BÀI 5. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Hiểu định nghĩa lũy thừa, phân biệt được *cơ số* và *số mũ*.

+ Hiểu được quy tắc nhân và chia hai lũy thừa cùng cơ số.

+ Hiểu được khái niệm số chính phương.

❖ **Kĩ năng**

+ Thực hiện được các phép tính lũy thừa.

+ Biết cách viết gọn một biểu thức dưới dạng *lũy thừa*.

+ So sánh được các lũy thừa.

+ Biết biểu diễn một số tự nhiên bất kì dưới dạng tổng các lũy thừa của 10.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{\text{n thừa số}} \ (n \neq 0)$$

Trong đó a gọi là ***cơ số***, n gọi là ***số mũ***.

Phép nhân nhiều thừa số bằng nhau gọi là ***phép nâng lên lũy thừa***.

Quy ước $a^1 = a$; $a^0 = 1\ (a \neq 0)$.

Chú ý:

+ 0^0 không có nghĩa.

+ a^2 còn được gọi là *a bình phương* (hay bình phương của *a*).

+ a^3 còn được gọi là *a lập phương* (hay lập phương của *a*).

Ví dụ. $2.2.2.2 = 2^4$;

$x.x.x = x^3$.

2. Nhân hai lũy thừa có cùng cơ số

Khi nhân hai lũy thừa có cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và **cộng** các số mũ:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

Ví dụ. $3^2.3^5 = 3^{2+5} = 3^7$;

$a.a^4 = a^{1+4} = a^5$.

3. Chia hai lũy thừa cùng cơ số

Khi chia hai lũy thừa có cùng cơ số (khác 0), ta giữ nguyên cơ số và **trừ** các số mũ:

$$a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0;\ m \geq n)$$

Ví dụ. $5^{12} : 5^8 = 5^{12-8} = 5^4$;

$x^7 : x^3 = x^{7-3} = x^4\ (x \neq 0)$.

4. Chú ý

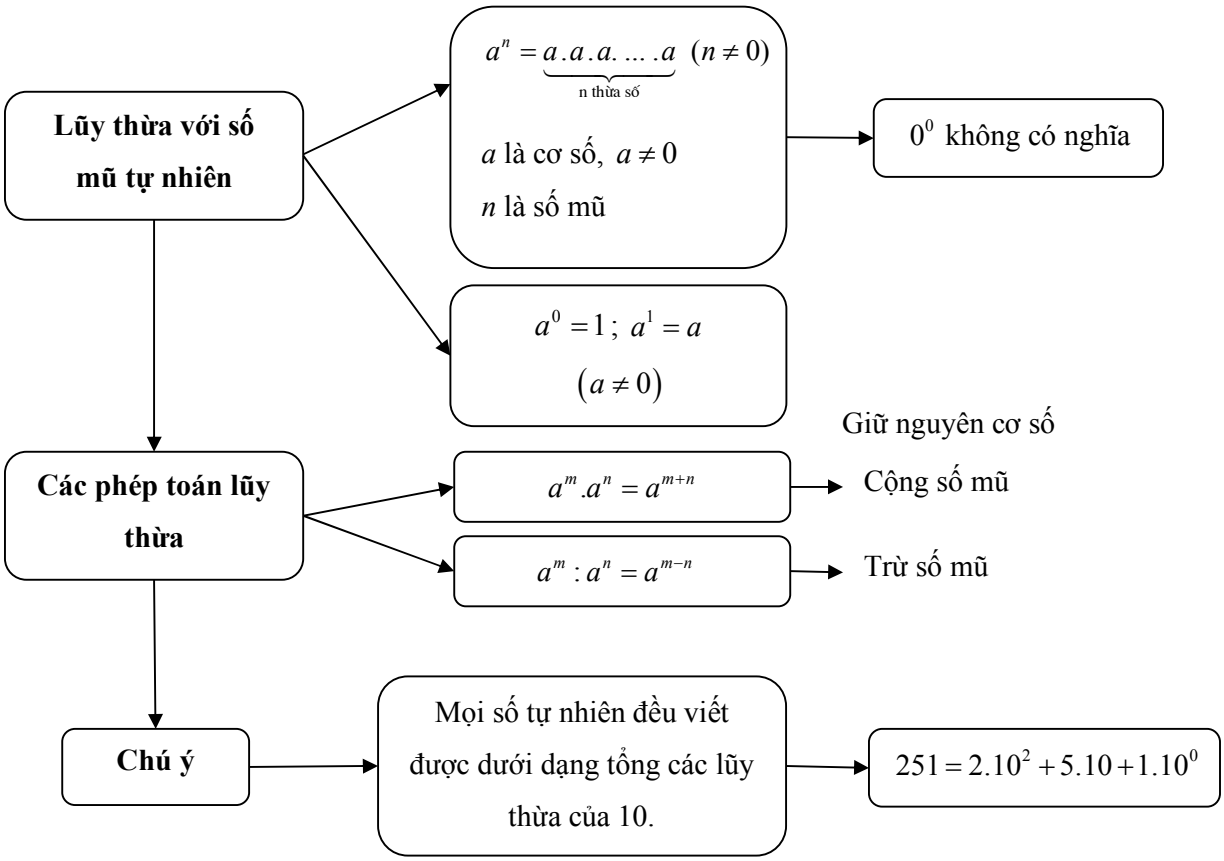
Mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng tổng các lũy thừa của 10.

Ví dụ.

