ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ PHÁT TRIỂN CÂU MỨC ĐỘ VD-VDC ĐỀ THAM KHẢO THI TN THPT BGD NĂM 2023

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Câu 39. **(Đề TK BGD 2023)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-16}{343} < \log_7 \frac{x^2-16}{27}$?

A. 193. **B.** 92. **C.** 186. **D.** 184.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ta có:

$\log_3 \frac{x^2-16}{343} < \log_7 \frac{x^2-16}{27} \Leftrightarrow \log_3 7.\left[\log_7(x^2-16)-3\right] < \log_7(x^2-16)-3\log_7 3$

$\Leftrightarrow (\log_3 7-1).\log_7(x^2-16) < 3\log_3 7-3\log_7 3 \Leftrightarrow \log_7(x^2-16) < \frac{3(\log_3 7-\log_7 3)}{\log_3 7-1}$

$\Leftrightarrow \log_7(x^2-16) < 3(1+\log_7 3) \Leftrightarrow \log_7(x^2-16) < \log_7 21^3$

$\Leftrightarrow x^2-16 < 21^3 \Leftrightarrow -\sqrt{9277} < x < \sqrt{9277}$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-96;-95;...;-5;5;...;95;96\}$. Vậy có 184 số nguyên x thỏa mãn.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 39 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-4}{125} < \log_5 \frac{x^2-4}{27}$?

A. 117. **B.** 116. **C.** 112. **D.** 56.

Câu 2. `Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-4}{81} < \log_3\left(\frac{x^2-4}{16}\right)$?

A. 68. **B.** 34. **C.** 63. **D.** 33.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\log_5 \frac{x^2-1}{6561} \le \log_3 \frac{x^2-1}{625}$

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_5 \frac{2023-x^2}{8} > \log_2 \frac{2023-x^2}{125}$?

A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{169-x^2}{16} > \log_4 \frac{169-x^2}{9}$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-4}{27} < \log_4 \frac{x^2-4}{16}$?

A. 24. **B.** 20. **C.** 21. **D.** Vô số.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên âm x thỏa mãn: $\log_5 \frac{x^2-25}{125} < \log_7 \frac{2x^2-50}{49}$.

A. 500. **B.** 545. **C.** 444. **D.** 456

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\frac{x^2-9}{32}<\log_5\frac{x^2-9}{25}$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 0.

Câu 9. Tính tổng các số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\frac{2x^2-8}{27}\le\log_3\frac{3x^2-12}{8}$?

A. 102. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 187.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\frac{x^2-9}{125}<\log_5\frac{x^2-9}{8}$?

A. 63. **B.** 62. **C.** 58. **D.** 56.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn: $\log_5\frac{x^2-4}{49}<\log_7\frac{x^2-4}{25}$?

A. 64. **B.** 33. **C.** **66**. **D.** 70.

Câu 12. Cho bất phương trình $\log_2\frac{x^2-3x+6}{243}<\log_3\frac{x^2-3x+6}{32}$. Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 86. **B.** 89. **C.** 246. **D.** 264.

Câu 13. Tìm tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình sau: $\log_5\frac{x^3-27}{243}\ge\log_3\frac{x^3-27}{3125}$ bằng

A. 0. **B.** 4227. **C.** 4183. **D.** 4180.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\frac{x^2-9}{125}<\log_5\left(\frac{x^2-9}{8}\right)$?

A. 56. **B.** 57. **C.** 54. **D.** 28.

Câu 15. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\frac{x^2-25}{9}<\log_3\frac{x^2-25}{4}$ là

A. 14. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 15.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\frac{x^2-9}{625}\le\log_5\frac{x^2-9}{16}$?

A. 192. **B.** 194. **C.** 200. **D.** 201.

Câu 17. Cho bất phương trình $2\log_4\left(x^{\log_4\sqrt{x}}\right)\ge\log_4\left(64x^2\right)$. Số nghiệm nguyên không vượt quá 2023 của bất phương trình đã cho là

A. 1960. **B.** 1964. **C.** 2023. **D.** 2064.

Câu 18. Biết bất phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)\le1$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tổng $T=a+b$ bằng

A. $T=3+\log_3112$. **B.** $T=-2+\log_3112$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=-3+\log_3112$.

Câu 19. Bất phương trình $\left(3^{x^2-1}-9^{x+1}\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+10)+2\right]\ge0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Vô số. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 22. Bất phương trình $\log_3(2x^2-x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+2x^2-3x-2\ge 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2023,2023]$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 23. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$:

A. 16. **B.** 14. **C.** Vô số. **D.** 18.

Câu 24. Bất phương trình $\dfrac{\log_2\dfrac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 15.

A. 13. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 14.

Câu 25. Cho bất phương trình $\log_m(x^2-4x+m+1)>0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m<2024$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2023}}\log_{88}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_{2023}\log_{\frac{1}{88}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$?

A. 46. **B.** 44. **C.** 43. **D.** 45.

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên thỏa mãn $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-2}{|x-2|}\right)\ge\dfrac{1}{2}$

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28. Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(\sqrt{2023^{25-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-2\right)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-23;23)$ thỏa mãn $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 9. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 31. Số nghiệm nguyên của phương trình $\log_2(x-3)+\log_3(x-2)=2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\log_3\left(x^2-2\right)-\log_5\left[3\left(x^2-2\right)\right]<\log_2 3$?

A. 94. **B.** 92. **C.** 100. **D.** 98.

Câu 33. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ có dạng $[a;b]$. Tính $3a+b$?

A. 9. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $2\log_4^2 x\ge \log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$. Tập hợp S là tập hợp con của tập hợp nào sau đây?

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $[0;+\infty]$. **D.** $(1;4)$.

Câu 35. Gọi $S=\left(-\infty;\dfrac{a}{b}\right)$ là tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}$ (với $a,b\in\mathbb{Z};b>0;a,b$ nguyên tố cùng nhau). Khi đó $2a-b$ bằng

A. -17. **B.** 9. **C.** -3. **D.** 16.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2023;2023]$ thoả mãn $\log_{2023}\left(x^2-4\right)\ge\log_{2032}\left(x^2-4\right)$?

A. 4324. **B.** 1232. **C.** 1002. **D.** 4042.

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+7\right)-\log_{\sqrt{3}}\left(2x+42\right)\right]\left(64-4^{11-x}\right)\le 0$?

A. 18. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 20.

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

A. 115. **B.** 59. **C.** 58. **D.** 116.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thuộc đoạn $[-2022;2023]$ thỏa mãn $\log_3\left(3x^2+3\right)>\log_7\left(49x^2+49\right)$?

A. 4037. **B.** 4039. **C.** 4045. **D.** 4046.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn : $\log_7 x<\log_3(\sqrt{x}+2)$.

A. 48 **B.** 49 **C.** 47. **D.** 50.

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2+2x+2}-4^{x+3}\right)\left(\log_2\left(x^3+12x^2+45x+54\right)-2\right)\le 0$?

A. 7 **B.** 6. **C.** 19. **D.** 20.

Câu 43. : Nghiệm của bất phương trình $\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}$ là $x\in(a;b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b^2=4$. **B.** $b^2=5$. **C.** $b^2=2$. **D.** $b^2=3$.

Câu 44. Có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn 2023 của bất phương trình $3\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)>2\log_2\sqrt{x}$.

A. 0. **B.** 2023. **C.** 2050. **D.** 2072.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $1+\log_5\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}<\log_9\left(\dfrac{108\sqrt{x-1}}{125}\right)$?

A. 0. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20;20)$ thoả mãn $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right) \le \log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x-65.2^x+64\right)\left[2-\log_3(x+3)\right] \ge 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 50. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3 x.\log_2 x > 2\log_3 x - \log_2 \frac{x}{4}$ nhỏ hơn 2023:

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2010. **D.** 2018.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-4}{125} < \log_5 \frac{x^2-4}{27}$?

A. 117. **B.** 116. **C.** 112. **D.** 56.

Lời giải

TXĐ: $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có:

$\log_3 \frac{x^2-4}{125} < \log_5 \frac{x^2-4}{27}$

$\Leftrightarrow \log_3 5.\log_5(x^2-4)-3\log_3 5 < \log_5(x^2-4)-3\log_5 3$

$\Leftrightarrow (\log_3 5-1).\log_5(x^2-4) < 3\log_3 5-3\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2-4) < \frac{3(\log_3 5-\log_5 3)}{\log_3 5-1}$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2-4) < 3(1+\log_5 3)$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2-4) < \log_5 15^3$

$\Leftrightarrow x^2-4 < 15^3$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3379} < x < \sqrt{3379}$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-58;-57;...;-3;3;...;57;58\}$. Vậy có 112 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 2. `Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-4}{81} < \log_3\left(\frac{x^2-4}{16}\right)$?

A. 68. **B.** 34. **C.** 63. **D.** 33.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2(x^2-4)-4\log_2 3 < \log_3(x^2-4)-4\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-4)-4\log_2 3 < \frac{\log_2(x^2-4)}{\log_2 3}-4\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-4)(1-\log_3 2) < 4\left[\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2\right]$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-4) < 4\frac{1+\log_3 2}{\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2(x^2-4) < 4\log_2 6$

$\Leftrightarrow x^2-4 < 6^4 \Leftrightarrow -10\sqrt{13} < x < 10\sqrt{13}$

Kết hợp điều kiện ta được: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<10\sqrt{13} \\ -10\sqrt{13}<x<-2 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra có 68 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\log_5 \frac{x^2-1}{6561} \le \log_3 \frac{x^2-1}{625}$

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

$\log_5 \frac{x^2-1}{6561} \le \log_3 \frac{x^2-1}{625} \Leftrightarrow \log_5(x^2-1)-8\log_5 3 \le \log_3(x^2-1)-4\log_3 5 \Leftrightarrow \log_3(x^2-1)(\log_5 \frac{1}{3^7}) \le 4\log$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-1) \le -\frac{4}{7} \Leftrightarrow x^2-1 \le \frac{1}{\sqrt[7]{81}} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{\sqrt[7]{81}}+1} \le x \le \sqrt{\frac{1}{\sqrt[7]{81}}+1}$

Mà x nguyên, nên $x \in \{-1;0;1\}$. Kết hợp với ĐKXĐ suy ra không có giá trị nào của x thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_5 \frac{2023-x^2}{8} > \log_2 \frac{2023-x^2}{125}$?

A. 24. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

TXĐ: $D=\left(-\sqrt{2023};\sqrt{2023}\right)$.

$\log_5 \frac{2023-x^2}{8} > \log_2 \frac{2023-x^2}{125}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2023-x^2\right)-3\log_5 2 > \log_2\left(2023-x^2\right)-3\log_2 5$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2023-x^2\right)-\log_2\left(2023-x^2\right) > 3\log_5 2-3\log_2 5$

$\Leftrightarrow (1-\log_2 5).\log_5\left(2023-x^2\right) > 3(\log_5 2-\log_2 5)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2023-x^2\right) < \frac{3(\log_5 2-\log_2 5)}{(1-\log_2 5)}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2023-x^2\right) < 3(1+\log_5 2)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2023-x^2\right) < \log_5 10^3$

$\Leftrightarrow 2023-x^2 < 1000$

$\Leftrightarrow x^2 > 1023$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\sqrt{1023}\right) \cup \left(\sqrt{1023};+\infty\right)$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-44;-43;...;-32;32;...;43;44\}$.

Vậy có 26 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{169-x^2}{16} > \log_4 \frac{169-x^2}{9}$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

TXĐ: $D=(-13;13)$.

Ta có:

$$\log_3 \frac{169-x^2}{16} > \log_4 \frac{169-x^2}{9} \Leftrightarrow \log_3(169-x^2)-2\log_3 4 > \log_4(169-x^2)-2\log_4 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(169-x^2)-\log_4(169-x^2) > 2\log_3 4-2\log_4 3$$

$$\Leftrightarrow (1-\log_4 3).\log_3(169-x^2) > 2(\log_3 4-\log_4 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(169-x^2) > \frac{2(\log_3 4-\log_4 3)}{1-\log_4 3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(169-x^2) > 2(1+\log_3 4) \Leftrightarrow \log_3(169-x^2) > \log_3 12^2$$

$$\Leftrightarrow 169-x^2 > 144 \Leftrightarrow x^2 < 25 \Leftrightarrow -5 < x < 5$$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-4}{27} < \log_4 \frac{x^2-4}{16}$?

A. 24. **B.** 20. **C.** 21. **D.** Vô số.

Lời giải

Điều kiện: $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

Ta có: $\log_3 \frac{x^2-4}{27} < \log_4 \frac{x^2-4}{16} \Leftrightarrow \log_3(x^2-4)-\log_3 27 < \log_4(x^2-4)-\log_4 16$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2-4)-3 < \log_4(x^2-4)-2 \Leftrightarrow \log_3 4.\log_4(x^2-4)-\log_4(x^2-4) < 1$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 4-1).\log_4(x^2-4) < 1 \Leftrightarrow \log_4(x^2-1) < \frac{1}{\log_3 4-1} \Leftrightarrow x^2-1 < 4^{\frac{1}{\log_3 4-1}}$$

$$\Leftrightarrow -14{,}147 < x < 14{,}147.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ và $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ nên $x \in \{-14,-13,...,-3,3,4,...14\}$.

Vậy có 24 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên âm x thỏa mãn: $\log_5 \frac{x^2-25}{125} < \log_7 \frac{2x^2-50}{49}$.

A. 500. **B.** 545. **C.** 444. **D.** 456

Lời giải

Điều kiện: $x \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$.

Ta có: $\log_5 \frac{x^2-25}{125} < \log_7 \frac{2x^2-50}{49} \Leftrightarrow \log_5 (x^2-25) - 3 < \log_7 (2x^2-50) - 2$

$\Leftrightarrow \log_5 (x^2-25) - \log_7 2(x^2-25) < 1 \Leftrightarrow \log_5 7.\log_7 (x^2-25) - \log_7 2 - \log_7 (x^2-25) < 1$

$\Leftrightarrow (\log_5 7 - 1).\log_7 (x^2-25) < 1 + \log_7 2 \Leftrightarrow \log_7 (x^2-25) < \frac{1+\log_7 2}{\log_5 7 - 1} \Leftrightarrow x^2 - 25 < 7^{\frac{1+\log_7 2}{\log_5 7 - 1}}$

$\Leftrightarrow -550,983 < x < 550,983$.

Do x nguyên âm và $x \in (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$ nên $x \in \{-550,-549,...,-6\}$.

Vậy có 545 số nguyên âm x thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-9}{32} < \log_5 \frac{x^2-9}{25}$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$

Ta có $\log_2 \frac{x^2-9}{32} < \log_5 \frac{x^2-9}{25} \Leftrightarrow \log_2 (x^2-9) - \log_2 32 < \log_5 (x^2-9) - \log_5 25$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-9) - 5 < \log_5 (x^2-9) - 2 \Leftrightarrow \log_2 5.\log_5 (x^2-9) - \log_5 (x^2-9) < 3$

$\Leftrightarrow (\log_2 5 - 1).\log_5 (x^2-9) < 3 \Leftrightarrow \log_5 (x^2-9) < \frac{3}{\log_2 5 - 1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 < 5^{\frac{3}{\log_2 5 - 1}} \Leftrightarrow x^2 < 9 + 5^{\frac{3}{\log_2 5 - 1}} \Leftrightarrow -\sqrt{9+5^{\frac{3}{\log_2 5-1}}} < x < \sqrt{9+5^{\frac{3}{\log_2 5-1}}}$

Lại có $x \in \mathbb{Z}$ và $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$ nên $x \in \{-6;-5;-4;4;5;6\}$.

Vậy có 6 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 9. Tính tổng các số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2 \frac{2x^2-8}{27} \le \log_3 \frac{3x^2-12}{8}$?

A. 102. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 187.

Lời giải

Điều kiện $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$

Ta có $\log_2 \frac{2x^2-8}{27} \le \log_3 \frac{3x^2-12}{8}$

$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2-8) - \log_2 27 \le \log_3 (3x^2-12) - \log_3 8$

$\Leftrightarrow 1 + \log_2 (x^2-4) - 3\log_2 3 \le 1 + \log_3 (x^2-4) - 3\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2 3.\log_3 (x^2-4) - \log_3 (x^2-4) \le 3\log_2 3 - 3\log_3 2$

$\Leftrightarrow (\log_2 3 - 1)\log_3 (x^2-4) \le 3\log_2 3 - 3\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_3 (x^2-4) \le \frac{3(\log_2 3 - \log_3 2)}{\log_2 3 - 1} \Leftrightarrow \log_3 (x^2-4) \le 3\log_3 6$

$\Leftrightarrow \log_3 (x^2-4) \le \log_3 216$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \le 216 \Leftrightarrow x^2 \le 220 \Leftrightarrow -\sqrt{220} \le x \le \sqrt{220}$

Các số nguyên dương của x thỏa mãn yêu cầu là $\{3;4;...;14\}$

Vậy tổng các số thỏa mãn là $3+4+5+...+14 = 6(3+14) = 102$.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2-9}{125} < \log_5 \frac{x^2-9}{8}$?

A. 63. **B.** 62. **C.** 58. **D.** 56.

Lời giải

TXĐ: $D = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

Ta có $\log_2 \frac{x^2-9}{125} < \log_5 \frac{x^2-9}{8}$

$\Leftrightarrow \log_2 5.\left[\log_5 (x^2-9) - 3\right] < \log_5 (x^2-9) - 3\log_5 2$

$\Leftrightarrow (\quad {}_2 5 - 1).\quad {}_5 (x^2-9) < \quad (\quad {}_2 5 - \text{o}\ {}_5 2)$

$\Leftrightarrow \log_5 (x^2-9) < \frac{3(\log_2 5 - \log_5 2)}{\log_2 5 - 1} \Leftrightarrow \log_5 (x^2-9) < 3(1 + \log_5 2)$

$\Leftrightarrow \log_5 (x^2-9) < \log_5 (10^3) \Leftrightarrow x^2 - 9 < 10^3 \Leftrightarrow -\sqrt{1009} < x < \sqrt{1009}$

Kết hợp điều kiện ta có $x \in \{-31;-30;...;-4;4;...;30;31\}$.

Vậy có 56 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn: $\log_5 \frac{x^2-4}{49} < \log_7 \frac{x^2-4}{25}$?

A. 64. **B.** 33. **C. 66.** **D.** 70.

Lời giải

$\log_5 \frac{x^2-4}{49} < \log_7 \frac{x^2-4}{25}$

$\Leftrightarrow \log_5 (x^2-4) - 2\log_5 7 < \log_7 (x^2-4) - 2\log_7 5$

$\Leftrightarrow (\log_5 7 - 1)\log_7 (x^2-4) < 2(\log_5 7 - \log_7 5)$

$\Leftrightarrow \log_7 (x^2-4) < \frac{2(\log_5 7 - \log_7 5)}{\log_5 7 - 1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 < 1225 \Leftrightarrow x^2 < 1229 \Leftrightarrow -\sqrt{1229} < x < \sqrt{1229}$

Kết hợp với điều kiện x nguyên và $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$ ta được:

$x \in \{-35; -34; ....; -4; -3; 3; 4; ...; 34; 35\}$

Vậy có tất cả 66 số x thỏa mãn.

Câu 12. Cho bất phương trình $\log_2 \frac{x^2-3x+6}{243} < \log_3 \frac{x^2-3x+6}{32}$. Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 86. **B.** 89. **C.** 246. **D.** 264.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\log_2 \frac{x^2-3x+6}{243} < \log_3 \frac{x^2-3x+6}{32}$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6) - 5\log_2 3 < \log_3 (x^2-3x+6) - 5\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6)(1-\log_3 2) < 5\left(\log_2 3 - \frac{1}{\log_2 3}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6)(1-\log_3 2) < 5.\frac{\log_2^2 3 - 1}{\log_2 3}$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6) < \frac{5(\log_2^2 3 - 1)}{\log_2 3 (1-\log_3 2)} \Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6) < 5(\log_2 3 + 1)$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2-3x+6) < \log_2 (6^5) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 < 6^5$.

Do x thuộc $\mathbb{Z}$ nên ta được $S=\{-86;-85;...;86;87;88;89\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng $-86+(-85)+...+85+86+87+88+89=264$.

Câu 13. Tìm tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình sau: $\log_5\frac{x^3-27}{243}\geq\log_3\frac{x^3-27}{3125}$ bằng

A. 0. **B.** 4227. **C.** 4183. **D.** 4180.

. Lời giải

ĐK: $x^3-27>0\Leftrightarrow x>3$ $(*)$

Với ĐK (*) bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5(x^3-27)-5\log_5 3\geq\log_3(x^3-27)-5\log_3 5$

$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x^3-27)}{\log_3 5}-5\log_5 3\geq\log_3(x^3-27)-5\log_3 5,\quad(\log_3 5>0)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^3-27)-5\geq\log_3 5.\log_3(x^3-27)-5(\log_3 5)^2$

$\Leftrightarrow \log_3(x^3-27)-\log_3 5.\log_3(x^3-27)\geq 5-5(\log_3 5)^2$

$\Leftrightarrow \log_3(x^3-27)(1-\log_3 5)\geq 5-5(\log_3 5)^2$

$\Leftrightarrow \log_3(x^3-27)\leq 5+5\log_3 5,\quad(1-\log_3 5<0)$

$\Leftrightarrow x^3-27\leq 3^5.3^{5\log_3 5}$

$\Leftrightarrow x^3-27\leq 15^5\Leftrightarrow x<\sqrt[3]{759402}\simeq 91,2$

Kết hợp với điều kiện (*) $\Rightarrow x\in[4;91]$

Vậy: $S=4+5+...+91=4180$.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\frac{x^2-9}{125}<\log_5\left(\frac{x^2-9}{8}\right)$?

A. 56. **B.** 57. **C.** 54. **D.** 28.

Lời giải

$\log_2\frac{x^2-9}{125}<\log_5\left(\frac{x^2-9}{8}\right)\Leftrightarrow\log_2(x^2-9)-3\log_2 5<\log_5(x^2-9)-3\log_5 2$

$\Leftrightarrow\log_2(x^2-9)-3\log_2 5<\frac{\log_2(x^2-9)}{\log_2 5}-3\log_5 2$

$\Leftrightarrow\log_2(x^2-9)(1-\log_5 2)<3\left(\frac{1}{\log_5 2}-\log_5 2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)<3\dfrac{1+\log_5 2}{\log_5 2} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)<3\log_2 10 \Leftrightarrow 0<x^2-9<10^3$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-3\end{array}\right.\\-\sqrt{1009}<x<\sqrt{1009}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3<x<\sqrt{1009}\\-\sqrt{1009}<x<-3\end{array}\right.$$

Từ đó suy ra có 57 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 15. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\dfrac{x^2-25}{9}<\log_3\dfrac{x^2-25}{4}$ là

A. 14. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 15.

Lời giải

Điều kiện $x^2-25>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

Ta có $\log_2\dfrac{x^2-25}{9}<\log_3\dfrac{x^2-25}{4} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right)-2\log_2 3<\log_3\left(x^2-25\right)-2\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right)-2\log_2 3<\log_2\left(x^2-25\right).\log_3 2-2\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right).\left(1-\dfrac{1}{\log_2 3}\right)<2\left(\log_2 3-\dfrac{1}{\log_2 3}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right).\dfrac{\log_2 3-1}{\log_2 3}<2.\dfrac{(\log_2 3-1).(\log_2 3+1)}{\log_2 3}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right)<2.(\log_2 3+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-25\right)<\log_2 36 \Leftrightarrow x^2-25<36 \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{61};\sqrt{61}\right)$

Mà $x\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty); x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-7;-6;6;7\}$.

Vậy có bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2-9}{625}\le\log_5\dfrac{x^2-9}{16}$?

A. 192. **B.** 194. **C.** 200. **D.** 201.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\x<-3\end{array}\right.$ (*).

Ta có: $\log_2\dfrac{x^2-9}{625}\le\log_5\dfrac{x^2-9}{16}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)-\log_2 625\le\log_5\left(x^2-9\right)-\log_5 16$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)-4\log_2 5\le\log_5 2.\log_2\left(x^2-9\right)-4\log_5 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)-\log_5 2.\log_2\left(x^2-9\right)\le 4\log_2 5-4\log_5 2$

$\Leftrightarrow (1-\log_5 2)\log_2\left(x^2-9\right)\le 4\left(\dfrac{1}{\log_5 2}-\log_5 2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)\le \dfrac{4\left[1-\left(\log_5 2\right)^2\right]}{(1-\log_5 2)\log_5 2} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)\le \dfrac{4(1+\log_5 2)}{\log_5 2}$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)\le \dfrac{\log_5 10000}{\log_5 2} \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-9\right)\le \log_2 10000$

$\Leftrightarrow x^2-9\le 10000 \Leftrightarrow -\sqrt{10009}\le x\le \sqrt{10009}$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} 3<x\le\sqrt{10009} \\ -\sqrt{10009}\le x<-3 \end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên có 194 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Cho bất phương trình $2\log_4\left(x^{\log_4\sqrt{x}}\right)\ge \log_4\left(64x^2\right)$. Số nghiệm nguyên không vượt quá 2023 của bất phương trình đã cho là

A. 1960. **B.** 1964. **C.** 2023. **D.** 2064.

Lời giải

Điều kiện : $x>0$.

$2\log_4\left(x^{\log_4\sqrt{x}}\right)\ge \log_4\left(64x^2\right) \Leftrightarrow 2.\log_4\sqrt{x}.\log_4 x\ge \log_4\left(x^2\right)+3$

$\Leftrightarrow 2.\log_4\sqrt{x}.\log_4 x\ge 2\log_4 x+3 \Leftrightarrow \left(\log_4 x\right)^2-2\log_4 x-3\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x\le -1 \\ \log_4 x\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le\dfrac{1}{4} \\ x\ge 64 \end{array}\right.$.

Vì x là số nguyên không vượt quá 2023 nên ta chọn $x\in\{64;65;...;2023\}$.

Vậy có $2023-64+1=1960$ nghiệm nguyên không vượt quá 2023 của bất phương trình đã cho.

Câu 18. Biết bất phương trình $\log_3\left(3^x-1\right).\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)\le 1$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tổng $T=a+b$ bằng

A. $T=3+\log_3 112$. **B.** $T=-2+\log_3 112$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=-3+\log_3 112$.

Lời giải

Biến đổi bất phương trình ta được

$\log_3\left(3^x-1\right)\log_{27}\left(3^{x+2}-9\right)\le 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left[9\left(3^x-1\right)\right]\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_3\left(3^x-1\right)\left[2+\log_3\left(3^x-1\right)\right]\le 1$

Đặt $t=\log_3\left(3^x-1\right)$, bất phương trình trở thành

$t(t+2)\le 3\Leftrightarrow t^2+2t-3\le 0\Leftrightarrow -3\le t\le 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(3^x-1)\ge -3\\ \log_3(3^x-1)\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x-1\ge\dfrac{1}{27}\\ 3^x-1\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^x\ge\dfrac{28}{27}\\ 3^x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\log_3\dfrac{28}{27}\le x\le\log_3 4$$

Vậy ta có $T=a+b=\log_3\dfrac{28}{27}+\log_3 4=\log_3\dfrac{112}{27}=-3+\log_3 112$.

Câu 19. Bất phương trình $\left(3^{x^2-1}-9^{x+1}\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x+10)+2\right]\ge 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. Vô số. **B.** 6 . **C.** 10. **D.** 9 .

Lời giải

Điều kiện: $x>-10$.

$3^{x^2-1}-9^{x+1}=0\Leftrightarrow x^2-1=2x+2\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+10)+2=0\Leftrightarrow x+10=4\Leftrightarrow x=-6$

Bảng xét dấu

x	-10		-6		-1		3		$+\infty$
$3^{x^2-1}-9^{x+1}$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_{\frac{1}{2}}(x+10)+2$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $S=(-10;-6]\cup[-1;3]$.

Vậy bất phương trình có 9 nghiệm nguyên là $\{-9;-8;-7;-6;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 20. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_7 x<\log_3(\sqrt{x}+2)$. Tính tổng các phần tử của S

A. 2176. **B.** 1128. **C.** 1196. **D.** 1176.

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_7 x\Rightarrow x=7^t$ và bất phương trình đã cho trở thành:

$$t<\log_3(7^{\frac{t}{2}}+2)\Leftrightarrow 7^{\frac{t}{2}}+2>3^t\Leftrightarrow(\frac{\sqrt{7}}{3})^t+2(\frac{1}{3})^t>1\quad(*)$$

Vì hàm số $f(t)=(\dfrac{\sqrt{7}}{3})^t+2(\dfrac{1}{3})^t$ nghịch biến trên tập $(0;+\infty)$ mà $f(2)=1$ nên suy ra bất

phương trình (*) trở thành $f(t) > f(2) \Leftrightarrow t < 2$

Ta có $t < 2$ suy ra $\log_7 x < 2 \Leftrightarrow x < 49$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;49)$ suy ra $S = \{1,2,3,....,48\}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $1+2+3+...+48 = 1176$.

Câu 21. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x^2+1) > \log_3 x^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đk: $x \neq 0$

Đặt $t = \log_4(x^2+1) \Rightarrow x^2+1 = 4^t \Rightarrow x^2 = 4^t - 1$

Bất phương trình trở thành

$$t > \log_3(4^t-1) \Leftrightarrow 3^t > 4^t - 1 \Leftrightarrow 3^t + 1 > 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t > 1$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(1) = 1$ nên $f(t) > f(1) \Leftrightarrow t < 1 \Leftrightarrow \log_4(x^2+1) < 1 \Leftrightarrow x^2+1 < 4 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Đối chiếu với điều kiện và yêu cầu bài toán ta được $x \in \{1,-1\}$

Câu 22. Bất phương trình $\log_3(2x^2-x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) + 2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2023, 2023]$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $(1;+\infty)$.

$\log_3(2x^2-x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) + 2x^2 - 3x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-x-1) + 2x^2 - x - 1 \geq \log_3(2x+1) + 2x + 1, (1)$

Xét hàm $y = f(t) = \log_3 t + t$, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$, hàm số đồng biến

$(1) \Leftrightarrow f(2x^2-x-1) \geq f(2x+1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, suy ra $x \geq 2$. Vậy có 2022 nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2023, 2023]$.

Câu 23. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$:

A. 16. **B.** 14.

C. Vô số. **D.** 18.

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases}\log_2\left(x^2-1\right)>0\\ x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-1>1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right).$

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right).$

Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right).$

Vậy có 14 nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$.

Câu 24. Bất phương trình $\dfrac{\log_2\dfrac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 15.

A. 13. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 14.

Lời giải

Điều kiện của bất phương trình là $x>0, x\ne 1, x\ne 2$.

Khi đó $\dfrac{\log_2\dfrac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1$

Đặt $t=\log_2 x$. Ta có $\dfrac{t-1}{t}-\dfrac{2t}{t-1}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}-1\le 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -1\\ 0<t\le\dfrac{1}{2}\\ t>1\end{array}\right.$.

Với $t=\log_2 x$ ta có : $\left[\begin{array}{l}\log_2 x\le -1\\ 0<\log_2 x\le\dfrac{1}{2}\\ \log_2 x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{1}{2}\\ 1<x\le\sqrt{2}\\ x>2\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x>0$ ta có $0<x\le\dfrac{1}{2}$ hoặc $1<x\le\sqrt{2}$ hoặc $x>2$.

Khi đó bất phương trình có 14 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 15.

