùng định lý Vi-ét ta có thể xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ dựa trên các kết quả sau:

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P = \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0$
- Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- Phương trình có hai nghiệm cùng dương $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Phương trình có hai nghiệm cùng âm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Ngoài ra áp dụng định lý Vi-ét ta có thể so sánh được nghiệm của phương trình bậc hai với một số cho trước.

2) Ví dụ minh họa:

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2)x - 2m + 1 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - (-2m+1) = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0$ với mọi m, suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-2) \\ x_1 x_2 = -2m+1 \end{cases}$$

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow -2m+1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

b) Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(m-2) > 0 \\ -2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2 + 3m + 2) = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12m - 8 = 1$

$\Delta > 0$ với mọi m nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+3 \\ x_1 x_2 = m^2 + 3m + 2 \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2m+3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-3)x + m-4 = 0$. Xác định m để phương trình có:

- a) Hai nghiệm trái dấu
- b) Hai nghiệm dương
- c) Hai nghiệm âm
- d) Hai nghiệm bé hơn 2

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai $\Leftrightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta có: $\Delta' = (m-3)^2 - (m-1)(m-4) = m^2 - 6m + 9 - (m^2 - 5m + 4) = 5 - m$

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-4) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 4$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Phương trình có hai nghiệm dương } 0 < x_1 \leq x_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 5 - m \geq 0 \\ \frac{m-4}{m-1} > 0 \\ \frac{2(m-3)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ m < 1 \\ m > 4 \\ m < 1 \\ m > 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 4 < m \leq 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Phương trình có hai nghiệm âm } x_1 \leq x_2 < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \frac{m-4}{m-1} > 0 \\ \frac{2(m-3)}{m-1} < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 5 \\ m < 1 \\ m > 4 \\ 1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\text{d) Phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2 } x_1 \leq x_2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ (x_1 + x_2) - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \frac{m-4}{m-1} - \frac{4(m-3)}{m-1} + 4 > 0 \\ \frac{2(m-3)}{m-1} - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ \frac{m+4}{m-1} > 0 \\ \frac{-2(m+1)}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq 5 \\ m < -4 \\ m > 1 \\ m < -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ 1 < m \leq 5 \end{cases}$$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $x^2 + 2(m-1)x - (m+1) = 0$

Xác định giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có:

$$\Delta' = (m-1)^2 + (m+1) = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ với mọi } m$$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1 x_2 = -(m+1) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -(m+1) + 2(m-1) + 1 < 0 \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$$

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-3)x + m - 4 = 0$. Xác định m để phương trình có đúng một nghiệm dương.

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $m = 0$, Phương trình đã cho có dạng: $6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn bài ra).

TH2: $m \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm dương ta xét các khả năng sau:

- Phương trình có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - m(m-4) = 0 \\ \frac{2(m-3)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+9=0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$$

- Phương trình có một nghiệm bằng 0 còn nghiệm kia lớn hơn 0 tức là:

$$x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+9 > 0 \\ \frac{m-4}{m} = 0 \\ \frac{2(m-3)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m = 4 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vậy kết hợp lại các trường hợp ta có phương trình có đúng một nghiệm dương khi $m = \frac{9}{2}$ hoặc $0 < m \leq 4$.

XI. NGHIỆM CHUNG CỦA HAI HAY NHIỀU PHƯƠNG TRÌNH, HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 .

- a) Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương x_3, x_4 .
b) Chứng minh rằng $M = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$.

Hướng dẫn giải

- a) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 nên:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac \geq 0 \\ a.b < 0 \\ a.c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac \geq 0 \\ b.c < 0 \\ a.c > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_3 + x_4 = -\frac{b}{c} > 0 \\ x_3 x_4 = \frac{a}{c} > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có hai nghiệm dương x_3, x_4 .

- b) Nếu $\alpha > 0$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, khi đó

$$c \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{\alpha} + a = c + b\alpha + a\alpha^2 = 0, \text{ nghĩa là } \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

$$\text{Ta có: } M = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \geq 2 + 2 = 4.$$

★**Thí dụ 5.** Hai phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và $x^2 + bx + ac = 0$ chỉ có một nghiệm chung ($c \neq 0$). Chứng minh rằng hai nghiệm còn lại là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + cx + ab = 0.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ có nghiệm x_0, x_1 và phương trình $x^2 + bx + ac = 0$ có nghiệm x_0, x_2 (x_0 là nghiệm chung của hai phương trình nêu trên và $x_1 \neq x_2$). Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + bc = 0 \\ x_0^2 + bx_0 \end{cases} \Rightarrow (a-b)x_0 - c(a-b) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(x_0 - c) = 0 \Rightarrow x_0 = c$$

(giả thiết $a \neq b$ để x_0 là nghiệm duy nhất của hai phương trình).

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -a \\ x_0 x_1 = bc \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_0 + x_2 = -b \\ x_0 x_2 = ac \end{cases}$$

Vì $x_0 = c$ nên $x_1 = b$ và $x_2 = a$. Mặt khác:

$$2x_0 + (x_1 + x_2) = -(a+b) \Rightarrow 2c + (a+b) = -(a+b) \Rightarrow a+b = -c.$$

Ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = a + b \\ P = x_1 x_2 = ab \end{cases}$$

Và $S^2 - 4P = (-c)^2 - 4ac = (a+b)^2 - 4ac = (a-b)^2 > 0$, do $a \neq b$ suy ra $S^2 > 4P$. Do đó theo định lý đảo của định lý Vi-ét ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

★**Thí dụ 5.** Tìm các giá trị m và n để hai phương trình sau tương đương:

$$\begin{aligned} x^2 + (4m+3n) - 9 &= 0; \\ x^2 + (3m+4n)x + 3n &= 0 \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2 + (4m+3n) - 9 = 0$ có : $a.c = -9 < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt . Để hai phương trình đã cho tương đương thì phương trình $x^2 + (3m+4n)x + 3n = 0$ cũng phải có hai nghiệm phân biệt và hai phương trình phải có cùng tập nghiệm.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + (4m+3n) - 9 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + (3m+4n)x + 3n = 0$. Khi đó :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 x_2 = x_3 x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(4m+3n) = -(3m+4n) \\ -9 = 3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ -m = -n \end{cases} \Leftrightarrow m = n = -3$$

Với $m = n = -3$ thì hai phương trình đã cho trở thành:

$$x^2 - 21x - 9 = 0 \text{ và } x^2 - 21x - 9 = 0$$

Rõ ràng hai phương trình này tương đương.

★**Thí dụ 5.** Xác định m để hai phương trình sau tương đương với nhau:

$$x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + mx + 1 = 0 \quad (2)$$

Hướng dẫn giải

Hai phương trình đã cho đều là phương trình bậc hai. Gọi $\Delta'_{(1)}, \Delta_{(2)}$ theo thứ tự là các biệt số của phương trình (1), (2).

Ta xét các khả năng sau:

*) Cả hai phương trình đều vô nghiệm: hai phương trình (1) và (2) vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta'_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m < 0 \\ m^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ |m| < 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < -1 \quad (3)$$

**) Hai phương trình đều có cùng tập nghiệm: Hai phương trình đều có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta'_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \begin{cases} m \leq -2\sqrt{2} \\ m \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Với $m \geq 2\sqrt{2}$, gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Để hai phương trình có cùng tập nghiệm thì x_1, x_2 cũng là nghiệm của phương trình (2), khi đó ta phải có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 = -\frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = -m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $-2\sqrt{2} < m < -1$ là các giá trị cần tìm.

XII. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

★**Thí dụ 5.** Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$ biết phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = n \end{cases}.$$

Do m, n là các số nguyên tố suy ra $x_1 = 1, x_2 = n$ (giả sử x_1, x_2).

Từ $x_1 + x_2 = m \Rightarrow 1 + n = m \Rightarrow m, n$ là hai số nguyên tố liên tiếp $\Rightarrow n = 2, m = 3$.

Ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$, phương trình này có hai nghiệm là 1 và 2.

★**Thí dụ 5.** Tìm số nguyên m sao cho phương trình $mx^2 - 2(m+3)x + m+2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $F = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Giải: Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+3)^2 - m(m+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{-9}{4}$$

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+3)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m+2}{m} \end{cases}$$

Ta có
$$F = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2(m+3)}{m+2} = 2 + \frac{2}{m+2}$$

$$F \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow m+2 \in U(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = \pm 2 \\ m+2 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \\ m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vì $m \geq \frac{-9}{4} \Rightarrow m = 9; m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn bài toán.

★**Thí dụ 5.** Giả sử phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $a^2 + b^2$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Giải: Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$) thì ta phải có :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(b+1) \geq 0$$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -(x_1 + x_2) \\ b = x_1 x_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^2 + b^2 &= [-(x_1 + x_2)]^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 + 1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \end{aligned}$$

Do $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra:

$$\begin{cases} x_1^2 + 1 \in \mathbb{N} \\ x_1^2 + 1 \geq 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_2^2 + 1 \in \mathbb{N} \\ x_2^2 + 1 \geq 2 \end{cases}$$

Vậy $a^2 + b^2 \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 \geq 4; a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \Rightarrow a^2 + b^2$ là hợp số.

★**Thí dụ 5.** Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = x + y, v = xy$.

Ta có: $x^3 + y^3 + 1 = 3xy \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 1 - 3xy = 0$

$$\text{Hay } u^3 - 3uv + 1 - 3v = 0 \Leftrightarrow (u + 1)(u^2 - u + 1) - 3v(u + 1) = 0 \Leftrightarrow (u + 1)(u^2 - u + 1 - 3v) = 0.$$

Vì $x, y > 0 \Rightarrow u = x + y > 0 \Rightarrow u + 1 \neq 0$

$$\text{Vậy } u^2 - u + 1 - 3v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{3}(u^2 - u + 1)$$

Ta phải tìm x, y nguyên dương sao cho:
$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = \frac{1}{3}(u^2 - u + 1) \end{cases}$$

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - uX + \frac{1}{3}(u^2 - u + 1) = 0$$

Ta có $\Delta = -\frac{1}{3}(u-2)^2 < 0$ nếu $u \neq 2$. Vậy ta phải có: $u = x + y = 2 \Rightarrow x = y = \frac{u}{2} = 1$.

★**Thí dụ 5.** Tìm các số nguyên a để các phương trình sau có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - (a+5)x + 5a + 2 = 0 \quad (1)$

b) $x^2 + ax + 198 = a \quad (2)$

Hướng dẫn giải

a) Gọi $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (1), Theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 5 \\ x_1 x_2 = 5a + 2 \end{cases} \quad (*)$$

Từ (*) ta có $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 5a + 25 \\ x_1 x_2 = 5a + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2 = 1.2 = 2.1 = (-1).(-2) = (-2).(-1)$$

Suy ra $a = 8$ hoặc $a = 2$

b) Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = 198 - a \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1 x_2 = -198$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199$$

Do 199 là số nguyên tố nên:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1.199 = 199.1 = (-1).(-199) = (-199).(-1) \Rightarrow a = 198 \text{ hoặc } a = -2$$

XIII. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

★**Thí dụ 5.** Giải phương trình: $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right) = 6. \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có ĐKXĐ: $x \neq -1$.

Đặt $u = x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)$, $v = \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) \Rightarrow u+v=5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u.v=6 \end{cases} \Rightarrow u, v$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 3; t_2 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{5-x}{x+1}\right) = 3 \\ x + \frac{5-x}{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{5-x}{x+1}\right) = 2 \\ x + \frac{5-x}{x+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\{1; 2\}$.

★**Thí dụ 5.** Giải phương trình: $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $-4 \leq x \leq 1$

Đặt $\sqrt{1-x} = u$; $\sqrt{4+x} = v$ ta có $\begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (u+v)^2 - 2uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u.v=2 \end{cases}$

Suy ra u, v là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Rightarrow X_1 = 1; X_2 = 2$

$\Rightarrow u=1$ hoặc $u=2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x}=1 \\ \sqrt{1-x}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; 0\}$.