$2345 = 2.1000 + 3.100 + 4.10 + 5$

$= 2.10^3 + 3.10^2 + 4.10^1 + 5.10^0$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết gọn một biểu thức dưới dạng lũy thừa

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết gọn các tích sau dưới dạng lũy thừa:

a) 5.5.5.5.5.5.5;

b) 3.5.15.15.45;

c) 3.3.3.4.4.4.4;

d) $a.a.b.b.b.b.b$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $5.5.5.5.5.5.5 = 5^7$.

b) Ta có: $3.5.15.15.45 = 3.5.(3.5).(3.5).(3.3.5) = 3^5.5^4$.

c) Ta có: $3.3.3.4.4.4.4 = 3^3.2^2.2^2.2^2.2^2 = 3^3.2^{2+2+2+2} = 3^3.2^8$.

d) Ta có: $a.a.b.b.b.b.b = a^2.b^5$.

Ví dụ 2. Viết gọn các kết quả sau dưới dạng lũy thừa:

a) $2^{10} : 2^4$;

b) $5^2.5^4$;

c) $2^5.3^{14} : 6^4$;

d) $(ab)^7 : b^5$ với $b \neq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2^{10} : 2^4 = 2^{10-4} = 2^6$.

b) Ta có: $5^2.5^4 = 5^{2+4} = 5^6$.

c) Ta có:

$2^5.3^{14}:6^4=2^5.3^{14}:(2.3)^4=2^5.3^{14}:\left(2^4.3^4\right)=\left(2^5:2^4\right):\left(3^{14}:3^4\right)=2.3^{10}$.

d) Ta có: $(ab)^7:b^5=a^7.b^7:b^5=a^7.b^{7-5}=a^7.b^2$.

Ví dụ 3. Viết mỗi số sau dưới dạng lũy thừa của 10:

a) 1000; b) 1 000 000;

c) 1 tỉ; d) $1\underbrace{00...0}_{\text{12 chữ số 0}}$;

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $1000=10^3$.

b) Ta có: $1000000=10^6$.

c) Ta có: 1 tỉ $=1000000000=10^9$.

d) Ta có: $1\underbrace{00...0}_{\text{12 chữ số 0}}=10^{12}$.

Tổng quát:

$1\underbrace{00...0}_{\text{n chữ số 0}}=10^n$

Ví dụ 4. Viết các số sau dưới dạng tổng các lũy thừa của 10:

a) $\overline{ab}$; b) $\overline{abc}$; c) $\overline{abcd}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\overline{ab}=a.10+b=a.10^1+b.10^0$.

b) Ta có: $\overline{abc}=a.100+b.10+c=a.10^2+b.10^1+c.10^0$.

c) Ta có:

$\overline{abcd}=a.1000+b.100+c.10=a.10^3+b.10^2+c.10^1+d.10^0$.

Ví dụ 5. Mỗi tổng sau có phải là số chính phương hay không?

a) $1^3+2^3+3^3+4^3$; b) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $1^3+2^3+3^3+4^3=1+8+27+64=100=10^2$.

Vậy $1^3+2^3+3^3+4^3$ là một số chính phương.

b) Ta có: $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=100+5^3=100+125=225=15^2$.

Vậy $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ là một số chính phương.

Tổng quát:

$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3$

$=(1+2+3+...+n)^2$

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1. Viết gọn các biểu thức sau bằng cách dùng lũy thừa

a) 2.2.2.2.3.3.3.3.3; b) 2.4.5.10.20.25;

c) 3.3.7.9.21.49 d) $m.m.m.m+n.n$.

Câu 2. Viết gọn các kết quả sau bằng cách dùng lũy thừa:

a) 7.7.7.7.7; b) 2.2.3.3.3; c) 5.5.5 – 3.3.3.3;

d) 4.4.4.8 : 2.2.2; e) 2.2.5.10; f) $x.y.y.y.x$.

Câu 3. Viết kết quả của các phép tính sau dưới dạng lũy thừa:

a) $2^5.2^4$; b) $4.3^{10}+5.3^{10}$; c) $5^{15}:5^7$; d) $x^6.x.x^3$

Câu 4. Viết các số sau dưới dạng tổng các lũy thừa của 10:

a) 567; b) 1024; c) $\overline{abcde}$;

Câu 5. Dùng lũy thừa để viết các số sau:

a) Khối lượng Trái Đất bằng $6\underbrace{00...0}_{\text{21 chữ số 0}}$ tấn.

b) Khối lượng khí quyển Trái Đất bằng $5\underbrace{00...0}_{\text{15 chữ số 0}}$ tấn.

Bài tập nâng cao

Câu 6. Viết gọn các tích sau bằng cách dùng lũy thừa:

a) $x.x^2.x^3...x^{99}$; b) $x.x^3.x^5...x^{99}$; c) $x^2.x^4.x^6...x^{100}$.

Câu 1.

a) Ta có: $2.2.2.2.3.3.3.3.3 = 2^4.3^5$.

b) Ta có: $2.4.5.10.20.25 = 2.2^2.5.(2.5).(2.2.5).5^2 = 2^6.5^5$.

c) Ta có: $3.3.7.9.21.49 = 3.3.7.3^2.(3.7).7^2 = 3^5.7^4$.

d) Ta có: $m.m.m.m + n.n = m^4 + n^2$.

Câu 2.

a) $7.7.7.7.7 = 7^5$.

b) $2.2.3.3.3 = 2^2.3^3$.

c) $5.5.5 - 3.3.3.3 = 5^3 - 3^4$.

d) $4.4.4.8 : 2.2.2 = 2^2.2^2.2^2.2^3 : 2.2.2 = 2^9 : 2.2.2 = 2^8.2.2 = 2^{10}$.

e) $2.2.5.10 = 2.2.5.2.5 = 2^3.5^2$.

f) $x.y.y.y.x = x^2.y^3$.

Câu 3.

Ta có: $2^5.2^4 = 2^{5+4} = 2^9$.

Ta có: $4.3^{10}+5.3^{10} = 3^{10}.(4+5) = 3^{10}.9 = 3^{10}.3^2 = 3^{10+2} = 3^{12}$.