Câu 25. Cho bất phương trình $\log_m(x^2-4x+m+1)>0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m<2024$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2023. **D.** 2024.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{cases} m>1 \\ x^2-4x+m+1>1 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 0<m<1 \\ 0<x^2-4x+m+1<1 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m>1 \\ x^2-4x+m>0 \end{cases} \right. \text{(I)} \left. \begin{cases} 0<m<1 \\ x^2-4x+m+1>0 \\ x^2-4x+m<0 \end{cases} \right. \text{(II)}$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi (I) và (II) đúng với mọi x.

+) Ta có (I) đúng với mọi x khi và chỉ khi $\begin{cases} m>1 \\ \Delta'=4-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m>4 \end{cases} \Leftrightarrow m>4$.

+) Xét (II): $\begin{cases} 0<m<1 \\ x^2-4x+m+1>0 \quad (1) \\ x^2-4x+m<0 \quad (2) \end{cases}$

$x^2-4x+m+1>0$ với mọi x khi và chỉ khi $\Delta_1=4-m-1<0 \Rightarrow m>3$ (loại do $0<m<1$).

Với $x^2-4x+m<0$ ta có $\Delta_2=4-m>0$ (do $0<m<1$) nên không tồn tại m để bất phương trình $x^2-4x+m<0$ nghiệm đúng với mọi x.

Vậy $4<m<2024 \Rightarrow m=\{5,6,7...,2023\}$ nên có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2023}}\log_{88}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_{2023}\log_{\frac{1}{88}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$?

A. 46. **B.** 44. **C.** 43. **D.** 45.

Lời giải

Đặt $\log_{\frac{1}{2023}}\log_{88}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_{2023}\log_{\frac{1}{88}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{88}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)>0 \\ \log_{88}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\sqrt{x^2+1}-x<1 \\ \sqrt{x^2+1}+x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\sqrt{x^2+1}<x+1 \\ \sqrt{x^2+1}>1-x \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

$(1) \Leftrightarrow \log_{2023} \log_{\frac{1}{88}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) + \log_{2023} \log_{88} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_{2023} \left(\log_{\frac{1}{88}} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_{88} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_{88}^2 \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{88} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1$

Khi $0 < \log_{88} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow x > 0$

$\log_{88} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x < 88$

Khi $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 88-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 88-x>0 \\ x^2+1 < 7744+x^2-176x \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7743}{176}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0; \frac{7743}{176}\right)$

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 43 nghiệm.

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên thỏa mãn $\log_{x^2} \left(\frac{4x-2}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}$

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 4x-2>0 \\ 0 < x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_x \left(\frac{4x-2}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x \left(\frac{4x-2}{|x-2|}\right) \geq 1$.

TH1: Nếu $\frac{1}{2} < x < 1$ thì $Bpt \Leftrightarrow \frac{4x-2}{|x-2|} \leq x \Leftrightarrow \frac{4x-2}{2-x} \leq x \Leftrightarrow 4x-2 \leq 2x-x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-2 \leq 0$.

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{3} \leq x \leq -1+\sqrt{3}$. Kết hợp với điều kiện đang xét ta có $\frac{1}{2} < x < \sqrt{3}-1$.

TH2: Nếu $1 < x < 2$ thì $Bpt \Leftrightarrow \frac{4x-2}{|x-2|} \geq x \Leftrightarrow \frac{4x-2}{2-x} \geq x \Leftrightarrow 4x-2 \geq 2x-x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}; +\infty\right)$. Kết hợp với điều kiện đang xét ta có $x \in (1;2)$.

TH3: Nếu $x>2$ thì $Bpt \Leftrightarrow \dfrac{4x-2}{|x-2|}\ge x \Leftrightarrow \dfrac{4x-2}{x-2}\ge x \Leftrightarrow 4x-2\ge x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x+2\le 0$

$\Leftrightarrow x\in\left[3-\sqrt{7};3+\sqrt{7}\right]$. Kết hợp với điều kiện đang xét ta có $x\in\left(2;3+\sqrt{7}\right]$.

Vì x là số nguyên nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 28. Số các giá trị nguyên của x thỏa $\left(\sqrt{2023^{25-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-2\right)\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}2023^{25-x^2}-1\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25-x^2\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 5$.

• Trường hợp 1: Xét $x=5$ thỏa mãn đề bài.

• Trường hợp 2: Xét $0<x<5$, ta có $\sqrt{2023^{25-x^2}-1}>0$. Khi đó

$\left(\sqrt{2023^{25-x^2}-1}\right)\left(\log_3 x-2\right)\le 0\Leftrightarrow \log_3 x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 9$

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z}$, $0<x<5$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\{1;2;3,4\}$.

Vậy $x\in\{1;2;3;4;5\}$ nên có 4 giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-23;23)$ thỏa mãn $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 9. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải

Ta có: $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)(1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

ĐKXĐ: $yx^2-6x+2y>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\ \Delta'=9-2y^2<0\end{cases}\Leftrightarrow y>\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$(1)\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}}\left(3\left(3x^2+1\right)\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(3x^2+1\right)\le yx^2-6x+2y\Leftrightarrow\left(y-9\right)x^2-6x+2y-3\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$

TH1: $y=9$

$(*)\Rightarrow -6x+15\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right]$(không thỏa điều kiện bài toán).

TH2: $y\ne 9$

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}y>9\\ 9-\left(y-9\right)\left(2y-3\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>9\\ -2y^2+21y-18\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\le\dfrac{21-3\sqrt{33}}{4}\\ y\ge\dfrac{21+3\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, ta có: $y \in \{10;11;...;21;22\}$.

Vậy có 13 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đặt $t=\log_2 x$, ta có bất phương trình

$$\frac{1-\frac{1}{2}t}{1+t} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-t}{2(1+t)} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-t}{2(1+t)} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-2t}{2(1+t)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \log_2 x<-1 \\ \log_2 x \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{2} \\ x \ge \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 31. Số nghiệm nguyên của phương trình $\log_2(x-3)+\log_3(x-2)=2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$.

Đặt $\begin{cases} \log_2(x-3)=t \\ t+\log_3(x-2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-3)=t \\ \log_3(x-2)=2-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2^t \\ x-2=3^{2-t} \end{cases}$

$\Rightarrow 1=3^{2-t}-2^t \Leftrightarrow 1=\dfrac{3^2}{3^t}-2^t \Leftrightarrow 3^t=9-6^t \Leftrightarrow 3^t+6^t-9=0$ (*)

Dễ thấy $t=1$ là một nghiệm của (*)

$f(t)=3^t+6^t-9 \Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+6^t\ln 6>0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến nên phương trình $f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=1$.

Với $t=1 \Rightarrow x-3=2^t=2^1 \Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất.

Câu 32. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\log_3\left(x^2-2\right)-\log_5\left[3\left(x^2-2\right)\right]<\log_2 3$?

A. 94. **B.** 92. **C.** 100. **D.** 98.

Lời giải

$\log_3\left(x^2-2\right)-\log_5\left[3\left(x^2-2\right)\right]<\log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2\right)-\left[\log_5 3+\log_5\left(x^2-2\right)\right]<\log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2\right)-\log_5\left(x^2-2\right)<\log_2 3+\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2\right)-\log_5 3.\log_3\left(x^2-2\right)<\log_2 3+\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2\right)\left(1-\log_5 3\right)<\log_2 3+\log_5 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-2\right)<\dfrac{\log_2 3+\log_5 3}{1-\log_5 3}\approx 7{,}144$

$\Leftrightarrow 0<x^2-2<2562{,}8 \Leftrightarrow 2<x^2<2564{,}8$

$\Leftrightarrow x\in\{-50;-49;...;-2;2;...;49;50\}$

Vậy có 98 giá trị x nguyên thoả mãn.

Câu 33. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ có dạng $[a;b]$. Tính $3a+b$?

A. 9. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x\left(1-\log_3 x\right)+\log_3 x-1\ge 0 \Leftrightarrow \left(1-\log_3 x\right)\left(\log_2 x-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}1-\log_3 x\ge 0\\ \log_2 x-1\ge 0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\log_3 x\le 1\\ \log_2 x\ge 1\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}0<x\le 3\\ x\ge 2\end{cases}\right. \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$

$\left.\begin{cases}1-\log_3 x\le 0\\ \log_2 x-1\le 0\end{cases}\right. \left.\begin{cases}\log_3 x\ge 1\\ \log_2 x\le 1\end{cases}\right. \left.\begin{cases}x\ge 3\\ 0<x\le 2\end{cases}\right.$

Vậy tập nghiệm là $[2;3]$, nên $3a+b=9$.

Câu 34. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $2\log_4^2 x\ge \log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$. Tập hợp S là tập hợp con của tập hợp nào sau đây?

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $[0;+\infty]$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ 2x+1\ge 0\\ \sqrt{2x+1}-1>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Ta có $2\log_4^2 x\ge \log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2^2 x-\log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\left(\log_2 x-2\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right)\ge 0 \Leftrightarrow \log_2 x.\left(\log_2 x-\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\right)\ge 0$

Ta có:

$\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1.$

$\log_2 x-\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\log_2 x=\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\Leftrightarrow x=\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=x+2\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(\text{loai})\\x=4\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$0\quad 1\quad 4\quad +\infty$
$\log_2 x.\left(\log_2 x-\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\right)$	$\quad -\quad 0\quad +\quad 0\quad -$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[1;4]$.

Câu 35. Gọi $S=\left(-\infty;\dfrac{a}{b}\right)$ là tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}$ (với $a,b\in\mathbb{Z};b>0;a,b$ nguyên tố cùng nhau). Khi đó $2a-b$ bằng

A. -17. **B.** 9. **C.** -3. **D.** 16.

Lời giải

$\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<-\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}$

$\Leftrightarrow\log_4\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<0\Leftrightarrow 0<\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<1\Leftrightarrow 1<\dfrac{x-1}{x+1}<3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-2}{x+1}>0\\\dfrac{x+2}{x+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<0\\x+2<0\end{cases}\Leftrightarrow x<-2.$

Suy ra $a=-2$, $b=1$ nên $2a+b=-3$.

Câu 36. Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2023;2023]$ thoả mãn $\log_{2023}\left(x^2-4\right)\geq\log_{2032}\left(x^2-4\right)$?

A. 4324. **B.** 1232. **C.** 1002. **D.** 4042.

Lời giải

$\log_{2023}\left(x^2-4\right)\geq\log_{2032}\left(x^2-4\right)\Leftrightarrow\log_{2023}\left(x^2-4\right)-\log_{2032}\left(x^2-4\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\log_{2023}\left(x^2-4\right)-\log_{2032}2023.\log_{2023}\left(x^2-4\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\log_{2023}\left(x^2-4\right)\left(1-\log_{2032}2023\right)\geq 0\Leftrightarrow\log_{2023}\left(x^2-4\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-4\geq 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\sqrt{5}\\x\leq-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Mà $x\in[-2023;2023]$ nên $x\in\{-2023;...;-3;3;...;2023\}$.

Vậy có 4042 giá trị thoả mãn.

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+7\right)-\log_{\sqrt{3}}\left(2x+42\right)\right]\left(64-4^{11-x}\right)\leq 0$?

A. 18. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Trường hợp 1.

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+7\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(2x+42\right)\\ 64\ge 4^{11-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ x^2+7\le 2x+42\\ 3\ge 11-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-35\le 0\\ x\ge 8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5\le x\le 7\\ x\ge 8\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Trường hợp 2.

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+7\right)\ge\log_{\sqrt{3}}\left(2x+42\right)\\ 64\le 4^{11-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7\ge 2x+42\\ 2x+42>0\\ 3\le 11-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-35\ge 0\\ x>-21\\ x\le 8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-21\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 7\\ x\le -5\end{array}\right.\\ x\le 8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7\le x\le 8\\ -21<x\le -5.\end{array}\right.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-20;-19;\ldots-5;7;8\}$. Vậy có 18 số nguyên x thỏa mãn đầu bài.

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

ĐK: $x>-1$.

Ta có $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$

$\Leftrightarrow 3\log_3(3x+3)+3^{\log_3(3x+3)}=3(2y+1)+3^{2y+1}(*)$

Xét hàm số $f(t)=3t+3^t$ trên $\mathbb{R}$, vì $f'(t)=3+3^t.\ln 3>0,\forall t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*)\Leftrightarrow f\left(\log_3(3x+3)\right)=f(2y+1)\Leftrightarrow\log_3(3x+3)=2y+1.$

Mặt khác $0\le x\le 2020\Leftrightarrow\log_3(3x+3)\in\left[1;\log_3(6063)\right]\Rightarrow 2y+1\in\left[1;\log_3(6063)\right]$

$\begin{cases}1\le 2y+1\le\log_3(6063)\\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow 0\le y\le 3$. Vậy có 4 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

A. 115. **B.** 59. **C.** 58. **D.** 116.

Lời giải

Điều kiện: $x+y>0$ và $x^2+y>0$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}-\left(x+y\right)\ (1)$

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x\ge t^{\log_3 4}-t\ (2)$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình (2) có không quá 728 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x\ge 729^{\log_3 4}-729=3367$ thì sẽ có ít nhất 729 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x<3367\Leftrightarrow -57\le x\le 58$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả $58+58=116$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thuộc đoạn $[-2022;2023]$ thỏa mãn $\log_3\left(3x^2+3\right)>\log_7\left(49x^2+49\right)$?

A. 4037. **B.** 4039. **C.** 4045. **D.** 4046.

Lời giải

Ta có: $\log_3\left(3x^2+3\right)>\log_7\left(49x^2+49\right)$

$\Leftrightarrow\log_3 3+\log_3\left(x^2+1\right)>\log_7 49+\log_7\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+1\right)-\log_7\left(x^2+1\right)>1$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+1\right)-\log_7 3.\log_3\left(x^2+1\right)>1\Leftrightarrow\left(1-\log_7 3\right)\log_3\left(x^2+1\right)>1$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+1\right)>\dfrac{1}{1-\log_7 3}\Leftrightarrow x^2+1>3^{\frac{1}{1-\log_7 3}}\Leftrightarrow x^2>3^{\frac{1}{1-\log_7 3}}-1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3^{\frac{1}{1-\log_7 3}}-1}\\x<-\sqrt{3^{\frac{1}{1-\log_7 3}}-1}\end{array}\right.$.

Vì x nguyên và $x\in[-2022;2023]$ suy ra $x\in\{-2022;-2021;...;-4;4;5;...;2022;2023\}$.

Vậy có 4039 giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên x thõa mãn : $\log_7 x<\log_3(\sqrt{x}+2)$.

A. 48 **B.** 49 **C.** 47. **D.** 50.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_7 x\ \Rightarrow x=7^t$ và bất phương trình đã cho trở thành $t<\log_3(7^{\frac{t}{2}}+2)$

$\Leftrightarrow 7^{\frac{t}{2}}+2>3^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^t>1\ (*)$.

Vì hàm số $f(t)=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t+2\left(\frac{1}{3}\right)^t$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$ mà $f(2)=1$ nên suy ra bất phương trình (*) trở thành $f(t)>f(2)\Leftrightarrow t<2$.

Ta có $t<2$ suy ra $\log_7 x<2\Leftrightarrow 0<x<49$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;49)$ suy ra $x=1,2,3,....,48$.

Vậy có 48 số nguyên

Câu 42. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2+2x+2}-4^{x+3}\right)\left(\log_2\left(x^3+12x^2+45x+54\right)-2\right)\le 0$?

A. 7 **B.** 6. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Điều kiện của bất phương trình: $x^3+12x^2+45x+54>0\Leftrightarrow (x+6)(x+3)^2>0\Leftrightarrow \begin{cases}x>-6\\ x\ne -3\end{cases}$.

Ta có: $2^{x^2+2x+2}-4^{x+3}=0\Leftrightarrow x^2+2x+2=2(x+3)\Leftrightarrow x=\pm 2$.

$\log_2\left(x^3+12x^2+45x+54\right)-2=0\Leftrightarrow x^3+12x^2+45x+54=4$

$\Leftrightarrow (x+5)^2(x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của vế trái (VT) bất phương trình đã cho

x	-6		-5		-3		-2		2		$+\infty$
$2^{x^2+2x+2}-4^{x+3}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_2\left(x^3+12x^2+45x+54\right)-2$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
VT		$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-6;-3)\cup(-3;2]$.

Vậy có tất cả 7 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu là: $-5;-4;-2;-1;0;1;2$.

Câu 43. : Nghiệm của bất phương trình $\log_4\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$ là $x\in(a;b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $b^2=4$. **B.** $b^2=5$. **C.** $b^2=2$. **D.** $b^2=3$.

Lời giải

Điều kiện: $\log_3\frac{x-1}{x+1}>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}>1\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)$.

$\log_4\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow\log_4\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_4\frac{1}{\log_3\frac{x-1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow\log_3\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{\log_3\frac{x-1}{x+1}}<0.(1)$

Đặt $t=\log_3\dfrac{x-1}{x+1}$; $t>0$. (1) trở thành $\dfrac{t^2-1}{t}<0\Leftrightarrow t^2-1<0\Leftrightarrow 0<t<1$;

Với $0<t<1\Rightarrow \log_3\dfrac{x-1}{x+1}<1\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_3 3\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}<3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\x>-1\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta có $x\in(-\infty;-2)$.

Vậy $b^2=4$.

Câu 44. Có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn 2023 của bất phương trình $3\log_3\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)>2\log_2\sqrt{x}$.

A. 0. **B.** 2023. **C.** 2050. **D.** 2072.

Lời giải

Đk: $x>0$.

Đặt $t=\sqrt[6]{x}, t>\sqrt[6]{2023}.$, từ giả thiết ta có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3$

$\Leftrightarrow f(t)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$f'(t)=\dfrac{1}{\ln 3}.\dfrac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\dfrac{2}{\ln 2}.\dfrac{1}{t}=\dfrac{(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$

Xét $g(t)=(3\ln 2-2\ln 3)t^3+(2\ln 2-2\ln 3)t^2-2\ln 3$

Ta có $g'(t)=3.t^2.\ln(\dfrac{8}{9})+2.t.\ln(\dfrac{4}{9})=t\left(3.t.\ln(\dfrac{8}{9})+2.\ln(\dfrac{4}{9})\right)$

$g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2\ln\frac{9}{4}}{3\ln\frac{8}{9}}<0\\t=0\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ giảm trên khoảng $(\sqrt[6]{2023};+\infty)$.

Mà $g(\sqrt[6]{2023})<0\Rightarrow f'(t)<0,\forall t\in(\sqrt[6]{2023};+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên $(\sqrt[6]{2023};+\infty)$.

Mà $f(4)=\log_3\left(1+4^3+4^2\right)-\log_2 4^2=0$

Suy ra $f(t)>0\Leftrightarrow f(t)>f(4)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow\sqrt[6]{x}<4\Leftrightarrow 0<x<4096$.

Từ yêu cầu bài toán ta có $2023<x<4096, x\in\mathbb{Z}$.

Vậy có 2072 giá trị thỏa mãn.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $1+\log_5\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}<\log_9\left(\dfrac{108\sqrt{x-1}}{125}\right)$?

A. 0. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

TXĐ: $D=(1;+\infty)$.

Ta có: $1+\log_5\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}<\log_9\left(\dfrac{108\sqrt{x-1}}{125}\right)$

$\Leftrightarrow \log_5 \frac{\sqrt{x-1}}{2} < \log_9\left(\frac{108\sqrt{x-1}}{125}\right) - \log_9 9 = \log_9\left(\frac{12\sqrt{x-1}}{125}\right) = \log_9\left(\frac{24}{125}.\frac{\sqrt{x-1}}{2}\right)$ (*)

Đặt $t = \log_5 \frac{\sqrt{x-1}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{2} = 5^t$ thay vào (*) ta có

$t < \log_9\left(\frac{24}{125}.5^t\right) \Leftrightarrow 9^t < \frac{24}{125}.5^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^t < \frac{24}{125} \Leftrightarrow t < \log_{\frac{9}{5}} \frac{24}{125}$.

Suy ra $\log_5 \frac{\sqrt{x-1}}{2} < \log_{\frac{9}{5}} \frac{24}{125} \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{x-1}}{2} < 5^{\log_{\frac{9}{5}} \frac{24}{125}} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x-1} < 2.5^{\log_{\frac{9}{5}} \frac{24}{125}}$

$\Leftrightarrow 1 < x < 1 + \left(2.5^{\log_{\frac{9}{5}} \frac{24}{125}}\right)^2 \approx 1,0004$

Vậy không có số nguyên x thỏa mãn.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20;20)$ thoả mãn $2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên $y \in (-20;20)$ sao cho:

$2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3.(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y) \Leftrightarrow yx^2 - 6x + 2y \ge 3(3x^2+1)$

$\Leftrightarrow y(x^2+2) \ge 9x^2 + 6x + 3 \Leftrightarrow y \ge \frac{9x^2+6x+3}{x^2+2} = f(x)$

$\Leftrightarrow y \ge \max_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow y \ge 9,55 \xleftrightarrow{y\in\mathbb{Z}} \Leftrightarrow y \ge 10 \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} n(y) = 20 - 10 = 10$

Câu 47. Trong đoạn $[-2022;2023]$ có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2(2^x+1) + \log_3(4^x+2) \le 2$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Xét $x > 0 \Rightarrow 2^x > 2^0 = 1 \Rightarrow 2^x + 1 > 2 \Rightarrow \log_2(2^x+1) > \log_2 2 = 1 (1)$

$x > 0 \Rightarrow 4^x > 4^0 = 1 \Rightarrow 4^x + 2 > 2 + 1 = 3 \Rightarrow \log_3(4^x+2) > \log_3 3 = 1 (2)$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được: $\log_2(2^x+1) + \log_3(4^x+2) > 2$

Mà bất phương trình: $\log_2(2^x+1) + \log_3(4^x+2) \le 2$ nên $x > 0$ (loại)

Xét $x \le 0 \Rightarrow 2^x \le 2^0 = 1 \Rightarrow 2^x + 1 \le 2 \Rightarrow \log_2(2^x+1) \le \log_2 2 = 1 (3)$

$x \le 0 \Rightarrow 4^x \le 4^0 = 1 \Rightarrow 4^x + 2 \le 2 + 1 = 3 \Rightarrow \log_3(4^x+2) \le \log_3 3 = 1 (4)$

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta được: $\log_2(2^x+1) + \log_3(4^x+2) \le 2$ (thỏa mãn)

Vậy $x \le 0$ hay $x \in (-\infty;0]$.

Câu 48. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{1}{\log_3 \dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}} < \dfrac{1}{\log_3 (x-4)}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 5 \\ x > 4 \end{cases}$

$$\frac{1}{\log_3 \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}} < \frac{1}{\log_3 (x-4)} \Leftrightarrow \frac{\log_3 (x-4) - \log_3 \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}}{\log_3 \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}.\log_3 (x-4)} < 0$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\log_3 (x-4) - \log_3 \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}}{\log_3 \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}.\log_3 (x-4)}$

Cho $f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3 (x-4) - \log_3 \dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x-4 = \dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2\left(1-\sqrt{1+x}\right)^2}{\left(1-(1+x)\right)^2} = x-4 \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{1+x}\right)^2 = x-4$$

$$\Leftrightarrow 2+x-2\sqrt{1+x} = x-4 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Bảng xét dấu

x	4		5		8		$+\infty$
$f(x)$	‖	+	‖	-	0	+	

Kết hợp với điều kiện ta được $5 < x < 8$.

x nguyên nên $x \in \{6,7\}$. Vậy có 2 giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(4^x - 65.2^x + 64\right)\left[2 - \log_3 (x+3)\right] \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Ta có $\left(4^x - 65.2^x + 64\right)\left[2 - \log_3 (x+3)\right] \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x-65.2^x+64\le 0\\2-\log_3(x+3)\le 0\end{cases}\\\begin{cases}4^x-65.2^x+64\ge 0\\2-\log_3(x+3)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le 2^x\le 64\\x\ge 6\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^x\ge 64\\2^x\le 1\end{array}\right.\\-3<x\le 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le x\le 6\\x\ge 6\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 6\\x\le 0\end{array}\right.\\-3<x\le 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\-3<x\le 0\end{array}\right.$$

$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;6\}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình có 4 giá trị nguyên.

Câu 50. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3 x.\log_2 x>2\log_3 x-\log_2\frac{x}{4}$ nhỏ hơn 2023:

A. 2024. **B.** 2023. **C.** 2010. **D.** 2018.

Lời giải

Điều kiện $x>0$

Bất phương trình tương đương với: $\log_3 x.\log_2 x-2\log_3 x+\log_2 x-2>0$

Đặt $\begin{cases}a=\log_2 x\\b=\log_3 x\end{cases}$ ta được: $ab-2b+a-2>0\Leftrightarrow(a-2)(b+1)>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-2>0\\b+1>0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a-2<0\\b+1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x>2\\\log_3 x>-1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\log_2 x<2\\\log_3 x<-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>4\\x>\frac{1}{3}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}0<x<4\\0<x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x>4$ hoặc $0<x<\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x\in\{5;6;...;2022\}$ (vì $x\in\mathbb{Z}$)

Vậy có 2018 số nguyên thỏa bất phương trình mà nhỏ hơn 2023.

Câu 40. **(Đề TK BGD 2023)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

B. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$$\begin{cases} F(4)+G(4)=4 \\ F(0)+G(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(4)+C=4 \\ 2F(0)+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(4)-F(0)=\frac{3}{2}.$$

Vậy:

$$\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{F(4)-F(0)}{2}=\frac{3}{4}.$$

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 40 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(7)+G(7)=12$ và $F(1)+G(1)=3$. Khi đó $I=\int_1^3 f(3x-2)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=3$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=9$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(27)+G(27)=3$ và $F(7)+G(7)=2$. Tính $\int_3^8 f(4x-5).\mathrm{d}x+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(129)+G(129)=11$ và $F(39)+G(39)=1$. Tính $\int_8^{26}\left(f(5x-1)+1\right).\mathrm{d}x$.

A. -2022. **B.** 19. **C.** -19. **D.** 2023.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)+x$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ và thỏa mãn $F(6)+2G(6)=12$ và $F(0)+2G(0)=3$. Tính $I=\int_0^3 f(2x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=1$.

Câu 5. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết diện tích giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0, x=2$ bằng 6, $F(4)-G(0)=7$ và $F(-1)>G(-1)$. Khi đó $\int_0^2 f(2x).dx$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $F(0)+G(0)=13$, $F(1)+G(1)=12$ và $F(3)+G(3)=78$. Khi đó $\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{33}{2}$. **B.** 33. **C.** 32. **D.** 16.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+G(6)=7$ và $F(3)+G(3)=2$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** 5. **D.** $\frac{15}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-8)+G(-8)=8$ và $F(1)+G(1)=-1$. Khi đó, $I=\int_{0}^{3} f(1-3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{-7}{6}$. **C.** $I=\frac{-1}{2}$. **D.** $I=\frac{-3}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=3$. Cho biết $I=\int_{1}^{3} f(2x+1)\mathrm{d}x=505$, giá trị của $P=F(7)+G(7)$ bằng

A. $P=2023$. **B.** $P=2020$. **C.** $P=2017$. **D.** $P=1013$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $xF(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=6$ và $G(0)=2$. Khi đó $\int_{0}^{1} f(3x)\,dx$ bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)+x, G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+2G(6)=12$ và $F(0)+2G(0)=3$. Khi đó $\int_{0}^{2} f(3x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=9$ và $F(2)+G(2)=-3$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(3x-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Tính $\int_{0}^{1} f(4x)dx$?

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{3}{8}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(2)-G(0)=4$ và $F(0)-G(2)=1$. Tính $\int_{-3}^{-2} f(2x+6)dx$?

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 15. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$, $F(2)=1$ và $\int_0^2 F(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** -3. **D.** -1.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=5$ và $F(6)+G(6)=10$. Khi đó $\int_1^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** 5.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2023)+G(2023)=2$ và $F(1)+G(1)=0$. Khi đó $\int_1^{1012} f(2x-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(4)-G(4)=3$ và $2F(1)-G(1)=1$. Khi đó $\int_1^2 f(3x-2)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(1)+G(1)=-6$ và $F(4)+G(4)=2$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(1-3x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+G(6)=8$ và $F(0)+G(0)=0$. Khi đó $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(0)-G(0)=1$, $F(2)-2G(2)=4$ và $F(1)-G(1)=-1$. Tính $\int_1^{e^2} \frac{f(\ln x)}{2x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)-G(3)=4$ và $2F(0)-G(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)+3G(2)=4$ và $2F(0)+3G(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=4$ và $G(0)+F(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)-x$, $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=4$ và $G(0)+F(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-5)+G(-5)=2$ và $F(1)+G(1)=20$. Khi đó $\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=9$ và $F(0)+G(0)=5$. Khi đó $\int_0^2 f\left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right)=a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$ và $x+xf'(x)=2f(x)-4$, $\forall x\in(0;1)$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x.\cos x+2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I=\frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I=\frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I=\frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I=\frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{3}$; $x^2.f'(x)=(1-2x^2).f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{4}\ln 3$. **B.** $I=\frac{1}{2}\ln 3$. **C.** $I=\frac{1}{3}\ln 2$. **D.** $I=\frac{1}{2}\ln 2$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $2F(3)+G(3)=9+2F(-1)+G(-1)$. Khi đó $\int_0^2\left(x^2+f(3-2x)\right)dx$ bằng

A. $\frac{25}{6}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{43}{6}$. **D.** 3.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)+x$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+2G(6)=12$ và $F(0)+2G(0)=3$. Khi đó $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(8)-G(3)=7$ và $G(8)-2F(3)=-3$. Khi đó $\int_2^{12} f\left(\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-5)+G(-5)=4$ và $F(-8)+G(-8)=2$. Khi đó $\int_{-4}^{-3} f(3x+4)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(2)+2F(-2)+3F(4)=4$ và $4F(2)+9F(-2)+8F(4)=5$. Khi đó $\int_{-1}^{1}[6f(2x)+f(x+3)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 7.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(10)+G(10)=5$ và $F(1)+G(1)=3$. Khi đó $3\int_{0}^{3} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 2.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=5$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_{0}^{2023} f\left(\frac{x}{2023}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2023. **B.** $\frac{2}{2023}$. **C.** $\frac{4}{2023}$. **D.** 4046.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=2023$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln x f(\ln^2 x)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1011. **B.** $\frac{1011}{2}$. **C.** 2022. **D.** $\frac{2023}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(15)+G(15)=38$ và $F(3)+G(3)=20$. Khi đó $\int_{1}^{5}(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 41. Cho $\int_{0}^{3} f(x)dx=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left[\int_{0}^{1} f(x)dx\right]^2+4\int_{1}^{3} f(x)dx$.

A. 40. **B.** 30. **C.** 20. **D.** 10.

Câu 42. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2 x.\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{6}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{-1}{3}$.

Câu 43. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\sqrt{2}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $S=a-b+c-d$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -2.

Câu 44. Cho $\int_0^4 \frac{2x}{3+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $I=a+b+c$ bằng

A. $I=86$. **B.** $I=24$. **C.** $I=-24$. **D.** 38.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$. Biết $f(-5)+f(7)=-3$ và $f(0)+f(2)=8$. Giá trị của $P=f(4)+f(1)+f(-2)$ bằng

A. -7. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(6)=10$, $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=8$. Tính tích phân $I=\int_0^2 x.f'(3x)\mathrm{d}x$.