★**Thí dụ 5.** Cho phương trình: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

- Giải phương trình khi $m=3$
- Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $-3 \leq x \leq 6$

Đặt $\sqrt{3+x}=u; \sqrt{6-x}=v$, ta có:
$$\begin{cases} u+v-uv=m \\ u^2+v^2=9 \\ u,v>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v-uv=m \\ (u+v)^2-2uv=9 \\ u,v>0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra: $uv=(u+v)-m$ thay vào (2) ta có phương trình:

$$(u+v)^2-2(u+v)+2m-9=0 \quad (3)$$

a) Với $m=3$ thì từ (3) ta có: $u+v=-1$ (loại) hoặc $u+v=3 \Rightarrow uv=0 \Rightarrow u,v$ là nghiệm

của phương trình: $X^2-3X=0 \Rightarrow \begin{cases} X=0 \\ X=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3+x}=0 \\ \sqrt{3+x}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=6 \end{cases} \quad (\text{ thỏa mãn}$

ĐKXĐ).

Vậy với $m=3$ thì phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{-3;6\}$

b) Xét phương trình:

$$(u+v)^2-2(u+v)+2m-9=0 \quad (3)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10-2m \geq 0 \\ 4 > 0 \\ 2m-9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \geq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq m \leq 5$$

★Thí dụ 5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x+2y}{x-2y} = 6 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \frac{1}{x+2y}; v = x+2y$ (ĐK: $x \neq \pm 2y$).

Ta có: $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases} \Rightarrow u,v$ là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+6=0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{5}{8} \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{6} \\ y=\frac{5}{12} \end{cases} \right. \quad (\text{thỏa mãn ĐKXD}).$$

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 8 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$

Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{x+5}) + (\sqrt{y} + \sqrt{y+5}) = 13 \\ (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}) + (\sqrt{y+5} - \sqrt{y}) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{x+5}) + (\sqrt{y} + \sqrt{y+5}) = 13 \\ \frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{x+5}} + \frac{5}{\sqrt{y} + \sqrt{y+5}} = 3 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $u = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} \geq \sqrt{5}; v = \sqrt{y} + \sqrt{y+5} \geq \sqrt{5}$.

$$\text{Khi đó hệ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ \frac{u+v}{uv} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ uv = \frac{65}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Vậy u, v là nghiệm của phương trình: $t^2 - 13t + \frac{65}{3} = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{741}}{6}$

Do đó ta có nghiệm của hệ (2) là: $\begin{cases} u = t_1 \\ v = t_2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = t_2 \\ v = t_1 \end{cases}$

Do $t_2 = \frac{39 - \sqrt{741}}{6} < 0 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm. Vậy hệ (1) vô nghiệm.

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 & (2) \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh lớp 9, năm học 2005-2006)

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0$

Đặt $S = \sqrt{x} + \sqrt{y}; P = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

Theo bài ra ta có $S = 4 \Rightarrow x + y = 16 - 2P$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)^2 - 2xy} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{xy} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(16-2P)^2 - 2P^2} + \sqrt{2}P = 8\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(P^2 - 32P + 128)} = 8\sqrt{2} - \sqrt{2}P \Leftrightarrow \begin{cases} P \leq 8 \\ P^2 - 32P + 128 = (8-P)^2 \end{cases} \Leftrightarrow P = 4$$

$\Rightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 2$.

Vậy ta có: $\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (4; 4)$.

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 - Khối THPT chuyên toán ĐH Vinh năm học 2009-2010, vòng 2)

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + 2(x+y) = 23 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$

Đặt $S = x + y; P = xy$ hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + 2S = 23 \\ S + P = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + 2S = 23 \\ 2S + 2P = 22 \end{cases} \Rightarrow S^2 + 4S - 45 = 0$

Ta có $\Delta' = 49 \Rightarrow \begin{cases} S = -9 \\ S = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 20 \\ P = 6 \end{cases}$ (Các giá trị này đều thỏa mãn ĐK: $S^2 \geq 4P$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = -9 \\ P = 20 \end{cases} & \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} & \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} & \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} & \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) \in \{(-4; -5), (-5; -4), (2; 3), (3; 2)\}$.

Nhận xét: Khi giải hệ phương trình trong đó vai trò của các ẩn trong các phương trình là như nhau và khi ta thay đổi vị trí của các ẩn trong các phương trình thì hệ không thay đổi (hệ đối xứng loại I), ta hướng dẫn HS đặt $S = x + y$, $P = xy$ để đưa hệ về hệ phương trình của S và P , tìm S và P sau đó sử dụng định lý Vi-ét đảo để tìm x và y .

XIV . ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT VÀO CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN.

Phương pháp giải:

Học sinh đã được làm quen với bất đẳng thức Cô-si, tuy nhiên ta có thể chứng minh bất đẳng thức này dựa vào định lý Vi-ét:

*) Giả sử $x_1 + x_2 = S$ không đổi, còn $P = x_1 x_2$ thay đổi. Từ điều kiện $S^2 \geq 4P$

$$\Rightarrow P \leq \frac{S^2}{4} \Rightarrow \text{Max} P = \frac{S^2}{4} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{S}{2}.$$

Vậy nếu hai số có tổng không đổi thì tích hai số đó lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

*) Giả sử $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1 x_2 = P$ không đổi còn $x_1 + x_2 = S$ thay đổi. Từ điều kiện $S^2 - 4P \geq 0 \Rightarrow (S - 2\sqrt{P})(S + 2\sqrt{P}) \geq 0 \Rightarrow S - 2\sqrt{P} \geq 0 \Rightarrow S \geq 2\sqrt{P}$

Vậy Min $S = 2\sqrt{P} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{P}$

Vậy hai số dương có tích không đổi thì tổng của hai số đó nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

★**Thí dụ 5.** Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện $6a^2 + 20a + 15 = 0$;

$15b^2 + 20b + 6 = 0$; $ab \neq 1$. Chứng minh rằng $\frac{b^3}{ab^2 - 9} \cdot \frac{1}{ab + 1} = \frac{6}{2015}$.

Hướng dẫn giải

Ta ký hiệu các điều kiện như sau

$$6a^2 + 20a + 15 = 0 \quad (1).$$

$$15b^2 + 20b + 6 = 0 \quad (2).$$

$$ab \neq 1 \quad (3).$$

Để thấy các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt.

Do (2) nên b khác 0. Chia hai vế của (2) cho b^2 ta được

$$6\left(\frac{1}{b}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{b}\right) + 15 = 0 \quad (4).$$

Từ (1), (3) và (4), suy ra a và $\frac{1}{b}$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình

$$6x^2 + 20x + 15 = 0 \quad (5).$$

Theo định lý Vi-ét
$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = -\frac{10}{3} \\ \frac{a}{b} = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Từ đó
$$\frac{ab^2 - 9ab + 1}{b^3} = \frac{a}{b} - 9\left(a + \frac{1}{b}\right)^3 = \frac{5}{2} - 9\left(-\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{2015}{6}$$

suy ra
$$\frac{b^3}{ab^2 - 9ab + 1} = \frac{6}{2015},$$
 điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phép ẩn phụ hóa, đưa về các phương trình đối xứng, đồng thời kết hợp với biểu thức đồng bậc ở giả thiết để suy ra điều phải chứng minh.

Ý tưởng: Quan sát giả thiết bài toán, giữa hai phương trình bậc hai có sự đối xứng giữa các hệ số của chúng, tuy nhiên sự khác biệt nằm ở $6a^2 + 15$ và $15b^2 + 6$ vì thế ta sẽ đặt $t = \frac{1}{b}$ khi

đó
$$\begin{cases} 6a^2 + 20a + 15 = 0 \\ 6t^2 + 20t + 15 = 0 \end{cases},$$
 vì thế ta có được a, t đều là nghiệm của phương trình

$6x^2 + 20x + 15 = 0$. Theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} a + t = -\frac{10}{3} \\ at = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = -\frac{10}{3} \text{ và } \frac{a}{b} = \frac{5}{2}.$$
 Khi có được

điều này, ta sẽ khai thác đến biểu thức $\frac{b^3}{ab^2 - 9ab + 1}$, đây là một biểu thức đồng bậc ba

nên ta sẽ “chia để trị” nên chia cả tử và mẫu cho b^3 ta được:

$$\frac{b^3}{ab^2 - 9ab + 1} = \frac{1}{\frac{a}{b} - 9\left(a + \frac{1}{b}\right)^3} = \frac{1}{\frac{5}{2} - 9\left(-\frac{10}{3}\right)^3} = \frac{6}{2015} \text{ suy ra đpcm.}$$

Bài toán kết thúc.

★**Thí dụ 5.** Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 6, tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật là $x_1, x_2 > 0$. Ta có $x_1 + x_2 = 3$. Đặt $x_1 \cdot x_2 = m$ là diện tích của hình chữ nhật. Vậy x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x + m = 0$.

Phương trình này phải có nghiệm nên $\Delta = 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$. Vậy diện tích lớn nhất của

hình chữ nhật là $\frac{9}{4} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$. Khi đó hình chữ nhật trở thành hình vuông.

★**Thí dụ 5.** Chứng minh rằng nếu các số a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases}$ thì:

$$1 \leq a \leq \frac{7}{3}; 1 \leq b \leq \frac{7}{3}; 1 \leq c \leq \frac{7}{3}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(b+c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=5-a \\ bc=8-a(5-a) \end{cases}$

Các số b, c là nghiệm của phương trình: $x^2 - (5-a)x + (a^2 - 5a + 8) = 0$

Để phương trình có nghiệm ta phải có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (5-a)^2 - 4(a^2 - 5a + 8) \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 10a + 25 - 4a^2 + 20a - 32 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3a^2 + 10a - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(7-3a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq \frac{7}{3}$$

Chứng minh tương tự ta có: $1 \leq b \leq \frac{7}{3}; 1 \leq c \leq \frac{7}{3}$.

★**Thí dụ 5.** Biết rằng các số x, y thỏa mãn điều kiện $x+y=2$. Hãy tìm GTNN của $F = x^3 + y^3$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: để giải bài toán trên có rất nhiều cách giải như biến đổi biểu thức F chỉ có một biến, đổi biến số. Tuy nhiên vận dụng định lý Vi-ét cho ta một cách giải mới như sau:

Đặt $\begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ S^3-3SP=F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=\frac{8-F}{6} \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 2t + \frac{8-F}{6} = 0$ (*)

x, y tồn tại $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm tức là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{8-F}{6} \geq 0 \Leftrightarrow F \geq 2$

$\Rightarrow \text{Min } F = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

★**Thí dụ 5.** Cho các số $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = xyz \\ x^2 = yz \end{cases}$

Chứng minh rằng $x^3 \geq 3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y + z = xyz \\ x^2 = yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = xyz - x = x^3 - x \\ yz = x^2 \end{cases}$$

Vậy các số y, z là các nghiệm của phương trình: $t^2 + (x^3 - x)t + x^2 = 0$ (*)

Do tồn tại x, y, z thỏa mãn điều kiện đầu bài nên phương trình (*) phải có nghiệm

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (x^3 - x)^2 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \left[(1 - x^2)^2 - 4 \right] \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \leq -2 \\ 1 - x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq 3.$$

XV. VẬN DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ÉT TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ.

Vận dụng định lý Vi-ét ta có thể giải một số dạng toán trong mặt phẳng tọa độ như khảo sát hàm số, viết phương trình đường thẳng, xét vị trí tương đối của đường thẳng và Parabol...

★**Thí dụ 5.** Cho Parabol (P) : $y = \frac{1}{4}x^2$

- Viết phương trình đi qua hai điểm A và B thuộc Parabol có hoành độ lần lượt là $x_A = -2; x_B = 4$.
- Viết phương trình tiếp tuyến với (P) tại điểm C thuộc (P) có hoành độ là 2.