Ta có: $5^{15}:5^7 = 5^{15-7} = 5^8$.

Ta có: $x^6.x.x^3 = x^{6+1+3} = x^{10}$.

Câu 4.

Ta có: $567 = 5.100 + 6.10 + 7 = 5.10^2 + 6.10^1 + 7.10^0$.

Ta có: $1024 = 1000 + 24 = 1000 + 2.10 + 4 = 10^3 + 2.10^1 + 4.10^0$.

Ta có: $\overline{abcde} = a.10000 + b.1000 + c.100 + d.10 + e$

$= a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d.10^1 + e.10^0$.

Câu 5.

a) $6\underbrace{00...0}_{\text{21 chữ số 0}} = 6.10^{21}$.

b) $5\underbrace{00...0}_{\text{15 chữ số 0}} = 5.10^{15}$.

Câu 6.

a) Ta có: $x.x^2.x^3...x^{99} = x^{1+2+3+...+99}$.

Xét tổng: $1+2+3+...+99$

+ Số số hạng: $99-1+1=99$.

+ Tổng: $1+2+3+...+99 = (99+1).99:2 = 100.99:2 = 4950$.

Vậy $x.x^2.x^3...x^{99} = x^{4950}$.

b) Ta có: $x.x^3.x^5...x^{99} = x^{1+3+5+...+99} = x^{(1+99).50:2} = x^{2500}$.

c) Ta có: $x^2.x^4.x^6...x^{100} = x^{2+4+6+...+100} = x^{(100+2).50:2} = x^{2550}$.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $3^6 : 3^2 - 3^4$;

b) $2^2.5^2.3 - 81:3^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $3^6 : 3^2 - 3^4 = 3^{6-2} - 3^4 = 3^4 - 3^4 = 0$.

b) Ta có: $2^2.5^2.3 - 81:3^2 = (2.5)^2.3 - 3^4 : 3^2$

$= 10^2.3 - 3^2$

$= 100.3 - 9$

$= 300 - 9$

$= 291$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $4.6^2 + 2.6^2$;

b) $9^2.5^4.9^5.3^2 - 9^8.5^4$;

c) $\left(2^{2018} + 2^{2019}\right) : 2^{2017}$;

d) $\left(4^{101} - 4^{100}\right) : 4^{99}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

b) Ta có:

$4.6^2+2.6^2$

$=6^2.(4+2)$

$=6^2.6$

$=36.6$

$=216.$

$9^2.5^4.9^5.3^2-9^8.5^4$

$=9^2.5^4.9^5.9-9^8.5^4$

$=9^8.5^4-9^8.5^4$

$=0.$

c) Ta có:

$\left(2^{2018}+2^{2019}\right):2^{2017}$

$=2^{2018}:2^{2017}+2^{2019}:2^{2017}$

$=2^{2018-2017}+2^{2019-2017}$

$=2+2^2$

$=2+4$

$=6.$

d) Ta có:

$\left(4^{101}-4^{100}\right):4^{99}$

$=4^{101}:4^{99}-4^{100}:4^{99}$

$=4^{101-99}-4^{100-99}$

$=4^2-4$

$=16-4$

$=12.$

Ví dụ 3. Tính nhẩm: $15^2;25^2;35^2;45^2;75^2;125^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$\left(\overline{15}\right)^2=\overline{225}$ ($1.(1+1)=2$)

$\left(\overline{25}\right)^2=\overline{625}$ ($2.(2+1)=6$)

$\left(\overline{125}\right)^2=\overline{15625}$ ($12.(12+1)=156$)

Tương tự, ta có: $35^2=1225;45^2=2025;75^2=5625.$

Muốn bình phương một số có tận cùng bằng 5, ta lấy số chục nhân với số chục cộng 1, rồi viết thêm số 25 ở bên phải của tích vừa nhận được.

Ví dụ 4. Tính tổng $S=1+2+2^2+2^3+...+2^{99}+2^{100}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=1+2+2^2+2^3+...+2^{99}+2^{100}$. (1)

Nhân cả 2 vế với 2, ta được:

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}+2^{101}. (2)$$

Trừ theo từng vế của (2) cho (1) ta được:

$2S-S=\left(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}+2^{101}\right)$

$-\left(1+2+2^2+2^3+...+2^{99}+2^{100}\right)$

$S=2^{101}-1.$

Vậy $S=2^{101}-1$.

Để tính tổng S có dạng

$S=1+a+a^2+a^3+...+a^n$ (1)

Ta làm như sau:

Nhân cả 2 vế của S với a ta được:

$a.S=a+a^2+a^3+a^4+...+a^{n+1}$. (2)

Trừ theo vế của (2) cho (1) ta được:

$$a.S - S = a^{n+1} - 1$$
$$(a-1)S = a^{n+1} - 1$$
$$S = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1}.$$

Vậy $S = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1}$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1. Điền vào các bảng sau:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2										
a^3										

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2										

Câu 2. Tính nhẩm:

a) 55^2; b) 65^2; c) 105^2; d) 145^2.

Câu 3. Thực hiện các phép tính:

a) $3^5.3^7$; b) $2^{10} : 2^3$;

c) $2^2.5^3.10$; d) $3^5.7^2.49 : 21^3$.

Câu 4. Mỗi biểu thức sau có phải là một số chính phương hay không?

a) $3^2 + 4^2$; b) $8^3 : 2^3$;

c) $5^2 + 12^2$; d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 - 6^3$.

Câu 5. Thực hiện các phép tính:

a) $(125 : 25)^2$; b) $\left(2^9.16 + 2^9.34\right) : 2^{10}$;

c) $\left(3^4.57 - 9^2.21\right) : 3^5$; d) $3^8 : 3^4 + 2^2.2^3$.