A. $I=20$. **B.** $I=12$. **C.** $I=52$. **D.** $I=9$.

Câu 47. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm bằng nhau tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\begin{cases} f(3)+g(3)=5 \\ f(1)+g(1)=-1 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

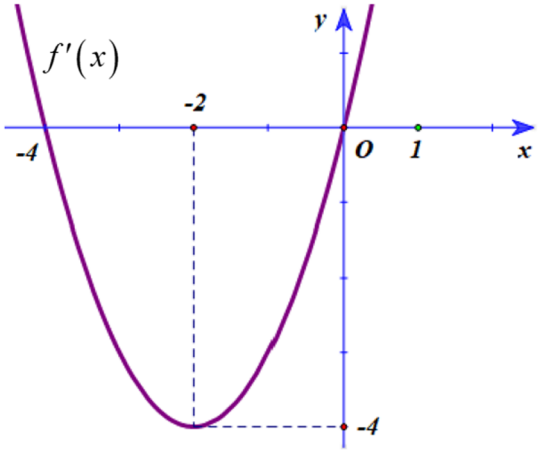
Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **B.** $2+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $1+\ln\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 7.

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng bị giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành biết $f(0)=0$



A. $\frac{80}{9}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** 36. **D.** 252.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LƯỜI GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(7)+G(7)=12$ và $F(1)+G(1)=3$. Khi đó $I=\int_1^3 f(3x-2)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=3$. **C.** $I=\frac{3}{4}$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Đặt $t=3x-2 \Rightarrow \frac{dt}{3}=dx$

Đổi cận

x	1	3
t	1	7

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\left[F(7)-F(1)\right]$ và $I=\frac{1}{3}\left[G(7)-G(1)\right]$

$\Rightarrow 2I=\frac{1}{3}\left[F(7)+G(7)-\left(F(1)+G(1)\right)\right]$

$\Rightarrow 2I=\frac{1}{3}(12-3)=3$

$\Rightarrow I=\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(27)+G(27)=3$ và $F(7)+G(7)=2$. Tính $\int_3^8 f(4x-5).\mathrm{d}x+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=4x-5 \Rightarrow \mathrm{d}t=4\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}t.$

Khi $x=3$ thì $t(3)=7$.

Khi $x=8$ thì $t(8)=27$.

Khi đó

$\int_3^8 f(4x-5).\mathrm{d}x+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\int_7^{27} f(t)\mathrm{d}t+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{8}\left[\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x+\int_7^{27} f(x)\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{5}{8}\left[F(27)-F(7)+G(27)-G(7)\right]$

$=\frac{5}{8}\left[F(27)+G(27)-\left(F(7)+G(7)\right)\right]=\frac{5}{8}.$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(129)+G(129)=11$ và $F(39)+G(39)=1$. Tính $\int_8^{26}\left(f(5x-1)+1\right).\mathrm{d}x$.

A. -2022. **B.** 19. **C.** -19. **D.** 2023.

Lời giải

Ta có $\int_8^{26}\left(f(5x-1)+1\right).\mathrm{d}x=\int_8^{26} f(5x-1)\mathrm{d}x+\int_8^{26}1\mathrm{d}x=\int_8^{26} f(5x-1)\mathrm{d}x+18.$

Đặt $t=5x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}t.$

Khi $x=8$ thì $t(8)=39$.

Khi $x=26$ thì $t(26)=129$.

Khi đó

$\int_8^{26} f(5x-1).\mathrm{d}x+18$

$=\frac{1}{5}\int_{39}^{129} f(t)\mathrm{d}t+18$

$=\frac{1}{5}\int_{39}^{129} f(x)\mathrm{d}x+18$

$=\frac{1}{10}\left[\int_{39}^{129} f(x)\mathrm{d}x+\int_{39}^{129} f(x)\mathrm{d}x\right]+18$

$=\frac{1}{10}\left[F(129)-F(39)+G(129)-G(39)\right]+18$

$=\frac{1}{10}\left[F(129)+G(129)-\left(F(39)+G(39)\right)\right]+18=19.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)+x$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ và thỏa mãn $F(6)+2G(6)=12$ và $F(0)+2G(0)=3$. Tính $I=\int_0^3 f(2x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^3 f(2x)dx=\frac{1}{2}.\int_0^6 f(x)dx$ thông qua bước đổi cận tích phân

Ta có $\begin{cases} I=\frac{1}{2}.\int_0^6 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[F(x)+x\right]\Big|_0^6=\frac{1}{2}\left[F(6)-F(0)+6\right] \\ 2I=2.\frac{1}{2}.\int_0^6 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[2G(x)\right]\Big|_0^6=\frac{1}{2}\left[2G(6)-2G(0)\right] \end{cases}$

Ta có

$I+2I=\frac{1}{2}\left[F(6)+6-F(0)\right]+\frac{1}{2}\left[2G(6)-2G(0)\right]=\frac{1}{2}\left[F(6)+2G(6)\right]-\frac{1}{2}\left[F(0)+2G(0)\right]+3$

$\Leftrightarrow 3I=\frac{1}{2}.12-\frac{1}{2}.3+3=\frac{15}{2}\Rightarrow I=\frac{5}{2}.$

Câu 5. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết diện tích giới hạn bơi các đường $y=F(x),y=G(x),x=0,x=2$ bằng 6, $F(4)-G(0)=7$ và $F(-1)>G(-1)$. Khi đó $\int_0^2 f(2x).dx$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^2 f(2x).dx=\frac{1}{2}F(2x)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left[F(4)-F(0)\right]$

Do $F(x),G(x)$ là các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Nên ta có:

$G(x)=F(x)+C.$

Mà $F(-1)>G(-1)\Rightarrow C<0$. Từ diện tích giới hạn bơi các đường

$y=F(x),y=G(x),x=0,x=2$ bằng 6. Ta có:

$\int_0^2\left|F(x)-G(x)\right|dx=6\Leftrightarrow\int_0^2|C|dx=6\Leftrightarrow|C|.\int_0^2 1dx=6\Leftrightarrow|C|=3\Leftrightarrow C=-3(C<0)$

Lúc này, $G(x)=F(x)-3$, kết hợp

$F(4)-G(0)=7\Rightarrow F(4)-\left[F(0)-3\right]=7\Leftrightarrow F(4)-F(0)=4.$

Vậy: $I=\frac{1}{2}.4=2,$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $F(0)+G(0)=13$, $F(1)+G(1)=12$ và $F(3)+G(3)=78$. Khi đó $\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{33}{2}$. **B.** 33. **C.** 32. **D.** 16.

Lời giải

Do $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+C$

Theo giả thiết: $\begin{cases} F(3)+G(3)=78 \\ F(1)+G(1)=12 \\ F(0)+G(0)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(3)+C=78 \\ 2F(1)+C=12 \\ 2F(0)+C=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(3)-F(0)=\frac{65}{2} \\ F(1)-F(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $I=\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x=I_1+I_2$

Tính $I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x$. Đặt $u=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow u=3 \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow u=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\frac{-1}{2}\int_{3}^{0} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{0}^{3} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(F(3)-F(0)\right)=\frac{65}{4}$

Tính $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x$. Đặt $v=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}v=2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow v=1 \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow v=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(F(1)-F(0)\right)=-\frac{1}{4}$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{65}{4}-\frac{1}{4}=16$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+G(6)=7$ và $F(3)+G(3)=2$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** 5. **D.** $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$ nên

$\begin{cases} F(6)+G(6)=7 \\ F(3)+G(3)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(6)+C=7 \\ 2F(3)+C=2 \end{cases}$

Suy ra $F(6)-F(3)=\frac{5}{2}$.

Vậy $\int_1^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_3^6 f(x)dx=\frac{F(6)-F(3)}{3}=\frac{5}{6}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-8)+G(-8)=8$ và $F(1)+G(1)=-1$. Khi đó, $I=\int_0^3 f(1-3x)\,dx$ bằng

A. $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{-7}{6}$. **C.** $I=\frac{-1}{2}$. **D.** $I=\frac{-3}{2}$.

Lời giải

Vì $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{cases} I=\int_0^3 f(1-3x)\,dx=\frac{-1}{3}F(1-3x)\Big|_0^3=\frac{-1}{3}\left[F(-8)-F(1)\right] \\ I=\int_0^3 f(1-3x)\,dx=\frac{-1}{3}G(1-3x)\Big|_0^3=\frac{-1}{3}\left[G(-8)-G(1)\right] \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được: $2I=\frac{-1}{3}\left[F(-8)+G(-8)-F(1)-G(1)\right]=\frac{-1}{3}(8+1)=-3$.

$\Rightarrow I=\frac{-3}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=3$. Cho biết $I=\int_1^3 f(2x+1)\,dx=505$, giá trị của $P=F(7)+G(7)$ bằng

A. $P=2023$. **B.** $P=2020$. **C.** $P=2017$. **D.** $P=1013$.

Lời giải

Vì $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\begin{cases} I=\int_1^3 f(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}F(2x+1)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left[F(7)-F(3)\right] \\ I=\int_1^2 f(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}G(2x+1)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left[G(7)-G(3)\right] \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được: $2I=\frac{1}{2}\left[F(7)+G(7)-F(3)-G(3)\right]=\frac{1}{2}(P-3)=2.505$.

$\Leftrightarrow P-3=2020\Leftrightarrow P=2023$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $xF(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=6$ và $G(0)=2$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\,dx$ bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta Có: $I=\int\limits_0^1 f(3x)dx \xrightarrow[du=3dx]{u=3x} \int\limits_0^3 f(u).\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)dx=\frac{1}{3}\left(G(3)-G(0)\right).$

$\bullet G(x)=xF(x)+C\Rightarrow G(0)=0.F(0)+C=2\Rightarrow C=2$ (Vì $G(0)=2$).

$\Rightarrow G(x)=xF(x)+2\Rightarrow G(3)=3F(3)+2\Rightarrow 3F(3)-G(3)=-2(1).$

Kết hợp với giả thuyết: $F(3)+G(3)=6\ (2).$

Từ (1) và (2), ta được: $G(3)=5$. Từ đó: $I=\frac{1}{3}(5-3)=1.$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)+x, G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+2G(6)=12$ và $F(0)+2G(0)=3$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(3x)dx$ bằng:

A. $\frac{5}{3}$. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Đặt $G(x)=F(x)+x+C\Rightarrow F(x)=G(x)-x-C$.

Ta có: $\begin{cases}F(0)+G(0)=\left(G(0)-C\right)+2G(0)=3\\F(6)+2G(6)=\left(G(6)-6-C\right)+2G(6)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G(0)=1+\frac{C}{3}\\G(6)=6+\frac{C}{3}\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^2 f(3x)dx \xrightarrow[du=3dx]{u=3x} \int\limits_0^6 f(u).\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int\limits_0^6 f(x)dx=\frac{1}{3}\left(G(6)-G(0)\right)=\frac{5}{3}.$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=9$ và $F(2)+G(2)=-3$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(3x-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C\Rightarrow\begin{cases}G(5)=F(5)+C\\G(2)=F(2)+C\end{cases}$

$\begin{cases}F(5)+G(5)=9\\F(2)+G(2)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(5)+C=9\\2F(2)+C=-3\end{cases}\Leftrightarrow F(5)-F(2)=6.$

Vậy: $\int\limits_1^2 f(3x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_2^5 f(t)dt=\frac{1}{3}\left(F(5)-F(2)\right)=2.$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Tính $\int\limits_0^1 f(4x)dx$?

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{3}{8}$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 f(4x)dx=\frac{1}{4}\int_0^1 f(4x)d(4x)=\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)d(t)=\frac{1}{4}\left(F(4)-F(0)\right)=\frac{1}{4}\left(G(4)-G(0)\right)$

Do đó $8\int_0^1 f(4x)dx=F(4)-F(0)+G(4)-G(0)=3\Rightarrow\int_0^1 f(4x)dx=\frac{3}{8}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(2)-G(0)=4$ và $F(0)-G(2)=1$. Tính $\int_{-3}^{-2} f(2x+6)dx$?

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có $\int_{-3}^{-2} f(2x+6)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-2} f(2x+6)d(2x+6)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\left(F(2)-F(0)\right)=\frac{1}{2}\left(G(2)-G(0)\right)$

Do đó $4\int_{-3}^{-2} f(2x+6)dx=F(2)-F(0)+G(2)-G(0)=3\Rightarrow\int_{-3}^{-2} f(2x+6)dx=\frac{3}{4}$.

Câu 15. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$, $F(2)=1$ và $\int_0^2 F(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** -3. **D.** -1.

Lời giải

$\int_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\mathrm{d}F(x)=x.F(x)\Big|_0^2-\int_0^2 F(x)dx$

$\Leftrightarrow 2.F(2)-0.F(0)-5=2.1-5=-3$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)=5$ và $F(6)+G(6)=10$. Khi đó $\int_1^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases}F(3)+G(3)=5\\F(6)+G(6)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(3)+C=5\\2F(6)+C=10\end{cases}\Leftrightarrow F(6)-F(3)=\frac{5}{2}$.

Vậy:

$\int_1^2 f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_3^6 f(x)dx = \frac{F(6)-F(3)}{3} = \frac{5}{6}.$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2023)+G(2023)=2$ và $F(1)+G(1)=0$. Khi đó $\int_1^{1012} f(2x-1)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases} F(2023)+G(2023)=2 \\ F(1)+G(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(2023)+C=2 \\ 2F(1)+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow F(2023)-F(1)=1.$

Vậy: $\int_1^{1012} f(2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^{2023} f(x)dx = \frac{1}{2}[F(2023)-F(1)] = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(4)-G(4)=3$ và $2F(1)-G(1)=1$. Khi đó $\int_1^2 f(3x-2)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases} 2F(4)-G(4)=3 \\ 2F(1)-G(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(4)-F(4)-C=3 \\ 2F(1)-F(1)-C=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(4)-F(1)=2.$

Vậy: $\int_1^2 f(3x-2)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)dx = \frac{1}{3}[F(4)-F(1)] = \frac{1}{3}.2 = \frac{2}{3}.$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(1)+G(1)=-6$ và $F(4)+G(4)=2$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(1-3x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Vì $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giả sử $G(x)=F(x)+C$

Khi đó $G(1)=F(1)+C$ và $G(4)=F(4)+C$

Ta có $\begin{cases} F(1)+G(1)=-6 \\ F(4)+G(4)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(1)+C=-6 \\ 2F(4)+C=2 \end{cases} \Leftrightarrow F(4)-F(1)=4$

Do đó: $\int\limits_{-1}^{0} f(1-3x)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{4} f(x)dx=\frac{1}{3}(F(4)-F(1))=\frac{4}{3}$

Chọn B

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+G(6)=8$ và $F(0)+G(0)=0$. Khi đó $\int\limits_{0}^{2} f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases} F(6)+G(6)=8 \\ F(0)+G(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(6)+C=8 \\ 2F(0)+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow F(6)-F(0)=4.$

Vậy: $\int\limits_{0}^{2} f(3x)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{6} f(x)dx=\frac{1}{3}\left[F(6)-F(0)\right]=\frac{1}{3}.4=\frac{4}{3}.$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(0)-G(0)=1$, $F(2)-2G(2)=4$ và $F(1)-G(1)=-1$. Tính $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{f(\ln x)}{2x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases} 2F(0)-G(0)=1 \\ F(2)-2G(2)=4 \\ F(1)-G(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(0)-C=1 \\ -F(2)-2C=4 \\ C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(0)=2 \\ F(2)=-6 \\ C=1 \end{cases}.$

Do đó $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=-8.$

Vậy $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{f(\ln x)}{2x}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{e^2} \frac{f(\ln x)}{2}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u=-4.$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int\limits_{0}^{1} f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $F(3)+G(3)+H(3)-F(0)-G(0)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow F(3)-F(0)+G(3)-G(0)+H(3)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=1$

Lại có: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x), H(x)$ là ba nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)+G(3)+H(3)=4$ và $F(0)+G(0)+H(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $F(3)+G(3)+H(3)-F(0)-G(0)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow F(3)-F(0)+G(3)-G(0)+H(3)-H(0)=3$

$\Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=1$

Lại có: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)-G(3)=4$ và $2F(0)-G(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $2F(3)-G(3)-\left[2F(0)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\left[F(3)-F(0)\right]-\left[G(3)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3$

Lại có: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=1.$

Vậy: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=1.$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(3)+3G(2)=4$ và $2F(0)+3G(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $2F(3)+3G(2)-\left[2F(0)+3G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\left[F(3)-F(0)\right]+3\left[G(2)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow 2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=3.$

Lại có: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x.$

$\int_0^1 g(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x.$

Vậy: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x\right]$

Vậy: $\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(2x)\mathrm{d}x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=4$ và $G(0)+F(0)=1$. Khi đó $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $F(2)+G(2)-\left[G(0)+F(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow\left[F(2)-F(0)\right]+\left[G(2)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2\left(f(x)+x\right)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 x\mathrm{d}x=3$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2=3 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)-x$, $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+G(2)=4$ và $G(0)+F(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $F(2)+G(2)-\left[G(0)+F(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow \left[F(2)-F(0)\right]+\left[G(2)-G(0)\right]=3$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 \left(f(x)-x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 \left(f(x)+x\right)\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$

Lại có: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-5)+G(-5)=2$ và $F(1)+G(1)=20$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}F(1)+G(1)=20\\F(-5)+G(-5)=2\end{cases}$

$\Rightarrow \left[F(1)+G(1)\right]-\left[F(-5)+G(-5)\right]=20-2$

$\Leftrightarrow \left[F(1)-F(-5)\right]+\left[G(1)-G(-5)\right]=18$

$\Leftrightarrow F(x)\big|_{-5}^{1}+G(x)\big|_{-5}^{1}=18$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-5}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-5}^1 f(x)\mathrm{d}x=18$

$\Leftrightarrow \int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 9$.

Để tính $\int_{0}^{2} f(1-3x)\mathrm{d}x$, đặt $t = 1-3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\mathrm{d}x$, đổi cận

x	0	2
t	1	-5

Vậy $\int_{0}^{2} f(1-3x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_{1}^{-5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.9 = 3$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=9$ và $F(0)+G(0)=5$. Khi đó $\int_{0}^{2} f\left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $G(x) = F(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} F(1)+G(1)=9 \\ F(0)+G(0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(1)+F(1)+C=9 \\ F(0)+F(0)+C=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(1)+C=9 \\ 2F(0)+C=5 \end{cases} \Rightarrow F(1)-F(0)=2$$

Mặt khác, $I = \int_{0}^{2} f\left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t = \frac{1}{2}x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$

Đổi cận

x	0	2
t	0	1

Khi đó:

$I = 2\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 2\left[F(1)-F(0)\right] = 4$.

Vậy $\int_{0}^{2} f\left(\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = 4$.

.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0;1)$. Biết rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x \in (0;1)$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)}\mathrm{d}x$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$. **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$. **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$. **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Lời giải

$\forall x \in (0;1)$ ta có:

$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \dfrac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)'$.

Tính $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin^2 x.\cos x + 4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)} \mathrm{d}x$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$, đổi cận $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{t^2 + 4t}{f^2(t)} \mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{f(t)}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{3}{4b} - \dfrac{1}{4a} = \dfrac{3a - b}{4ab}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \dfrac{1}{3}$; $x^2.f'(x) = (1 - 2x^2).f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{4}\ln 3$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$. **C.** $I = \dfrac{1}{3}\ln 2$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải

Ta có $x^2.f'(x) = (1 - 2x^2).f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{1 - 2x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{x^2} - 2$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = \int\left(\dfrac{1}{x^2} - 2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{x} - 2x + c$, do $f(1) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow c = 0$.

Nên ta có $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$.

Khi đó $I = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \dfrac{x}{1 + 2x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}(1 + 2x^2)}{1 + 2x^2} = \dfrac{1}{4}\ln\left|1 + 2x^2\right|\Big|_1^2 = \dfrac{1}{4}(2\ln 3 - \ln 3) = \dfrac{1}{4}\ln 3$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $2F(3) + G(3) = 9 + 2F(-1) + G(-1)$. Khi đó $\int\limits_0^2 \left(x^2 + f(3 - 2x)\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{25}{6}$. **B.** $\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{43}{6}$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_0^2 x^2dx+\int\limits_0^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}+\int\limits_0^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3-2x\Rightarrow dt=-2dx$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_3^{-1} f\left(t\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(F\left(3\right)-F\left(-1\right)\right)$.

Mặt khác $\int\limits_{-1}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(3\right)-F\left(-1\right)=G\left(3\right)-G\left(-1\right)$.

$2F\left(3\right)+G\left(3\right)=9+2F\left(-1\right)+G\left(-1\right)\Leftrightarrow 2\left(F\left(3\right)-F\left(-1\right)\right)+\left(G\left(3\right)-G\left(-1\right)\right)=9$

$\Leftrightarrow 3\left(F\left(3\right)-F\left(-1\right)\right)=9\Leftrightarrow F\left(3\right)-F\left(-1\right)=3$.

Suy ra $I=\frac{8}{3}+\int\limits_0^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\left(F\left(3\right)-F\left(-1\right)\right)=\frac{8}{3}+\frac{3}{2}=\frac{25}{6}$.

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right)+x$, $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(6\right)+2G\left(6\right)=12$ và $F\left(0\right)+2G\left(0\right)=3$. Khi đó $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1.

Vì $F\left(x\right)+x$, $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G\left(x\right)=F\left(x\right)+x+C$.

Ta có $\begin{cases}F\left(6\right)+2G\left(6\right)=12\\F\left(0\right)+2G\left(0\right)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F\left(6\right)+2\left[F\left(6\right)+6+C\right]=12\\F\left(0\right)+2\left[F\left(0\right)+0+C\right]=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3F\left(6\right)+12+2C=12\\3F\left(0\right)+2C=3\end{cases}$

$\Rightarrow 3\left[F\left(6\right)-F\left(0\right)\right]=-3\Rightarrow F\left(6\right)-F\left(0\right)=-1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\x=2\Rightarrow t=6\end{cases}$.

Khi đó, $I=\frac{1}{3}\int\limits_0^6 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[F\left(t\right)+t\right]\Big|_0^6=\frac{1}{3}\left[F\left(6\right)+6-F\left(0\right)-0\right]=\frac{1}{3}\left(-1+6\right)=\frac{5}{3}$.

Cách 2.

Ta có $\begin{cases}F\left(6\right)+2G\left(6\right)=12\\F\left(0\right)+2G\left(0\right)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F\left(6\right)+6+2G\left(6\right)=18\\F\left(0\right)+0+2G\left(0\right)=3\end{cases}$

$\Rightarrow\left(F\left(6\right)+6\right)-\left(F\left(0\right)+0\right)+2\left[G\left(6\right)-G\left(0\right)\right]=15$

$\Rightarrow\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\left[\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=15\Rightarrow\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right)$, $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F\left(8\right)-G\left(3\right)=7$ và $G\left(8\right)-2F\left(3\right)=-3$. Khi đó $\int\limits_2^{12} f\left(\frac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Vì $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x)=F(x)+C$.

Ta có $\begin{cases}2F(8)-G(3)=7\\G(8)-2F(3)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2F(8)-\left[F(3)+C\right]=7\\F(8)+C-2F(3)=-3\end{cases}$

$\Rightarrow 3F(8)-3F(3)=4\Rightarrow F(8)-F(3)=\dfrac{4}{3}$.

Xét $I=\int\limits_{2}^{12}f\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=\dfrac{1}{2}x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=2\Rightarrow t=3\\x=12\Rightarrow t=8\end{cases}$.

Khi đó, $I=2\int\limits_{3}^{8}f(t)\mathrm{d}t=2\left[F(t)\right]\Big|_{3}^{8}=2\left[F(8)-F(3)\right]=2.\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-5)+G(-5)=4$ và $F(-8)+G(-8)=2$. Khi đó $\int\limits_{-4}^{-3}f(3x+4)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}F(-5)+G(-5)=4\\F(-8)+G(-8)=2\end{cases}\Rightarrow\left[F(-5)-F(-8)\right]+\left[G(-5)-G(-8)\right]=2$

$\Rightarrow\int\limits_{-8}^{-5}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-8}^{-5}f(x)\mathrm{d}x=2\Rightarrow\int\limits_{-8}^{-5}f(x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $u=3x+4\Rightarrow \mathrm{d}u=3\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-4}^{-3}f(3x+4)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-8}^{-5}f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-8}^{-5}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(2)+2F(-2)+3F(4)=4$ và $4F(2)+9F(-2)+8F(4)=5$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{1}[6f(2x)+f(x+3)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1}[6f(2x)+f(x+3)]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}6f(2x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}f(x+3)\mathrm{d}x$

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$, khi đó $\int\limits_{-1}^{1}6f(2x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{-2}^{2}f(u)\mathrm{d}u$.

Đặt $v=x+3\Rightarrow \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$, khi đó $\int\limits_{-1}^{1}f(x+3)\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{4}f(v)\mathrm{d}v$.

Suy ra, $I=3\int\limits_{-2}^{2}f(u)\mathrm{d}u+\int\limits_{2}^{4}f(v)\mathrm{d}v=3[F(2)-F(-2)]+[F(4)-F(2)]=2F(2)-3F(-2)+F(4)$

$=3[2F(2)+2F(-2)+3F(4)]-[4F(2)+9F(-2)+8F(4)]=3.4-5=7$

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(10)+G(10)=5$ và $F(1)+G(1)=3$. Khi đó $3\int_0^3 f(3x+1)\,dx$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Vì $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ nên $G(x)=F(x)+C$

$$\begin{cases} F(10)+G(10)=5 \\ F(1)+G(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(10)+F(10)+C=5 \\ F(1)+F(1)+C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(10)+C=5 \\ 2F(1)+C=3 \end{cases} \Rightarrow F(10)-F(1)=1.$$

Xét $3\int_0^3 f(3x+1)dx$. Đặt $t=3x+1 \Rightarrow dt=3dx$.

$$3\int_0^3 f(3x+1)dx=\int_1^{10} f(t)\,dt=F(10)-F(1)=1.$$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(1)+G(1)=5$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_0^{2023} f\left(\frac{x}{2023}\right)dx$ bằng

A. 2023. **B.** $\frac{2}{2023}$. **C.** $\frac{4}{2023}$. **D.** 4046.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

Theo giả thiết: $\begin{cases} F(1)+G(1)=5 \\ F(0)+G(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(1)+C=5 \\ 2F(0)+C=1 \end{cases} \Rightarrow F(1)-F(0)=2.$

Đặt $t=\frac{x}{2023} \Rightarrow dt=\frac{1}{2023}dx \Rightarrow dx=2023dt$

+ $x=0 \Rightarrow t=0$

+ $x=2023 \Rightarrow t=1$

Khi đó $\int_0^{2023} f\left(\frac{x}{2023}\right)dx=2023\int_0^1 f(t)\,dt=2023\int_0^1 f(x)\,dx=2023\left[F(1)-F(0)\right]=4046.$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=2023$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_1^{e^2} \frac{\ln x f(\ln^2 x)}{x}dx$ bằng

A. 1011. **B.** $\frac{1011}{2}$. **C.** 2022. **D.** $\frac{2023}{2}$.

Lời giải

+Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases}F(4)+G(4)=2023\\F(0)+G(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(4)+C=2023\\2F(0)+C=1\end{cases}\Leftrightarrow F(4)-F(0)=1011.$

+ Đặt $u=\ln^2 x\Rightarrow du=2\frac{\ln x}{x}dx$.

Do đó, $\int_1^{e^2}\frac{\ln x f(\ln^2 x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(u)du=\frac{1}{2}(F(4)-F(0))=\frac{1011}{2}$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(15)+G(15)=38$ và $F(3)+G(3)=20$. Khi đó $\int_1^5 f(3x)dx$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $G(x)=F(x)+C$.

$\begin{cases}F(15)+G(15)=38\\F(3)+G(3)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2F(15)+C=38\\2F(3)+C=20\end{cases}\Rightarrow F(15)-F(3)=9$.

Vậy $\int_1^5 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_3^{15} f(x)dx=\frac{F(15)-F(3)}{3}=3$.

Câu 41. Cho $\int_0^3 f(x)dx=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2+4\int_1^3 f(x)dx$.

A. 40. **B.** 30. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 f(x)dx=6=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx=6-\int_0^1 f(x)dx=6-m$, với $m=\int_0^1 f(x)dx$.

Suy ra $T=m^2+4(6-m)=(m-2)^2+20\geq 20$. Vậy $T_{\min}=20$.

Câu 42. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2 x.\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{6}$. **B.** $I=\frac{\pi}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{-1}{3}$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x.$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

Vậy $I=\frac{1}{6}$.

Câu 43. Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\sqrt{2}$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $S=a-b+c-d$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** –2.

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t\Rightarrow \ln x=t^2-1\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x}=2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\to t=1\\ x=e\to t=\sqrt{2}\end{cases}$. Khi đó:

$$\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{\left(t^2-1\right)2t\mathrm{d}t}{t}=2\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Suy ra $a=4;b=3;c=2;d=3\Rightarrow S=a-b+c-d=4-3+2-3=0$.

Câu 44. Cho $\int\limits_{0}^{4}\frac{2x}{3+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $I=a+b+c$ bằng

A. $I=86$. **B.** $I=24$. **C.** $I=-24$. **D.** 38.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow t^2=2x+1\Rightarrow 2x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=3$.

Khi đó:

$$\int_1^3 \frac{t^2-1}{3+t}.t\,dt = \int_1^3 \frac{t^3-t}{3+t}dt = \int_1^3 \frac{t^3+27-(t+3)-24}{3+t}dt$$

$$= \int_1^3 \frac{(t+3)(t^2-3t+9)-(t+3)-24}{3+t}dt = \int_1^3 \left(t^2-3t+9-1-\frac{24}{3+t}\right)dt$$

$$= \left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+8t-24\ln|3+t|\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{39}{2}-24\ln 6\right)-\left(\frac{41}{6}-24\ln 4\right)$$

$$= \frac{38}{3}-24\ln 3-24\ln 2+48\ln 2 = \frac{38}{3}+24\ln 2-24\ln 3$$

Suy ra $\begin{cases} a=38 \\ b=24 \\ c=-24 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=38.$

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$. Biết $f(-5)+f(7)=-3$ và $f(0)+f(2)=8$. Giá trị của $P=f(4)+f(1)+f(-2)$ bằng

A. -7. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Có:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx=\int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{x-3}{x+1}+C_1 \text{ khi } x>3 \\ \frac{1}{4}\ln\frac{3-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } -1<x<3 \\ \frac{1}{4}\ln\frac{x-3}{x+1}+C_3 \text{ khi } x<-1 \end{cases}$$

Có: $\begin{cases} f(-5)+f(7)=-3 \\ f(0)+f(2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\ln 2+C_3+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}+C_1=-3 \\ \frac{1}{4}\ln 3+C_2+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}+C_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_3=-3 \\ 2C_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_3=-3 \\ C_2=4 \end{cases}$

Có: $P=f(4)+f(1)+f(-2)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}+C_1+\frac{1}{4}\ln 1+C_2+\frac{1}{4}\ln 5+C_3=C_1+C_3+C_2=1.$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(6)=10$, $\int_0^6 f(x)dx=8$. Tính tích phân $I=\int_0^2 x.f'(3x)dx$.

A. $I=20$. **B.** $I=12$. **C.** $I=52$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_0^2 x.f'(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int\limits_0^2 3x.f'(3x)\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{9}\int\limits_0^6 x.f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^6 x.f'(x)\mathrm{d}x=x.f(x)\Big|_0^6-\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x=6f(6)-8=6.10-8=52$.