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Hầu hết HS và GV khi gặp bài toán trên đều cho lời giải như sau:

$$\text{a) } \begin{cases} A \in (P) \\ x_A = -2 \end{cases} \Rightarrow y_A = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 = 1. \text{ Vậy } A(-2; 1).$$

$$\begin{cases} B \in (P) \\ x_B = 4 \end{cases} \Rightarrow y_B = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4. \text{ Vậy } B(4; 4)$$

Phương trình đường thẳng AB cần tìm có dạng $y = ax + b$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ 4 = 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

$$\text{b) } \begin{cases} C \in (P) \\ x_C = 2 \end{cases} \Rightarrow y_C = \frac{2^2}{4} = 1. \text{ Vậy } C(2; 1).$$

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$ (d).

$$C \in (d) \Leftrightarrow 1 = 2a + b \Leftrightarrow b = 1 - 2a \Rightarrow (d): y = ax + 1 - 2a$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{4}x^2 = ax + 1 - 2a \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4 + 8a = 0$$

$$\Delta' = 4a^2 + 4 - 8a = 4(a - 1)^2$$

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (P) \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = x - 1$

*) Nếu vận dụng định lý Vi-ét ta có lời giải đẹp như sau:

a) Phương trình đường thẳng AB cần tìm có dạng $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng AB là:

$$\frac{1}{4}x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 \quad (*)$$

Ta có $x_A = -2; x_B = 4$ là nghiệm của phương trình (*), theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 4a \\ x_A \cdot x_B = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

b) Phương trình tiếp tuyến (d) cần tìm có dạng: $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$\frac{1}{4}x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 \quad (*)$$

Vì (d) và (P) tiếp xúc với nhau nên phương trình (*) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.

$$\text{Theo Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4a \\ x_1 x_2 = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = x - 1$

****)** Qua ví dụ trên ta đưa ra phương pháp viết phương trình đường thẳng dựa vào định lý Vi-ét:

Dạng 1: Lập phương trình đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua hai điểm $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$ thuộc Parabol $y = mx^2$ ($m \neq 0$):

Vì đường thẳng và (P) có hai giao điểm nên hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $mx^2 = ax + b \Leftrightarrow mx^2 - ax - b = 0$

Theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{a}{m} \\ x_A \cdot x_B = \frac{-b}{m} \end{cases} \Rightarrow \text{tìm được } a, b.$$

Dạng 2: Lập phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) tại điểm $M(x_M, y_M)$

Do (d) và (P) có một điểm chung duy nhất nên phương trình $mx^2 - ax - b = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2$

Theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{-b}{m} \end{cases} \Rightarrow \text{tìm được } a, b.$$

★Thí dụ 5. Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy, cho (P): $y = x^2$ và đường thẳng (D) : $y = mx + 1$. Xác định m để (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$ và:

a) $(x_A - 1)^2 + (x_B - 1)^2$ đạt GTNN

b) Độ dài AB ngắn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P):

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m, suy ra (D) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$ trong đó x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (*).

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = m \\ x_A \cdot x_B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (x_A - 1)^2 + (x_B - 1)^2 &= x_A^2 - 2x_A + 1 + x_B^2 - 2x_B + 1 \\ &= (x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B - 2(x_A + x_B) + 2 \\ &= m^2 + 2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy Min $\{(x_A-1)^2 + (x_B-1)^2\} = 3 \Leftrightarrow m=1$

b) Do $A, B \in (D) \Rightarrow y_A = mx_A + 1, y_B = mx_B + 1$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (mx_A - mx_B)^2} \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 (m^2 + 1)} = \sqrt{[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B] (m^2 + 1)} \\ &= \sqrt{(m^2 + 4)(m^2 + 1)} \geq \sqrt{4 \cdot 1} = 2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m=0$

Vậy độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất khi và chỉ khi $m=0$.

★**Thí dụ 5.** Cho (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (D) có hệ số góc là a đi qua điểm $M(-1; -2)$

- a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a thì (D) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B
b) Xác định a để A, B nằm về hai phía trục tung.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng (D) có hệ số góc là a và đi qua điểm $M(-1; -2)$ là:

$$y = ax + a - 2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là:

$$-x^2 = ax + a - 2 \Leftrightarrow x^2 + ax + a - 2 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có $\Delta = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4 > 0$ với mọi a, suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a. Do đó (D) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

- c) Để (D) cắt (P) tại hai điểm A và B nằm về hai phía trục tung thì phương trình hoành độ giao điểm phải có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a-2 < 0 \Leftrightarrow a < 2$.

XVI. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT TRONG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC:

Ta đã biết một trong những phương pháp giải các bài toán hình học là “phương pháp đại số”, phương pháp này vận dụng rất có hiệu quả trong các dạng bài tập tính độ dài đoạn thẳng, một số bài toán cực trị hình học. Kết hợp với định lý Vi-ét sẽ cho ta những lời giải hay và thú vị.

★**Thí dụ 5.** Cho $\triangle ABC$ có $B = 90^\circ$, đường cao $BH = 3cm$, $AC = 7cm$. Tính AB, BC .

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta tìm AB, BC thông qua tìm AH, HC

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH + HC = AC = 7 \\ AH \cdot HC = BH^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow AH, HC$$

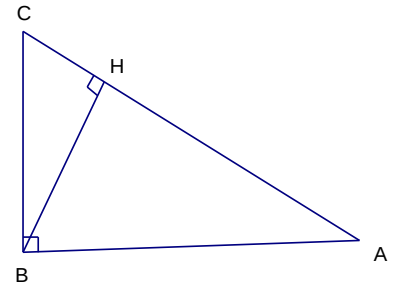
là nghiệm của phương trình: $x^2 - 7x + 9 = 0$.

Cách 2: Ta tìm trực tiếp AB, BC dựa vào định lý Pitago và

$$\text{Vi-ét: Ta có } AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow (AB + BC)^2 - 2AB \cdot BC \Leftrightarrow (AB + BC)^2 - 2AC \cdot BH = 49$$

$$\Rightarrow (AB + BC)^2 = 49 + 42 = 91 \Rightarrow AB + BC = \sqrt{91}$$

Mà $AB \cdot BC = AC \cdot BH = 21$, Suy ra AB, BC là nghiệm của phương trình $x^2 - \sqrt{91}x + 21 = 0$, từ đó ta sẽ tìm được AB, BC.



★**Thí dụ 5.** Cho tam giác đều ABC, trên các đoạn thẳng BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho K không trùng với A, B và $\angle IKJ = 60^\circ$.

Chứng minh rằng $AJ \cdot BI \leq \frac{AB^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\angle JKI = \angle BAC + \angle AJK$ (góc ngoài tại đỉnh K của ΔAJK)

Mà $\angle JKB = \angle JKI + \angle IKB$ (Vì $\angle BAC = \angle JKB = 60^\circ$)

$$\Rightarrow \angle AJK = \angle BKI$$

Vậy ΔBKI đồng dạng với ΔAJK

$$\Rightarrow \frac{BI}{AK} = \frac{BK}{AJ} \text{ hay } AJ \cdot BI = AK \cdot BK.$$

Đặt $AK = x_1, BK = x_2$ ($x_1, x_2 > 0$) ta có:

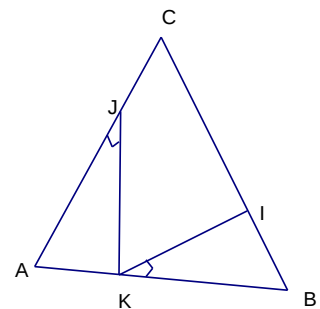
$$AB = x_1 + x_2 = a \text{ (không đổi)}$$

$$\text{Và } AK \cdot BK = m \text{ (} m > 0 \text{)}$$

Do đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + m = 0$

Phương trình này phải có nghiệm nên $\Delta = a^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{a^2}{4}$

$$\text{Vậy } BI \cdot AJ = AK \cdot BK \leq \frac{a^2}{4} = \frac{AB^2}{4}.$$



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$ tức K là trung điểm của AB.

★**Thí dụ 5.** Cho hình vuông ABCD có cạnh là a và hai điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên cạnh BC và CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Tìm GTNN và GTLN của diện tích tam giác AMN.

Hướng dẫn giải

Đặt $MB = u; ND = v (0 \leq u; v \leq a)$.

Ta có: $S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN}$

$$= a^2 - \frac{1}{2}au - \frac{1}{2}av - \frac{1}{2}(a-u)(a-v) = \frac{1}{2}(a^2 - uv) \quad (1)$$

Trên tia đối của tia BM lấy điểm E sao cho $BE = ND = v$

Ta có $\triangle ABE = \triangle ADN (g - g) \Rightarrow \begin{cases} AE = AN \\ \angle EBA = \angle DAN \end{cases}$

$$\Rightarrow \angle EAM = \angle EAB + \angle BAM = \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ = \angle MAN$$

$$\Rightarrow \triangle AME = \triangle AMN (c.g.c) \Rightarrow MN = ME = u + v$$

$$\triangle CMN \text{ có } MN^2 = CM^2 + CN^2 \Leftrightarrow (u+v)^2 = (a-u)^2 + (a-v)^2 \Leftrightarrow a(u+v) = a^2 - uv$$

Đặt $t = a^2 - uv$, từ (1) ta có $S_{AMN} = \frac{at}{2}$

Do đó tìm GTLN và GTNN của S_{AMN} là tìm GTLN, GTNN của t

Ta có: $\begin{cases} u+v=t \\ u.v=a^2-at \end{cases}$

$$\Rightarrow u, v \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - tX + a^2 - at = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = t^2 + 4at^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2a(\sqrt{2}-1)$ (vì $t \geq 0$)

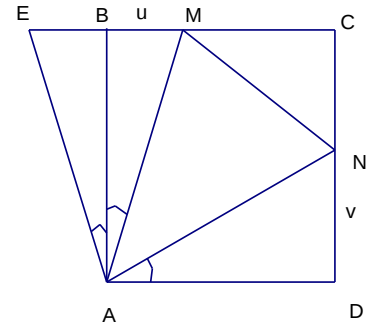
Khi $t = 2a(\sqrt{2}-1)$ thì phương trình (*) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = a(\sqrt{2}-1) \Rightarrow u = v = a(\sqrt{2}-1)$

Do đó Min $t = 2a(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow u = v = a(\sqrt{2}-1)$.

Mặt khác ta có: $at = a^2 - uv \leq a^2$ (vì $u, v \geq 0$) $\Rightarrow t \leq a$

Khi $t = a$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $t_1 = a; t_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = a; v_1 = 0 \\ u_2 = 0; v_2 = a \end{cases}$

Vậy Max $t = a \Leftrightarrow \max S_{AMN} = \frac{a^2}{2}$ khi $M \equiv B, N \equiv C$ hoặc $M \equiv C, N \equiv D$.



C. BÀI TẬP VẬN DỤNG TỔNG HỢP

Câu 1. Cho ba số thực dương phân biệt a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Xét ba phương trình bậc hai $4x^2 + 4ax + b = 0$, $4x^2 + 4bx + c = 0$, $4x^2 + 4cx + a = 0$. Chứng minh rằng trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm và có ít nhất một phương trình vô nghiệm.

(Chuyên Đà Nẵng năm 2019-2020)

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y = 2mx + m + 2$ (m là tham số) và parabol $(P): y = 2x^2$. Chứng minh với mọi giá trị của m thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m sao cho $x_1^2 - 6x_2^2 - x_1x_2 = 0$.

(Chuyên Điện Biên 2019-2020)

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

(Chuyên Tuyên Quang 2019-2020)

Câu 4. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2) = 4(m + 2)$

(Chuyên Hải Phòng 2019-2020)

Câu 5. Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

(Chuyên Bình Định năm 2019-2020)

Câu 6. Cho phương trình $x^2 - (m + 2)x + 3m - 3 = 0$ (1) với m là tham số.

Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng

5

(Chuyên Bình Phước năm 2019-2020)

Câu 7. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = (m - 1)x - 1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là P và d . Tìm m để P cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3)$.

(Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)

Câu 8. Cho parabol $(P): y = 2ax^2 (a > 0)$ và đường thẳng $d: y = 4x - 2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N sao cho $K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Chuyên Bình Dương năm 2019-2020)

Câu 9. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $A = \frac{4x_1 x_2 + 6}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)}$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Chuyên Sơn La năm 2019-2020)

Câu 10. Cho phương trình $2018x^2 - (m - 2019)x - 2020 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 = \sqrt{x_1^2 + 2019} + x_2$

(Chuyên Bạc Liêu năm 2019-2020)

Câu 11. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a + b \geq 2$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx - 2a + 2 = 0$ luôn có nghiệm.