Câu 6. Thực hiện các phép tính:

a) $\left(2^8 + 8^3\right) : \left(2^5.2^3\right)$; b) $\left(7^{1997} - 7^{1995}\right) : \left(7^{1994}.7\right)$;

Bài tập nâng cao

Câu 7. Tính tổng:

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50}$; b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{1999} + 3^{2000}$;

Đáp án

Câu 1.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

Câu 2.

a) $55^2 = 3025$.

b) $65^2 = 4225$.

c) $105^2 = 11025$.

d) $145^2 = 21025$.

Câu 3.

a) $3^5.3^7 = 3^{12}$.

b) $2^{10} : 2^3 = 2^7$.

c) $2^2.5^3.10 = 2^2.5^3.2.5 = 2^3.5^4$.

d) $3^5.7^2.49 : 21^3 = 3^5.7^2.7^2 : (3.7)^3$

$= 3^5.7^4 : (3^3.7^3)$

$= 3^2.7.$

Câu 4.

a) Ta có: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Vậy $3^2 + 4^2$ là một số chính phương.

b) Ta có: $8^3 : 2^3 = (2^3)^3 : 2^3 = 2^{3.3} : 2^3 = 2^{9-3} = 2^6 = (2^3)^2$.

Vậy $8^3 : 2^3$ là một số chính phương.

c) Ta có: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

Vậy $5^2 + 12^2$ là một số chính phương.

d) Ta có: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 - 6^3 = 225 - 216 = 9 = 3^2$.

Vậy $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 - 6^3$ là một số chính phương.

Câu 5.

a) Ta có: $(125 : 25)^2 = 5^2 = 25$.

b) Ta có: $(2^9.16 + 2^9.34) : 2^{10} = [2^9.(16 + 34)] : 2^{10}$

$= \left(2^9.50\right) : 2^{10}$

$= \left(2^9.2.25\right) : 2^{10}$

$= \left(2^{10}.25\right) : 2^{10}$

$= 25.\left(2^{10} : 2^{10}\right)$

$= 25.$

c) Ta có: $\left(3^4.57 - 9^2.21\right) : 3^5 = \left[3^4.57 - 3^4.21\right] : 3^5$

$= \left[3^4.(57 - 21)\right] : 3^5$

$= \left(3^4.36\right) : 3^5$

$= \left(3^4.3.12\right) : 3^5$

$= \left(3^5.12\right) : 3^5$

$= 12.\left(3^5 : 3^5\right)$

$= 12.$

d) Ta có: $3^8 : 3^4 + 2^2.2^3 = 3^{8-4} + 2^{2+3}$

$= 3^4 + 2^5$

$= 81 + 32$

$= 113.$

Câu 6.

a) Ta có: $\left(2^8 + 8^3\right) : \left(2^5.2^3\right) = \left[2^8 + \left(2^3\right)^3\right] : \left(2^{5+3}\right)$

$= \left(2^8 + 2^9\right) : 2^8$

$= \left(2^8 : 2^8\right) + \left(2^9 : 2^8\right)$

$= 1 + 2$

$= 3.$

b) Ta có: $\left(7^{1997} - 7^{1995}\right) : \left(7^{1994}.7\right) = \left(7^{1997} - 7^{1995}\right) : 7^{1995}$

$= \left(7^{1997} : 7^{1995}\right) - \left(7^{1995} : 7^{1995}\right)$

$= 7^2 - 1$

$= 48.$

Bài tập nâng cao

Câu 7.

a) Đặt $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50}$ (1)

Nhân cả hai vế của A với 2 ta được:

$2.A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{51}$ (2)

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được:

$2.A - A = \left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{51}\right) - \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50}\right)$

$A = 2^{51} - 1.$

Vậy $A = 2^{51} - 1.$

b) Tương tự câu a) ta có: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{1999} + 3^{2000} = \dfrac{3^{2001} - 1}{2}.$

Dạng 3: Tìm cơ số hoặc số mũ của một lũy thừa

Phương pháp giải

+ Đưa về cùng cơ số: $a^m = a^n$ suy ra $m = n$.

Ví dụ.

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

+ Đưa về cùng số mũ: $a^m = b^m$ suy ra $a = b$

Ví dụ.

$x^2 = 9$

$x^2 = 3^2$

$x = 3$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $2^n = 32$;

b) $4^n = 64$;

c) $5^n = 625$;

d) $15^n = 225$;

Hướng dẫn giải

Vì $32 = 2^5$ nên $2^n = 2^5$ suy ra $n = 5$.

Vì $64 = 4^3$ nên $4^n = 4^3$ suy ra $n = 3$.

Vì $625 = 5^4$ nên $5^n = 5^4$ suy ra $n = 4$.

Vì $225 = 15^2$ nên $15^n = 15^2$ suy ra $n = 2$.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên x sao cho:

a) $x^2 = 25$;

b) $x^3 = 64$;

c) $x^n = 1$ với $n \in \mathbb{N}$;

d) $x^{100} = x$;

Hướng dẫn giải

a) Vì $25 = 5^2$ nên $x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 5^2$ suy ra $x = 5$.

b) Vì $64 = 4^3$ nên $x^3 = 64 \Leftrightarrow x^3 = 4^3$ suy ra $x = 4$.

c) Vì $1^n = 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^n = 1$ suy ra $x = 1$.

d) Ta có: $x^{100} = x$

Nhận xét:

$x^m = x^n$ với x, m, n là

$$x^{100} - x = 0$$

$$x.\left(x^{99} - 1\right) = 0.$$

các số tự nhiên thì $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Suy ra $x = 0$ hoặc $x^{99} - 1 = 0$.

Với $x^{99} - 1 = 0$ suy ra $x^{99} = 1$, do đó $x = 1$.