Vậy $I=52$.

Câu 47. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm bằng nhau tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\begin{cases}f(3)+g(3)=5\\ f(1)+g(1)=-1\end{cases}$. Khi đó $\int_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Giả thiết suy ra: $f(x)=g(x)+C$

Ta có: $\begin{cases}f(3)+g(3)=5\\ f(1)+g(1)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2f(3)=5+C\\ 2f(1)=-1+C\end{cases}\Rightarrow f(3)-f(1)=3$.

Do vậy: $\int\limits_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f'(t)dt=\frac{1}{2}f(t)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(f(3)-f(1)\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị biểu thức $P=f(0)+f(4)$.

A. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. **B.** $2+\ln\frac{3}{5}$. **C.** $1+\ln\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Lời giải

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1\ khi\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2\ khi\ x\in(-1;1)\end{cases}$$

Ta có $f(-3)+f(3)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_1=0\Rightarrow C_1=0$

Và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Rightarrow\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2\Rightarrow C_2=1$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| khi\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1 khi\ x\in(-1;1)\end{cases}$

Vậy $P=f(0)+f(4)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16,\ \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 7.

Lời giải

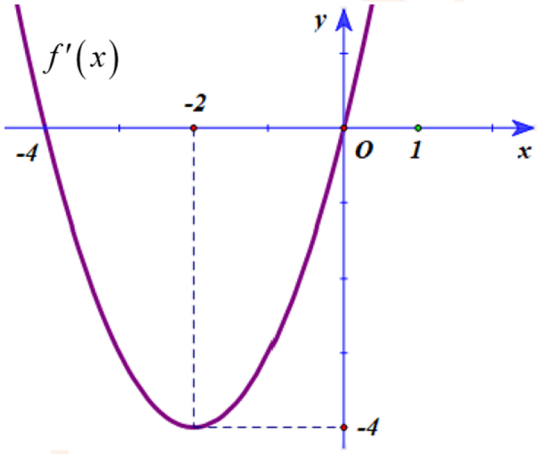
Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x;\ x\in[0;1]\Rightarrow t\in[0;2]$.

Khi đó $I=\int_0^2\frac{t}{2}f'(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f(t)\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(tf(t)\big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}(32-4)=7$.

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng bị giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành biết $f(0)=0$



A. $\frac{80}{9}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** 36. **D.** 252.

Lời giải

Giả sử hàm số $y=f'(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua các điểm $(0;0);(-4;0);(-2;-4)$ suy ra $\begin{cases}c=0\\ 4a-2b=-4\\ 16a-4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ a=1\\ b=4\end{cases}$

Vậy $f'(x)=x^2+4x$.

$f(x)=\int\left(x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+2x^2+C$.

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3+2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-6\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng

$S=\int_{-6}^{0}\left|\frac{1}{3}x^3+2x^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-6}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3\right)\right|_{-6}^{0}=36$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 41. **(Đề TK BGD 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^4+6x^2+mx$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-4x^3+12x+m$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow -4x^3+12x+m=0 \quad (1)$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow m=4x^3-12x$.

Xét hàm số $g(x)=4x^3-12x$ có $g'(x)=12x^2-12$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-12=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	8	↘	-8	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $-8<m<8$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-7,-6,-5,...,5,6,7\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 41 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

HÀM SỐ BẬC BA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(0;2023)$ để hàm số $y=-x^3+12x^2+mx$ có hai điểm cực trị?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

A. $\frac{5}{4}\le m\le 2$. **B.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **C.** $2<m<\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-2\right)x$ đồng biến trên khoảng $\left(12;+\infty\right)$?

A. 10. **B.** 13. **C.** 0. **D.** 11.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$, để hàm số $y=\left|mx^3-3mx^2+\left(3m-2\right)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 7. Cho hàm số $y=\left(m-2\right)x^3-mx-2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị?

A. $0<m<2$. **B.** $m<1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$. **D.** $m>1$.

Câu 8. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{9}{2}$. **D.** $m=\pm2$.

Câu 9. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=4x^3+mx^2-3x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để $x_1+4x_2=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{9}{2}$. **D.** $m=\pm2$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B và $M\left(1;-2\right)$ thẳng hàng.

A. $m=-\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{2}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 cực trị.

A. $\dfrac{5}{4}\le m\le 2$. **B.** $2<m<\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{4}<m<2$. **D.** $-\dfrac{5}{4}<m<2$.

Câu 12. Cho $\left(C\right)$ là đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ có điểm cực đại là $M\left(1;3\right)$ và $\left(C\right)$ cắt trục Oy tại điểm N có tung độ bằng -1. Tính $f\left(2\right)$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+(m-1)x+m$ (với m là tham số), hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8

Câu 14. Cho hàm số $y=x^3-\left(m+6\right)x^2+\left(2m+9\right)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge -2 \\ m \le -6 \end{array}\right.$. **B.** $m \ge -2$. **C.** $m \le -6$. **D.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \ne \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - 24x^2 - mx$ có ba điểm cực trị?

A. 126. **B.** 128. **C.** 127. **D.** 129.

Câu 16. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + \left(m^2 - 4\right)x^2 + 1 - m$ có một điểm cực trị

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

C. $[-2;2]$. **D.** $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

Câu 17. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2;-2)$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -20$. **B.** $S = -14$. **C.** $S = 14$. **D.** $S = 34$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn.

A. $m > 0$. **B.** $m < 1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $m \le 1$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - \left(m^2 - 2023m\right)x^2 - 2024$ có đúng một cực trị?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 20. Cho hàm số $y = \left(m^2 - 2m\right)x^4 + (m-1)x^2 + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 103. **B.** 100. **C.** 101. **D.** 102

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - \left(m^2 - 2023m\right)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $m \in (-2023;2023)$ để hàm số có 3 cực trị.

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4046.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 3mx$ có ba điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ sao cho hàm số $y = x^4 + (m+2)x^2 + 4$ có 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 25. Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0 \le m \le 1$. **B.** $m \le 0 \vee m \ge 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0 \vee m > 1$.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (0;2023)$ để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có một điểm cực trị?

A. 2013. **B.** 2015. **C.** 2014. **D.** 2012.

HÀM SỐ KHÁC

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^4}{4}-x^3+x(1-m)$ có ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^3+(m+2)x^2-3$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại?

A.. **B.**. **C.**. **D.** 6.

Câu 29. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A. 496. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-4x^3+(4-m)x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(0;2023)$ để hàm số $y=x^5-80x^2+5(m-1)x-2023$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 1971 **B.** 1973

C. 1990 **D.** 1991

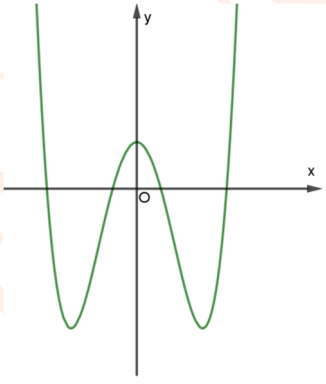
Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=x^4+x^3-mx^2$ có 3 điểm cực trị?

A. $m\in\left(-\frac{9}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **B.** $m\in(-\infty;0)$. **C.** $m\in\left(-\frac{9}{32};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^4+4x^3+18x^2+mx$ có 3 điểm cực trị ?

A. 127. **B.** 100. **C.** 126. **D.** 115.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x)=3f^4(x)+2f^2(x)+5$

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

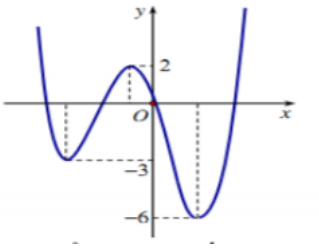
Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+(m-1)x$ có bốn điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x^4-6x^3+mx+5$ có ba điểm cực trị?

A. 17 **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 37. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D..**

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$ có 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 39. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-mx+1$ có ba điểm cực trị.

A. $(-4;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-4)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

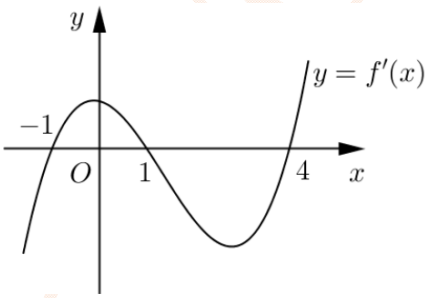
Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^4}{3}-2x^2-mx+2023$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-6x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 10. **C.** Vô số. **D.** 6.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=g(x)=f\left(x^4-2x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A.. **B..** **C.** 7. **D..**

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-3	↗	$+\infty$

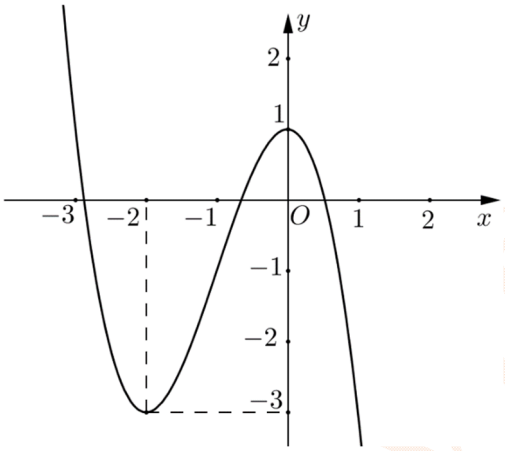
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f^2(x)-mf(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 6. **C.** 16. **D.** 13.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^3+mx+2023$ có bốn điểm cực trị?

A. 36. **B.** 34. **C.** 37. **D.** 35.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=2022\left(f^2(x)-mf(x)\right)+2023m$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** -14. **D.** -18.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3\left(x^2-2mx+m+6\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 47. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 26.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=3x^5-10x^3-15(1+m)x+2$ có hai điểm cực trị?

A. 11. **B.** 12. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-5)^3\left(x^2-2mx-m+6\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-12;12)$ để hàm số $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{m+2}{3}x^3 - (m+3)x + 2022$ có hai điểm cực trị?

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = x^4 + x^3 - 3x^2 - mx + m^2 + 2023$ có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu ?

A. 19. **B.** 17. **C.** 37. **D.** 35.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - (1+m)x - 2023$ có hai điểm cực trị ?

A. 20. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 53. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + (m+1)x - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $-1 < m < 1$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $-1 \le m \le 1$. **D.** $-1 < m \le 0$.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - 4x^2 - mx + 2$ có 3 điểm cực trị, trong đó có đúng 2 điểm cực trị âm.

A.. **B.** 4 **C.** 6 **D.** 25.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 2mx + 2$ có 3 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số sau có ba điểm cực trị $y = 3x^4 + 4(m+2)x^3 + 6(m^2 - m - 3)x^2 - 12m^2x$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = x^4 - (2m+1)x^3 + (m+4)x^2 + (5m-6)x + 2m - 12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;\ 10]$ để hàm số $y = |f(x)|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

HÀM SỐ BẬC BA

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(0;2023)$ để hàm số $y=-x^3+12x^2+mx$ có hai điểm cực trị?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2019.

Lời giải

Ta có: $y'=-3x^2+24x+m$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+24x+m=0\quad(1)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow m=3x^2-24x$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-24x$ có $g'(x)=6x-24$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow 6x-24=0\Leftrightarrow x=4$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-48	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m\in(-48;+\infty)$.

Do $m\in(0;2023)$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1,9,10,...,2022\}$

Vậy có 2022 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2-(m-1)x+m+1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ mx^2-(m-1)x+m+1=0(*)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m-(m-1)+m+1 \neq 0 \\ (m-1)^2-4m(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ -3m^2-6m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

A. $\dfrac{5}{4} \le m \le 2$. **B.** $-\dfrac{5}{4} < m < 2$. **C.** $2 < m < \dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{4} < m < 2$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$,

Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow 3x^2-2(2m-1)x+(2-m)=0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m-5>0 \\ 2-m>0 \\ 2m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{5}{4} \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m<2 \\ m>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2.$$

Vậy với $\dfrac{5}{4}<m<2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2+m+2$.

Suy ra $y'=g'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

BBT

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$m+2$	↗	$m+6$	↘	$-\infty$

Suy ra hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2+m+2$ có 2 điểm cực trị.

Hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị khi $-x^3+3x^2+m+2=0$ có 3 nghiệm đơn khác 0 và 2.

Khi đó $\begin{cases}m+6>0\\m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-6\\m<-2\end{cases}\Leftrightarrow -6<m<-2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|-x^3+3x^2+m+2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-2\right)x$ đồng biến trên khoảng $(12;+\infty)$?

A. 10. **B.** 13. **C.** 0. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-2\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-\sqrt{2}\\x=m+\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Đặt $x_1=m-\sqrt{2}$; $x_2=m+\sqrt{2}$, $(x_1<x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$y(x_1)$	↘	$y(x_2)$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(12;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in(12;+\infty)$

$\Leftrightarrow x_2\leq 12\Leftrightarrow m+\sqrt{2}\leq 12\Leftrightarrow m\leq 12-\sqrt{2}$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Suy ra có 10 giá trị nguyên dương thỏa mãn bài toán.

Vậy chọn đáp án**#A.**

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$, để hàm số $y=\left|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

TH1: $m=0$

Thay vào hàm số y ta được: $y=\left|-2x+2\right|$ có 1 điểm cực trị nên $m=0$ loại.

TH2: $m\neq 0$

Hàm số $y=\left|mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

Xét phương trình: $f(x)=0\Leftrightarrow mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(mx^2-2mx+m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ mx^2-2mx+m-2=0(*)\end{array}\right.$

Để $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ m-2m+m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 2m>0\Leftrightarrow m>0 \\ -2\neq 0\end{cases}$

Do $m\in[-10;10]$ nên $m\in(0;10]$

Vậy có 10 giá trị m thoả mãn.

Câu 7. Cho hàm số $y=(m-2)x^3-mx-2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị?

A. $0<m<2$. **B.** $m<1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0\end{array}\right.$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Tính $y'=3(m-2)x^2-m$.

$y'=0\Leftrightarrow 3(m-2)x^2-m=0\ (1)$.

+ TH1: Xét $m=2\Rightarrow y'=-2<0\ \forall x$ nên hàm số đã cho không có cực trị.

+ TH2: Xét $m\neq 2$

Hàm số có cực trị khi $\Delta'>0\Leftrightarrow m(m-2)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<0\end{array}\right.$

Câu 8. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=\pm\frac{9}{2}$. **D.** $m=\pm2$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=3\left[x^2-2mx+\left(m^2-1\right)\right]$. Có $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$

YCBT $\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=7\Leftrightarrow4m^2-3\left(m^2-1\right)=7\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow m=\pm2$.

Câu 9. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=4x^3+mx^2-3x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để $x_1+4x_2=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $m=\pm\frac{9}{2}$. **D.** $m=\pm2$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=12x^2+2mx-3$. Có $\Delta'=m^2+36>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2.Theo Viet, ta có $x_1+x_2=-\frac{m}{6}$ kết hợp với yêu cầu bài toán $x_1+4x_2=0$. Suy ra $x_1=-\frac{2}{9}m,\ x_2=\frac{m}{18}$.

Lại có theo Viet: $x_1x_2=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{9}m\right).\frac{m}{18}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m^2=\frac{81}{4}\Leftrightarrow m=\pm\frac{9}{2}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B và $M\left(1;-2\right)$ thẳng hàng.

A. $m=-\sqrt{2}$. **B.** $m=\sqrt{2}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$

Nên hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow0\neq2m\Leftrightarrow m\neq0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;2\right)$ và $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}=\left(-1;4\right),\ \overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và M thẳng hàng $\Leftrightarrow\frac{2m-1}{-1}=\frac{4-4m^3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ \left(loai\right)\\m=\pm\sqrt{2}\ \left(thoa\right)\end{array}\right.$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 cực trị.

A. $\frac{5}{4}\le m\le2$. **B.** $2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $-\frac{5}{4}<m<2$.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$,

Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Tức phương trình $3x^2-2(2m-1)x+(2-m)=0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m-5>0\\ \dfrac{2-m}{3}>0\\ \dfrac{2}{3}(2m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\dfrac{5}{4}\\ m<-1\end{array}\right.\\ m<2\\ m>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<m<2.$$

Vậy điều kiện của m là: $\frac{5}{4}<m<2$.

Câu 12. Cho (C) là đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có điểm cực đại là $M(1;3)$ và (C) cắt trục Oy tại điểm N có tung độ bằng -1. Tính $f(2)$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$f''(x)=6x+2a$.

Theo giả thiết, đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là $M(1;3)$ và (C) cắt trục Oy tại điểm N có tung độ bằng -1 nên:

$$\begin{cases}f(1)=3\\ f'(1)=0\\ f''(1)<0\\ f(0)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a+b+c=3\\ 3+2a+b=0\\ 6+2a<0\\ c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-6\\ b=9\\ c=-1\end{cases}.$$

Khi đó $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$. Vậy $f(5)=19$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+(m-1)x+m$ (với m là tham số), hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8

Lời giải

$y' = x^2 - 2x + (m-1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi $y' = x^2 - 2x + (m-1) \geq 0 \ \forall m \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow m \geq -x^2 + 2x + 1 \ \forall m \in (1;+\infty)$

Đặt $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \geq 2$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow m \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 8 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - (m+6)x^2 + (2m+9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{array}\right.$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -6$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9.$

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3.$ (1)

$y(1) = m + 2.$

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) = -m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2.$

Ycbt $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) < 0$

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2\right] < 0 \Leftrightarrow (m+2).\left(4m^3 + 36m^2 + 81m + 54\right) > 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m < -6 \\ m > -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$. (2)

Từ (1), (2) ta có ycbt $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-24x^2-mx$ có ba điểm cực trị?

A. 126. **B.** 128. **C.** 127. **D.** 129.

Lời giải

Ta có: $y'=4x^3-48x-m$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-48x-m=0\ (1)$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow m=4x^3-48x$.

Xét hàm số $g(x)=4x^3-48x$ có $g'(x)=12x^2-48$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-48=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	64	↘	-64	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $-64<m<64$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-63,-62,-61,...,63\}$.

Vậy có 127 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 16. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+(m^2-4)x^2+1-m$ có một điểm cực trị

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

C. $[-2;2]$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3+2(m^2-4)x=2x(x^2+m^2-4)$

Hàm số đã cho là hàm số trùng phương nên có đúng một điểm cực trị khi $y'=0$ có một nghiệm

Hay $2x(x^2+m^2-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-m^2+4\end{array}\right.$ có đúng một nghiệm

$\Leftrightarrow -m^2+4\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 2\end{array}\right.$.

Chú ý:

+ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}ab\ge 0\\a^2+b^2>0\end{array}\right.$. (1)

Đặc biệt: Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\ (a\ne 0)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $ab\ge 0$.

+ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $ab<0.\ (2)$

Câu 17. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+ax+b$ có điểm cực tiểu là $A(2;-2)$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=-20$. **B.** $S=-14$. **C.** $S=14$. **D.** $S=34$.

Lời giải

Đạo hàm: $y'=4x^3-6x+a$

Đồ thị có điểm cực tiểu $A(2;-2)\Rightarrow\begin{cases}y'(2)=0\\y(2)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-20\\b=34\end{cases}$

Thử lại: Với $a=-20,\ b=34$ ta được $y=x^4-3x^2-20x+34$.

Ta có $y'=4x^3-6x-20;\ y'=0\Leftrightarrow x=2$.

BBT

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ (thỏa). Vậy $\begin{cases}a=-20\\b=34\end{cases}\Rightarrow S=14$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn.

A. $m>0$. **B.** $m<1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\le 1$.

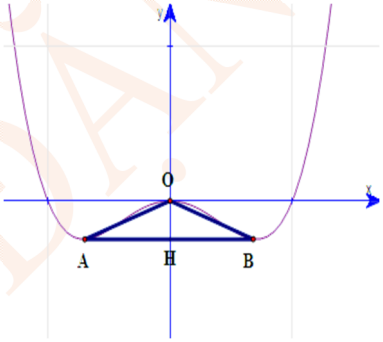
Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị khi phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có ba nghiệm $x=0, x=\pm\sqrt{m}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $O(0;0), A\left(-\sqrt{m};-m^2\right), B\left(\sqrt{m};-m^2\right)$.



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow H\left(0;-m^2\right)$.

Ta có tam giác OAB cân tại O và có $OH=\left|-m^2\right|=m^2,\ AB=2\sqrt{m}$.

Suy ra $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OH.AB=\frac{1}{2}.m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}$.

Theo yêu cầu bài toán $S_{\Delta OAB}<1\Leftrightarrow m^2\sqrt{m}<1\Rightarrow 0<m<1$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2023m\right)x^2-2024$ có đúng một cực trị?

A. 2022. **B.** 2021. **C. 2023.** **D.** 2024.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=-2024$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0\Rightarrow m^2>0$.

Hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2023m\right)x^2-2024$ có đúng một cực trị $\Leftrightarrow -m^2.\left(m^2-2023m\right)\geq 0\Leftrightarrow m^2-2023m\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 2023$.

Vì $m\neq 0\Rightarrow 0<m\leq 2023$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có $m\in\{1;2;....;2023\}$

Vậy có tất cả 2023 giá trị m nguyên.

Câu 20. Cho hàm số $y=\left(m^2-2m\right)x^4+\left(m-1\right)x^2+1$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A. 103. **B.** 100. **C.** 101. **D.** 102

Lời giải

Với $m^2-2m=0$ thì hàm số đã cho không thể có 3 điểm cực trị

Với $m^2-2m\neq 0$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì $ab=f\left(x\right)=\left(m^2-2m\right)\left(m-1\right)<0.$

Lập bảng xét dấu cho $f\left(m\right)$ ta được $f\left(m\right)<0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(1;2\right).$

Kết hợp $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\in[-100;100]\end{cases}\Rightarrow$ có 100 giá trị nguyên của m.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2023m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Lời giải

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow y=-1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0\Rightarrow m^2>0$.

Hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2023m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị $\Leftrightarrow -m^2.\left(m^2-2023m\right)\geq 0\Leftrightarrow m^2-2023m\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 2023$.

Vì $m\neq 0\Rightarrow 0<m\leq 2023$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2023 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số có 3 cực trị.

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2023. **D.** 4046.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \ (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy các giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu bài toán là: 2022 giá trị.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 3mx$ có ba điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

. Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 12x + 3m$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x + 3m = 0 \ (1)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $(1) \Leftrightarrow 3m = -4x^3 + 12x$.

Xét hàm số $g(x) = -4x^3 + 12x$

Ta có $g'(x) = -12x^2 + 12$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi:

$$-8 < 3m < 8 \Leftrightarrow \frac{-8}{3} < m < \frac{8}{3}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ sao cho hàm số $y = x^4 + (m+2)x^2 + 4$ có 3 điểm cực trị?

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 8 . **D.** 9 .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 2(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 + 2(m+2) = 0 \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $4x^2 + 2(m+2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 .

$\Leftrightarrow 4x^2 = -2(m+2) > 0 \Leftrightarrow m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9;-8;...;-3\}$. Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 25. Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một điểm cực trị khi

A. $0 \le m \le 1$. **B.** $m \le 0 \vee m \ge 1$. **C.** $m = 0$. **D.** $m < 0 \vee m > 1$.

Lời giải

Trường hợp 1: $m = 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$. Hàm số này có 1 cực trị là cực đại $\Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ thì hàm số đã cho trở thành $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m-1)x = 2x(2mx^2 + m - 1)$

; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2mx^2 + m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{1-m}{2m} \quad (*) \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu một lần $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2m} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $0 \le m \vee m \ge 1$.

Giải nhanh: Với a khác 0 thì hàm số đã cho có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \ge 0 \Rightarrow m(m-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le 0 \end{array}\right.$.

HÀM SỐ KHÁC

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (0;2023)$ để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có một điểm cực trị?

A. 2013. **B.** 2015. **C.** 2014 . **D.** 2012 .

Lời giải

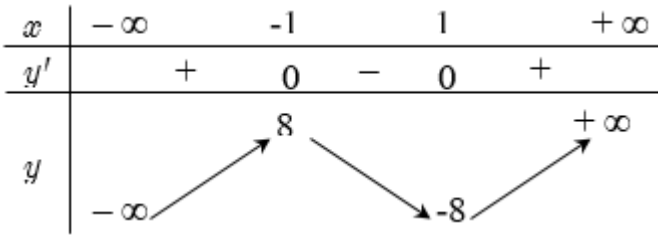
Ta có: $y' = -4x^3 + 12x + m$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x + m = 0 \quad (1)$.

Để hàm số có một điểm cực trị thì phương trình (1) phải có một nghiệm đơn hoặc một nghiệm đơn và một nghiệm kép.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow m = 4x^3 - 12x$.

Xét hàm số $g(x)=4x^3-12x$ có $g'(x)=12x^2-12$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-12=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên của $g(x)$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có một nghiệm đơn hoặc một nghiệm đơn và một nghiệm kép khi $m\in(-\infty;-8]\cup[8;+\infty)$. Do $m\in(0;2023)$ và $m\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow m\in\{8,9,10,...,2022\}$

Vậy có 2015 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x^4}{4}-x^3+x(1-m)$ có ba điểm cực trị.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $y'=x^3-3x^2+1-m$

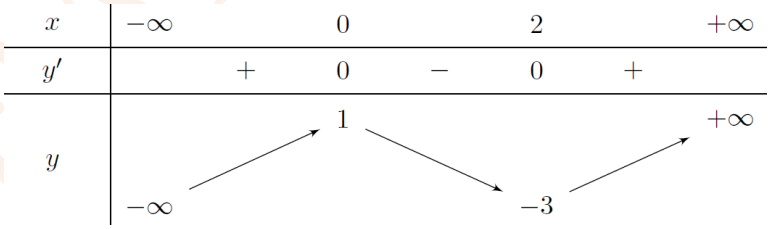
Để hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt. Ta có: $x^3-3x^2+1-m=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=m$.

Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x^2+1$

$f'(x)=3x^2-6x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $-3<m<1$. Nên có 3 giá trị nguyên.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^3+(m+2)x^2-3$ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại?

A.. **B.**. **C.**. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 6mx^2 + 2(m+2)x = 2x\left[2x^2 - 3mx + (m+2)\right]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3mx + (m+2) = 0 (*) \end{array}\right.$$

+) ***Trường hợp 1***: Phương trình (*) có nghiệm $x = 0$, khi đó $m = -2$. Thay $m = -2$ vào phương trình (*) ta được: $2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Ta có xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy khi $m = -2$ hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

+) ***Trường hợp 2***: Phương trình (*) có không có nghiệm $x = 0$, khi đó $m \neq -2$.

Dễ thấy phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt, khi đó hàm số đã cho có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Khi phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép (khác 0) thì phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm đơn hoặc 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép, lúc này hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu $x = 0$.

Như vậy, khi $m \neq -2$, hàm số đã cho có một điểm cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (*) có $\Delta \le 0$.

$$\Delta \le 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 8(m+2) \le 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 8m - 16 \le 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 4\sqrt{10}}{9} \le m \le \frac{4 + 4\sqrt{10}}{9}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các phần tử của S là

A. 496. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 15.

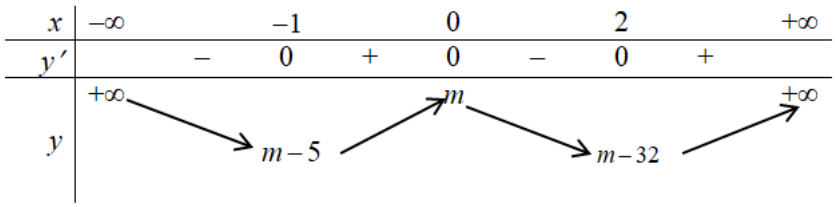
Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên



Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị, để hàm $y=|f(x)|$ có 7 cực trị thì phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$.

Vì m nguyên nên $m\in\{1,2,3,4\}$

Tổng các giá trị là 10.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-4x^3+(4-m)x+1$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

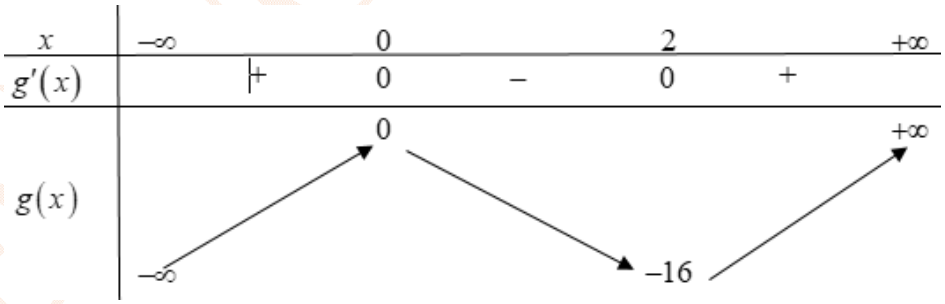
Ta có $y'=4x^3-12x^2+4-m$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2=m-4$ (1)

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Xét $g(x)=4x^3-12x^2$ có $g'(x)=12x^2-24x$

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$



Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $-16<m-4<0\Leftrightarrow -12<m<4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-11;-10;-9;...;2;3\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(0;2023)$ để hàm số $y=x^5-80x^2+5(m-1)x-2023$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 1971 **B.** 1973

C. 1990 **D.** 1991

Lời giải

Xét hàm số $y=x^5-80x^2+5(m-1)x-2023$

$y'=5x^4-160x+5(m-1)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi $5x^4-160x+5(m-1)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow m\geq -x^4+32x+1,\forall x\in(1;+\infty)$.

Xét hàm số $\Leftrightarrow g(x)=-x^4+32x+1$

$g'(x)=-4x^3+32;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Ta có BBT:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	32	↗	49	↘	$-\infty$

Từ BBT ta có, hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi $m\geq 49$. Mà $m\in(0;2023)$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 1973 giá trị của m.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=x^4+x^3-mx^2$ có 3 điểm cực trị?

A. $m\in\left(-\frac{9}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **B.** $m\in(-\infty;0)$. **C.** $m\in\left(-\frac{9}{32};+\infty\right)\setminus\{0\}$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=4x^3+3x^2-2mx=x(4x^2+3x-2m)$.

Hàm số có 3 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua 3 điểm nghiệm đó.

$\Leftrightarrow 4x^2+3x-2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=9+32m>0\\ -2m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>\frac{-9}{32}\\ m\neq 0\end{cases}.$$

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^4+4x^3+18x^2+mx$ có 3 điểm cực trị ?

A. 127. **B.** 100. **C.** 126. **D.** 115.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -4x^3 + 12x^2 + 36x + m$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 12x^2 - 36x = f(x)$ (1).

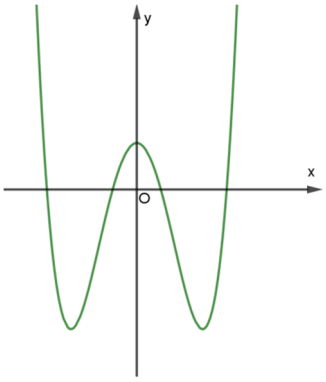
Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	20	↘	-108	↗	$+\infty$

Suy ra $-108 < m < 20 \Rightarrow m \in \{-107; -106; \ldots; -1; 0; 1; \ldots; 19\}$. Vậy có 127 số nguyên m.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x) = 3f^4(x) + 2f^2(x) + 5$

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$F(x) = 3f^4(x) + 2f^2(x) + 5 \Rightarrow F'(x) = 12f^3(x)f'(x) + 4f(x)f'(x)$

$F'(x) = 4f(x)f'(x)\left(3f^2(x) + 1\right)$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 0$ (vì $3f^2(x) + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$)

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4. (*)

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị phân biệt x_5, x_6, x_7 suy ra $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_5, x_6, x_7 lần lượt khác các giá trị x_1, x_2, x_3, x_4. (**)

Từ (*), (**) suy ra phương trình $F'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $F(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(x)=-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+(m-1)x$ có bốn điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=f'(x)=-x^4+2x^2+m-1$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow -x^4+2x^2+m-1=0 \quad (1)$.