(Chuyên Vũng Tàu năm 2019-2020) (đề 32)

Câu 12. Cho phương trình $x^2 + 2(m - 2)x - m^2 - 5 = 0$ (với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2 + 1| = 5$.

(Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Câu 13. Cho phương trình (ẩn x , tham số m): $x^2 - (2m + 1)x - 12 = 0$. (1)

a) Với các giá trị nào của số thực m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 25$?

b) Tìm tất cả các giá trị của số thực m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 - 7(2m + 1) = 0$.

(Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2019-2020)

Câu 14. Cho phương trình $x^4 + 3x^3 - mx^2 + 9x + 9 = 0$

(Chuyên Phan Bội Châu Năm 2016-2017)

- a) Với $m = -2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9 = 0$
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y = mx^2 (m > 0)$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2$.

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó chứng minh rằng A và B cùng nằm về một phía của trục tung

b) Với m tìm được ở câu a. Gọi $x_A; x_B$ theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B. Tìm các giá

trị m để biểu thức $K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_A x_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Chuyên Quốc Học Huế năm 2016-2017)

Câu 16. Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Biết b và c là các hệ số dương và $f(x)$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $f(2) \geq 9\sqrt[3]{c}$.

(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2016-2017)

Câu 17. Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị P của hàm số (Học sinh tự vẽ hình).

b) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2mx - 2$ cắt P tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$

sao cho biểu thức $M = x_1 + x_2^4 - 17x_1 + x_2^2 x_1^2 x_2^2 - 6x_1 + x_2 x_1^3 x_2^3 + 90$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2016-2017)

Câu 18. Cho bốn số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn các điều kiện a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10cx - 11d = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10ax - 11b = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$.

(Chuyên Bắc Ninh vòng 2 năm 2016-2017)

Câu 19. Cho phương trình $x^2 - 2m - 1x + 2m - 6 = 0$ (m là số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + 2x_1 + 2m - 5 \quad x_2^2 + 2x_2 + 2m - 5 = -15$$

(Chuyên Hà Nam năm 2016-2017)

Câu 20. Cho phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x^2+mx+2m+14}{\sqrt{x}} = 0$.

a) Giải phương trình trên khi $m = -8$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\sqrt{x_2^2 + m + 1} \cdot x_2 + 2m + 14 = 3 - \sqrt{x_1}$$

(Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Câu 21. Tìm $a \geq 1$ để phương trình $ax^2 + 1 - 2a \cdot x + 1 - a = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1; x_2 \text{ thỏa mãn điều kiện } x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1.$$

(Chuyên PTNK TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017 Vòng 2)

Câu 22. Giả sử phương trình bậc hai $x^2 + mx + n + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số.

(Chuyên Bình Dương 2016-2017)

Câu 23. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Chuyên Bình Phước 2016-2017)

Câu 24.

Cho phương trình $x^2 - 2 \cdot 2m + 1 \cdot x + m^2 + 8 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\left[x_1^2 - 4m + 1 \cdot x_1 + m^2 \right] \left[x_2^2 - 4m + 1 \cdot x_2 + m^2 \right] = 25.$$

(Chuyên Quảng Bình năm 2016-2017)

Câu 25. Cho phương trình $x^2 - 2 \cdot m - 1 \cdot x - 2m + 5 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 26$.

(Chuyên Long An năm 2016-2017)

Câu 26. Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm nguyên dương biết a, b là hai số thỏa mãn $5a + b = 22$. Tìm hai nghiệm đó.

(Chuyên Quảng Ngãi 2016-2017)

Câu 27. Cho phương trình $x^2 - x + b = 0$ có các nghiệm $x_1; x_2$ và phương trình

$$x^2 - 97x + a = 0 \text{ có các nghiệm là } x_1^4; x_2^4. \text{ Tìm giá trị của } a.$$

(Chuyên Hải Phòng 2016-2017)

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 2m + 8$ (với m là tham số).

(Chuyên Thái Bình năm 2017-2018)

Câu 29. Cho a, b là hai số thực bất kỳ, chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình ẩn x sau vô nghiệm:

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + 2bx + 3b^2 - ab = 0$$

(Chuyên Thái Bình năm 2017-2018 Vòng 2)

Câu 30. Cho phương trình $x^2 - 2m + 3x + 2m + 5 = 0$ (x là ẩn số). Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{4}{3}.$$

(Chuyên Quốc Học Huế năm 2017-2018)

Câu 31. Cho phương trình $x^2 - 2m - 1x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, trong đó m là tham số, x là ẩn số.

- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.
- Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2 . Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}.$$

(Chuyên Vĩnh Phúc năm 2017-2018)

Câu 32. Cho đa thức $f(x) = x^2 - 2m + 2x + 6m + 1$ (m là tham số). Bằng cách đặt $x = t + 2$. Hãy tính $f(x)$ theo t và tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

(Chuyên Bình Định 2017-2018)

Câu 33. Cho parabol $P : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = -2ax - 4a$ (với a là tham số

(Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2017-2018)

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và P khi $a = -\frac{1}{2}$

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng d cắt P tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$

Bài 34. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 5 = 0$. Lập phương trình bậc hai nhận hai nghiệm là $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$.

(Chuyên Đồng Nai năm 2017-2018)

Câu 35. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $x^2 + 3mx + 2m^2 = \frac{x^4 + x^3}{2}$.

(Chuyên Phú Thọ năm 2017-2018)

Câu 36. Cho phương trình $x^2 - 2m - 1x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

(Chuyên Bình Phước năm 2017-2018)

Câu 37. (Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2017-2018)

Cho phương trình $x^2 + m^2 - 5x + m + 6 = 0$ (1).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi số thực m .

b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2m - 1$.

Câu 38. (Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2017-2018 vòng 2)

Cho phương trình $x^2 - 2m + 1x + 2m^2 + 4m + 1 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| < 1.$$

b) Giả sử hai nghiệm $x_1; x_2$ khác 0, chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

Câu 39. Cho phương trình $x^2 + 2mx - 1 - 2m = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để $P = \frac{2x_1x_2 + 1}{x_1^2 - 2mx_2 + 1 - 2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Chuyên Hà Tĩnh 2018-2019)

Câu 40. Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(2m-3)x - 5m + 25 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị m là số nguyên sao cho phương trình có nghiệm là số hữu tỉ.

(Chuyên Bình Định 2018-2019).

Câu 41. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

- b) Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm phân biệt của (1). Tìm m để $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - x_2)^2 = x_1$

(Chuyên Cà Mau 2018-2019)

Câu 42. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = x - m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $(x_1 - x_2)^8 + (y_1 - y_2)^8 = 162$

(Chuyên Hưng Yên 2018-2019)

Câu 43. Cho đa thức $f(x) = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$.

- 1) Khi $m = 2$, hãy phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

(Chuyên Đắk Lắk 2018-2019)

Câu 44. Cho phương trình $x^2 - (2m + 3)x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số)

- a) Tìm tất cả các số thực m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$
- b) Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên

(Chuyên Đại học Vinh năm 2018-2019)

Câu 45.

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 6 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m nguyên dương để $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

(Chuyên Bình Dương 2018-2019)

Câu 46. Cho phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

(Chuyên Lâm Đồng 2018-2019)

Câu 47. Cho phương trình $x^2 - x + 3m - 11 = 0$ (1)

- a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó
- b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$

(Chuyên PTNK Hồ Chí Minh 2018-2019)

Câu 48. Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 = 0$

- a) Có hai nghiệm phân biệt dương
- b) Có hai nghiệm $x_1 \neq x_2$ thỏa mãn: $(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m$

(Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Câu 49. Cho phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ với x là ẩn, a, b là tham số. Tìm a, b sao cho phương trình có nghiệm thỏa mãn
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$$

(Chuyên Bắc Ninh năm 2018-2019)

Câu 50. (Chuyên Vĩnh Long 2018-2019)

Cho phương trình $x^2 + (2m-3)x - m^2 - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

- a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 3$.

Câu 51. Cho phương trình: $x^2 - m^2x + m + 1 = 0$ (1), m là tham số. Tìm tất cả các số tự nhiên m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

(Chuyên Điện Biên 2018-2019)

Câu 52. Chứng minh rằng phương trình $(ax^2 + 2bx + c)(bx^2 + 2cx + a)(cx^2 + 2ax + b) = 0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a, b, c

(Chuyên Đà Nẵng 2018-2019)

Câu 53. Cho a là số nguyên dương. Biết 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + (2-a)x + a = 0$$

- a) CMR: Biểu thức A có giá trị không đổi: $A = 4(x_1 + x_2) - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
b) Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. CMR: S là số nguyên lẻ với mọi số n tự nhiên

(Chuyên Phú Thọ 2018-2019)

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị nguyên m để phương trình: $x^2 - 3x + m - 4 = 0$ có nghiệm thỏa $\frac{x_1 + x_2}{(x_1 x_2)^{2019}}$ là số nguyên.

(Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Câu 55. Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $(b^2 + c^2 - a^2)x^2 - 4bcx + (b^2 + c^2 - a^2) = 0$.

(Chuyên Trà Vinh 2018-2019)

Câu 56. Cho các số $a; b; c$ thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 5c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm

(Chuyên Thái Bình năm 2018-2019)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a > b > c > 0$.

Từ $a + b + c = 3$ thì $\Rightarrow a > 1 > c > 0$.

Ba phương trình đã cho lần lượt có các biệt số Δ' là:

$$\Delta_1 = 4a^2 - 4b; \Delta_2 = 4b^2 - 4c; \Delta_3 = 4c^2 - 4a$$

Suy ra $\Delta_3 < 0$ (vì $c^2 < 1 < a$) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4cx + a = 0$ vô nghiệm

Và $\Delta_1 > 4a^2 - 4a > 0$ (vì $a > b$ và $a > 1$) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4ax + b = 0$ có nghiệm.

Câu 2.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là

$$2x^2 = 2mx + m + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - m - 2 = 0 \quad *$$

Ta có $\Delta' = m^2 - 2(-m - 2) = m^2 + 2m + 2 = (m + 1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow d$ luôn cắt P tại hai điểm phân biệt

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*). Theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = \frac{-m - 2}{2} \end{cases}$$

Theo giả thiết

$$x_1^2 - 6x_2^2 - x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 3x_2)(x_1 + 2x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m}{4} \\ x_1 = \frac{3m}{4} \end{cases} \text{ do đó ta có}$$

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{3m}{4} = \frac{-m - 2}{2} \Leftrightarrow 3m^2 + 8m + 16 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{TH2: } x_1 = -2x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -m \\ x_1 = 2m \end{cases} \text{ do đó ta có}$$

$$-2m^2 = \frac{-m - 2}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Vậy $m = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

a) Phương trình: $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai của x có:

$$\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m - 4) = m^2 - m + 4$$

$$\Rightarrow \Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ với mọi } m$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo định lí Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$$

Ta lại có:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \text{ hoặc } \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2}$$

• TH1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

• TH2: $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 x_2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 x_2 \neq 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm vì } \Delta' > 0, \forall m)$

Vậy với $m = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

Câu 4.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$gt \Leftrightarrow \frac{4(16+2m)}{m} = 4(m+2) (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Kết hợp với điều kiện $m > -4; m \neq 0$ ta được $m = 4$ thỏa mãn.

Câu 5.

$$\text{Ta có } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m+n)}{2mn} = \frac{mn}{2mn} \Leftrightarrow 2(m+n) = mn$$

$$\text{Ta có } (x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + n = 0 & (1) \\ x^2 + nx + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là PT bậc hai có $\Delta_1 = m^2 - 4n$

Phương trình (2) là PT bậc hai có $\Delta_2 = n^2 - 4m$

$$\text{Do đó } \Delta_1 + \Delta_2 = m^2 - 4n + n^2 - 4m = m^2 + n^2 - 4(m+n) = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 \geq 0$$

Suy ra trong Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 0.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

Câu 6.