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên *x*, biết:

a) $\left(4x - 1\right)^2 = 25.9$;

b) $2^x + 2^{x+3} = 144$;

c) $2.3^x = 10.3^{12} + 8.27^4$;

d) $\left(2x + 1\right)^3 - 12 = 15$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\left(4x - 1\right)^2 = 25.9$

$$\left(4x - 1\right)^2 = 25.9$$
$$\left(4x - 1\right)^2 = 5^2.3^2$$
$$\left(4x - 1\right)^2 = 15^2$$
$$4x - 1 = 15$$
$$4x = 15 + 1$$
$$4x = 16$$
$$x = 4.$$

Vậy $x = 4$.

b) Ta có: $2^x + 2^{x+3} = 144$

$$2^x.\left(1 + 2^3\right) = 144$$
$$2^x.9 = 144$$
$$2^x = 144 : 9$$
$$2^x = 16.$$

Vì $16 = 2^4$ nên $x = 4$.

Vậy $x = 4$.

c) Ta có: $2.3^x = 10.3^{12} + 8.27^4$

$$3^x = \left(10.3^{12} + 8.27^4\right) : 2$$
$$3^x = 10.3^{12} : 2 + 8.27^4 : 2$$
$$3^x = 5.3^{12} + 4.27^4$$
$$3^x = 5.3^{12} + 4.3^{12}$$
$$3^x = 3^{12}\left(5 + 4\right)$$
$$3^x = 3^{12}.9$$
$$3^x = 3^{12}.3^2$$
$$3^x = 3^{14}$$
$$x = 14.$$

Vậy $x = 14$.

d) Ta có: $\left(2x + 1\right)^3 - 12 = 15$

$$\left(2x + 1\right)^3 = 15 + 12$$
$$\left(2x + 1\right)^3 = 27$$
$$\left(2x + 1\right)^3 = 3^3$$
$$2x + 1 = 3$$
$$2x = 3 - 1$$
$$2x = 2$$
$$x = 1.$$

Vậy $x = 1$.

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1. Tìm số tự nhiên *x*, biết rằng:

a) $2^x = 16$ b) $3^x = 81$; c) $x^3 = 64$; d) $x^2 = 81$.

Câu 2. Tìm số tự nhiên *x*, biết rằng:

a) $2^x.8 = 512$;

b) $x^{20} = x$;

c) $(2x+1)^3 = 125$;

d) $(x-3)^{10} = 0$.

Câu 3. Tìm số tự nhiên *x*, biết rằng:

a) $3^x + 3^{x+2} = 90$;

b) $(2x+1)^2 = 625$;

c) $x^2 : 4 + 5^5 : 5^3 = 29$;

d) $2019^9.(x-16) = 2019^{10}$.

Bài tập nâng cao

Câu 4. Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2008}$. Tìm số tự nhiên *n*, biết rằng $2A + 3 = 3^n$.

Đáp án

Câu 1.

a) Ta có: $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4.$

Vậy $x = 4.$

b) Ta có: $3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4.$

Vậy $x = 4.$

c) Ta có: $x^3 = 64$

$x^3 = 4^3$

$x = 4.$

Vậy $x = 4.$

d) Ta có: $x^2 = 81$

$x^2 = 9^2$

$x = 9.$

Vậy $x = 9.$

Câu 2.

a) Ta có: $2^x.8 = 512$

$2^x = 512 : 8$

$2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$x = 6.$

Vậy $x = 6.$

b) Ta có: $x^{20} = x$

$x^{20} - x = 0$

$x.(x^{19} - 1) = 0.$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x^{19} - 1 = 0$.

Với $x^{19} - 1 = 0$ ta được $x = 1$.

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 1$.

c) Ta có: $(2x+1)^3 = 125$

$(2x+1)^3 = 5^3$

$2x + 1 = 5$

$2x = 5 - 1$

$2x = 4$

$x = 4 : 2$

$x = 2.$

Vậy $x = 2.$

d) Ta có: $(x-3)^{10} = 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3.$

Vậy $x = 3.$

Câu 3.

a) Ta có: $3^x + 3^{x+2} = 90$

$3^x.\left(1+3^2\right) = 90$

$3^x.10 = 90$

$3^x = 90:10$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2.$

Vậy $x = 2.$

b) Ta có: $\left(2x+1\right)^2 = 625$

$\left(2x+1\right)^2 = 25^2$

$2x+1 = 25$

$2x = 25-1$

$2x = 24$

$x = 24:2$

$x = 12.$

Vậy $x = 12.$

c) Ta có: $x^2 : 4 + 5^5 : 5^3 = 29$

$x^2 : 4 + 5^2 = 29$

$x^2 : 4 + 25 = 29$

$x^2 : 4 = 29 - 25$

$x^2 : 4 = 4$

$x^2 = 4.4$

$x^2 = 4^2$

$x = 4.$

Vậy $x = 4.$

d) Ta có: $2019^9.\left(x-16\right) = 2019^{10}$

$x-16 = 2019^{10} : 2019^9$

$x-16 = 2019$

$x = 2019+16$

$x = 2035.$

Vậy $x = 2035.$

Câu 4.

Xét tổng $A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2008}$. (1)

Nhân cả hai vế của A với 3, ta được:

$3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{2009}$. (2)

Trừ theo từng vế của (2) cho (1), ta được:

$3.A - A = \left(3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{2009}\right) - \left(3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2008}\right)$

$2.A = 3^{2009} - 3$

$A = \left(3^{2009} - 3\right) : 2.$

Khi đó: $2A + 3 = 3^n$

$2.\left[\left(3^{2009} - 3\right) : 2\right] + 3 = 3^n$

$3^{2009} - 3 + 3 = 3^n$

$3^{2009} = 3^n$

$n = 2009.$

Vậy $n = 2009.$

Dạng 4: So sánh các số viết dưới dạng lũy thừa

Phương pháp giải

Để so sánh các số viết dưới dạng lũy thừa, ta có

Ví dụ. So sánh:

thể làm theo một trong ba cách sau:

Cách 1. Tính cụ thể rồi so sánh.