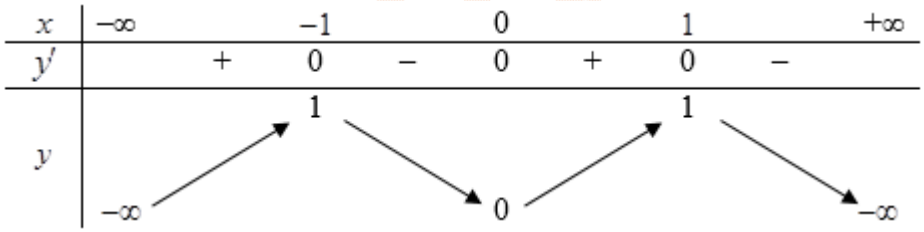
Để hàm số có bốn điểm cực trị thì phương trình (1) phải có bốn nghiệm phân biệt và $y'=f'(x)$ đổi dấu liên tiếp qua 4 nghiệm đó.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 1-m=-x^4+2x^2$.

Xét hàm số $y=g(x)=-x^4+2x^2$ có $g'(x)=-4x^3+4x$. Cho

$$g'(x)=0\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của $y=g(x)=-x^4+2x^2$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi $0<1-m<1\Leftrightarrow -1<-m<0\Leftrightarrow 0<m<1$. Với $0<m<1$ ta thấy $y'=f'(x)$ luôn đổi dấu liên tiếp qua 4 nghiệm đó.

Do $m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m\in\phi$.

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x^4-6x^3+mx+5$ có ba điểm cực trị?

A. 17 **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $y'=12x^3-18x^2+m$. Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 12x^3-18x^2+m=0 \quad (1)$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow m=-12x^3+18x^2$.

Xét hàm số $g(x)=-12x^3+18x^2$ có $g'(x)=-36x^2+36x$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow -36x^2+36x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

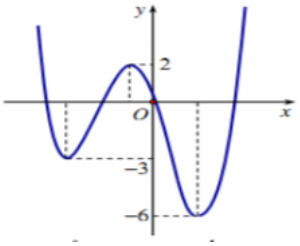
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	6	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $0<m<6$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1,2,3,4,5\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 37. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D..**

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x+1)+m$.

Vì hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị do đó hàm số $g(x)=f(x+1)+m$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|f(x+1)+m\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x+1)=-m$ phải có 4 nghiệm đơn phân biệt hay $-3<-m<2\Leftrightarrow -2<m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2\}$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$ có 5 điểm cực trị.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

$y=f(x)=\left(x^3-3x-m+1\right)^2$

Ta có $f'(x)=2\left(3x^2-3\right)\left(x^3-3x-m+1\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x^3-3x+1=m(*)\end{array}\right.$

Để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có ba nghiệm phân biệt khác ± 1.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x + 1$ là hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt khác ± 1 khi và chỉ khi $-3 < m < 1$.

Khi đó $m \in \{-2; -1; 0\}$. Có ba giá trị nguyên của m.

Câu 39. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - mx + 1$ có ba điểm cực trị.

A. $(-4; 0)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -4)$. **D.** $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - mx + 1$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm bậc ba $g(x) = x^3 - 3x^2$, có

$g'(x) = 3x^2 - 6x;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$.

Ta có BBT

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có YCBT $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^4}{3} - 2x^2 - mx + 2023$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{4}{3}x^3 - 4x - m$.

Để hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó $\frac{4}{3}x^3-4x=m$.

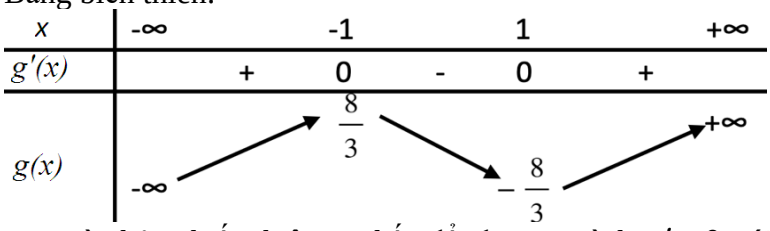
Xét hàm số $g(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$

Tập xác định $D_g=\mathbb{R}$.

$g'(x)=4x^2-4$;

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-\frac{8}{3}<m<\frac{8}{3}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-6x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 10. **C.** Vô số. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=6\end{array}\right.$

$g'(x)=\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+m\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2+m=0\\x^3-3x^2+m=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2=-m\\x^3-3x^2=-m+6\end{array}\right.$

Xét $h(x)=x^3-3x^2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $h'(x)=3x^2-6x$, $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

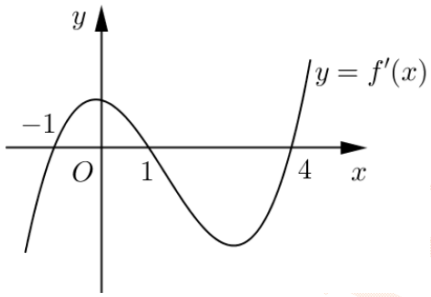
Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $g'(x)=0$ có đúng 6 nghiệm bội lẻ

TH1: $\begin{cases}-4<-m<0\\-m+6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\m\le 6\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<4.$

TH2: $\begin{cases}-4<-m+6<0\\-m\le -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6<m<10\\m\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow 6<m<10$

Vậy $m\in\{1;2;3;7;8;9\}$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=g(x)=f\left(x^4-2x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

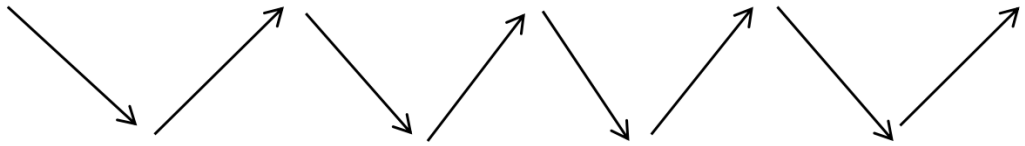
A.. **B..** **C.** 7. **D..**

Lời giải

Ta có $g'(x)=\left(4x^3-4x\right)f'\left(x^4-2x^2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^3-4x=0\\f'\left(x^4-2x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x^4-2x^2=-1\\x^4-2x^2=1\\x^4-2x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=\pm1\\x^2=1+\sqrt{2}\\x^2=1-\sqrt{2}\\x^2=1+\sqrt{5}\\x^2=1-\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\\x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}\\x=\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $-\sqrt{1+\sqrt{5}}$ $-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ -1 0 1 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$
$h(x)$	

Vậy số cực đại cần tìm là.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 4 ↘ -3 ↗ $+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f^2(x)-mf(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 6. **C.** 16. **D.** 13.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2f'(x)f(x)-mf'(x)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{m}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ f(x)=\dfrac{m}{2}\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có đúng 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow -3<\dfrac{m}{2}<4\Leftrightarrow -6<m<8$.

Vậy $m\in\{-5;-4;-3;...;7\}$.

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{5}x^5+4x^3+mx+2023$ có bốn điểm cực trị?

A. 36. **B.** 34. **C.** 37. **D.** 35.

Lời giải

Ta có: $y'=-x^4+12x^2+m$.

$y'=0\Leftrightarrow -x^4+12x^2+m=0\Leftrightarrow x^4-12x^2=m$ (1).

Hàm số $y=-\dfrac{1}{5}x^5+4x^3+mx+2023$ có bốn điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Xét hàm số: $f(x)=x^4-12x^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-24x\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^4-12x^2$ như sau:

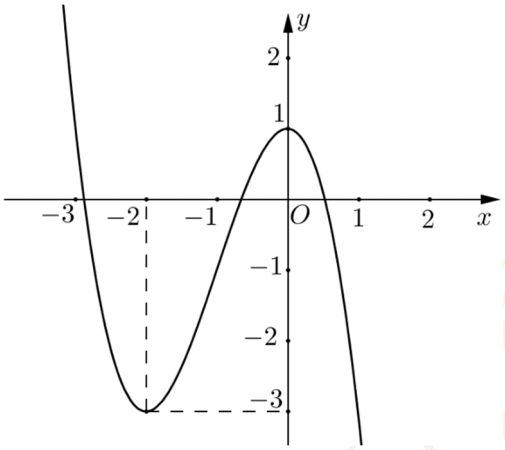
x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-36	$\nearrow$	0	$\searrow$	-36	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-36<m<0$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-35;-34;-33;...;1\}$.

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=2022\left(f^2(x)-mf(x)\right)+2023m$ có 5 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 9. **C.** -14. **D.** -18.

Lời giải

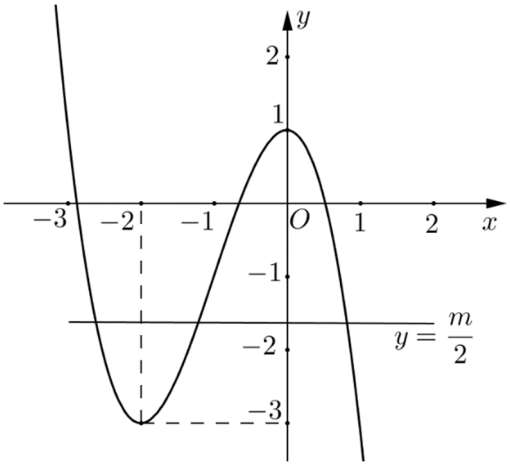
Ta có: $g'(x)=2022\left(2f'(x)f(x)-mf'(x)\right)=2022f'(x)\left[2f(x)-m\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=\dfrac{m}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x=0,\ x=-2$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Do đó để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x)=\dfrac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và -2.



Khi đó dựa vào đồ thị ta có: $-3<\dfrac{m}{2}<1\Leftrightarrow -6<m<2$.

Do m nhận giá trị nguyên nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là: $T=-14$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3\left(x^2-2mx+m+6\right)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Cho $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x^2-2mx+m+6=0\end{array}\right.$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=1$ là nghiệm bội lẻ.

Để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị thì $f'(x)=0$ chỉ đổi dấu 1 lần.

Trường hợp 1: $x^2-2mx+m+6\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m^2-m-6\leq 0\Leftrightarrow -2\leq m\leq 3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Trường hợp 2: tam thức $x^2-2mx+m+6$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=1$.

Khi đó ta có $\begin{cases}m^2-m-6>0\\1^2-2m.1+m+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-2;m>3\\m=7\end{cases}\Leftrightarrow m=7$.

Vậy $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;7\}$. Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 47. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 26.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+m$

Ta có $f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3+12x^2-24x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị, để hàm $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}m>0\\m-5<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<5$

Vì m nguyên nên $m\in\{1;2;3;4\}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=3x^5-10x^3-15(1+m)x+2$ có hai điểm cực trị?

A. 11. **B.** 12. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

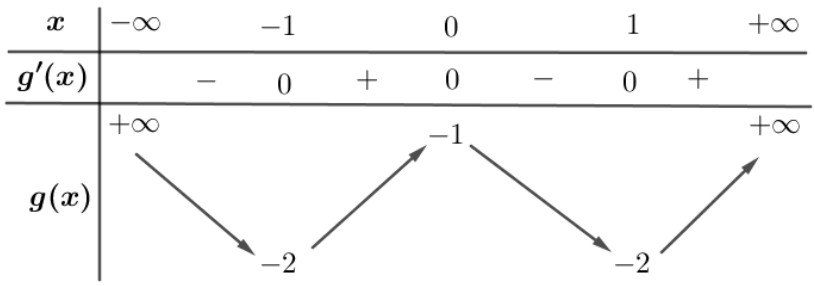
Hàm số $y=3x^5-10x^3-15(1+m)x+2$, ta có $y'=15x^4-30x^2-15(1+m)$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 15x^4-30x^2-15(1+m)=0\Leftrightarrow x^4-2x^2-1=m\ (1)$.

Xét hàm số $g(x)=x^4-2x^2-1$, có $g'(x)=4x^3-4x$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $g(x)$



Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để hàm số đã cho có hai điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt hoặc có ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm kép và hai nghiệm đơn. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $m \ge -1$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1,0,1,...,5,6,10\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-5)^3(x^2-2mx-m+6)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \\ g(x)=x^2-2mx-m+6=0 \end{cases}$.

Trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn và $x=5$ là nghiệm bội lẻ.

Hàm số đã có một cực trị khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu một lần khi và chỉ khi $f'(x)=0$ có một nghiệm bội lẻ. Ta có 2 trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2+m-6 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le 2$.

+ Trường hợp 2: $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm $x_1=5$.

Với $x_1=5$, ta có: $g(5)=25-10m-m+6=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{31}{11}$ (loại vì m không là số nguyên).

Vậy $m \in [-3;2]$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3,-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-12;12)$ để hàm số $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{m+2}{3}x^3-(m+3)x+2022$ có hai điểm cực trị?

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Ta có $y' = x^4 - (m+2)x^2 - m - 3$.

Xét phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow x^4 - (m+2)x^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2 - m - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 3$ (1).

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 3$ có $g'(x) = 2x$.

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m > -3$.

Do $m \in \mathbb{Z}, m \in (-12;12) \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;...;10;11\}$.

Vậy có 14 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = x^4 + x^3 - 3x^2 - mx + m^2 + 2023$ có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu ?

A. 19. **B.** 17. **C.** 37. **D.** 35.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x - m$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x^2 - 6x - m = 0$ (1).

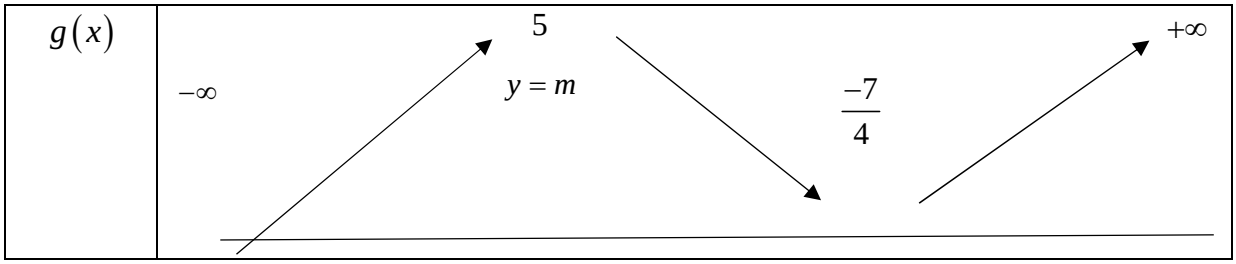
Để hàm số chỉ có một điểm cực trị thì phương trình (1) phải có một nghiệm bội lẻ.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 4x^3 + 3x^2 - 6x = m$

Xét hàm số có $g'(x) = 12x^2 + 6x - 6$ cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) chỉ có một nghiệm bội lẻ khi $\left[\begin{array}{l} m \geq 5 \\ m \leq \frac{-7}{4} \end{array}\right.$

Do $\left\{\begin{array}{l} m \in Z \\ m \in [-20;20] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-20,-19,....,-3,-2,5,6,....,19,20\}$

Vậy có 35 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $y=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2-(1+m)x-2023$ có hai điểm cực trị ?

A. 20 . **B.** 21 . **C.** 18 . **D.** 17 .

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x-(1+m)$.

Xét phương trình: $y'=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x-(1+m)=0(1)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm bội lẻ phân biệt.

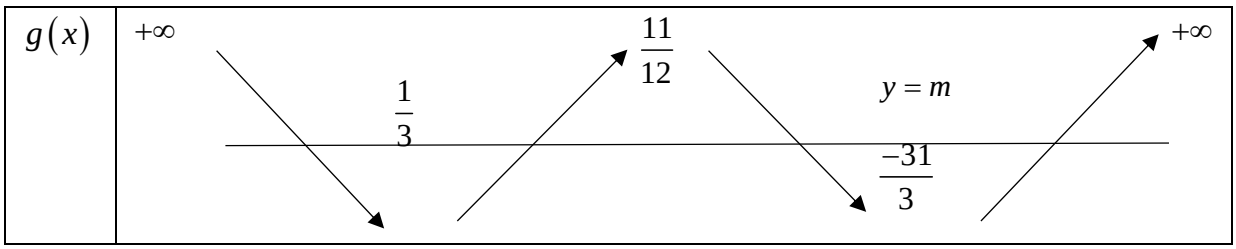
Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x-1=m(1)$.

Xét hàm số: $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x-1$ có $g'(x)=x^3+x^2-4x-4$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$+\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có hai nghiệm bội lẻ khi $\begin{cases} m \ge \frac{11}{12} \\ \frac{-31}{3} < m \le \frac{1}{3} \end{cases}$

Do $\begin{cases} m \in Z \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-10,-9,....,10\}$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 53. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=x^4-2x^3+(m+1)x-2$ có ba điểm cực trị.

A. $-1<m<1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $-1\le m\le 1$. **D.** $-1<m\le 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=4x^3-6x^2+m+1$.

Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m=-4x^3+6x^2-1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $g(x)=-4x^3+6x^2-1$, khi đó $g'(x)=-12x^2+12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra để hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị khi $-1<m<1$.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{6}x^3-4x^2-mx+2$ có 3 điểm cực trị, trong đó có đúng 2 điểm cực trị âm.

A.. **B.** 4 **C.** 6 **D.** 25.

Lời giải

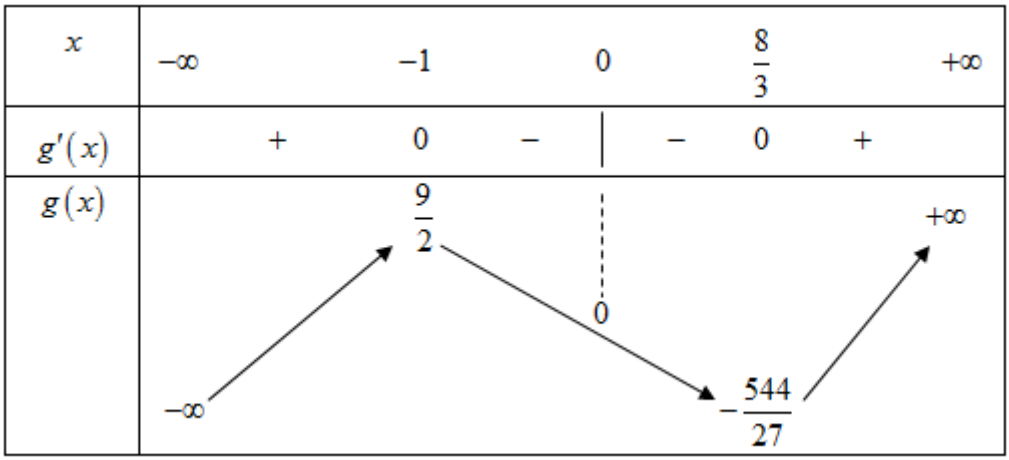
Ta có: $f'(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2-8x-m$.

Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị âm, 1 cực trị dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt âm và 1 nghiệm dương.

Xét phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow m=x^3-\frac{5}{2}x^2-8x$.

Đặt $g(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2-8x$, khi đó $g'(x)=3x^2-5x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{8}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta suy ra $0<m<\frac{9}{2}$.

Vì m nguyên nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4-6x^2-2mx+2$ có 3 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-6x^2-2mx+2\ (1)$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

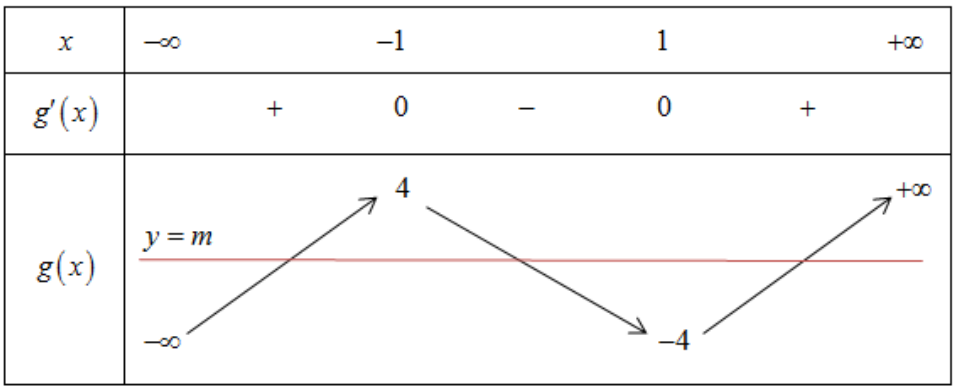
Có $y'=4x^3-12x-2m$.

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x-2m=0\Leftrightarrow m=2x^3-6x$.

Hàm số (1) có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=2x^3-6x$ tại 3 điểm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=2x^3-6x$ có BBT:



Từ BBT của hàm số $g(x)$ ta có $m\in(-4;4)$ thỏa mãn.

Mà $m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$. Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số sau có ba điểm cực trị $y=3x^4+4(m+2)x^3+6(m^2-m-3)x^2-12m^2x$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có $y'=12x^3+12(m+2)x^2+12(m^2-m-3)x-12m^2$,

$y'=0\Leftrightarrow x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+(m+3)x+m^2)=0$ (1)

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2+(m+3)x+m^2=0\ (2)\end{array}\right.$

Để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\\Delta>0\\1+m+3+m^2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow-3m^2+6m+9>0\Leftrightarrow-1<m<3$

Các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là: 0; 1; 2. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Gọi k,n lần lượt là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và $y=|f(x)|$

r là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành, ta có: $n=k+r$.

Vì $y=f(x)$ là hàm số bậc 4 nên $k\leq3, r\leq4\Rightarrow n\leq7$.

Hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều nhất 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tức là phương trình $f(x)=0$, có 4 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x^2-2mx+6-m)=0$, có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+6-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 và khác 2 $(*)$

Đặt $g(x)=x^2-2mx+6-m$, ta có:

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+m-6>0\\g(-1)\neq0\\g(2)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m<-3\\m>2\end{array}\right.\\m\neq-7\end{array}\right.$.

Từ đó ta được $m\in\{-10;-9;-8;-6;-5;-4;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Có 14 số nguyên thỏa mãn.

Câu 42. **(Đề TK BGD 2023)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-3-4i\right|=2\left|z\right|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 28. **B.** $18+4\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $11+4\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2\left|z\right|=\left|z^2-3-4i\right|\geq\left|\left|z^2\right|-\left|3+4i\right|\right|=\left|\left|z\right|^2-5\right|$ (vì $\left|z^2\right|=\left|z\right|^2$). Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k\left(-3-4i\right)$.

Suy ra $4\left|z\right|^2\geq\left(\left|z\right|-5\right)^2\Leftrightarrow\left|z\right|^4-14\left|z\right|^2+25\leq 0\Leftrightarrow 7-2\sqrt{6}\leq\left|z\right|^2\leq 7+2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow\sqrt{6}-1\leq\left|z\right|\leq\sqrt{6}+1$

Do đó, ta có $M=1+\sqrt{6}$ và $m=\sqrt{6}-1$.

Vậy $M^2+m^2=14$.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 42 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

Câu 1. Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2-8+6i\right|=5\left|z\right|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$.Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng:

A. $\frac{45}{2}$. **B.** 45. **C.** 15. **D.** 10

Câu 2. Xét các số phức thỏa mãn $\left|z^2-6z+5-3i\right|=4\left|z-3\right|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z-3\right|$.Giá trị của biểu thức $3M-2m$ bằng:

A. 10. **B.** 13. **C.** 73. **D.** 8

Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|4z^2-5+12i\right|=4\left|z\right|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{169}{16}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+3\right|=2\left|z\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$. Tính M+m.

A. 4. **B.** -4. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 5. Cho số phức z thỏa $|z^2+4|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là min và max của $|z|$, tính $M+m$?

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 6. Xét các số phức z thoả mãn $|z^2+2|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2-m^2 bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8+4\sqrt{3}$.

Câu 7. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-8+6i|=|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{41}}{2}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $1+\sqrt{41}$.

Câu 8. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-4z-4-6i|=3|z-2|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-2|$. Giá trị của $5M-2m$ bằng

A. 29. **B.** 21. **C.** 26. **D.** 18.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị $|z^2+i|$.

A. 51. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{41}$.

Câu 11. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 12. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m}=3$. **B.** $\frac{M}{m}=\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{M}{m}=2$.

Câu 13. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-6-8i|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{94}$. **D.** $\sqrt{94}$.

Câu 14. Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1|=|z_1+i|$ và $|z_2-1-3i|=|z_2-3+i|$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Khi $|z_2|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng bao nhiêu?

A. –12. **B.** 24. **C.** 12. **D.** –24.

Câu 15. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=2$. **B.** $m=2\sqrt{2}-2$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}-1$.

Câu 16. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+2|3-\bar{z}|$. Tổng $M+m$ bằng.

A. 14. **B.** 7. **C.** $\frac{45+5\sqrt{55}}{3}$. **D.** $\frac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Câu 17. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1+3z_2=15-5i$ và $|3z_1-z_2|=5\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa $|z-2-2i|=\sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+2-i|+2|\bar{z}-6-3i|$. Tính $M+m$.

A. $M+m=2\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **B.** $M+m=4\sqrt{17}$.

C. $M+m=\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **D.** $M+m=2\left(\sqrt{85}+\sqrt{17}\right)$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+5|=2|z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng:

A. $2\sqrt{6}+1$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}+1$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $4|z|=|z^2-6-8i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{14}+2$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 14.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của $|z+4i|$. Giá trị m^2 là?

A. 32. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 22. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-3+4i|-2|z|=0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2-m^2 bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** 14. **C.** 146. **D.** $56\sqrt{6}$.

Câu 23. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-5-12i|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $\sqrt{59}$.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=|z^2+2iz|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\dfrac{1}{z-|z|i}$ có phần ảo bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-7i|^2-|z_2-7i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 28. **C.** 14. **D.** 56.

Câu 26. Xét các số phức z thoản mãn điều kiện $|z^2-2z+4+4i|=2|z-1|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-1|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $4\sqrt{6}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z-5|+|z+5|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\le|z|\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}\le|z|\le\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$.

C. $\sqrt{5}-1\le|z|\le\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|z^6+1|\le 2|z^3|$ và $M=\max\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1<M<2$. **B.** $2<M<\dfrac{7}{2}$. **C.** $1<M<\dfrac{5}{2}$. **D.** $M^3+M^2+M<3$.

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2+5-12i|=2|z|$. Gọi M,m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng:

A. $15+2\sqrt{14}$. **B.** 30. **C.** $15-2\sqrt{14}$. **D.** 15.

Câu 31. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2+2i|=2|z|$. Gọi $z_0=a+bi$ với $a\ge 0$ là số phức có mô-đun lớn nhất. Khi đó giá trị của $2a-b$ bằng:

A. 0. **B.** $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **C.** $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Câu 32. Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=|\overline{z}-1+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|(1+2i)z+11+2i|$ bằng:

A. $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Câu 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}-2$. **B.** $2\sqrt{2}-2$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $3\sqrt{2}-1$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|z-5-4i|=|z+4-5i|$. Tìm phần thực của z sao cho $|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $-\frac{25}{82}$. **B.** $\frac{25}{82}$. **C.** $\frac{225}{82}$. **D.** $-\frac{225}{82}$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|i(1+z)+2|=|z+3i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|4+i(1-\bar{z})|$ bằng.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 36. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-6+8i|=5$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+2m$ bằng

A. 5. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z-2+5i|=|z-i|$ và $|z+1-i|$ nhỏ nhất. Tổng phần thực và phần ảo của z bằng

A. $\frac{16}{5}$. **B.** $\frac{-3}{5}$. **C.** $\frac{11}{5}$. **D.** $\frac{-11}{5}$.

Câu 38. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+i-1|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **B.** 86 **C.** $\frac{171}{2}$ **D.** $\frac{51}{2}$

Câu 39. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw+5+2i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $T=|z^2-wz+4|$ là

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-2\right)$.

Câu 40. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$, $m=3\sqrt{2}$. **B.** $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$, $m=\sqrt{2}$.
C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$, $m=3\sqrt{2}$. **D.** $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$, $m=\sqrt{2}$.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+3i|=2$ và biểu thức $T=|z+7+2i|^2+|z-1-6i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị biểu thức $S=|z-(2022-2023i)|$

A. $2020\sqrt{2}$. **B.** $2021\sqrt{2}$. **C.** $2022\sqrt{2}$. **D.** $2023\sqrt{2}$.

Câu 42. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z-3+7i|+|z+2-5i|\le 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|\bar{z}-5i|$

A. 3. **B.** $2\sqrt{26}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z|$. Tính $S=2023-3M+2m$.

A. $S=2021$ **B.** $S=2017$ **C.** $S=2019$ **D.** $S=2023$

Câu 44. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng:

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$.
C. $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 45. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+4|=3$ và $|z'+1+2i|=|z'-2+6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\frac{29}{20}$. **B.** $\frac{29}{5}$. **C.** $\frac{29}{10}$. **D.** $\frac{29}{8}$.

Câu 46. Cho $z=x+yi$ thỏa $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x-2y$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tổng $M+m$ bằng:

A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 48. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=9$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Câu 49. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z_2}+i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|2z_1+3z_2|$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 50. Cho số phức $z_1; z_2$ thỏa $|z_1-1-2i|=1$ và $|z_2+2+3i|=|z_2-1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\frac{27}{10}$. **B.** $\frac{29}{10}$. **C.** $\frac{33}{10}$. **D.** $\frac{23}{10}$.

Câu 51. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-3-5i|=2$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2+1+2i|=|z_2+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-1-2i|$.

A. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-2i|=|\overline{z}-2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|\overline{z}-1-2i|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{17}$.

Câu 53. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w=\frac{z+2\overline{z}}{1-iz}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $|z-1-2i|=2\sqrt{5}$ và biểu thức $|z+2|^2-|z+i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=\frac{16}{13}$. **B.** $a+b=\frac{12}{13}$. **C.** $a+b=\frac{45}{13}$. **D.** $a+b=\frac{62}{13}$.

Câu 54. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-8-6i\right|=3\left|z\right|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 55. Xét các số phức z,w thỏa mãn $\left|z\right|=2$ và $\left|w\right|=3$. Khi $\left|z+i\overline{w}-5-12i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left|z-w\right|$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{758}}{13}$. **B.** 8. **C.** $\frac{\sqrt{475}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{757}}{13}$.

Câu 56. Cho 2 số phức z, w thỏa mãn $\left|z+w\right|=2\sqrt{5}$; $w=(1+i)z-3-4i$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-2i\right|^2-\left|z-2+i\right|^2$. Tính $T=M+m$.