Điều kiện để phương trình 1 có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2^2 - 4 \cdot 3m-3 > 0 \\ m+2 > 0 \\ 3m-3 > 0 \\ x_1 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 16 > 0 \\ m > -2 \\ m > 1 \\ m+2^2 - 2 \cdot 3m-3 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > -2 \\ m > 1 \\ m = 5 \text{ hoặc } m = -3 \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là $x^2 - (m-1)x + 1 = 0 \quad (1)$.

P cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m-1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases} (*).$$

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m-1$; $x_1 x_2 = 1$.

Từ giả thiết ta có $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$.

Khi đó $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow x_1^6 - x_2^6 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3(x_1^3 + x_2^3 - 18) = 0$ (2).

Do $x_1 \neq x_2$ nên (2) $\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 18 = 0$.

Do đó,

$$(m-1)^3 - 3(m-1) - 18 = 0 \Leftrightarrow (m-1) - 3 \left[(m-1)^2 + 3(m-1) + 6 \right] = 0 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (t/m (*))}.$$

Câu 8.

Phương trình hoành độ của (P) và d là:

$$2ax^2 = 4x - 2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4x + 2a^2 = 0 \quad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 2a \cdot 2a^2 > 0 \Rightarrow 16 - 16a^3 > 0 \Rightarrow 1 - a^3 > 0 \Rightarrow (1-a)(1+a+a^2) > 0$$

$$\Rightarrow (1-a) \left[\left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

Ngoài ra, ta có:

$$x_M = \frac{4 + \sqrt{16 - 16a^3}}{2 \cdot 2a} = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} \quad x_N = \frac{4 - \sqrt{16 - 16a^3}}{2 \cdot 2a} = \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a}$$

$$x_M + x_N = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} + \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = \frac{2}{a}$$

$$2x_M \cdot x_N = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = 2a$$

$$\text{Mà } K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N} = \frac{8}{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2a} = 4a + \frac{1}{2a} \stackrel{\text{BDT Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}$$

Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là

$$4a + \frac{1}{2a} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2 - 4\sqrt{2}a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 9.

a) Phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt

b) Vì $\Delta = (m-2)^2 \geq 0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x_1 x_2 + 6}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)} = \frac{4x_1 x_2 + 6}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2 + 2x_1 x_2} = \frac{4x_1 x_2 + 6}{(x_1 + x_2)^2 + 2} \\ &\Leftrightarrow A = \frac{4(m-1) + 6}{m^2 + 2} = \frac{4m + 2}{m^2 + 2} \\ &\Leftrightarrow A(m^2 + 2) = 4m + 2 \\ &\Leftrightarrow Am^2 - 4m + 2A - 2 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) có nghiệm khi

$$\begin{aligned} \Delta' &\geq 0 \Leftrightarrow 4 - A(2A - 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2A^2 - 2A - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (A+1)(A-2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq A \leq 2 \end{aligned}$$

Vậy Min $A = -1$; khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow -m^2 - 4m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -2 \end{aligned}$$

Vậy với $m = -2$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài

Câu 10.

Do $a, c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m . Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 &= \sqrt{x_2^2 + 2019} + x_2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_2 + x_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019}} = x_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_1 - x_2 \end{cases}$$

* Trường hợp 1: $x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow m - 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2019$$

* Trường hợp 2: Không xảy ra do: $\sqrt{x_1^2 + 2019} > |x_1|$; $\sqrt{x_2^2 + 2019} > |x_2|$

Vậy $m = 2019$.

Câu 11.

Nếu $a = 0$ thì $b \geq 2$ và do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{b}$

Nếu $a \neq 0$ thì $\Delta = b^2 + 8a(a-1)$

+ Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a(a-1) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$ nên phương trình có nghiệm

+ Nếu $0 < a < 1$ thì

$$a + b \geq 2 \Rightarrow b \geq 2 - a > 0 \Rightarrow b^2 \geq (2 - a)^2 \Rightarrow \Delta \geq (2 - a)^2 + 8a(a-1) = (3a - 2)^2 \geq 0$$

Nên phương trình có nghiệm

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi số thực a, b thỏa mãn $a + b \geq 2$

Câu 12.

a) Với $m = 0$, ta có phương trình:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Giải phương trình được $x_1 = -1; x_2 = 5$

b) Phương trình $x^2 + 2(m-2)x - m^2 - 5 = 0$

Ta có $ac = -m^2 - 5 < 0 \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm trái dấu

Mà $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$

$$\Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2 + 1| = x_2 + 1$$

Do đó:

$$|x_1| - |x_2 + 1| = 5 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 - 1 = 5 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -6$$

Lại có: $x_1 + x_2 = -2(m-2)$ (theo hệ thức Vi-ét)

$$\Rightarrow -2(m-2) = -6 \Leftrightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 13.

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x có các hệ số tương ứng $a = 1$, $b = -(2m+1)$ và $c = -12$. Do a và c trái dấu nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu nhau. Theo Viet, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = -12 \end{cases}$$

a) Do $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 25$ nên ta có $2m+1+24=25$, tức $m = 0$.

Vậy có duy nhất một giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m = 0$.

b) Ta có $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (2m+1)(x_1 - x_2)$. Đó đó, để thỏa mãn yêu cầu đều bài thì ta phải có $(2m+1)(x_1 - x_2 - 7) = 0$, tức $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $x_1 - x_2 = 7$.

Ở trường hợp thứ hai, do $x_1 + x_2 = 2m+1$ nên ta có $x_1 = m+4$ và $x_2 = m-3$.

Từ đây, do $x_1 x_2 = -12$ nên $(m+4)(m-3) = -12$, tức $m(m+1) = 0$. Suy ra $m = 0$ hoặc $m = -1$.

Vậy có ba giá trị m thỏa mãn yêu cầu này là $m = 0$, $m = -1$ và $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 14.

a) Với $m = -2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9 = 0$

$$\text{Hay ta được } x^2 + 4x + 3 \quad x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 - x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

• **Phân tích.** Nhìn vào phương trình ta thấy phương trình có bậc quá cao đó là bậc 4 và đề yêu cầu cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương nên ta cần đưa phương trình về phương trình bậc hai để áp dụng hệ thức Vi – ét. Ta chia phương trình đã cho cho x^2 chú ý

$$\text{điều kiện } x \neq 0, \text{ khi đó ta được } x^2 + 3x - m + \frac{9}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} + 3\left(x + \frac{3}{x}\right) - m = 0 \quad *$$

$$\text{Đặt } x + \frac{3}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6. \text{ Khi đó phương trình } * \text{ trở thành } t^2 + 3t - m - 6 = 0$$

Đến đây chỉ cần áp dụng định lý Vi – ét là được. Ta có lời giải như sau.

• Lời giải.

+ Xét $x = 0$, ta thấy không thỏa mãn nên $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

+ Xét $x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 3x - m + \frac{9}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} + 3\left(x + \frac{3}{x}\right) - m = 0 \quad *$$

Đặt $x + \frac{3}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6$. Khi đó phương trình $*$ trở thành: $t^2 + 3t - m - 6 = 0$.

Xem phương trình trên là phương trình ẩn t với m là tham số. Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương thì phương trình ẩn t cũng có ít nhất một nghiệm dương. Khi đó để phương trình ẩn t có nghiệm thì $\Delta = 3^2 + 4(m + 6) = 4m + 33 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-33}{4}$. Áp dụng hệ thức Vi - et ta có $t_1 + t_2 = 3 > 0$. Do đó phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

Vậy với $m \geq \frac{-33}{4}$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

Câu 15.

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó chứng minh rằng A và B cùng nằm về một phía của trục tung

• **Phân tích.** Để d cắt P tại hai điểm phân biệt A và B thì phương trình $mx^2 = 2x - m^2$ phải có hai nghiệm phân biệt. Chuyển phương trình trên về phương trình bậc hai ẩn x và đi tìm điều kiện có nghiệm cho phương trình. Ta có $mx^2 = 2x - m^2 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + m^2 = 0$

Khi đó $\Delta = 4 - 4.m^2.m = 4 - 4m^3 > 0 \Leftrightarrow m^3 < 1 \Leftrightarrow m < 1$

Khi đó ta có hai nghiệm của phương trình là $x = \frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m}; x = \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m}$

Để chứng minh A và B cùng nằm về một phía của trục tung thì ta cần chứng minh hai hoành độ hai giao điểm cùng dấu hay chứng minh hai nghiệm trên phải cùng dấu. Khi đó ta nghĩ đến việc xét tích hai nghiệm

$$\frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m} = \frac{4 - 4 + m^3}{4m^2} = \frac{m}{4}$$

Do $m > 0$ nên suy ra $\frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m} > 0$. Đến đây ta được điều phải chứng minh.

• **Lời giải.** Để đường thẳng d cắt parabol P tại hai điểm phân biệt A và B thì phương trình hoành độ $mx^2 = 2x - m^2$ phải có hai nghiệm phân biệt hay $mx^2 - 2x + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $\Delta = 4 - 4.m^2.m = 4 - 4m^3 > 0 \Leftrightarrow m^3 < 1 \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó ta có hai nghiệm của phương trình là $x = \frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m}; x = \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m}$

Xét tích hai nghiệm trên ta có $\frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m} = \frac{4 - 4 + m^3}{4m^2} = \frac{m}{4}$

Vì $m > 0$ nên $\frac{2 - \sqrt{4 - m^3}}{2m} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - m^3}}{2m} > 0$, do đó hai nghiệm trên cùng dấu.

Vậy A và B cùng dấu hay cùng nằm về một phía của trục tung.

b) Với m tìm được ở câu a. Gọi $x_A; x_B$ theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B. Tìm các giá

trị m để biểu thức $K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_A x_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

• **Phân tích và lời giải.** Với $0 < m \leq 1$, khi đó phương trình hoành độ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. Theo định lý Vi – et ta có $x_A + x_B = \frac{2}{m}; x_A \cdot x_B = m$. Khi đó thay vào biểu thức K ta được

$$K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_A x_B + 1} = m + \frac{1}{4m + 1}$$

Đến đây cần tìm giá trị nhỏ nhất của $K = m + \frac{1}{4m + 1}$.

Giả sử K_0 là giá trị nhỏ nhất của biểu thức K, khi đó phương trình sau có nghiệm

$$\frac{4m^2 + m + 1}{4m + 1} = K_0 \Leftrightarrow 4m^2 + m + 1 = 4K_0 m + K_0 \Leftrightarrow 4m^2 + m(1 - 4K_0) + 1 - K_0 = 0$$

Phương trình trên là phương trình bậc 2 ẩn m nên để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4K_0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - K_0) \geq 0 \Leftrightarrow 16K_0^2 + 8K_0 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} K_0 \geq \frac{3}{4} \\ K_0 \leq \frac{-5}{4} \end{cases}$$

Mặt khác vì $m > 0$ nên $K_0 > 0$, do đó suy ra $K_0 \geq \frac{3}{4}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của K là $\frac{3}{4}$, xảy ra tại $m + \frac{1}{4m + 1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Vậy với $m = \frac{1}{4}$ thì biểu thức $K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_A x_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 16.

+ **Cách 1.** Ta có $f(x)$ có nghiệm nên $\Delta = b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 2\sqrt{c}$.

Ta lại có $f^2 = 4 + 2b + c \geq 4 + 4\sqrt{c} + c = (\sqrt{c} + 2)^2$ và $\sqrt{c} + 2 = \sqrt{c} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{c}}$

$$\text{Do đó } f^2 \geq \left(3\sqrt[3]{\sqrt{c}}\right)^2 = 9\sqrt[3]{c}.$$

+ Cách 2. Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 x_2 = c$ và $f(x) = x - x_1 - x - x_2$

Do b và c dương nên $f(x)$ chỉ có nghiệm âm, suy ra $x_1 < 0; x_2 < 0$

Đặt $x_1 = -p, x_2 = -q$ thì $p > 0, q > 0$ và $pq = c$. Ta có $f(x) = x + p + x + q$ từ đó dẫn đến

$$f^2 = (2 + p + 2 + q)^2 = (1 + 1 + p + 1 + 1 + q)^2 \geq 3\sqrt[3]{p} \cdot 3\sqrt[3]{q} = 9\sqrt[3]{pq} = 9\sqrt[3]{c}$$

Câu 17.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và P là $x^2 - mx + 1 = 0$ (1).