Cách 2. Đưa về cùng cơ số là số tự nhiên, rồi so sánh hai số mũ:

Nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$.

Cách 3. Đưa về cùng số mũ, rồi so sánh hai cơ số:

Nếu $a > b$ thì $a^m > b^m$.

a) 2^3 và 3^2:

$2^3 = 8; 3^2 = 9$. Suy ra $2^3 < 3^2$.

b) 9^4 và 27^2:

$9^4 = \left(3^2\right)^4 = 3^{2.4} = 3^8$;

$27^2 = \left(3^3\right)^2 = 3^{3.2} = 3^6$.

Suy ra $9^4 > 27^2$.

c) 3^{30} và 5^{20}:

$3^{30} = 3^{3.10} = \left(3^3\right)^{10} = 27^{10}$;

$5^{20} = 5^{2.10} = \left(5^2\right)^{10} = 25^{10}$.

Suy ra $3^{30} > 5^{20}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Hãy so sánh:

a) 5^3 và 3^5;

b) 2^5 và 3^4;

c) 3^4 và 8^2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $5^3 = 125; 3^5 = 243$, suy ra $5^3 < 3^5$.

Ta có: $2^5 = 32; 3^4 = 81$, suy ra $2^5 < 3^4$.

Ta có: $3^4 = 81; 8^2 = 64$, suy ra $3^4 < 8^2$.

Ví dụ 2. Hãy so sánh:

a) 16^{19} và 8^{25};

b) 27^{11} và 81^8;

c) 625^5 và 125^7.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $16^{19} = \left(2^4\right)^{19} = 2^{4.19} = 2^{76}$;

$8^{25} = \left(2^3\right)^{25} = 2^{3.25} = 2^{75}$.

Vì $76 > 75$ nên $2^{76} > 2^{75}$, suy ra $16^{19} > 8^{25}$.

b) Ta có: $27^{11} = \left(3^3\right)^{11} = 3^{3.11} = 3^{33}$;

$81^8 = \left(3^4\right)^8 = 3^{4.8} = 3^{32}$.

Vì $33 > 32$ nên $3^{33} > 3^{32}$, suy ra $27^{11} > 81^8$.

a) Các cơ số 16 và 8 tuy khác nhau, nhưng đều là lũy thừa của 2 nên ta có thể đưa chúng về cùng cơ số 2.

b) Đưa về cùng cơ số 3.

c) Ta có: $625^5 = \left(5^4\right)^5 = 5^{4.5} = 5^{20}$;

$125^7 = \left(5^3\right)^7 = 5^{3.7} = 5^{21}$.

Vì $20 < 21$ nên $5^{20} < 5^{21}$, suy ra $625^5 > 125^7$.

c) Đưa về cùng cơ số 5.

Ví dụ 3. Hãy so sánh:

a) 2^{300} và 3^{200};

b) 5^{36} và 11^{24};

c) 3^{2n} và 2^{3n} với $n \in \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2^{300} = 2^{3.100} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$;

$3^{200} = 3^{2.100} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100} > 8^{100}$.

Vậy $2^{300} < 3^{200}$.

a) Hai số mũ 300 và 200 đều chia hết cho 100 nên ta nghĩ đến việc đưa chúng về lũy thừa có cùng số mũ là 100.

b) Ta có: $5^{36} = 5^{3.12} = \left(5^3\right)^{12} = 125^{12}$;

$11^{24} = 11^{2.12} = \left(11^2\right)^{12} = 121^{12} < 125^{12}$.

Vậy $5^{36} > 11^{24}$.

b) 36 và 24 đều là bội của 12 nên đưa về cùng số mũ là 12.

c) Ta có: $3^{2n} = 3^{2.n} = \left(3^2\right)^n = 9^n$;

$2^{3n} = 2^{3.n} = \left(2^3\right)^n = 8^n < 9^n$.

Vậy $3^{2n} > 2^{3n}$.

c) Đưa về cùng số mũ là n.

Ví dụ 4. So sánh:

a) 5^{23} và 6.5^{22};

b) 222^{333} và 333^{222};

c) 31^{11} và 17^{14}.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $5^{23} = 5.5^{22}$.

Vì $5.5^{22} < 6.5^{22}$ nên $5^{23} < 6.5^{22}$.

a) Đưa hai số về dạng một tích, trong đó có chung thừa số 5^{22}.

b) Ta có: $222^{333} = 222^{3.111} = \left(222^3\right)^{111}$;

$333^{222} = 333^{2.111} = \left(333^2\right)^{111}$.

Vì $\left(222^3\right)^{111}$ và $\left(333^2\right)^{111}$ có cùng số mũ là 111 nên ta sẽ so sánh 222^3 và 333^2.

b) Ta thấy hai cơ số 222 và 333 đều chia hết cho 111 nên ta sẽ phân tích $222 = 2.111$; $333 = 3.111$

Lại có: $222^3 = \left(111.2\right)^3 = 111^3.2^3 = 111^2.111.8 = 111^2.888$;

$333^2 = \left(111.3\right)^2 = 111^2.9$

Ta thấy $111^2.888 > 111^2.9$ suy ra $222^3 > 333^2$.

c) Ta có: $31^{11} < 32^{11} = \left(2^5\right)^{11} = 2^{5.11} = 2^{55}$.

$17^{14} > 16^{14} = \left(2^4\right)^{14} = 2^{4.14} = 2^{56}$.

Vì $2^{55} < 2^{56}$, suy ra $31^{11} < 17^{14}$.

c) Ta thấy 31 là số liền trước của 32 và 17 là số liền sau của 16.