A. $8\sqrt{13}$. **B.** $2+4\sqrt{13}$. **C.** $3+4\sqrt{13}$. **D.** 2.

Câu 57. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Giá trị lớn nhất của $\left|\overline{z}+1+i\right|$ là

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Câu 58. Cho hai số phức z_1,z_2 có phần ảo khác 0 thỏa mãn: $z_1=\frac{1}{\left|z_2\right|-z_2}$ và phần thực của z_1 bằng $\frac{1}{6}$. Xét số phức z thỏa mãn $\left|z+\left|z_2\right|\right|+\left|z-\left|z_2\right|\right|=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-6i\right|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 59. Cho các số phức w,z thỏa mãn $\left|w-1+i\right|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|z-3-2i\right|-\left|z+4-3i\right|$

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$ **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

Câu 1. Xét các số phức thỏa mãn $|z^2-8+6i|=5|z|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng:

A. $\frac{45}{2}$. **B.** 45. **C.** 15. **D.** 10

Lời giải

Ta có $5|z|=|z^2-8+6i|\geq\left||z|^2-|8-6i|\right|=\left||z|^2-10\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow|z|^2=k(8-6i)$

Khi đó ta có $5|z|\geq\left||z|^2-10\right|\Leftrightarrow|z|^4-45|z|^2+100\leq 0$

$\Leftrightarrow\frac{45-5\sqrt{65}}{2}\leq|z|^2\leq\frac{45+5\sqrt{65}}{2}$

Suy ra $M^2=\frac{45+5\sqrt{65}}{2}$, $m^2=\frac{45-5\sqrt{65}}{2}$

Vậy $M^2+m^2=45$.

Câu 2. Xét các số phức thỏa mãn $|z^2-6z+5-3i|=4|z-3|$.Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-3|$.Giá trị của biểu thức $3M-2m$ bằng:

A. 10. **B.** 13. **C.** 73. **D.** 8

Lời giải

Ta có $4|z-3|=\left||z-3|^2-4-3i\right|\geq\left||z-3|^2-|4+3i|\right|=\left||z-3|^2-5\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow|z-3|^2=k(4+3i)$

Khi đó ta có $4|z-3|\geq\left||z-3|^2-5\right|\Leftrightarrow|z-3|^4-26|z-3|^2+25\leq 0$

$\Leftrightarrow 1\leq|z-3|^2\leq 25\Leftrightarrow 1\leq|z-3|\leq 5$

Suy ra $M=5, m=1$,

Vậy $3M-2m=13$.

Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $|4z^2-5+12i|=4|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** $\frac{169}{16}$.

Lời giải

$|4z^2-5+12i|\geq\left||4z^2|-|5-12i|\right|=\left|4|z|^2-13\right|$

$\Rightarrow 4|z|\geq\left|4|z|^2-13\right|\Leftrightarrow 16|z|^2\geq 16|z|^4-104|z|^2+169\Leftrightarrow 16|z|^4-120|z|^2+169\leq 0$

$\Leftrightarrow\frac{15-2\sqrt{14}}{4}\leq|z|^2\leq\frac{15+2\sqrt{14}}{4}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{14}-1}{2}\leq|z|\leq\frac{\sqrt{14}+1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 4z^2 = k(5-12i)$.

Khi đó $M = \frac{\sqrt{14}+1}{2}$, $m = \frac{\sqrt{14}-1}{2} \Rightarrow M.m = \frac{13}{4}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+3| = 2|z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính M+m.

A. 4. **B.** -4. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

+ Ta có: $2|z| = |z^2+3| \geq |z^2|-3 \Rightarrow |z|^2 - 2|z| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq |z| \leq 3$. Mà khi $z = 3i$ thỏa mãn đề cho và xảy ra $|z| = 3$. Vậy M=3.

+ Tương tự: $2|z| = |3+z^2| \geq 3 - |z^2| \Rightarrow |z|^2 + 2|z| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| \leq -3 \\ |z| \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow |z| \geq 1$.

Với $z = i$ thì xảy ra dấu "=" nên: m=1.

+ Vậy: $M + m = 4$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa $|z^2+4| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là min và max của $|z|$, tính $M+m$?

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có

$4|z|^2 = |z^2+4|^2 = (z^2+4)(\overline{z}^2+4) = |z|^4 + 4(z^2+\overline{z}^2) + 16$

$= |z|^4 + 16 + 4(z+\overline{z})^2 - 8|z|^2$. (1)

Vì $z + \overline{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow (z+\overline{z})^2 \geq 0$. Kết hợp với (1) ta được

$4|z|^2 \geq |z|^4 + 16 - 8|z|^2 \Leftrightarrow |z|^4 - 12|z|^2 + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} \leq |z|^2 \leq 6 + 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{5} + 1$.

Vậy $\min |z| = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \overline{z} = 0 \\ |z| = \sqrt{5} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \pm(\sqrt{5}-1)i$.

$\max |z| = \sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \overline{z} = 0 \\ |z| = \sqrt{5} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \pm(\sqrt{5}+1)i$.

$\Rightarrow M + m = 2\sqrt{5}$.

Câu 6. Xét các số phức z thoả mãn $|z^2+2| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M^2 - m^2$ bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $8 + 4\sqrt{3}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z_1 = kz_2, (k \geq 0)$.

Ta có

$2|z| = |z^2+2| \Leftrightarrow 2|z| + |-2| = |z^2+2| + |-2| \geq |z^2| \Rightarrow |z|^2 - 2|z| - 2 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{3}$ (1)

$2|z|=|z^2+2| \Leftrightarrow 2|z|+|z^2|=|z^2+2|+|z^2| \geq 2 \Rightarrow |z|^2+2|z|-2 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{3}-1 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{3}-1 \leq |z| \leq \sqrt{3}+1$.

Do đó, ta có $M=\sqrt{3}+1$ và $m=\sqrt{3}-1$. Vậy $M^2-m^2=4\sqrt{3}$.

Câu 7. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-8+6i|=|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{41}}{2}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $1+\sqrt{41}$.

Lời giải

Ta có: $|z^2-8+6i|=|z| \Leftrightarrow |z^2-8+6i|^2=|z|^2$

Lại có: $|z^2-8+6i|^2 \geq \left||z^2|-|-8+6i|\right|^2=\left||z|^2-10\right|^2$

$\Rightarrow |z|^2 \geq \left||z|^2-10\right|^2 \Leftrightarrow \left(|z|^2-10-|z|\right)\left(|z|^2-10+|z|\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(|z|^2-|z|-10\right)\left(|z|^2+|z|-10\right) \leq 0$, với $|z| \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \leq |z| \leq \frac{1+\sqrt{41}}{2} \Rightarrow \begin{cases} M=\frac{1+\sqrt{41}}{2} \\ m=\frac{-1+\sqrt{41}}{2} \end{cases}$. Vậy $M+m=\sqrt{41}$.

Câu 8. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-4z-4-6i|=3|z-2|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-2|$. Giá trị của $5M-2m$ bằng

A. 29. **B.** 21. **C.** 26. **D.** 18.

Lời giải

Ta có $3|z-2|=|z^2-4z-4-6i|=|(z-2)^2-8-6i| \geq \left||(z-2)^2|-|8+6i|\right|=\left||z-2|^2-10\right|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (z-2)^2=k.(8+6i)$.

Khi đó ta có

$3|z-2| \geq \left||z-2|^2-10\right|$

$\Leftrightarrow 9|z-2|^2 \geq |z-2|^4-20|z-2|^2+100$

$\Leftrightarrow |z-2|^4-29|z-2|^2+100 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4 \leq |z-2|^2 \leq 25$

$\Leftrightarrow 2 \leq |z-2| \leq 5$

Vậy $M=5, m=2 \Leftrightarrow 5M-2m=21$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in(-1;1)$.

$f(1)=2;\ f(-1)=4;\ f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=2\sqrt{5}$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị $|z^2+i|$.

A. 51. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi\ \ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Mặt khác: $P=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3=4(x-3)+2(y-4)+23$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số: $(4;2)$ và $(x-3;y-4)$, ta được:

$\left[4(x-3)+2(y-4)\right]^2\le(4^2+2^2).\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]=20.5=100$

$\Rightarrow 4(x-3)+2(y-4)\le 10$

$\Rightarrow P=4(x-3)+2(y-4)+23\le 33$.

$P_{\max}=33\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\4x+2y+3=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(15-2x-4)^2=5\\y=15-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Leftrightarrow z=5+5i$.

Vậy $|z^2+i|=|(5+5i)^2+i|=51$.

Câu 11. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức mô đun : $|z_1+z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$. Dấu bằng xảy ra $z_1=kz_2,(k\le 0)$.

Ta có: $2|z|=\left|z^2+1\right|\ge\left|\left|z^2\right|-1\right|\Leftrightarrow -2|z|\le\left|z^2\right|-1\le 2|z|$

Với $\left|z^2\right|-1\le 2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|-2|z|-1\le 0\Rightarrow|z|\le 1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=1+\sqrt{2}\\ z^2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3-2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\max}=1+\sqrt{2}=M$

Với $\left|z^2\right|-1\ge -2|z|\Leftrightarrow\left|z^2\right|+2|z|-1\ge 0\Rightarrow|z|\ge -1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=\sqrt{2}-1\\ z^2=k'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k'=-3+2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\min}=\sqrt{2}-1=m$

Vậy $M^2+m^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2=6.$

Câu 12. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le\dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\le P\le 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\le P\le\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 13. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-6-8i\right|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{94}$. **D.** $\sqrt{94}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z|=\left|z^2-6-8i\right|\ge\left|\left|z^2\right|-|6+8i|\right|=\left||z|^2-10\right|$ (vì $\left|z^2\right|=|z|^2$). Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k(-6-8i)$.

Suy ra $4|z|^2\ge\left(|z|^2-10\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-24|z|^2+100\le 0\Leftrightarrow 12-2\sqrt{11}\le|z|^2\le 12+2\sqrt{11}$.

$\Rightarrow\sqrt{11}-1\le|z|\le\sqrt{11}+1$

Do đó, ta có $M=1+\sqrt{11}$ và $m=\sqrt{11}-1$.

Vậy $M^2+m^2=24$.

Câu 14. Xét các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1|=|z_1+i|$ và $|z_2-1-3i|=|z_2-3+i|$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Khi $|z_2|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng bao nhiêu?

A. -12. **B.** 24. **C.** 12. **D.** -24.

Lời giải

Giả sử $z_1=a+bi,z_2=c+di.$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

*) $|z_1+1|=|z_1+i| \Leftrightarrow (a+1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2 \Leftrightarrow a=b$. Khi đó $z_1=a+ai$

*) $|z_2-1-3i|=|z_2-3+i| \Leftrightarrow (c-1)^2+(d-3)^2=(c-3)^2+(d+1)^2 \Leftrightarrow c=2d$.

Khi đó $z_2=2d+di$

*) $|z_1-z_2|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow |(a-2d)+(a-d)i|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2a^2-6ad+5d^2-12=0(1)$

Phương trình (1) có nghiệm ẩn a khi $\Delta'_a=9d^2-2(5d^2-12)\geq 0 \Leftrightarrow d^2\leq 24$

Suy ra $|z_2|=\sqrt{5d^2}\leq\sqrt{5.24}=2\sqrt{30}$

Nên $|z_2|$ lớn nhất khi $d^2=24$, đồng thời $a=\dfrac{3d}{2}$, hay $a^2=\dfrac{9d^2}{4}=54$

Khi đó $T=|z_1|^2-|z_2|^2=2a^2-5d^2=2.54-5.24=-12$

Câu 15. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=2$. **B.** $m=2\sqrt{2}-2$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow z_2=-b+ai$

$\Rightarrow z_1-z_2=(a+b)+(b-a)i$. Nên $|z_1-z_2|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}.|z_1|$

Ta lại có $2=|z_1+1-i|\leq|z_1|+|1-i|=|z_1|+\sqrt{2}$

$\Rightarrow|z_1|\geq 2-\sqrt{2}$. Suy ra $|z_1-z_2|=\sqrt{2}.|z_1|\geq 2\sqrt{2}-2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}<0$. Vậy $m=\min|z_1-z_2|=2\sqrt{2}-2$.

Câu 16. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+2|3-\bar{z}|$. Tổng $M+m$ bằng.

A. 14. **B.** 7. **C.** $\dfrac{45+5\sqrt{55}}{3}$. **D.** $\dfrac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$.

Ta có: $|z-1|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=4\Leftrightarrow y^2=-x^2+2x+3\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 3$.

$P=|z+2|+2|3-\bar{z}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+2\sqrt{(3-x)^2+y^2}=\sqrt{6x+7}+2\sqrt{12-4x}$

Xét $y=\sqrt{6x+7}+2\sqrt{12-4x}\Rightarrow y'=\dfrac{3}{\sqrt{6x+7}}-\dfrac{4}{\sqrt{12-4x}}$

Có $y'=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{33}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	-1		$-\frac{1}{33}$		3
y'		$+$	0	$-$	
y	9	↗	$\frac{5\sqrt{33}}{3}$	↘	5

Vậy $m=5, M=\dfrac{5\sqrt{33}}{3} \Rightarrow M+m=\dfrac{15+5\sqrt{33}}{3}$.

Câu 17. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1+3z_2=15-5i$ và $|3z_1-z_2|=5\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt: $\begin{cases} z_1=a+bi \\ z_2=c+di \end{cases}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$$z_1+3z_2=15-5i \Rightarrow \sqrt{(a+3c)^2+(b+3d)^2}=\sqrt{15^2+(-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)+9(c^2+d^2)+6(ac+bd)=250. \quad (1)$$

$$|3z_1-z_2|=5\sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(3a-c)^2+(3b-d)^2}=5\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 9(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-6(ac+bd)=250. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $a^2+b^2+c^2+d^2=50$.

Khi đó:

$$P=|z_1|+|z_2|=\big||z_1|+|z_2|\big|=\left|1.\sqrt{a^2+b^2}+1.\sqrt{c^2+d^2}\right|$$

$$\le \sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

$$=10$$

Vậy: $Max\,P=10$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a^2+b^2=c^2+d^2=25$ và $ac+bd=0$.

Tìm được: $z_1=3+4i; z_2=4-3i$ thỏa mãn.

Câu 18. Cho số phức z thỏa $|z-2-2i|=\sqrt{17}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+2-i|+2|\overline{z}-6-3i|$. Tính $M+m$.

A. $M+m=2\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **B.** $M+m=4\sqrt{17}$.

C. $M+m=\sqrt{17}\left(\sqrt{5}+1\right)$. **D.** $M+m=2\left(\sqrt{85}+\sqrt{17}\right)$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ (với $a,\ b\in\mathbb{R}$).

Khi đó: $|z-2-2i|=\sqrt{17} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=17 \Leftrightarrow a^2+b^2=4a+4b+9$.

Suy ra $P=|z+2-i|+2|\overline{z}-6+3i|=\sqrt{a^2+b^2+4a-2b+5}+2\sqrt{a^2+b^2-12a-6b+45}$

$=\sqrt{8a+2b+14}+2\sqrt{-8a-2b+54}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+14}+2\sqrt{54-t}$ với $t=8a+2b$, $t\in[-14;54]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+14}}-\dfrac{2}{2\sqrt{54-t}}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{t+14}=\dfrac{4}{54-t}\Leftrightarrow 5t=-2\Leftrightarrow t=-\dfrac{2}{5}$.

Bảng biến thiên

t	-14		$-0,4$		54
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$4\sqrt{17}$	↗	$2\sqrt{85}$	↘	$2\sqrt{17}$

Suy ra $P_{\max}=2\sqrt{85}$, $P_{\min}=2\sqrt{17}$.

Vậy $M+m=2\left(\sqrt{85}+\sqrt{17}\right)$.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+5|=2|z|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M+m$ bằng:

A. $2\sqrt{6}+1$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}+1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v|\ge|u+v|$ ta có:

$2|z|=|z^2+5|\Leftrightarrow 2|z|+|-5|=|z^2+5|+|-5|\ge|z^2+5-5|=|z^2|=|z|^2$ (Vì $|z^2|=|z|^2$)

Suy ra $2|z|+5\ge|z|^2\Leftrightarrow-|z|^2+2|z|+5\ge0\Leftrightarrow|z|\le\sqrt{6}+1$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(i+i\sqrt{6}\right)$. Vậy $M=\sqrt{6}+1$

Ta có:

$2|z|+|-z^2|=|z^2+5|+|-z^2|\ge|z^2+5-z^2|=|5|=5$

Suy ra $2|z|+|z|^2\ge5\Leftrightarrow|z|^2+2|z|-5\ge0\Rightarrow|z|\ge\sqrt{6}-1$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(-i+i\sqrt{6}\right)$. Vậy $m=\sqrt{6}-1$

Vậy $M+m=\left(\sqrt{6}-1\right)+\left(\sqrt{6}+1\right)=2\sqrt{6}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $4|z|=|z^2-6-8i|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{14}+2$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** 14.

Lời giải

Ta có:

$4|z|+|6+8i|=|z^2-6-8i|+|6+8i|\ge|z^2-6-8i+6+8i|=|z^2|=|z|^2$

$\Leftrightarrow4|z|+10\ge|z|^2\Leftrightarrow-|z|^2+4|z|+10\ge0\Rightarrow|z|\le2+\sqrt{14}$

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(2i+i\sqrt{14}\right)$. Vậy $M=2+\sqrt{14}$.

$4|z|+\left|-z^2\right|=\left|z^2-6-8i\right|+\left|-z^2\right|\geq\left|z^2-6-8i-z^2\right|=\left|-6-8i\right|=10$

$\Leftrightarrow 4|z|+|z|^2\geq 10\Leftrightarrow|z|^2+4|z|-10\geq 0\Rightarrow|z|\geq\sqrt{14}-2$

Dấu bằng xảy ra khi $z=\pm\left(-2i+i\sqrt{14}\right)$. Vậy $m=\sqrt{14}-2$.

Do đó $M^2+m^2=36$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của $|z+4i|$. Giá trị m^2 là?

A. 32. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$.

Ta có $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2\Leftrightarrow x+y-4=0$

$\Leftrightarrow y=4-x$

Xét $|z+4i|^2=x^2+(y+4)^2=x^2+(8-x)^2=2x^2-16x+64=2(x-4)^2+32\geq 32$

Suy ra $|z+4i|\geq\sqrt{32}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z=4$.

Vậy $m=\sqrt{32}$ hay $m^2=32$.

Câu 22. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-3+4i\right|-2|z|=0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2-m^2 bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** 14. **C.** 146. **D.** $56\sqrt{6}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z|=\left|z^2-3+4i\right|\geq\left||z^2|-|3-4i|\right|=\left||z|^2-5\right|$ (vì $|z^2|=|z|^2$).

Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k(-3+4i)$.

Suy ra $4|z|^2\geq\left(|z|^2-5\right)^2\Leftrightarrow|z|^4-14|z|^2+25\leq 0\Leftrightarrow 7-2\sqrt{6}\leq|z|^2\leq 7+2\sqrt{6}$

$\Rightarrow\sqrt{6}-1\leq|z|\leq\sqrt{6}+1$

Do đó, ta có $M=\sqrt{6}+1$ và $m=\sqrt{6}-1$.

Vậy $M^2-m^2=4\sqrt{6}$.

Câu 23. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2-5-12i\right|=3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $\sqrt{59}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$3|z|=\left|z^2-5-12i\right|\geq\left||z^2|-|5+12i|\right|=\left||z|^2-13\right|$ (vì $|z^2|=|z|^2$).

Dấu "=" xảy ra khi $z^2=k(-5-12i)$.

Suy ra $9|z|^2 \ge \left(|z|^2-13\right)^2 \Leftrightarrow |z|^4-35|z|^2+169\le 0 \Leftrightarrow \frac{35-3\sqrt{61}}{2}\le |z|^2 \le \frac{35+3\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{61}-3}{2}\le |z| \le \frac{\sqrt{61}+3}{2}$.

Do đó, ta có $M=\frac{\sqrt{61}+3}{2}$ và $m=\frac{\sqrt{61}-3}{2}$.

Vậy $M-m=3$.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=|z^2+2iz|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$|z^2+4|=|z^2+2iz| \Leftrightarrow |(z-2i)(z+2i)|=|z(z+2i)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+2i=0 \quad (1) \\ |z-2i|=|z| \quad (2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow z=-2i \Rightarrow |z+i|=|-2i+i|=1$.

$(2)\Leftrightarrow |x+yi-2i|=|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2 \Leftrightarrow y=1$.

Suy ra: $|z+i|=|x+yi+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+4}\ge 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1 khi $z=-2i$.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\frac{1}{z-|z|i}$ có phần ảo bằng $\frac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2\in S$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-7i|^2-|z_2-7i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 28. **C.** 14. **D.** 56.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Điều kiện $z-|z|i\ne 0 \Leftrightarrow x+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 0$.

Ta có: $w=\frac{1}{z-|z|i}=\frac{1}{x+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i}=\frac{x-\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i}{x^2+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$.

Theo giả thiết, ta có: $-\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow -8\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)=2x^2+2y^2-2y\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow 2y\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)=2\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}=4 \\ \sqrt{x^2+y^2}=y\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2+y^2}=y \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x=0\end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2+y^2}=4\Leftrightarrow x^2+y^2=16$.

Gọi $z_1=x_1+y_1i;\ z_2=x_2+y_2i\Rightarrow x_1^2+y_1^2=16;\ x_2^2+y_2^2=16$.

Ta có: $|z_1-z_2|=2\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4\Rightarrow 0\le (y_1-y_2)^2\le 4\Rightarrow 0\le |y_1-y_2|\le 2$.

Xét $P=|z_1-7i|^2-|z_2-7i|^2=x_1^2+(y_1-7)^2-x_2^2-(y_2-7)^2=-14(y_1-y_2)$

$\Rightarrow P\le 14|y_1-y_2|\le 28$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\ |y_1-y_2|=2\\ x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=16\end{cases}$.

Lấy $\begin{cases}x_1=x_2=\sqrt{15}\\ y_1=-y_2=1\end{cases}$ thì $P=28$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=28$.

Câu 26. Xét các số phức z thoản mãn điều kiện $|z^2-2z+4+4i|=2|z-1|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-1|$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $4\sqrt{6}$.

Lời giải

$|z^2-2z+4+4i|=2|z-1|\Leftrightarrow |(z-1)^2+3+4i|=2|z-1|$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z-1|=|(z-1)^2+3+4i|\ge \big||(z-1)^2|-|3+4i|\big|=\big||z-1|^2-5\big|$ (Vì $|z-1|^2=|(z-1)^2|$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z-1=k(3+4i)$.

Suy ra $4|z-1|^2\ge \left(|z-1|^2-5\right)^2$

$\Leftrightarrow |z-1|^4-14|z-1|^2+25\le 0$

$\Leftrightarrow 7-2\sqrt{6}\le |z-1|^2\le 7+2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}-1\le |z-1|\le \sqrt{6}+1$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $|z-1|=\sqrt{6}+1$ đạt được khi và chỉ khi $z=1\pm\frac{\sqrt{6}+1}{5}(3+4i)$, giá trị nhỏ nhất của $|z-1|=\sqrt{6}-1$ đạt được khi và chỉ khi $z=1\pm\frac{\sqrt{6}-1}{5}(3+4i)$.

Vậy $M-m=2$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $|z-5|+|z+5|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $10=|z-5|+|z+5|\ge |z-5+z+5|=|2z|\Leftrightarrow |z|\le 5$.

Do đó $M = max|z| = 5$.

Mà $|z-5|+|z+5|=10 \Leftrightarrow |x-5+yi|+|x+5+yi|=10 \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2}=10$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$10 = 1.\sqrt{(x-5)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+5)^2+y^2} \le \sqrt{(1^2+1^2)\left[(x-5)^2+y^2+(x+5)^2+y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 10 \le \sqrt{2\left(2x^2+2y^2+50\right)} \Leftrightarrow 2\left(2x^2+2y^2+50\right) \ge 100$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge 0 \Leftrightarrow |z| \ge 0$.

Do đó $m = min|z| = 0$.

Vậy $M+m=5$.

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4| = 2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \le |z| \le \frac{\sqrt{2}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \le |z| \le \frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

C. $\sqrt{5}-1 \le |z| \le \sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1 \le |z| \le \sqrt{6}+1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v| \ge |u+v|$, ta được

$2|z|+|-4| = |z^2+4|+|-4| \ge |z|^2 \Rightarrow |z|^2-2|z|-4 \le 0 \Rightarrow |z| \le \sqrt{5}+1$

$2|z|+|z|^2 = |z^2+4|+|-z^2| \ge 4 \Rightarrow |z|^2+2|z|-4 \ge 0 \Rightarrow |z| \ge \sqrt{5}-1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{5}-1$ khi $z = -i+i\sqrt{5}$,

giá trị lớn nhất của $|z|$ là $\sqrt{5}+1$ khi $z = i+i\sqrt{5}$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|z^6+1| \le 2|z^3|$ và $M = \max\left|z+\frac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1 < M < 2$. **B.** $2 < M < \frac{7}{2}$. **C.** $1 < M < \frac{5}{2}$. **D.** $M^3+M^2+M < 3$.

Lời giải

Ta có: $|z^6+1| \le 2|z^3| \Leftrightarrow \left|z^3+\frac{1}{z^3}\right| \le 2$

Mặt khác: $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^3+\frac{1}{z^3} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)$

Theo bất đẳng thức mô-đun, ta có $\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right| \ge \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\right|$

$\Rightarrow \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\right| \le 2 \quad (*)$.

Đặt $t = \left|z+\frac{1}{z}\right|, \ (t \ge 0)$

Bất phương trình $(*)$ trở thành: $t^3-3t-2\le 0\Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2\le 0\Leftrightarrow t\le 2\Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2$

$\Rightarrow M=2$.

Dấu bằng xảy ra khi $z=1$ hoặc $z=-1$.

Câu 30. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+5-12i\right|=2|z|$. Gọi M,m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng:

A. $15+2\sqrt{14}$. **B.** 30. **C.** $15-2\sqrt{14}$. **D.** 15.

Lời giải

Ta có: $\left|z^2+5-12i\right|=2|z|\Leftrightarrow \left|z^2+5-12i\right|^2=4|z|^2\Leftrightarrow (z^2+5-12i)(\overline{z^2+5-12i})=4z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow (z^2+5-12i)(\bar{z}^2+\overline{5-12i})=4z.\bar{z}\Leftrightarrow (z.\bar{z})^2+(\overline{5-12i})z^2+(5-12i)\bar{z}^2+169=4z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow (z.\bar{z})^2+(5+12i)z^2+(5-12i)\bar{z}^2+169=4z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(3+2i)z]^2+[(3-2i).\bar{z}]^2+26z.\bar{z}-30z.\bar{z}+169=0$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(3+2i)z+(3-2i)\bar{z}]^2-30z.\bar{z}+169=0$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(3+2i)z+\overline{(3+2i)z}]^2-30z.\bar{z}+169=0$

$\Leftrightarrow |z|^4-30z.\bar{z}+169=-[(3+2i)z+\overline{(3+2i)z}]^2\le 0$

$\Leftrightarrow |z|^4-30z.\bar{z}+169\le 0\Leftrightarrow |z|^4-30|z|^2+169\le 0$

$\Leftrightarrow 15-2\sqrt{14}\le |z|^2\le 15+2\sqrt{14}\Leftrightarrow \sqrt{14}-1\le |z|\le \sqrt{14}+1$ do $|z|\ge 0$

$\Rightarrow M=Max|z|=\sqrt{14}+1; m=Min|z|=\sqrt{14}-1\Rightarrow M^2+m^2=30$

Câu 31. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+2i\right|=2|z|$. Gọi $z_0=a+bi$ với $a\ge 0$ là số phức có mô-đun lớn nhất. Khi đó giá trị của $2a-b$ bằng:

A. 0. **B.** $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **C.** $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $\left|z^2+2i\right|=2|z|\Leftrightarrow \left|z^2+2i\right|^2=4|z|^2\Leftrightarrow (z^2+2i)(\overline{z^2+2i})=4z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow (z^2+2i)(\bar{z}^2+\overline{2i})=4z.\bar{z}\Leftrightarrow (z.\bar{z})^2+\overline{2i}z^2+2i\bar{z}^2+4=4z.\bar{z}$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(1-i)z]^2+[(1+i)\bar{z}]^2+4z.\bar{z}-8z.\bar{z}+4=0$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(1-i)z+(1+i)\bar{z}]^2-8z.\bar{z}+4=0$

$\Leftrightarrow |z|^4+[(1-i)z+\overline{(1-i)z}]^2-8z.\bar{z}+4=0$

$\Leftrightarrow |z|^4-8z\bar{z}+4=-[(1-i)z+\overline{(1-i)z}]^2\le 0$

$\Leftrightarrow |z|^4-8z\bar{z}+4\le 0\Leftrightarrow |z|^4-8|z|^2+4\le 0$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{3}\le |z|^2\le 4+2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}-1\le |z|\le \sqrt{3}+1$ do $|z|\ge 0$

$\Rightarrow Max|z| = \sqrt{3}+1$. Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} |z| = \sqrt{3}+1 \\ (1-i)z = -\overline{(1-i)z} \end{cases}$ (*)

Theo đề bài $z_0 = a+bi$ là số phức thỏa mãn hệ (*) nên ta có:

$$\begin{cases} |z_0| = \sqrt{3}+1 \\ (1-i)z_0 = -\overline{(1-i)z_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 4+2\sqrt{3} \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ b = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{2+\sqrt{3}} \end{cases} \end{array}\right.$$

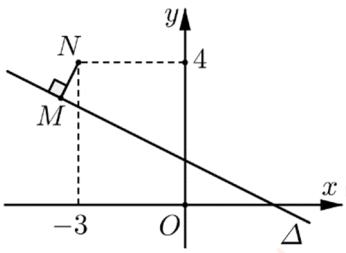
Do $a \geq 0$ nên $z_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}i \Rightarrow 2a-b = 3\sqrt{2+\sqrt{3}}$

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

Câu 32. Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = |\overline{z}-1+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |(1+2i)z+11+2i|$ bằng:

A. $\sqrt{\frac{5}{2}}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải



Chọn C Đặt $z = x+yi$ $(x,y \in \mathbb{R})$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Từ $|z| = |\overline{z}-1+2i|$, ta có

$x^2+y^2 = (x-1)^2+(-y+2)^2 \Leftrightarrow 2x+4y = 5$

$\longrightarrow$ tập hợp điểm M là đường thẳng $\Delta: 2x+4y = 5$.

Ta có $P = |(1+2i)z+11+2i| = |1+2i|\left|z+\frac{11+2i}{1+2i}\right|$

$= \sqrt{5}|z+3-4i| = \sqrt{5}MN$ với $N(-3;4)$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \rightarrow P_{\min} = \sqrt{5}.d(N,\Delta) = \sqrt{5}\frac{|2.(-3)+4.4-5|}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2}$.

Câu 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1+z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}-2$. **B.** $2\sqrt{2}-2$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $3\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1, khi đó

$|z_1+2-i|+|z_1-4-7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB = 6\sqrt{2}; A(-2;1); B(4;7)$

Ta có $AB = 6\sqrt{2}$, khi đó M thuộc đoạn thẳng AB.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$, khi đó $|iz_2-1+2i|=1\Leftrightarrow|-z_2-2-i|=1\Leftrightarrow NI=1, I(2;1)$

Khi đó N nằm trên đường tròn tâm $I(2;1); R=1$

Ta có $P=|z_1+z_2|=|z_1-(-z_2)|=MN$.