Đường thẳng d cắt P tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Vi – et ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = 1$.

$$M = m^4 - 17m^2 - 6m + 90 = m^4 - 18m^2 + 81 + m^2 - 6m + 9 = (m^2 - 9)^2 + (m - 3)^2 \geq 0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 0. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 3$.

Câu 18.

Vì a, b là hai nghiệm của $x^2 - 10cx - 11d = 0$ nên theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} a + b = 10c \\ ab = -11d \end{cases}$

Vì c, d là hai nghiệm của $x^2 - 10ax - 11b = 0$ nên theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} c + d = 10a \\ cd = -11b \end{cases}$

Từ các hệ thức trên ta có $9(a + c) = b + d \Rightarrow S = 10(a + c)$

Cũng từ $ab = -11d$ và $cd = -11b$ nên ta có $ac = 121$.

Mà a là nghiệm của phương trình $x^2 - 10cx - 11d = 0$ nên $a^2 - 10ac - 11d = 0$ và c là nghiệm của phương trình $x^2 - 10ax - 11b = 0$ nên $c^2 - 10ac - 11b = 0$. Từ đó duy ra

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - 20ac - 11(b + d) &= 0 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 22ac - 99(a + c) = 0 \\ \Leftrightarrow (a + c)^2 - 99(a + c) - 2662 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -22 \\ a + c = 121 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $a + c = -22 \Rightarrow S = -220$.

+ Với $a + c = 121 \Rightarrow S = 1210$.

Câu 19. Xét phương trình $x^2 - (2m - 1)x + 2m - 6 = 0$ với m là tham số.

Ta có $\Delta' = m^2 - 4m + 7 = (m - 2)^2 + 3 > 0$ với mọi m . Do đó phương trình có nghiệm với mọi m .

Theo hệ thức Vi - et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = 2m - 6 \end{cases}$.

Ta có $x^2 - (2m - 1)x + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2m - 5 = 2mx + 1$.

Do $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình nên ta có ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1 + 2m - 5 &= x_2^2 + 2x_2 + 2m - 5 = -15 \\ \Leftrightarrow 2mx_1 + 1 &= 2mx_2 + 1 = -15 \Leftrightarrow 4m^2 x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 1 = -15 \end{aligned}$$

Kết hợp với hệ thức Vi - et ta được

$$\begin{aligned} 4m^2(2m - 6) + 4m(2m - 1) + 16 &= 0 \Leftrightarrow 2m^3 - 5m^2 - m + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (m - 1)(2m^2 - 3m - 4) &= 0 \Leftrightarrow m \in \left\{ 1; \frac{3 - \sqrt{41}}{4}; \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \right\} \end{aligned}$$

Vậy các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \left\{ 1; \frac{3 - \sqrt{41}}{4}; \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \right\}$.

Câu 20.

a) Giải phương trình trên khi $m = -8$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$. Khi $m = -8$ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x^2 - 8x - 2}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 3\sqrt{2}$$

(Do $x > 0$ nên $x + 1 > 0$)

Vậy với $m = -8$ thì phương trình có tập nghiệm là $S = \{4 + 3\sqrt{2}; 4 - 3\sqrt{2}\}$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\sqrt{x_2^2 + m + 1} \cdot x_2 + 2m + 14 = 3 - \sqrt{x_1}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $x^2 + mx + 2m + 14 = 0$ có nghiệm dương.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thì $x^2 + mx + 2m + 14 = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(2m + 14) > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -m > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 2m + 14 > 0 \end{cases}$$

Do x_2 là nghiệm của phương trình cùp hương trình $x^2 + mx + 2m + 14 = 0$ nên ta được

$$x_2^2 + mx_2 + 2m + 14 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m + 14 = x_2$$

Từ đó ta được $\sqrt{x_2^2 + (m+1)x_2 + 2m + 14} = 3 - \sqrt{x_1} \Leftrightarrow \sqrt{x_2} = 3 - \sqrt{x_1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$

Bình phương hai vế và kết hợp với hệ thức Vi - et ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 9 \Leftrightarrow -m + \sqrt{2m + 14} = 9 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2m + 14} &= m + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -9 \\ 4(2m + 14) = (m + 9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -9 \\ m^2 + 10m + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5 \end{aligned}$$

Thử $m = -5$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = -5$ là giá trị cần tìm.

Câu 21.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$\Delta = (1 - 2a)^2 - 4a(1 - a) = 8a^2 - 8a + 1 > 0.$$

Theo định lí Vi - et ta có $x_1 + x_2 = \frac{2a - 1}{a}$ suy ra $ax_1 + ax_2 = 2a - 1$ hay $ax_1 = 2a - 1 - ax_2$.

Kết hợp với $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$ ta được $x_2^2 + ax_2 - 2a + 1 = a^2 - a - 1$.

Từ đó suy ra $ax_2^2 + a^2x_2 - a^3 - a^2 + 2a = 0$.

Do x_2 là một nghiệm của phương trình nên ta có $ax_2^2 + (1 - 2a)x_2 + 1 - a = 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} ax_2^2 + a^2x_2 - a^3 - a^2 + 2a - [ax_2^2 + (1 - 2a)x_2 + 1 - a] &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 &= a^3 + a^2 - a + 2 \end{aligned}$$

Do $a \geq 1$ nên $a^2 + 2a - 1 > 0$ nên từ phương trình trên ta được $x_2 = a - 1$.

Thế vào phương trình $ax_2^2 + a^2x_2 - a^3 - a^2 + 2a = 0$ ta được

$$a - 1^2 + a(a - 1) - a^2 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{1; 3\}$$

Thử lại vào phương trình đã cho ta được $a = 1$ và $a = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22.

- **Lời giải.** Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + mx + n + 1 = 0$.

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = -m; x_1 x_2 = n + 1$. Do đó ta được

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= \left[-x_1 + x_2 \right]^2 + x_1 x_1 - 1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 + 1 \\ &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = x_1 + 1 \quad x_2 + 1 \end{aligned}$$

Do $x_1; x_2$ là hai nghiệm nguyên dương nên $x_1 + 1 \geq 2; x_2 + 1 \geq 2$.

Từ đó suy ra $m^2 + n^2$ là hợp số.

Câu 23.

Phương trình đã cho có nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - m^2 - 4m - 3 = 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{4}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 4m - 3$.

Ta có $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = x_1 + x_2^2 - 3x_1 x_2 = 4m^2 - 3m^2 - 4m - 3 = m^2 + 12m + 9$

Hay ta được $T = m + 6^2 - 27$

Do $m \geq -\frac{3}{4}$ nên $m + 6 \geq -\frac{3}{4} + 6 = \frac{21}{4}$ nên suy ra $m + 6^2 \geq \frac{441}{16}$ nên

$$T = m + 6^2 - 27 \geq \frac{9}{16}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{9}{16}$, đạt được tại $m = -\frac{3}{4}$

Câu 24.

Ta có $\Delta' = 3m^2 + 4m - 7 = m - 1 \quad 3m + 7$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' = m - 1 \quad 3m + 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{7}{3} \end{cases}$

Vì $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình nên theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m + 2 \\ x_1 x_2 = m^2 + 8 \end{cases}$

và $\begin{cases} x_1^2 - 4m + 1 \quad x_1 + m^2 = x_1 - 8 \\ x_2^2 - 4m + 1 \quad x_2 + m^2 = x_2 - 8 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \left[x_1^2 - 4m + 1 \quad x_1 + m^2 \right] \cdot \left[x_2^2 - 4m + 1 \quad x_2 + m^2 \right] &= 25 \Leftrightarrow x_1 - 8 \quad x_2 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1 x_2 - 8 \quad x_1 + x_2 + 31 &= 0 \Leftrightarrow m^2 - 32m + 31 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1; 31\} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm của phương trình ta được $m = 31$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25.

Ta có $a^2 + b^2$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0$

Khi đó theo định lý Vi – et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = -2m + 5 \end{cases}$$

Do đó ta được $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = 26 \Leftrightarrow 2m - 2 - 4m + 10 = 26 \Leftrightarrow m = -9$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm thì $m = -9$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 26.

Gọi x_1, x_2 $x_1 \leq x_2$ là hai nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + ax + b = 0$. Ta có

$x_1 + x_2 = -a; x_1 x_2 = b$. Khi đó

$$\begin{aligned} 5 - x_1 - x_2 + x_1 x_2 = 22 &\Leftrightarrow x_1 x_2 - 5x_1 - 5x_2 + 25 = 47 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $a = -58$ và $b = 312$ thỏa mãn $5a + b = 22$.

Và phương trình có nghiệm là $x_1 = 6; x_2 = 52$

Câu 27.

Do $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - x + b = 0$ nên ta có
$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 + b = 0 \\ x_2^2 - x_2 + b = 0 \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 = b$

Do $x_1^4; x_2^4$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - 97x + a = 0$ nên ta có
$$\begin{cases} x_1^8 - 97x_1^4 + a = 0 \\ x_2^8 - 97x_2^4 + a = 0 \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1^4 + x_2^4 = 97; x_1^4 x_2^4 = a$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - 2b$, từ đó suy ra $1 - 2b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{2}$

Lại có $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 1 - 2b^2 - 2b^2 = 2b^2 - 4b + 1$.

Mà theo trên ta có $x_1^4 + x_2^4 = 97$ nên ta được

$2b^2 - 4b + 1 = 97 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 48 = 0 \Leftrightarrow b \in \{-6; 8\}$.

Do $b \leq \frac{1}{2}$ nên ta chọn được $b = -6$, hay ta có $x_1 x_2 = -6$.

Ta có $a = x_1^4 \cdot x_2^4 = (x_1 x_2)^4 = b^4 = (-6)^4 = 6^4 = 1296$

Câu 28.

a) Khi $m = -4$, tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

Xét phương trình hoành độ giao điểm của P và d là

$$x^2 = 2mx + 2m + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 8 = 0$$

Khi $m = -4$, phương trình trên trở thành $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$

Với $x = 0$ thì $y = 0$ và với $x = -8$ thì $y = 64$

Vậy khi $m = -4$ thì tọa độ giao điểm của P và d là $0;0$ và $-8;64$.

b) Chứng minh đường thẳng d và Parabol P luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$. Tìm các giá trị của m để $x_1 + 2x_2 = 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2mx - 2m - 8 = 0$.

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 8 = (m+1)^2 + 7 > 0$ với mọi m, do đó phương trình hoành độ luôn có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra d và P tại hai điểm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -2m - 8 \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x \neq 0$. Kết hợp với hệ thức Vi-et trên ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2m \\ x_2 = 4m - 2 \end{cases}$$

Thay vào hệ thức $x_1 x_2 = -2m - 8$ ta được

$$(2 - 2m)(4m - 2) = -2m - 8 \Leftrightarrow -4m^2 + 7m + 2 = 0$$

Giải phương trình được $x = 0$. Vậy $m \in \left\{2; -\frac{1}{4}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 29.

Đặt các phương trình đã cho là

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - b^2 + 1 = 0(1)$$

$$x^2 + 2bx + 3b^2 - ab = 0(2)$$

Để chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình ẩn x sau vô nghiệm thì ta chứng minh một trong hai biệt thức delta của phương trình nhận giá trị âm. Muốn vậy ta đi tính tổng hai biệt thức delta của hai phương trình nhận giá trị âm. Ta có

$$\begin{cases} \Delta'_1 = a^2 - 2a^2 - b^2 + 1 = -a^2 + b^2 - 1 \\ \Delta'_2 = b^2 - 3b^2 - ab = -2b^2 + ab \end{cases}$$

Khi đó ta được $\Delta'_1 + \Delta'_2 = -a^2 + b^2 - 1 - 2b^2 + ab = -a^2 - b^2 - 1 + ab$

Mặt khác dễ thấy rằng $-2a^2 - 2b^2 - 2 + 2ab = -(a-b)^2 - 2 - a^2 - b^2 \leq 0$

Do đó ta được $\Delta'_1 + \Delta'_2 < 0$. Vậy trong hai phương trình tồn tại ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Câu 30.