Mà 32 và 16 có thể đưa về cùng cơ số 2.

Do vậy để so sánh 31^{11} và 17^{14} ta sử dụng tính chất bắc cầu.

Bài tập tự luyện dạng 4

Bài tập cơ bản

Câu 1. Hãy so sánh:

a) 5^2 và 2^5;

b) 9^{30} và 27^{20};

c) 2^{210} và 5^{140};

d) 7.2^{13} và 2^{16};

e) 21^{15} và $27^5.49^8$;

f) 2^{91} và 5^{35}.

Câu 2. So sánh:

a) 25^{45} và 125^{30};

b) 2^{300} và 3^{200};

c) 8^5 và 3.4^7;

d) 202^{303} và 303^{202};

e) 333^{444} và 444^{333}.

Bài tập nâng cao

Câu 3. So sánh: 107^{50} và 73^{75},

Câu 4. Tìm số tự nhiên *n*, biết:

a) $9 < 3^n < 81$;

b) $25 \le 5^n \le 125$.

Đáp án

Câu 1.

a) Ta có: $5^2 = 25$ và $2^5 = 32$, suy ra $5^2 < 2^5$.

b) Ta có: $9^{30} = \left(3^2\right)^{30} = 3^{2.30} = 3^{60}$;

$27^{20} = \left(3^3\right)^{20} = 3^{3.20} = 3^{60}$.

Vậy $9^{30} = 27^{20}$.

c) Ta có: $2^{210} = 2^{3.70} = \left(2^3\right)^{70} = 8^{70}$;

$5^{140} = 5^{2.70} = \left(5^2\right)^{70} = 25^{70}$.

Vậy $2^{210} < 5^{140}$.

d) Ta có: $2^{16} = 2^{3+13} = 2^3.2^{13} = 8.2^{13} > 7.2^{13}$.

Vậy $7.2^{13} < 2^{16}$.

e) Ta có: $21^{15} = (3.7)^{15} = 3^{15}.7^{15}$;

$27^5.49^8 = \left(3^3\right)^5.\left(7^2\right)^8 = 3^{3.5}.7^{2.8} = 3^{15}.7^{16}$.

Vậy $21^{15} < 27^5.49^8$.

f) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = 2^{5.18} = \left(2^5\right)^{18} = 32^{18}$;

$5^{35} < 5^{36} = 5^{2.18} = \left(5^2\right)^{18} = 25^{18}$.

Vậy $2^{91} > 5^{35}$.

Câu 2.

a) Ta có: $25^{45} = \left(5^2\right)^{45} = 5^{2.45} = 5^{90}$;

$125^{30} = \left(5^3\right)^{30} = 5^{3.30} = 5^{90}$.

Vậy $25^{45} = 125^{30}$.

b) Ta có: $2^{300} = 2^{3.100} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$;

$3^{200} = 3^{2.100} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100}$.

Vậy $2^{300} < 3^{200}$.

c) Ta có: $8^5 = \left(2^3\right)^5 = 2^{3.5} = 2^{15}$;

$3.4^7 = 3.\left(2^2\right)^7 = 3.2^{2.7} = 3.2^{14} > 2^{15}$.

Vậy $8^5 < 3.4^7$.

d) Ta có: $202^{303} = 202^{3.101} = \left(202^3\right)^{101}$;

$303^{202} = 303^{2.101} = \left(303^2\right)^{101}$.

Ta so sánh: 202^3 và 303^2.

Lại có: $202^3 = (2.101)^3 = 2^3.101^3 = 8.101.101^2 = 808.101^2$;

$303^2 = (3.101)^2 = 3^2.101^2 = 9.101^2 < 808.101^2$.

Suy ra $202^3 > 303^2$. Vậy $202^{303} > 303^{202}$.

e) Tương tự câu d) ta có: $333^{444} > 444^{333}$

Bài tập nâng cao

Câu 3.

Ta có: $107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = \left(2^2.3^3\right)^{50} = 2^{100}.3^{150}$

$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = \left(2^3.3^2\right)^{75} = 2^{225}.3^{150} > 2^{100}.3^{150}$

Vậy $107^{50} < 73^{75}$.

Câu 4.

a) $9 < 3^n < 81 \Leftrightarrow 3^2 < 3^n < 3^4$. Vì n là số tự nhiên nên $n = 3$.

b) $25 \le 5^n \le 125 \Leftrightarrow 5^2 \le 5^n \le 5^3$. Vì n là số tự nhiên nên $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Dạng 5: Tìm chữ số tận cùng của số có dạng lũy thừa

Phương pháp giải

Chữ số tận cùng của a^n chính là chữ số tận cùng của x^n (với x là chữ số tận cùng của a).

Các số có tận cùng là 0; 1; 5; 6 khi nâng lên lũy thừa bất kì (khác 0) cũng có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6.

Các số có tận cùng là 4; 9 khi nâng lên lũy thừa lẻ thì chữ số tận cùng không thay đổi, khi nâng lên lũy thừa chẵn thì có chữ số tận cùng lần lượt là 6; 1.

Ví dụ.

- Chữ số tận cùng của 2019^5 bằng chữ số tận cùng của 9^5.

- $100^3 = \overline{...0}; 5^{10} = \overline{...5}$

$11^{50} = \overline{...1}; 6^{80} = \overline{...6}$.

- $4^{20} = \overline{...6}$ (số mũ chẵn); $4^{21} = \overline{...4}$ (số mũ lẻ).

$9^2 = \overline{...1}$ (số mũ chẵn); $9^3 = \overline{...9}$ (số mũ lẻ).

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm chữ số tận cùng của:

a) 10^{1000}; b) 2011^{2011}; c) 5^{100};

d) 6^{2020}; e) 4^{50}; f) 9^{120}.