Ta có $AB: x-y+3=0$; $d(I;AB)=2\sqrt{2}$

Khi đó $P_{\min}=d(I;AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $|z-5-4i|=|z+4-5i|$. Tìm phần thực của z sao cho $|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $-\frac{25}{82}$. **B.** $\frac{25}{82}$. **C.** $\frac{225}{82}$. **D.** $-\frac{225}{82}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-5-4i|=|z+4-5i|\Leftrightarrow|a-5+(b-4)i|=|a+4+(b-5)i|$

$\Leftrightarrow(a-5)^2+(b-4)^2=(a+4)^2+(b-5)^2\Leftrightarrow 18a-2b=0\Leftrightarrow b=9a$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thì M thuộc đường thẳng $d: y=9x$.

Gọi $A(2;-3)$ thì $|z-2+3i|=MA$.

Do đó $|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Vì $M\in d$ nên $M(a;9a)$ và $AM\perp d$ nên $a-2+9(9a+3)=0\Leftrightarrow a=\frac{-25}{82}$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|i(1+z)+2|=|z+3i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|4+i(1-\overline{z})|$ bằng.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|i(1+z)+2|=|z+3i|\Leftrightarrow|i(1+x+yi)+2|=|x+yi+3|$

$\Leftrightarrow|(2-y)+i(1+x)|=|x+3+yi|\Leftrightarrow(2-y)^2+(1+x)^2=(x+3)^2+y^2\Leftrightarrow x+y+1=0$.

Do đó điểm M thuộc đường thẳng (d): $x+y+1=0$.

Ta lại có: $|4+i(1-\overline{z})|=|4+i(1-x+yi)|=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=MI$ với $I(1;4)$.

Ta có: $|4+i(1-\overline{z})|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI=d(I,d)=\frac{|1+4+1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|4+i(1-\overline{z})|$ bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 36. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-6+8i|=5$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+2m$ bằng

A. 5. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$

Ta có

$|z-6+8i|=5 \Leftrightarrow |x+yi-6+8i|=5 \Leftrightarrow |x-6+(y+8)i|=5$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(y+8)^2=25$

Tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-6+8i|=5$ là đường tròn có tâm $I(6,-8)$ và bán kính $R=5$.

Gọi điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ là điểm $A(x,y)$.

Suy ra $|z|=OA$.

+ Giá trị lớn nhất của $|z|=M$ (khi điểm A nằm xa gốc tọa độ nhất)

$M=OI+R=\sqrt{6^2+8^2}+5=15$

+ Giá trị nhỏ nhất của $|z|=m$ (khi điểm A nằm gần gốc tọa độ nhất)

$M=OI-R=\sqrt{6^2+8^2}-5=5$

Vậy $M+2m=15+2.5=25$.

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z-2+5i|=|z-i|$ và $|z+1-i|$ nhỏ nhất. Tổng phần thực và phần ảo của z bằng

A. $\frac{16}{5}$. **B.** $\frac{-3}{5}$. **C.** $\frac{11}{5}$. **D.** $\frac{-11}{5}$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi$, có điểm biểu biễn $M(a;b)$

$|z-2+5i|=|z-i| \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+5)^2=a^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow a-3b-7=0$

Suy ra $M \in \Delta: x-3y-7=0$

Ta có: $|z+1-i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=AM$ với $A(-1;1)$

$|z+1-i|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$, với là $H(\frac{1}{10};\frac{-23}{10})$ hình chiếu của A trên Δ

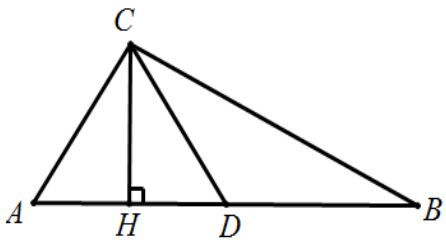
Dấu bằng xảy ra khi $M(\frac{1}{10};\frac{-23}{10}) \Rightarrow z=\frac{1}{10}+\frac{-23}{10}i$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của z bằng $\frac{-11}{5}$

Câu 38. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+i-1|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **B.** 86 **C.** $\frac{171}{2}$ **D.** $\frac{51}{2}$

Lời giải



Gọi $D(x;y)$, $A(-2;1)$, $B(4;7)$, $C(1;-1)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z, $-2+i$, $4+7i$, $1-i$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy).

Từ $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow DA+DB=6\sqrt{2}=AB$. Suy ra D thuộc đoạn thẳng AB.

Ta có $|z-1+i|=CD$.

Gọi CH là đường cao tam giác ΔABC ta có

$$AB:\frac{x+2}{4+2}=\frac{y-1}{7-1}\Leftrightarrow x-y+3=0\Rightarrow CH=d(C,AB)=\frac{|1-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$\overrightarrow{CA}=(-3;2)\Rightarrow CA=\sqrt{13};\ \overrightarrow{CB}=(3;8)\Rightarrow CB=\sqrt{73}.$$

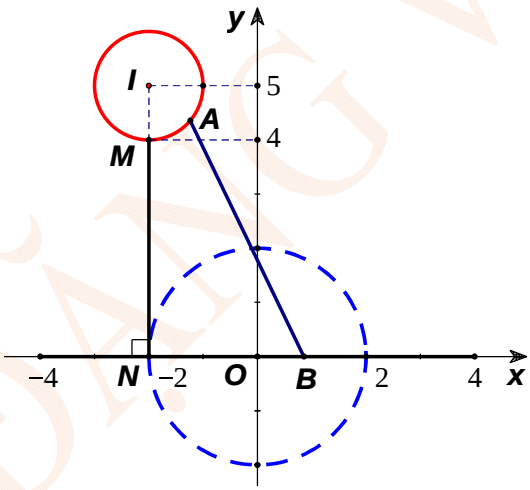
Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+i-1|=CD$ là $\sqrt{73}$ và $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Vậy $M^2+m^2=73+\frac{25}{2}=\frac{171}{2}$.

Câu 39. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw+5+2i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $T=|z^2-wz+4|$ là

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-2\right)$.

Lời giải



Ta có $|iw+5+2i|=1\Leftrightarrow|i|.\left|w+\frac{5+2i}{i}\right|=1\Leftrightarrow|w+2-5i|=1$.

$T=|z^2-wz+4|=|z^2-wz+z\bar{z}|=|z(z-w+\bar{z})|=2|z-\bar{w}|$ (*)

Đặt $z=a+bi$. Suy ra $z+\bar{z}=2a$. Vì $|z|=2$ nên $-2\le a\le 2\Rightarrow -4\le 2a\le 4$.

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức w và $2a$. Suy ra

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;5)$ bán kính $R=1$.

+ B thuộc trục Ox và $-4 \le x_B \le 4$.

Từ (*) suy ra $T = 2AB \ge 2MN = 2.4 = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv M(-2;4) \Rightarrow w = -2+4i$ và $B \equiv N(-2;0)$

$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow z = -1+bi$. Mà $|z| = 2 \Rightarrow 1+b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3} \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{3}i$.

Vậy $T = |z^2 - wz + 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 40. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$, $m = 3\sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$, $m = \sqrt{2}$.

C. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$, $m = 3\sqrt{2}$.

D. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$, $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ và điểm $M(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo đề ra $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow AM + BM = 3\sqrt{5}$ với $A(-3;2)$, $B(3;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;-3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{5} \Rightarrow AM + BM = AB$

$\Rightarrow A$, M, B thẳng hàng và M nằm giữa A và B.

Phương trình tham số của đường thẳng $AB: \begin{cases} x = -3+6t \\ y = 2-3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Gọi $M(-3+6t; 2-3t)$, do M nằm giữa A và B nên $-3 \le -3+6t \le 3 \Rightarrow 0 \le t \le 1$.

Biểu thức $P = |z+2|+|z-1-3i| = \sqrt{(x+2)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

$\Rightarrow P = \sqrt{(-3+6t+2)^2+(2-3t)^2} + \sqrt{(-3+6t-1)^2+(2-3t-3)^2}$

$= \sqrt{45t^2-24t+5} + \sqrt{45t^2-42t+17}$.

Xét $P'(t) = \dfrac{90t-24}{2\sqrt{45t^2-24t+5}} + \dfrac{90t-42}{2\sqrt{45t^2-42t+17}}$ trên đoạn $[0;1]$.

$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{90t-24}{2\sqrt{45t^2-24t+5}} + \dfrac{90t-42}{2\sqrt{45t^2-42t+17}} = 0$

$\Leftrightarrow (90t-24)\sqrt{45t^2-42t+17} + (90t-42)\sqrt{45t^2-24t+5} = 0$

$\Leftrightarrow (15t-4)\sqrt{45t^2-42t+17} + (15t-7)\sqrt{45t^2-24t+5} = 0$ $(*)$.

Nếu $0 < t \le \dfrac{4}{15}$ hoặc $\dfrac{7}{15} \le t < 1$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Nếu $\dfrac{4}{15} < t < \dfrac{7}{15}$ thì $(*) \Leftrightarrow (15t-4)\sqrt{45t^2-42t+17} = (7-15t)\sqrt{45t^2-24t+5}$

$\Leftrightarrow (225t^2-120t+16)(45t^2-42t+17) = (225t^2-210t+49)(45t^2-24t+5)$

$\Leftrightarrow 1215t^2-486t+27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{15} \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{1}{3} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$.

Ta có: $P(0)=\sqrt{5}+\sqrt{17}$; $P\left(\frac{1}{3}\right)=3\sqrt{2}$; $P(1)=2\sqrt{5}+\sqrt{26}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} P(t)=P(1)=2\sqrt{5}+\sqrt{26}$, $\min\limits_{[0;1]} P(t)=P\left(\frac{1}{3}\right)=3\sqrt{2}$.

Như vậy $M=2\sqrt{5}+\sqrt{26}$, $m=3\sqrt{2}$.

Cách 2:

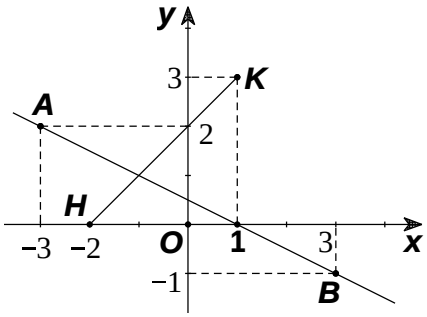
Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ và điểm $M(x,y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo đề ra $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow AM+BM=3\sqrt{5}$ với $A(-3;2)$, $B(3;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6;-3)\Rightarrow AB=3\sqrt{5}\Rightarrow AM+BM=AB\Rightarrow A$, M, B thẳng hàng và M nằm giữa A và B.

Biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|=MH+MK$ với $H(-2;0)$ và $K(1;3)$.

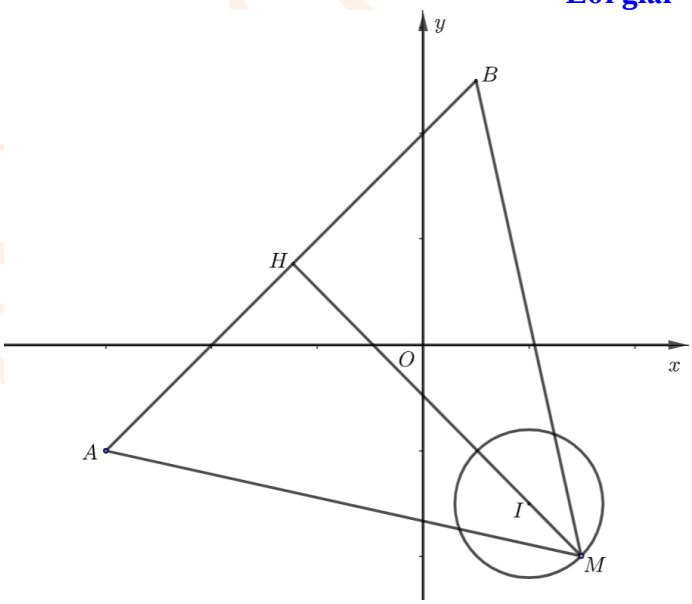


Ta có $(MH+MK)_{\min}=HK=3\sqrt{2}$; $(MH+MK)_{\max}=BH+BK=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+3i|=2$ và biểu thức $T=|z+7+2i|^2+|z-1-6i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị biểu thức $S=|z-(2022-2023i)|$

A. $2020\sqrt{2}$. **B.** $2021\sqrt{2}$. **C.** $2022\sqrt{2}$. **D.** $2023\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(2;-3)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Gọi $A(-7;-2), B(1;6) \Rightarrow T = MA^2 + MB^2$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow H(-3;2)$.

MH là đường trung tuyến trong tam giác MAB nên ta có

$MH^2 = \dfrac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$

$AB = 4\sqrt{2}$ không đổi nên T lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH = IH + R$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} = \dfrac{HI}{R}.\overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{HI} = 5\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} -5 = 5(x-2) \\ 5 = 5(y+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(1;-2)$

$\Rightarrow S = |z - (2022 - 2023i)| = 2021\sqrt{2}$.

Câu 42. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z-3+7i| + |z+2-5i| \le 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |\overline{z} - 5i|$

A. 3. **B.** $2\sqrt{26}$ **C.** 4 **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Ta có: $|z-3+7i| + |z+2-5i| \le 13$

$\Leftrightarrow |z+5i-3+2i| + |z+5i+2-10i| \le 13 (1)$

Gọi $M(a;b), A(3;-2), B(-2;10)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $w = z + 5i; z_1 = 3 - 2i; z_2 = -2 + 10i$

$\overrightarrow{AB} = (-5;12) \Rightarrow AB = 13$

Biểu thức (1) viết lại: $MA + MB \le AB \Rightarrow MA + MB = AB$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm M biểu diễn của số phức w là đoạn thẳng AB

* Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -2 + 12t \end{cases} (t \in [0;1])$

Gọi $M(3-5t; -2+12t) \in AB$

$\overrightarrow{OM} = (3-5t; -2+12t)$

$OM = \sqrt{(3-5t)^2 + (-2+12t)^2} = 169t^2 - 78t + 13$

$OM_{\min} = 4 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{13}$ (thỏa)

* $P = |\overline{z} - 5i| = |z + 5i| = OM$

$P_{\min} = 4$

Câu 43. Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$. Tính $S = 2023 - 3M + 2m$.

A. $S = 2021$ **B.** $S = 2017$ **C.** $S = 2019$ **D.** $S = 2023$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\dfrac{-2-3i}{3-2i} = -i$ nên $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 1 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1$

$\Leftrightarrow |-i|.\left|z + \dfrac{1}{-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - (-i)| = 1.$

Suy ra tập hợp các số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=1$.

Khi đó $\begin{cases} P_{\min}=|OI-R|=|1-1|=0 \\ P_{\max}=OI+R=1+1=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=0 \\ M=2 \end{cases} \longrightarrow S=2017.$

Câu 44. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng:

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$.
C. $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

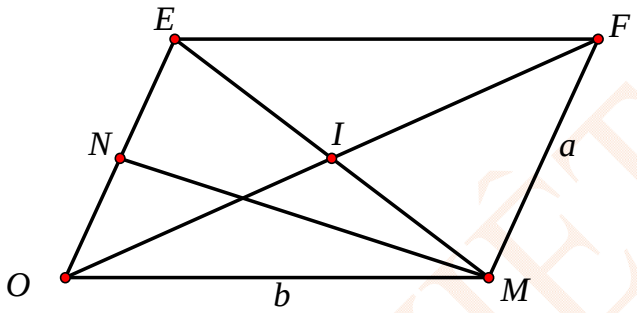
Lời giải

Chọn C

Giả sử M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w.

Suy ra $\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$, $|z-w|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $|z|=ON=\frac{a}{2}; |w|=OM=b.$ Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases} \frac{a^2+b^2}{2}-\frac{ME^2}{4}=25 \\ \frac{b^2+ME^2}{2}-\frac{a^2}{4}=16 \end{cases} \Rightarrow a^2+2b^2=88.$

$$\left(|z|+|w|\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2 \le \left(a^2+2b^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=66.$$

Suy ra $|z|+|w|\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $\left(|z|+|w|\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 45. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z+4|=3$ và $|z'+1+2i|=|z'-2+6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-z'|$.

A. $\frac{29}{20}$. **B.** $\frac{29}{5}$. **C.** $\frac{29}{10}$. **D.** $\frac{29}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$, $N(x';y')$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x'+y'i$.

Ta có $|z+4|=3 \Leftrightarrow |x+4+yi|=3 \Leftrightarrow (x+4)^2+y^2=3^2$.

Vậy M thuộc đường tròn $(C):(x+4)^2+y^2=3^2$ có tâm $I(-4;0)$

$|z'+1+2i|=|z'-2+6i| \Leftrightarrow |(x'+1)+(y'+2)i|=|x'-2+(y'+6)i|$

$\Leftrightarrow (x'+1)^2+(y'+2)^2=(x'-2)^2+(y'+6)^2 \Leftrightarrow 6x'-8y'-35=0$

Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 6x'-8y'-35=0$

Dễ thấy đường thẳng Δ không cắt (C) và $|z-z'|=MN$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, cho bộ ba điểm (I,M,N) ta có.

$$MN \geq |IN-IM|=|IN-R| \geq |IN_0-R|=|d(I,\Delta)-R|=\left|\frac{|6.(-4)-8.0-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}-3\right|=\frac{29}{10}$$

Câu 46. Cho $z=x+yi$ thỏa $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x-2y$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

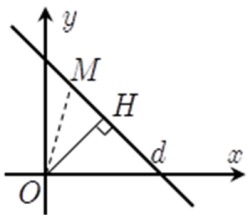
Ta có: $|z-2-4i|=|z-2i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow x+y-4=0$: là đường thẳng d.

Cách 1.

Gọi $M \in d$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Khi đó: $|z|=OM \Rightarrow |z|_{\min}=OM_{\min} \Leftrightarrow M \equiv H$



Do $OH \perp d: x+y-4=0 \Rightarrow OH: x-y+m=0.$

$O(0;0) \in OH \Rightarrow m=0 \Rightarrow OH: x-y=0.$

Tọa độ $H=d \cap OH$ thỏa $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 2.

Từ $d: y=4-x \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2(x-2)^2+8} \geq \sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Suy ra: $|z|_{\min}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 3. Sử dụng Cauchy – Schwarz, có

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}} \geq \sqrt{\frac{(x+y)^2}{1+1}}=\sqrt{\frac{4^2}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Dấu " = " khi $x=y$ và $x+y=4 \Leftrightarrow x=y=2 \Rightarrow 3x-2y=2.$

➢ **Lưu ý**. Nếu đề bài chỉ yêu cầu tính $|z|_{\min}$, thì nó là $|z|_{\min}=OH=d(O;d)$.

Câu 47. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tổng $M+m$ bằng:

A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 10.

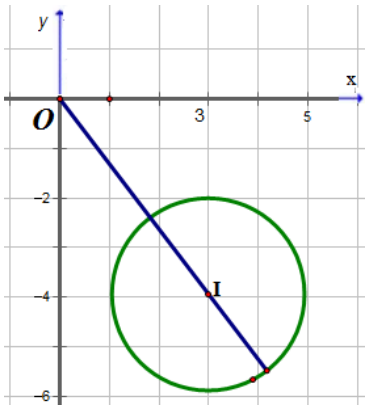
Lời giải

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-3+4i|=2\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=4$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa đề là đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=2$.

$OI=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.



Khi đó: $\begin{cases} m=|IO-R|=|5-2|=3 \\ M=IO+R=5+2=7 \end{cases}\Rightarrow M+m=7+3=10$.

Câu 48. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=10$. **B.** $P=9$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Gọi $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2; z_3.

vì $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ suy ra A; B; C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $|z_1-z_2|=AB$; $|z_2-z_3|=BC$ $|z_3-z_1|=AC$.

Suy ra $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=AB^2+BC^2+AC^2$

$=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=6-2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

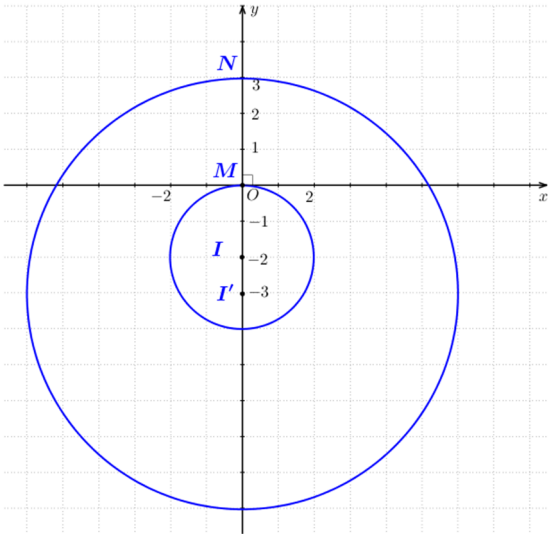
$=9-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=9-\left(3\overrightarrow{OG}\right)^2=9-9OG^2\le 9$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Dấu " = " xảy ra khi $G\equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 49. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z}_2+i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|2z_1+3z_2|$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải



Ta có: $|iz_1-1|=1\Leftrightarrow|i|\left|z_1-\frac{1}{i}\right|=1\Leftrightarrow|z_1+i|=1\Leftrightarrow|2z_1+2i|=2$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $2z_1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp M thuộc đường tròn tâm $I(0;-2)$, $R=2$.

Ta có: $|\overline{z}_2+i|=2\Leftrightarrow|z_2-i|=2\Leftrightarrow|-3z_2+3i|=6$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

$\Rightarrow$ Tập hợp N thuộc đường tròn tâm $I'(0;-3)$, $R'=6$.

Suy ra: $P=|2z_1+3z_2|=MN$

$\Rightarrow P_{\min}\Leftrightarrow MN_{\min}\Leftrightarrow MN=3$($\Rightarrow M,N,I,I'$ thẳng hàng).

Câu 50. Cho số phức $z_1;z_2$ thỏa $|z_1-1-2i|=1$ và $|z_2+2+3i|=|z_2-1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\frac{27}{10}$. **B.** $\frac{29}{10}$. **C.** $\frac{33}{10}$. **D.** $\frac{23}{10}$.

Lời giải

Gọi $z_1=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ khi đó $|z_1-1-2i|=1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

Gọi $z_2=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$

khi đó $|z_2+2+3i|=|z_2-1-i|\Leftrightarrow(a+2)^2+(b+3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2\Rightarrow 6a+8b+11=0.$

Suy ra tập hợp biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng Δ có phương trình $\Delta:6x+8y+11=0$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và N là điểm biểu diễn số phức z_2 trong mặt phẳng phức.

Từ đó ta có $|z_1-z_2|=NM$.

Ta thấy $d(I,\Delta)>R$ (Với I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C))

Nên $NM_{\min}=d(I,\Delta)-R=\frac{33}{10}-1=\frac{23}{10}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng $\frac{23}{10}$.

Câu 51. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-3-5i|=2$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2+1+2i|=|z_2+i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2-1-2i|$.

#A. $\frac{7\sqrt{2}+4}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{7}-4}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

FB tác giả: Thoa Vũ

Ta có $|z_1-z_2-1-2i|=|(z_1-1-2i)-z_2|=|z_3-z_2|$, với $z_3=z_1-1-2i$.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_3, z_2 trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có $|z_1-3-5i|=2\Leftrightarrow|(z_1-1-2i)-2-3i|=2$

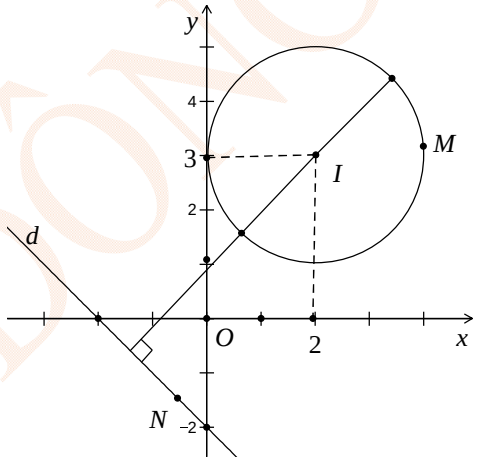
Suy ra $M\in(C)$ có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=2$.

Gọi $z_2=x+yi;(x;y\in\mathbb{R}),|z_2+1+2i|=|z_2+i|$

$\Leftrightarrow x+y+2=0\Rightarrow N\in x+y+2=0$.

Ta có $d(I;d)=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Từ hình vẽ ta có



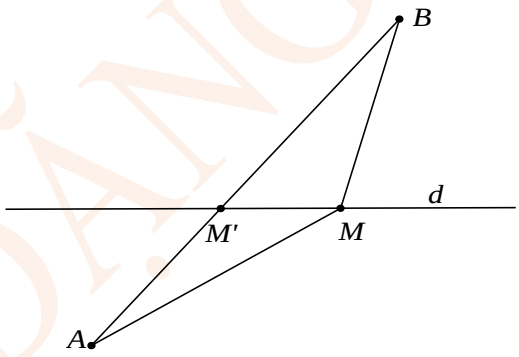
$MN_{\min}=d(A;d)=d(I;d)-R=\frac{7\sqrt{2}}{2}-2=\frac{7\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 52. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-2i|=|\bar{z}-2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|\bar{z}-1-2i|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1$ trên mặt phẳng tọa độ.



Ta có: $|z+2-2i|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2\Leftrightarrow x-2y+1=0$

$\Rightarrow$ M thuộc đường thẳng *d:* $x-2y+1=0$.

Gọi $A(0;2)$, $B(1;-2)$ thì

$P=|z-2i|+|\bar{z}-1-2i|=|x+(y-2)i|+|x-1-(y+2)i|=MA+MB$.

Bài toán trở về: Tìm điểm $M\in d: x-2y+1=0$ sao cho $P=MA+MB$ nhỏ nhất.

Ta thấy A, B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d.*

$\Rightarrow P = MA + MB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv M' = AB \cap d$.

$\Rightarrow P_{\min} = AB = \sqrt{17}.$

Câu 53. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w = \dfrac{z + 2\bar{z}}{1 - iz}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{5}$ và biểu thức $|z + 2|^2 - |z + i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $a + b$.

A. $a + b = \dfrac{16}{13}$. **B.** $a + b = \dfrac{12}{13}$. **C.** $a + b = \dfrac{45}{13}$. **D.** $a + b = \dfrac{62}{13}$.

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-1) + (y-2)i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Đặt $m = |z + 2|^2 - |z + i|^2$.

Ta có: $m = |z + 2|^2 - |z + i|^2 = \left[(x+2)^2 + y^2\right] - \left[x^2 + (y+1)^2\right] = 4x - 2y + 3$.

Xét $\Delta : 4x - 2y + 3 - m = 0$.

Để tồn tại z thì (C) và Δ phải có điểm chung $\Leftrightarrow d(I; \Delta) \leq R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3 - m|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3 - m| \leq 20 \Leftrightarrow -17 \leq m \leq 23.$

Suy ra $m_{\max} = 23$ khi $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $z = 5$.

Do đó $w = \dfrac{z + 2\bar{z}}{1 - iz} = \dfrac{5 + 2.5}{1 - 5i} = \dfrac{15}{1 - 5i} = \dfrac{15}{26} + \dfrac{75}{26}i.$

Vậy $a + b = \dfrac{15}{26} + \dfrac{75}{26} = \dfrac{90}{26} = \dfrac{45}{13}$.

Câu 54. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 - 8 - 6i| = 3|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z^2 - 8 - 6i| = 3|z| \Leftrightarrow |z^2 - (3+i)^2| = 3|z| \Leftrightarrow |z - (3+i)|.|z + (3+i)| = 3|z|$

$\Leftrightarrow |(x-3) + (y-1)i|.|(x+3) + (y+1)i| = 3|z|$ với $A(3;1), B(-3;-1)$.

$\Leftrightarrow MA.MB = 3MO \Leftrightarrow MA^2.MB^2 = 9MO^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = 9MO^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right)^2 = 9MO^2 \Leftrightarrow \left(MO^2 - OA^2\right)^2 \leq 9MO^2$

$\Leftrightarrow -3MO \leq MO^2 - OA^2 \leq 3MO \Leftrightarrow -3|z| \leq |z|^2 - 10 \leq 3|z|$

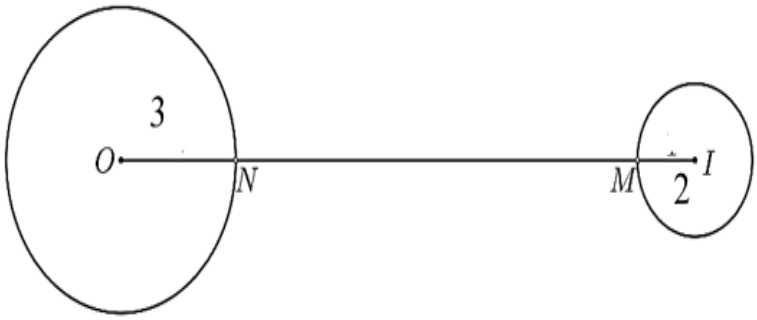
$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 - 3|z| - 10 \leq 0 \\ |z|^2 + 3|z| - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq |z| \leq 5$

Vậy: $M = 5, m = 2$ nên $M + m = 7$.

Câu 55. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$ và $|w|=3$. Khi $|z+i\overline{w}-5-12i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z-w|$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{758}}{13}$. **B.** 8. **C.** $\frac{\sqrt{475}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{757}}{13}$.

Lời giải



Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-5-12i$ và $-i\overline{w}$.

Ta có $|z|=2\Leftrightarrow|(z-5-12i)+(5+12i)|=2\Leftrightarrow MI=2$, với $I(-5;-12)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (T_1) tâm $I(-5;-12)$ và bán kính $R_1=2$.

Lại có $|-i\overline{w}|=|-i|.|\overline{w}|=3$. Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm O và bán kính $R_2=3$.

Ta thấy $OI=13>R_1+R_2\Rightarrow(T_1)$ và (T_2) rời nhau.

Khi đó: $P=|z+i\overline{w}-5-12i|=MN$.

Suy ra: $\text{Min}P=OI-R_1-R_2=13-2-3=8$ (do (T_1) và (T_2) rời nhau) khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\frac{11}{13}\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{ON}=\frac{3}{13}\overrightarrow{OI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\left(-\frac{55}{13};-\frac{132}{13}\right)\\ N\left(-\frac{15}{13};-\frac{36}{13}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-5-12i=-\frac{55}{13}-\frac{132}{13}i\\ -i\overline{w}=-\frac{15}{13}-\frac{36}{13}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{10}{13}+\frac{24}{13}i\\ w=\frac{36}{13}+\frac{15}{13}i\end{cases}.$$

Vậy: $|z-w|=\left|-2+\frac{9}{13}i\right|=\frac{\sqrt{757}}{13}$.

Câu 56. Cho 2 số phức z, w thỏa mãn $|z+w|=2\sqrt{5}$; $w=(1+i)z-3-4i$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2i|^2-|z-2+i|^2$. Tính $T=M+m$.

A. $8\sqrt{13}$. **B.** $2+4\sqrt{13}$. **C.** $3+4\sqrt{13}$. **D.** 2.

Lời giải

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$.

$A(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có:

$|z+w|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|(2+i)z-3-4i|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow|z-2-i|=2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=4$

Suy ra A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và có bán kính $R=2$.

$P=|z-2i|^2-|z-2+i|^2=|x+(y-2)i|^2-|x-2+(y+1)i|^2=4x-6y-1\Leftrightarrow 4x-6y-1-P=0$.

Suy ra A thuộc đường thẳng $d: 4x-6y-1-P=0$.