Phương trình $x^2 - 2m + 3x + 2m + 5 = 0$ có $a + b + c = 1 - 2m + 3 + 2m + 5 = 0$ nên có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2m + 5$.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} 2m + 5 \neq 1 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m > -\frac{5}{2} \end{cases}$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+5}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2m+5} = 3 \Leftrightarrow 2m+5 = 9 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31.

a) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \Delta' &= m - 1 - 2m^2 - 3m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m(m-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1 \\ &\quad m = 0 \\ &\quad m = 1 \end{aligned}$$

Vậy với $0 \leq m \leq 1$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2 . Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2 + x_1 x_2| \leq \frac{9}{8}.$$

• **Lời giải.** Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm khi $0 \leq m \leq 1$.

Theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có } P = |x_1 + x_2 + x_1 x_2| = |2m^2 - m - 1| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

$$\text{Ta có } 0 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\text{Suy ra } P = 2 \left[\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \right] \leq \frac{9}{8}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } m = \frac{1}{4}.$$

Câu 32.

Ta có

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) + 2 = t^2 + 2^2 - 2m + 2t + 2 + 6m + 1 \\ &= t^2 + 4t + 4 - 2mt - 4m - 4t - 8 + 6m + 1 = t^2 - 2mt + 2m - 3 \end{aligned}$$

Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2 khi và chỉ khi phương trình $h(t) = 0$ có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1^2 + 2 > 0 \\ 2m - 3 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Vậy với $m > \frac{3}{2}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

Câu 33.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và P khi $a = -\frac{1}{2}$

Khi $a = -\frac{1}{2}$ thì đường thẳng d có phương trình $y = x + 2$.

Hoành độ giao điểm của d và P là nghiệm của phương trình

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của d và P là $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng d cắt P tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$

Xét phương trình hoành độ của d và P là $x^2 + 2ax + 4a = 0$

Để d và P cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Từ đó ta có } \Delta' = a^2 - 4a = a(a - 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó theo hệ thức Vi - et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = 4a \end{cases}$$

$$\text{Ta có } |x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2|^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9$$

$$\text{Kết hợp với hệ thức Vi - et ta được } 4a^2 - 8a + |8a| = 9.$$

$$+ \text{ Với } a < 0 \text{ ta được } 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 - 16a - 9 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \text{ thỏa mãn}$$

$$+ \text{ Với } a > 4 \text{ ta được } 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \Leftrightarrow 4a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{2}, \text{ không thỏa mãn.}$$

Vậy $a = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 34.

Để thấy phương trình $x^2 - x - 5 = 0$ có $ac = -5 < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Vi - et ta có $x_1 + x_2 = 1; x_1 x_2 = -5$

Đặt $S = 2x_1 + x_2 + x_1 + 2x_2 = 3x_1 + x_2 = 3$ và

$$P = 2x_1 + x_2 \cdot x_1 + 2x_2 = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_1 x_2 = 2x_1 + x_2^2 + x_1 x_1 = -3$$

Khi đó $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Từ đó ta có phương trình $x^2 - 3x - 3 = 0$ nhận $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$ làm nghiệm.

Câu 35.

Biến đổi phương trình đã cho ta được

$$x^2 + 3mx + 2m^2 = \frac{x^4 + x^3}{2} \Leftrightarrow 4m^2 + 6mx + 2x^2 - x^4 - x^3 = 0$$

Giả sử tồn tại m để phương trình đã có bốn nghiệm phân biệt.

Khi đó ta xem phương trình $4m^2 + 6m + 2x^2 - x^4 - x^3 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn m .

$$\text{Ta có } \Delta' = 9x^2 - 4(2x^2 - x^4 - x^3) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 = 2x^2 + x^2 \geq 0.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm
$$\begin{cases} m = \frac{-3x + 2x^2 + x}{4} = \frac{x^2 - x}{2} \\ m = \frac{-3x - 2x^2 - x}{4} = \frac{-x^2 - 2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2m = 0 \\ x^2 + 2x + 2m = 0 \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì mỗi phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm của hai phương trình phải khác nhau.

+ Phương trình $x^2 - x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = 1 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{8}$.

+ Phương trình $x^2 + 2x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = 4 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Kết hợp hai kết quả trên ta được hai phương trình trên cùng có hai nghiệm phân biệt khi $m < -\frac{1}{8}$.

+ Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $x^2 - x - 2m = 0$ và $x^2 + 2x + 2m = 0$.

Khi đó ta có
$$\begin{cases} x_0^2 - x_0 - 2m = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 4m = 0 \\ x_0^2 - x_0 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{4m}{3} \\ x_0^2 - x_0 - 2m = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\left(-\frac{4m}{3}\right)^2 + \frac{4m}{3} - 2m = 0 \Leftrightarrow 16m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{0; \frac{3}{8}\right\}$.

Do đó để hai phương trình không có nghiệm chung thì $m \notin \left\{0; \frac{3}{8}\right\}$.

Vậy với $m < -\frac{1}{8}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 36.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = m - 1 - m^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Theo định lí Vi - et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

Do x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên ta được $x_1^2 - 2m - 1 - x_1 + m^2 - 3 = 0$ hay ta được

$$x_1^2 - 2mx_1 = -2x_1 - m^2 + 3$$

Theo đề ra thì ta có $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$ suy ra $x_1^2 - 2mx_1 + 4x_1 + 2x_2 = 1$.

Kết hợp với $x_1^2 - 2mx_1 = -2x_1 - m^2 + 3$ ta được

$$-2x_1 - m^2 + 3 + 4x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - m^2 + 2 = 0$$

Kết hợp với hệ thức Vi – et ta được

$$4m - 1 - m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm của phương trình ta được $m = 2 - \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 37.

a) Chứng minh rằng phương trình 1 có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi số thực m .

Tính giá trị của biểu thức $S = x_1^2 + m^2 + x_2^2 + m^2 + 5x_1 + x_2 + 2m$.

Đặt $y = x + m$, khi đó phương trình 1 trở thành $y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y \in \{2; 3\}$.

$$\text{Do đó ta được } \begin{cases} x + m = 2 \\ x + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - m \\ x = 3 - m \end{cases}.$$

Dễ thấy $2 - m \neq 3 - m$ với mọi m nên phương trình 1 luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình 1 có hai nghiệm $x_1; x_2$ tương ứng với phương trình $y^2 - 5y + 6 = 0$ có hai nghiệm là $y_1 = 2$ và $y_2 = 3$. Khi đó ta có

$$S = x_1^2 + m^2 + x_2^2 + m^2 + 5x_1 + x_2 + 2m = y_1^2 + y_2^2 + 5y_1 + y_2 = 2^2 + 3^2 + 5 \cdot 2 + 3 = 38$$

b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2m - 1$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 2 - m; x_2 = 3 - m$. Ta có $x_2 < 1 \Leftrightarrow 3 - m < 1 \Leftrightarrow m > 2$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_2 = 2m - 1 &\Leftrightarrow (2 - m)^2 + 2(3 - m) = 2m - 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 + 6 - 2m = 2m - 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m \in \{2; 6\} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $m > 2$ ta được $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 38.

a) Tìm m để phương trình 1 có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| < 1.$$

Ta có $\Delta' = m + 1 - 2m^2 - 4m - 1 = m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - 4m - 1 = -m^2 - 2m$.

Phương trình 1 có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow m + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = 2m + 1$; $x_1x_2 = 2m^2 + 4m + 1$.

Ta có $-1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow |m + 1| < 1$ nên $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| = |m + 1| < 1$

b) Giả sử hai nghiệm $x_1; x_2$ khác 0, chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

Vì $-1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow |m + 1| < 1$ nên ta được

$$-1 \leq 2|m + 1|^2 - 1 < 1 \Rightarrow -1 \leq 2m^2 + 4m + 1 \leq 1 \Rightarrow |x_1 x_2| \leq 1$$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{|x_1 x_2|}} \geq 2$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| &= x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = \left[2|m + 1| \right]^2 - 2(2m^2 + 4m + 1) + 2|x_1 x_2| \\ &= 2 + 2|x_1 x_2| \geq 4 \end{aligned}$$

Suy ra $|x_1| + |x_2| \geq 2$. Vậy ta có $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

Câu 39.

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm với mọi m

Theo định lý Vi et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -2m - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow P = \frac{2x_1 x_2 + 1}{x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 + 1 - 2m}$$

$$P = \frac{2x_1 x_2 + 1}{(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 - 2m}$$

$$P = \frac{-4m - 1}{4m^2 + 2} = \frac{-4m - 1}{4m^2 + 2} + 1 - 1$$

$$P = \frac{(2m - 1)^2}{4m^2 + 2} - 1 \geq -1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1 đạt tại m = 0,5.

Câu 40.

Phương trình: $(m - 1)x^2 - 2(2m - 3)x - 5m + 25 = 0$ (3)

Có $\Delta' = [-(2m - 3)]^2 - (m - 1)(-5)(m - 5) = 9m^2 - 42m + 34 = (3m - 7)^2 - 15$

(3) có nghiệm hữu tỉ với $m \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi Δ' chính phương, suy ra:

$$(3m - 7)^2 - 15 = n^2 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (3m - 7 - n)(3m - 7 + n) = 15 \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

Phương trình (4) tương đương với 8 hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3m-7-n=-15 \\ 3m-7+n=-1 \end{cases} \quad (4.1), \quad \begin{cases} 3m-7-n=-1 \\ 3m-7+n=-15 \end{cases} \quad (4.2), \quad \begin{cases} 3m-7-n=-5 \\ 3m-7+n=-3 \end{cases} \quad (4.3),$$

$$\begin{cases} 3m-7-n=-3 \\ 3m-7+n=-5 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} 3m-7-n=15 \\ 3m-7+n=1 \end{cases} \quad (4.5), \quad \begin{cases} 3m-7-n=1 \\ 3m-7+n=15 \end{cases} \quad (4.6) \quad \begin{cases} 3m-7-n=3 \\ 3m-7+n=5 \end{cases} \quad (4.7),$$

$$\begin{cases} 3m-7-n=5 \\ 3m-7+n=3 \end{cases} \quad (4.8)$$

Giải 8 hệ trên, suy ra hệ phương trình (3) có nghiệm hữu tỉ khi: $m = 1$ hoặc $m = 5$

Câu 41.

a) Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4(m^2+1) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$$

Vậy $m > \frac{3}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b) Với $m > \frac{3}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$= (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 4m - 3 = x_1$$

$$\Rightarrow x_2 = 2m+1 - x_1 = 2m+1 - 4m+3 = 4 - 2m$$

$$\bullet) x_1 x_2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (4m-3)(4-2m) = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 16m - 8m^2 - 12 + 6m = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 22m + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(9m-13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 9m-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(tm) \\ m=\frac{13}{9}(tm) \end{cases}$$

Vậy $m=1; m=\frac{13}{9}$ thỏa mãn điều kiện bài toán

Câu 42.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $x^2 = x - m \Leftrightarrow x^2 - x + m = 0(*)$

Hai đồ thị hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Khi đó ta có: $y_1 = x_1 - m, \quad y_2 = x_2 - m$

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$(x_1 - x_2)^8 + (y_1 - y_2)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - m - x_2 + m)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - x_2)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 = 81 = (\sqrt{3})^8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = \sqrt{3} \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + \sqrt{3} \\ x_1 = x_2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } x_1 = x_2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 + \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (tm)$$

$$+) \text{ Với } x_1 = x_2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 - \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (tm)$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 43.

Cho đa thức $f(x) = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$.

1) Khi $m = 2$, hãy phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Phân tích phương trình $(x-1)(x^2-x-m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-x-m=0 \end{cases} (*)$

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1+4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Lúc đó: $x_1=1, x_2+x_3=1; x_2x_3=-m$

Điều kiện: $x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_2+x_3)^2 - 2x_2x_3 < 3 \Leftrightarrow m < 1.$

Vậy $-\frac{1}{4} < m < 1, m \neq 0.$

Câu 44.

a) Tìm tất cả các số thực m

Ta có: $\Delta = (2m+3)^2 - 4(3m+1) = 4m^2 + 5 > 0 (\forall m)$. Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+3 \\ x_1x_2 = 3m+1 \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$$

$$\Leftrightarrow (2m+3)^2 - 3(3m+1) = 7$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = -1; m = \frac{1}{4}.$

b) Tìm tất cả các số nguyên.....