Hướng dẫn giải

a) $10^{1000} = \overline{...0}$. b) $2011^{2011} = \overline{...1}$.

c) $5^{100} == \overline{...5}$. d) $6^{2020} = \overline{...6}$.

e) $4^{50} == \overline{...6}$ (vì số mũ chẵn).

f) $9^{120} = \overline{...1}$ (vì số mũ chẵn).

Ví dụ 2. Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 2000^{2018}; b) 1111^{2019};

c) 12345^{4321}; d) 2016^{1000}.

Hướng dẫn giải

a) 2000^{2018} có chữ số tận cùng là 0.

b) 1111^{2019} có chữ số tận cùng là 1.

Ta thấy các số trên có tận cùng lần lượt là 0; 1; 5; 6 nên khi nâng lên lũy thừa bất kì cũng

c) 12345^{4321} có chữ số tận cùng là 5.

d) 2016^{1000} có chữ số tận cùng là 6.

có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6.

Ví dụ 3. Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) $5^{210}-4^{55}$;

b) $10^{2010}+1$;

c) $2016^{30}+9^{56}$;

d) $2021^{70}.14^{26}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $5^{210}=\overline{...5}$

$4^{55}=\overline{...4}$ (vì số mũ lẻ).

Suy ra $5^{210}-4^{55}=\left(\overline{...5}\right)-\left(\overline{...4}\right)=\overline{...1}$.

Vậy chữ số tận cùng của $5^{210}-4^{55}$ là 1.

b) Ta có: $10^{2010}=\overline{...0}$.

Suy ra: $10^{2010}+1=\left(\overline{...0}\right)+1=\overline{...1}$,

Vậy chữ số tận cùng của $10^{2010}+1$ là 1.

c) Ta có: $2016^{30}=\overline{...6}$;

$9^{56}=\overline{...1}$ (do số mũ chẵn).

Suy ra: $2016^{30}+9^{56}=\left(\overline{...6}\right)+\left(\overline{...1}\right)=\overline{...7}$.

Vậy chữ số tận cùng của $2016^{30}+9^{56}$ là 7.

d) Ta có: $2021^{70}=\overline{...1}$

$14^{26}=\overline{...6}$ (do số mũ chẵn).

Suy ra: $2021^{70}.14^{26}=\left(\overline{...1}\right)+\left(\overline{...6}\right)=\overline{...6}$.

Vậy chữ số tận cùng của $2021^{70}.14^{26}$ là 6.

Ví dụ 4. Tìm chữ số hàng đơn vị của: $2016^{2019}+2015^{2020}-2014^{2021}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $2016^{2019}=\overline{...6}$;

$2015^{2020}=\overline{...5}$;

$2014^{2021}=\overline{...4}$ (vì số mũ lẻ).

Suy ra $2016^{2019}+2015^{2020}-2014^{2021}=\left(\overline{...6}\right)+\left(\overline{...5}\right)-\left(\overline{...4}\right)=\overline{...7}$.

Vậy số đã cho có chữ số hàng đơn vị là 7.

Bài tập tự luyện dạng 5

Bài tập cơ bản

Câu 1. Tìm chữ số tận cùng của các lũy thừa sau:

a) 16^{2019}; b) 4^{2010}; c) 9^{999}; d) 5^{101}.

Bài tập nâng cao

Câu 2. Tìm chữ số tận cùng của các lũy thừa:

a) 135^{234}; b) $211^{9}.126^{15}$;

c) $1000^{100}+109^{100}$; d) $95^{18}-51^{36}$.

Câu 3. Tìm chữ số hàng đơn vị của:

a) $P=1005^{10}.11^{101}-24^{51}$;

b) $Q=216^{87}+9^{120}-100^{30}$.

Đáp án

Bài tập cơ bản

Câu 1.

a) Ta có: $16^{2019}=\overline{...6}$.

b) Ta có: $4^{2010}=\overline{...6}$ (vì số mũ chẵn).

c) Ta có: $9^{999}=\overline{...9}$ (vì số mũ lẻ).

d) Ta có: $5^{101}=\overline{...5}$.

Bài tập nâng cao

Câu 2.

a) Vì 135 có chữ số tận cùng là 5 nên 135^{234} cũng có chữ số tận cùng là 5.

b) Ta thấy 211^{9} có chữ số tận cùng là 1 và 126^{15} có chữ số tận cùng là 6.

Suy ra $211^{9}.126^{15}=\left(\overline{...1}\right).\left(\overline{...6}\right)=\overline{...6}$.

c) Vì $1000^{100}=\overline{...0}$ nên chữ số tận cùng của $1000^{100}+109^{100}$ chính là chữ số tận cùng của 9^{100}.

Ta có: $9^{100}=\overline{...1}$ (vì số mũ chẵn).

Vậy chữ só tận cùng của $1000^{100}+109^{100}$ là 1.

d) Ta có: $95^{18}-51^{36}=\left(\overline{...5}\right)-\left(\overline{...1}\right)=\overline{...4}$.

Câu 3.

a) Ta có: $1005^{10}=\overline{...5}$;

$11^{101}=\overline{...1}$;

$24^{51}=\overline{...4}$.

Suy ra: $P=\left(\overline{...5}\right).\left(\overline{...1}\right)-\left(\overline{...4}\right)=\overline{...1}$.

Vậy P có chữ số hàng đơn vị là 1.

b) Ta có: $216^{87}=\overline{...6}$;

$9^{120}=\overline{...1}$;

$100^{30} = \overline{...0}$.

Suy ra: $Q = \left(\overline{...6}\right) + \left(\overline{...1}\right) - \left(\overline{...0}\right) = \overline{...7}$.

Vậy Q có chữ số hàng đơn vị là 7.

THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT SỐ 1