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta = 4m^2 + 5$ phải là số chính phương. Khi đó:

$$4m^2 + 5 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - 4m^2 = 5 \Leftrightarrow (k-2m)(k+2m) = 5$$

$$\Rightarrow k-2m; k+2m \in U(5) = \{1; 5; -1; -5\}$$

Ta có bảng sau:

$k-2m$	1	5	-1	-5
$k+2m$	5	1	-5	-1
m	1	-1	-1	1

Vậy các giá trị cần tìm là: $m = 1; m = -1$

Câu 45.

Ta có: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 2m + 6 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 7 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 3 > 0 \forall x$

Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Áp dụng định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 x_2)^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2}{(x_1 x_2)^2} \\ &= \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2(x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \\ &= \frac{[4(m-1)^2 - 2(2m-6)]^2 - 2(2m-6)^2}{(2m-6)^2} - 2 \quad (m \neq 3) \\ &= \frac{(4m^2 - 8m + 4 - 4m + 12)^2}{(2m-6)^2} - 2 \\ &= \left(\frac{4m^2 - 12m + 16}{2m-6}\right)^2 - 2 = \left(\frac{2m^2 - 6m + 8}{m-3}\right)^2 - 2 \\ &\Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2m^2 - 6m + 8}{m-3}\right)^2 - 2\right] \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{2m^2 - 6m + 8}{m-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2m^2 - 6m + 8) : (m-3) \end{aligned}$$

Ta có: $2m^2 - 6m + 8 = 2m(m-3) + 8$

Ta thấy: $2m(m-3) : (m-3) \forall m \neq 3$

$\Rightarrow (2m^2 - 6m + 8) : (m-3) \quad \forall m \neq 3$

$\Rightarrow (2m^2 - 6m + 8) : (m-3) \Leftrightarrow 8 : (m-3) \text{ hay } (m-3) \in U(8) \Leftrightarrow (m-3) \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng giá trị

$x-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
x	-5	-1	1	2	4	5	7	11

Kết hợp với điều kiện $m \neq 3$ ta có các giá trị thỏa mãn bài toán:

$m \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$

Câu 46. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

Áp dụng định lý Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Vậy $m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

Câu 47. Phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(3m - 11) = 0 \Leftrightarrow 1 - 12m + 44 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{4}$$

Khi đó phương trình (1) trở thành $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

Vậy với $m = \frac{15}{4}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép, và nghiệm kép là $x = \frac{1}{2}$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{15}{4}$

Gọi hai nghiệm phân biệt của phương trình là x_1, x_2 , theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & (2) \\ x_1 x_2 = 3m - 11 & (3) \end{cases}$$

Theo giả thiết ta lại có $2017x_1 + 2018x_2 = 2019$, kết hợp:

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2017x_1 + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 2017(1 - x_2) + 2018x_2 = 2019 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Thay vào (3) ta có: $-2 = 3m - 11 \Leftrightarrow m = 3$ (tm)

Thử lại : với $m=3$ thì ta có phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48.

a) Có 2 nghiệm dương phân biệt

Ta có:

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương thì:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1)^2 - 4m^2 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 4 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

b) Có hai nghiệm phân biệt.....

Áp dụng định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác :

$$(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + x_2 = 3m$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2x_1 + m^2 + x_2 = 3m$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + 2x_1 + m^2 + x_2 = 3m$$

$$\Leftrightarrow -x_1 x_2 + 2x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 3m$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 3m \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ 2x_1 + x_2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m-2 \\ x_2 = m+4 \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có: $(m-2)(m+4) = m^2 \Leftrightarrow 2m-8=0 \Leftrightarrow m=4 \quad (tm)$

Vậy $m=4$

Câu 49.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0$

Áp dụng định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a & (1) \\ x_1 x_2 = b & (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ 5[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 & (3) \\ (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 7 & (4) \end{cases}$$

Thế (1) (2) vào (4) ta được:

$$(-a)^2 - b = 7 \Leftrightarrow a^2 - b = 7 \Leftrightarrow b = a^2 - 7 \quad (*)$$

Bình phương hai vế của (3) ta được:

$$(x_1 - x_2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 25 \Leftrightarrow a^2 - 4b = 25$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a^2 + 28 = 25 \Rightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -6 \\ a = -1 \Rightarrow b = -6 \end{cases}$$

Vậy $(a; b) = \{(1; -6); (-1; -6)\}$

Câu 50.

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Ta có $ac = 1 \cdot (-m^2 - 1) < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi giá trị m .

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 3$.

Do phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu và $x_1 < x_2$

Suy ra $x_1 < 0, x_2 > 0$

$$\Rightarrow |x_1| = -x_1, |x_2| = x_2$$

$$\Rightarrow |x_1| - |x_2| = 3 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = 3 \Leftrightarrow 2m - 3 = 3 \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 51.

Phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta = m^4 - 4m - 4$ là số chính phương.

+ Với $m = 0$, hoặc $m = 1$ thì $\Delta < 0$ (loại).

+ Với $m = 2$ thì $\Delta = 4 = 2^2$ (thỏa mãn).

+ Với $m \geq 3$ thì $2m(m-2) > 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m - 5 > 0$

$$\Leftrightarrow \Delta - (2m^2 - 4m - 5) < \Delta < \Delta + 4m + 4$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + 1 < \Delta < m^4$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)^2 < \Delta < (m^2)^2$$

$\Rightarrow \Delta$ không chính phương.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 52.

$$\text{Ta có: } (ax^2 + 2bx + c)(bx^2 + 2cx + a)(cx^2 + 2ax + b) = 0(*) \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 2bx + c = 0 & (1) \\ bx^2 + 2cx + a = 0 & (2) \\ cx^2 + 2ax + b = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) \\ \Delta_2 = 4c^2 - 4ba = 4(c^2 - ab) \\ \Delta_3 = 4a^2 - 4bc = 4(a^2 - bc) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 2(a-b)^2 + 2(a-c)^2 + 2(b-c)^2$$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$ Luôn tồn tại 1 biểu thức $\Delta \geq 0 \Rightarrow (*)$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c

Câu 53. Ta có : Phương trình ban đầu tương đương với

$$(x-1)(x^2-2x-a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1+\sqrt{a+1} \\ x=1-\sqrt{a+1} \end{cases}$$

Ta có: $\Leftrightarrow 1-\sqrt{a+1} < 1 < 1+\sqrt{a+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1-\sqrt{a+1} \\ x_2=1 \\ x_3=1+\sqrt{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_1x_3=1-(a+1)=-a \end{cases}$$

(Theo định lý Viet)

Thay vào biểu thức A ta được:

$$P=4(1-\sqrt{a+1}+1)-(1-\sqrt{a+1})^2+1+(1+\sqrt{a+1})^2$$

$$P=8-4\sqrt{a+1}-1+2\sqrt{a+1}-a-1+1+1+2\sqrt{a+1}+a+1$$

$$P=9$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh

a) Đặt

$$Q_n = x_1^n + x_3^n$$

$$n=0 \Rightarrow Q_0 = 2$$

$$n=1 \Rightarrow Q_1 = x_1 + x_3 = 2$$

$$Q_{n+2} = x_1^{n+2} + x_3^{n+2} = (x_1 + x_3)(x_1^{n+1} + x_3^{n+1}) - x_1x_3(x_1^n + x_3^n) = 2Q_{n+1} + aQ_n$$

Theo nguyên lý Quy nạp thì Q là số chẵn với mọi số tự nhiên n

Suy ra : $S_n = 1 + Q_n$ là số lẻ.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 54.

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}$$

$$\text{Áp dụng định lý Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = m - 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó theo đề bài ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = m - 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó theo đề bài ta có: } \frac{x_1 + x_2}{(x_1x_2)^{2019}} \text{ là số nguyên}$$

* Kết luận: Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{(x_1 x_2)^{2019}} = \frac{3}{(m-4)^{2019}}$$

$$\Rightarrow 3 : (m-4)^{2019} \Rightarrow (m-4) \in U(3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} m-4=1 \\ m-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy giá trị m thỏa mãn là $m=5, m=3$

Câu 55. Ta có:

$$(b^2 + c^2 - a^2)x^2 - 4bcx + (b^2 + c^2 - a^2) = 0 \quad (1)$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên:

$$a, b, c > 0; b + c - a > 0; a + b - c > 0; a + c - b > 0 \quad (2)$$

Xét 2 trường hợp:

$$+ \text{TH1: } b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

Phương trình (1) trở thành:

$$-4bcx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (do } b, c > 0)$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm

$$+ \text{TH2: } b^2 + c^2 - a^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Phương trình (1) là phương trình bậc hai}$$

$$\text{Xét } \Delta' = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$\begin{aligned} &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b) \end{aligned}$$

Kết hợp với (2) $\Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm

Câu 56.

$$a + 2b + 5c = 0 \Leftrightarrow b = \frac{-a - 5c}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{a^2 + 10ac + 25c^2}{4} - 4ac = \frac{a^2 - 6ac + 25c^2}{4} = \frac{(a-3c)^2 + 16c^2}{4} \geq 0 \forall a; b; c$$

$\Rightarrow$ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN KHÔNG LỜI GIẢI

1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 3m = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

b) Tính $A = x_1^3 + x_2^3$ và $x_1 - x_2$ theo m .

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 5$

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

e) Tìm GTNN của biểu thức: $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$.

f) Lập phương trình bậc hai nhận $x_1 + \frac{1}{x_2}, x_2 + \frac{1}{x_1}$ làm nghiệm

g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều dương, hai nghiệm trái dấu

h) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng ba lần nghiệm kia

i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $2x_1 - 3x_2 = 1$.

2) Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{3}{2}$

HD: Đặt $y = \sqrt{5-x^2}$

3) Giả sử x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $-\frac{4}{3} \leq x, y, z \leq \frac{4}{3}$

4) Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $x_1^5 + x_2^5$ là một số nguyên

5) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $2x - y - a^2 = 0$ và Parabol (P): $y = ax^2$ (a là tham số dương).

a) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung

b) Gọi x_A, x_B là hoành độ của A và B. tìm GTNN của biểu thức:

$$T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A \cdot x_B}$$

6) Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = m \end{cases}$ có nghiệm

HD: Đặt $x = -y$

7) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2009x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2010x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$$

8) Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^\circ$) có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Biết $AB = 12$, $CD = 25$. Tính AB, BC, BD

9) Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + m + 1 = 0$

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

10) Cho phương trình: $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 < 6$.

11) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2y + xy^2 = 3a - 8 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $a = \frac{7}{2}$.

b) Định a để phương trình có nghiệm.

12) Cho phương trình: $(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$ ($m \neq 2$)

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép

b) Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Hãy tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m.

c) Tính theo m biểu thức $A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$

d) Tìm m để $A = 2$

13) Cho phương trình: $x^2 - mx - 4 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm GTLN của biểu thức $A = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}$

c) Tìm các giá trị của m sao cho hai nghiệm của phương trình đều là số nguyên

14) Cho phương trình: $x^2 - 2m^2x + 2m^2 - 2 = 0$ ($|m| > 1$)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b) Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho và $x_1 > x_2$ hãy chứng minh

$$\frac{1 + x_1}{x_1^2 + x_1 + 1} < \frac{1 + x_2}{x_2^2 + x_2 + 1}.$$

15) (Đề thi HSG huyện lớp 9 năm học 2008-2009): Tìm số nguyên x, y thỏa mãn:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y = 0$$

16) Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là Parabol (P) và hàm số $y = 2(m-1)x + 1 - m$ có đồ thị là đường thẳng (d_m) (m là tham số)

a) Chứng minh rằng khi $m = 3$ hoặc $m = 1$ thì hai đồ thị (P) và (d_m) chỉ có một điểm chung

b) Với giá trị nào của m thì (d_m) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3 = 0$

17) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1005 \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 2006 \end{cases}$$