Tồn tại số phức $z \Leftrightarrow$ đường thẳng d và đường tròn (C) có điểm chung

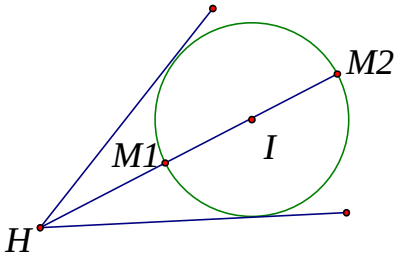
$\Leftrightarrow d(I;d) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|4.2-6.1-1-P|}{\sqrt{4^2+6^2}} \le 2 \Leftrightarrow |1-P| \le 4\sqrt{13} \Leftrightarrow -4\sqrt{13} \le 1-P \le 4\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow 1-4\sqrt{13} \le P \le 1+4\sqrt{13} \Rightarrow M = 1+4\sqrt{13}; m = 1-4\sqrt{13} \Rightarrow T = M + m = 2$.

Câu 57. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là

A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Lời giải



Gọi $z=x+yi$ ta có $z-2-3i = x+yi-2-3i = x-2+(y-3)i$.

Theo giả thiết $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R=1$.

Ta có $|\bar{z}+1+i| = |x-yi+1+i| = |x+1+(1-y)i| = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Gọi $M(x;y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI: \begin{cases} x=2+3t \\ y=3+2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$9t^2+4t^2=1 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M_1\left(2+\dfrac{3}{\sqrt{13}};3+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right), M_2\left(2-\dfrac{3}{\sqrt{13}};3-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM=\sqrt{13}+1$.

Câu 58. Cho hai số phức z_1, z_2 có phần ảo khác 0 thỏa mãn: $z_1 = \dfrac{1}{|z_2|-z_2}$ và phần thực của z_1 bằng $\dfrac{1}{6}$.

Xét số phức z thỏa mãn $|z+|z_2||+|z-|z_2||=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-6i|$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Giả sử $z_2 = a+bi$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}-a-bi} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a+bi}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 6\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) = \left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2$

$\Rightarrow 6\sqrt{a^2+b^2}-6a=2a^2+2b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}-3\right)\left(2\sqrt{a^2+b^2}-2a\right)=0$

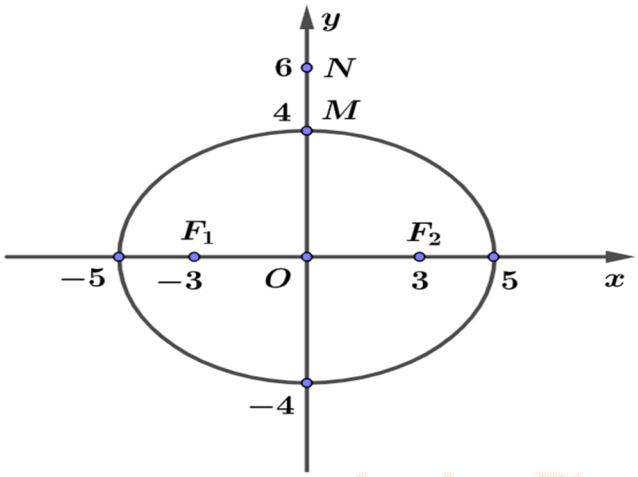
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{a^2+b^2}-2a=0 \quad (loai\ vi\ b\neq 0) \\ \sqrt{a^2+b^2}=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_2|=3$

Khi đó $|z+|z_2||+|z-|z_2||=10 \Leftrightarrow |z+3|+|z-3|=10$

$\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10=2.5>2.3=F_1F_2$ với $\left(F_1(-3;0);F_2(3;0)\right)$, M là điểm biểu diễn của số phức z.

Do đó M thuộc elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$



Gọi $N(0;6) \Rightarrow P=|z-6i|=MN$.

$\Rightarrow P_{\min}=2$ khi $M(0;4)$

Câu 59. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w-1+i|=\sqrt{5}$ và $(1+2i)(z-5)=5w$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-3-2i|-|z+4-3i|$

A. $\sqrt{53}$. **B.** $2\sqrt{53}$ **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $(1+2i)(z-5)=5w \Leftrightarrow (1+2i)z-5-10i=5w$

$\Leftrightarrow (1+2i)z-10-5i=5w-5+5i \Leftrightarrow (1+2i)(z-4+3i)=5(w-1+i)$

$\Rightarrow \sqrt{5}|z-4+3i|=5|w-1+i|=5\sqrt{5}$

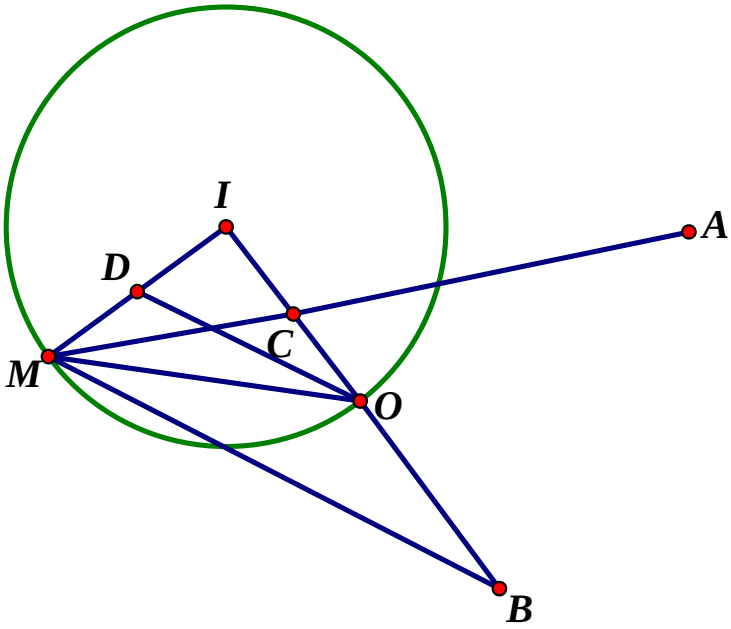
$\Rightarrow |z-4+3i|=5$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z

Vì $|z-4+3|=5 \Rightarrow M\in(C):(x-4)^2+(y+3)^2=25$ có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=5$.

Giả sử $A(3;2);B(-4;3)$, khi đó:

$P=2MA-MB$



Nhận xét $O(0;0)$ là trung điểm của IB và $O \in (C)$, A, B nằm ngoài (C).

Gọi C, D là trung điểm của $IO, IM \Rightarrow DO = \frac{1}{2}MB$.

Vì tam giác IMO cân tại I nên $MC = OD \Rightarrow MB = 2MC$.

Khi đó $P = 2MA - MB = 2MA - 2MC \le 2AC$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} M = AC \cap (C) \\ \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}; k > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P_{\max} = 2AC = 2\sqrt{(3-2)^2 + \left(2 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{53}$

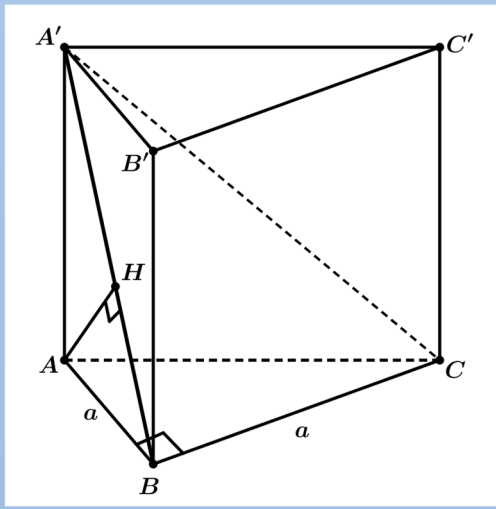
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 43. **(Đề TK BGD 2023)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp A'B$, $H \in A'B$.

Vì $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta có $BC \perp AH$, $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$. Do đó $d(A,(A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A, ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{9}{6a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{1}{2}a.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 43 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{1}{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=a, CD=2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, đường chéo $BD=a\sqrt{5}$, có SA vuông góc với mặt đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 6. Cho khối chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB=a, \widehat{ACB}=30^0$. Các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau và bằng 60^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{12}$. **B.** $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{4}$. **C.** $\frac{(\sqrt{3}-1)a^3}{6}$. **D.** $(\sqrt{3}-1)a^3$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=AC=a$. Tam giác SAB có $\widehat{ABS}=60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC) theo a.

A. $d=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d=a\sqrt{3}$. **C.** $d=2a\sqrt{3}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B và $SA\perp(ABCD)$, biết $AB=BC=a, CD=2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{130}}{50}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{78}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{130}}{78}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{130}}{7}$

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích $8a^3$. Đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm của SO. Tính khoảng cách từ điểm I đến (SAD) biết tam giác SAD có diện tích bằng $2a^2$.

A. $2a$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $3a$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$, N là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.

A. $V_{S.BMDN} = \frac{5\sqrt{15}a^3}{2}$. **B.** $V_{S.BMDN} = \frac{5\sqrt{15}a^3}{24}$.

C. $V_{S.BMDN} = \frac{5\sqrt{15}a^3}{6}$. **D.** $V_{S.BMDN} = \frac{5\sqrt{15}a^3}{3}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Biết khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** a^3.

Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. **B.** $\frac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. **C.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. **D.** $\frac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Câu 17. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và $B'C$ là a. Khi đó thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $18a^3$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 8\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 6a^3$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 21. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông và $A'BC$ là tam giác đều. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $\frac{14\sqrt{21}}{27}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{28\sqrt{7}}{27}a^3$.

Câu 22. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$. **B.** $\frac{3}{8}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $A'C = 3a$ và khoảng cách từ B đến $(A'AC)$ bằng $2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{33}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{11}}{9}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{11}}{3}$.

Câu 24. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB, biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 25. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng đáy trùng trọng tâm tam giác ABC, biết khoảng cách giữa AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 26. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là $2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 27. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB=a;AC=a\sqrt{3};BC=a$. Gọi M là trung điểm CC' và khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B có $AB=a;BC=a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$, P thuộc cạnh BC sao cho $BP=\dfrac{1}{3}BC$. Biết khoảng cách từ điểm A đến (PMN) bằng $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$, thể tích khối lăng trụ bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Câu 29. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên có độ dài bằng $2a$. Gọi M,O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\dfrac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Câu 30. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có CA' tạo với $(BCC'B')$ mọt góc 45°. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, khoảng cách từ C' đến $(CA'G)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ?

A. $9a^3\sqrt{2}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 31. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có $\widehat{DAB}=120^\circ$. Biết $(AB'C'D)$ tạo với đáy một góc 60° và khoảng cách từ điểm C đến $(AB'C')$ bằng $a\sqrt{3}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$?

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $16\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{32\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $24\sqrt{3}a^3$.

Câu 32. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC=a$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Biết khoảng cách đường thẳng BC và mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$. Biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Câu 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Câu 37. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối hộp theo a.

A. $V=a^3\sqrt{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 39. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa 2 mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ bằng

A. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$.

Câu 40. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 41. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AC = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng (ABC) bằng φ với $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối lẳng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{18}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{18}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 42. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm cạnh BB'. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MDA') bằng $\frac{2a}{3}$. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $8a^3$. **D.** a^3.

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, $AB = 2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 44. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB = 3a$. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(A'D'CB)$ bằng a, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}a^3$. **B.** $\frac{54\sqrt{5}}{15}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}a^3$. **D.** $\frac{54\sqrt{5}}{5}a^3$.

Câu 45. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$ và góc giữa $A'C$ và đáy bằng $45°$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = 2a$, $BC = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là $\frac{3\sqrt{85}}{17}a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\sqrt{15}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{15}}{2}a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{15}}{3}a^3$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{15}}{4}a^3$.

Câu 47. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ là $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=8a^3$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=4a^3$.

Câu 48. . Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có $A'A=A'B=A'C$, đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $BC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0 và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 49. . Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AD=2DA'$, $EB'=3EB$, $FC=FC'$. Biết thể tích của khối đa diện $DB'C'FE$ là $15(m^3)$, khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là bao nhiêu.

A. $30(m^3)$. **B.** $36(m^3)$. **C.** $24(m^3)$. **D.** $45(m^3)$.

Câu 50. Cho khối đa diện $ABC\cdot A'B'C'$ có $AA'//BB'//CC'$. Biết khoảng cách từ điểm A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; khoảng cách giữa hai đường thẳng BB',CC' bằng 2 và $AA'=1,BB'=2,CC'=3$. Thể tich khối đa diện $ABC\cdot A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 51. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 52. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC}=60^0$, $AB=3a$ và $AC=4a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $9a^3$. **B.** $27a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $32a^3$.

Câu 53. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $90°$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=a^3\sqrt{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, $A'A=A'B=A'C$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 55. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{34}}{68}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{34}}{68}$.

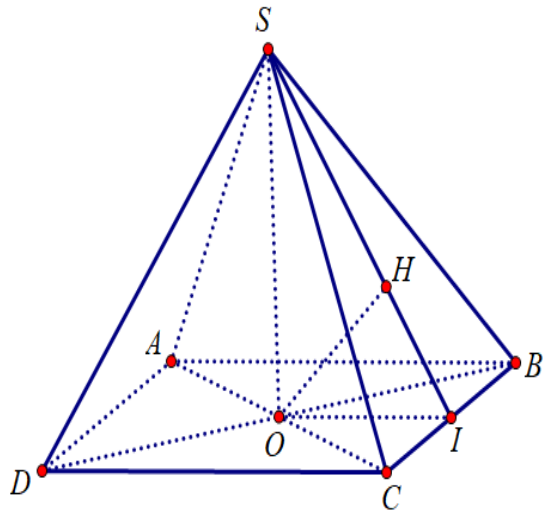
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{1}{3}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy và I là trung điểm của BC. Hạ $OH \perp SI$. Khi đó ta có $SO \perp (ABCD); OH \perp (SBC)$.

Ta có $d(O,(SBC)) = \frac{1}{2}d(A,(SBC)) = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Đặt cạnh đáy của hình chóp đều bằng x.

Khi đó ta có $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}x; OI = \frac{x}{2}$ và $OH = \frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}x$.

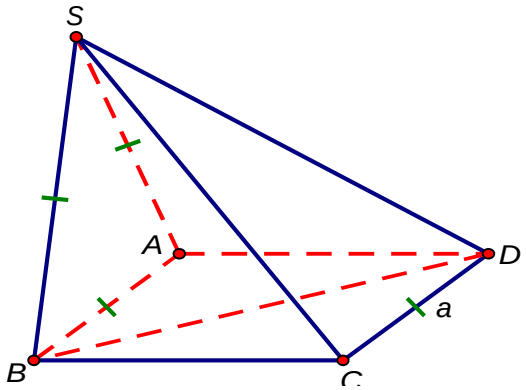
Mà $OH = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ nên ta có $\frac{\sqrt{6}}{6}x = \frac{\sqrt{6}}{6}a \Rightarrow x = a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2.\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



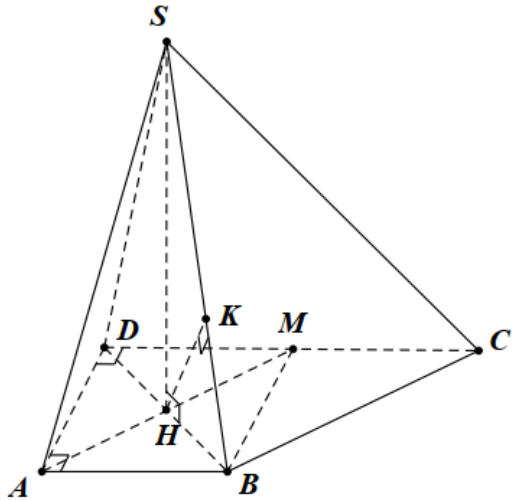
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}.S_{\triangle SAB}.d\left(C;(SAB)\right) = \frac{2}{3}S_{\triangle SAB}d\left(CD;(SAB)\right)$

$= \frac{2}{3}S_{\triangle SAB}.d\left(CD,SA\right) = \frac{2}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có tứ giác $ABMD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của BD. Ta có H cũng là trung điểm của AM và $BD \perp AM$ (1).

Vì $MC = MD = MB = \frac{CD}{2} = a$ nên ΔBDC vuông tại B. Do đó $BD \perp BC$ (2).

$(1),(2) \Rightarrow AM // BC \Rightarrow AM // (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = d\left(H,(SBC)\right).$

Dựng $HK \perp SB\ (3)$

Ta có: $\begin{cases} SH \perp BC\ (do\ SH \perp (ABCD)) \\ DB \perp BC\ (do\ (2)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp HK\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $HK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(H,(SBC)) = HK$

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH \Leftrightarrow \frac{a^3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.\frac{(a+2a)a}{2}.SH \Leftrightarrow SH = a\sqrt{2}$

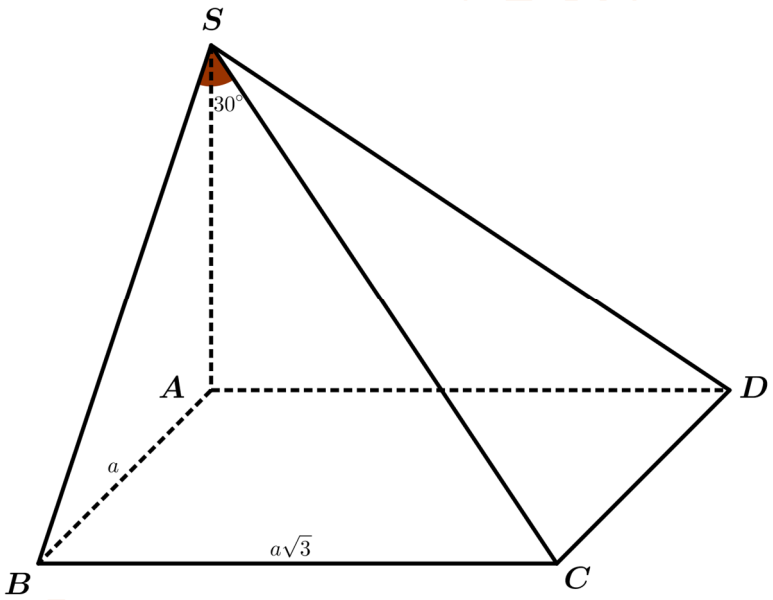
Xét ΔSHB vuông tại H, có đường cao HK:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \sqrt{3}a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Khối chóp $S.ABCD$ có diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB.BC = a^2\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA\ (\text{Vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow CB \perp (SAB)$ tại B.

Mà $SC \cap (SAB) = S$ nên SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB).

Vì $CB \perp (SAB)$ nên $CB \perp SB$. Do đó tam giác SBC vuông tại B, góc $\widehat{CSB}$ là góc nhọn.

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\left(\widehat{SC,SB}\right)=\widehat{CSB}=30°$.

Xét tam giác SBC vuông tại B có $SB=\dfrac{BC}{\tan\widehat{CSB}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\tan 30°}=3a$.

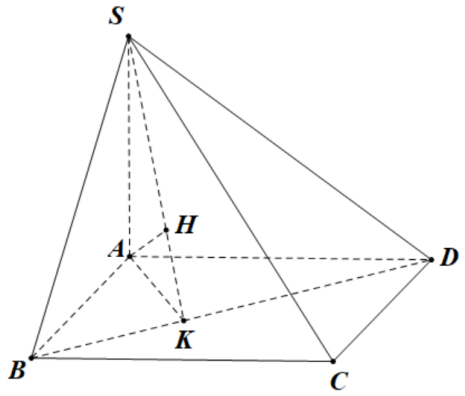
Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}.a^2\sqrt{3}.2a\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 5. Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, đường chéo $BD=a\sqrt{5}$, có SA vuông góc với mặt đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{2a}{3}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



$ABCD$ là hình chữ nhật có $AD^2=BD^2-AB^2=5a^2-a^2=4a^2\Rightarrow AD=2a$.

$S_{ABCD}=AB.AD=a.2a=2a^2$.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BD và SK suy ra $AH\perp(SBD)$.

$d\left(A,(SBD)\right)=AH=\dfrac{2a}{3}$.

Xét tam giác vuông ABD có đường cao AK, ta có $AK=\dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác vuông SAK có đường cao AH, ta có

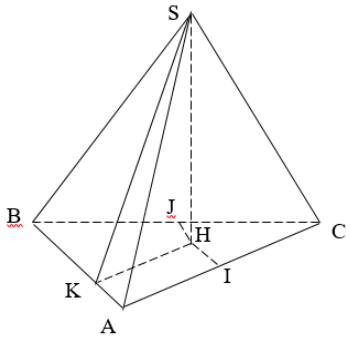
$\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{9}{4a^2}-\dfrac{5}{4a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow SA=a$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a.2a^2=\dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 6. Cho khối chóp $SABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB=a,\widehat{ACB}=30^0$. Các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau và bằng 60^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{6}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)a^3$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên đáy, I,J,K là hình chiếu của S lên AC,CB,BA.

Dễ dàng chứng minh được góc giữa các mặt bên và đáy là các góc $\widehat{SIH},\widehat{SJH},\widehat{SKH}$ và các tam giác vuông SHI,SHJ,SHK bằng nhau, nên $HI=HJ=HK$. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có: $AC=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3};BC=2a$. Nên diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC lần lượt là: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2.\sqrt{3}}{2}$; $p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{2}$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là: $r=HK=\frac{S}{p}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$.

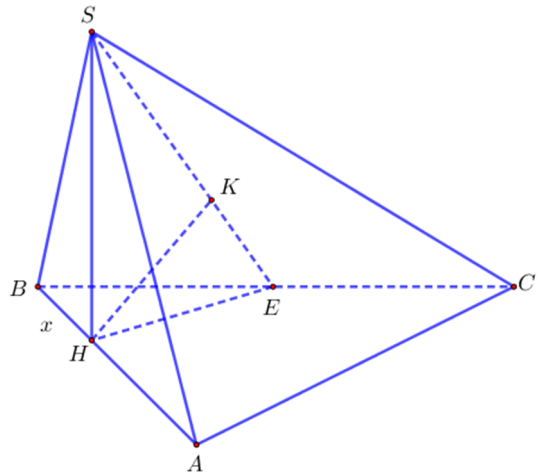
Đường cao của khối chóp $SABC$ là $SH=HK.\tan 60^0=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp đã cho là: $V=\frac{1}{3}dt_{ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)a^3}{4}$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=AC=a$. Tam giác SAB có $\widehat{ABS}=60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (SBC) theo a.

A. $d=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d=a\sqrt{3}$. **C.** $d=2a\sqrt{3}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vẽ $SH\perp AB$ tại $H\Rightarrow SH\perp(ABC)$, vẽ $HE\perp BC$ tại E $\Rightarrow(SHE)\perp BC\Rightarrow(SHE)\perp(SBC)$

Vẽ $HK \perp SE$ tại $K \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Đặt $BH = x$, $SH = x\sqrt{3}$, $HE = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

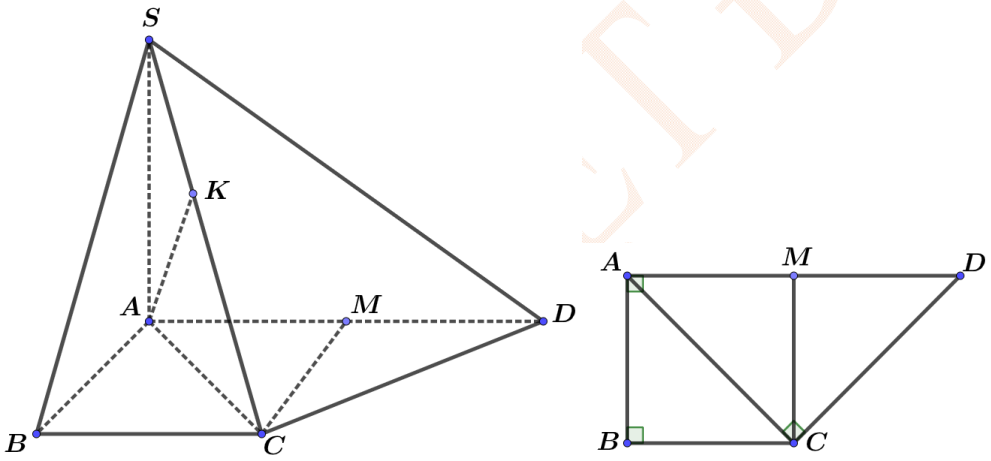
Ta có $HK = \dfrac{HE.HS}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3x^2 + \dfrac{x^2}{2}}} = \dfrac{x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3x^2 + \dfrac{x^2}{2}}} = \dfrac{x\sqrt{21}}{7}$.

Ta có $\dfrac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{AB}{HB} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{AB}{HB}.d(H,(SBC)) = \dfrac{a}{x}.\dfrac{x\sqrt{21}}{7} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và $SA \perp (ABCD)$, biết $AB = BC = a, CD = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{130}}{50}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{78}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{130}}{78}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{130}}{7}$

Lời giải



Kẻ $CM \perp AD (M \in AD)$ thì tứ giác $ABCM$ là hình vuông.

Khi đó ta có: $CM = \dfrac{AD}{2}$ nên ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$

Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$

Kẻ $AK \perp SC$ $(K \in SC)$, mà $CD \perp (SAC) \Rightarrow AK \perp CD$

$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AK = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

Xét ΔSAC vuông tại A:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AK^2} - \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{13}{10a^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{130}}{13}$$

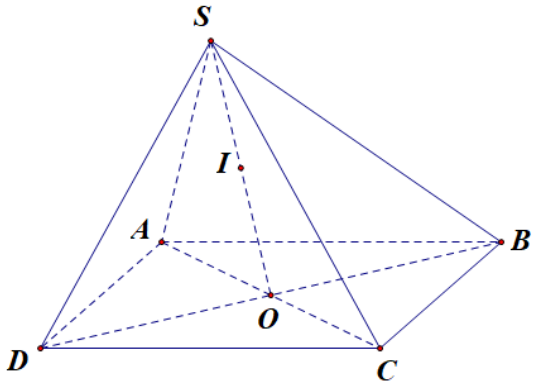
Ta có: $S_{\Delta BCD} = S_{ABCD} - S_{\Delta BAD} = \dfrac{1}{2}(a + 2a).a - \dfrac{1}{2}.a.2a = \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.BCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{130}}{13}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{130}}{78}$

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích $8a^3$. Đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm của SO. Tính khoảng cách từ điểm I đến (SAD) biết tam giác SAD có diện tích bằng $2a^2$.

A. $2a$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $3a$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Lời giải



$ABCD$ là hình bình hành tâm O nên $S_{\Delta OAD}=\frac{1}{4}.S_{ABCD}$.

Do đó $V_{S.OAD}=\frac{1}{4}.V_{S.ABCD}=\frac{1}{4}.8a^3=2a^3$.

I là trung điểm của SO nên $\frac{d\left(I,(SAD)\right)}{d\left(O,(SAD)\right)}=\frac{IS}{IO}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(I,(SAD)\right)=\frac{1}{2}.d\left(O,(SAD)\right)$.

Ta có: $2a^3=V_{S.OAD}=V_{O.SAD}=\frac{1}{3}.d\left(O,(SAD)\right).S_{SAD}=\frac{2a^2}{3}.d\left(O,(SAD)\right)$

$\Rightarrow d\left(O,(SAD)\right)=3a$.

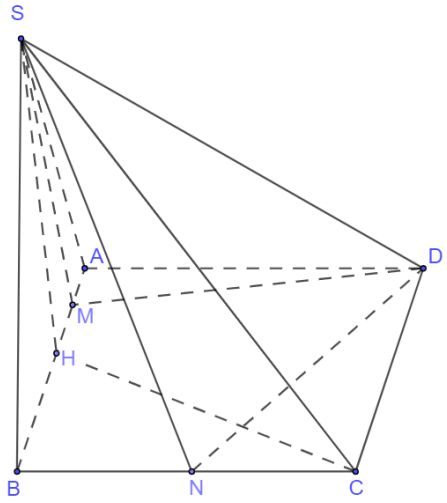
Vậy $d\left(I,(SAD)\right)=\frac{1}{2}.d\left(O,(SAD)\right)=\frac{3a}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$, N là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.

A. $V_{S.BMDN}=\frac{5\sqrt{15}a^3}{2}$. **B.** $V_{S.BMDN}=\frac{5\sqrt{15}a^3}{24}$.

C. $V_{S.BMDN}=\frac{5\sqrt{15}a^3}{6}$. **D.** $V_{S.BMDN}=\frac{5\sqrt{15}a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Do đó $(SC, ABCD) = (SC, HC) = \widehat{SCH} = 60^0$

Lại có $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$

$SH = HC.\tan 60^0 = a\sqrt{5}.\sqrt{3} = a\sqrt{15}$

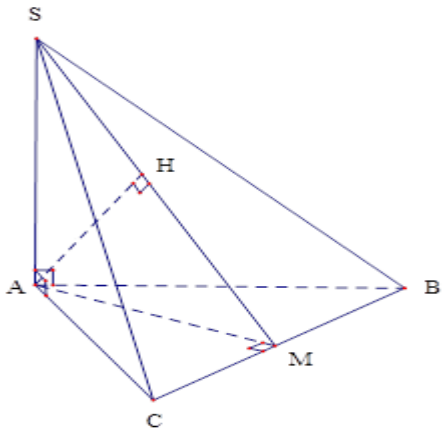
$$S_{BMDN} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{DNC} = 4a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.2a - \frac{1}{2}.a.2a = \frac{5a^2}{2}$$

$$V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}a\sqrt{15}.\frac{5a^2}{2} = \frac{5\sqrt{15}a^3}{6}.$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$

Lời giải



+ Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{1}{2}.BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM ta có $AH \perp (SBC)$ tại H. Suy ra $d(A,(SBC)) = AH = \frac{a}{2}$.

+ Tam giác SAM vuông tại A có AH là đường cao nên ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AM^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

+ Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

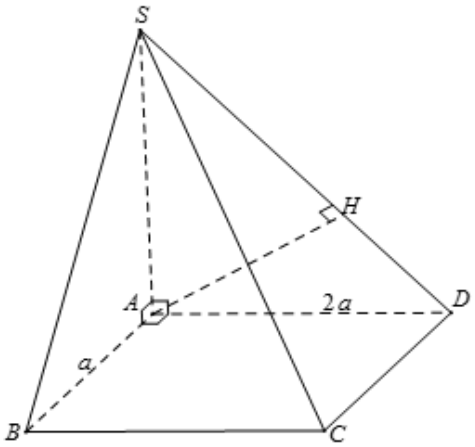
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH \perp SD$ (1).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

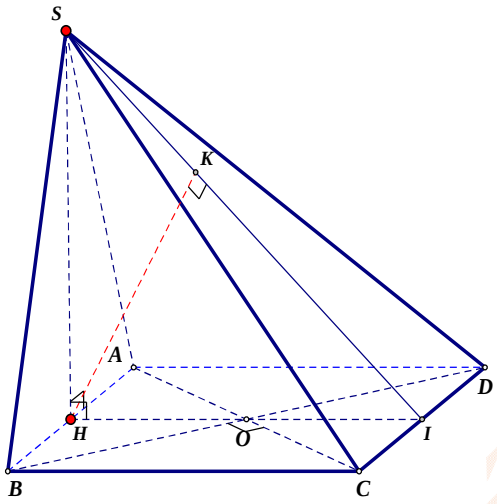
Trong ΔSAD ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow SA = \frac{AH.AD}{\sqrt{AD^2 - AH^2}} = \frac{\frac{a}{2}\cdot 2a}{\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a\sqrt{15}}{15}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a\sqrt{15}}{15}.a.2a = \frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải



Ta có $d\left(B,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)=HK$ với $HK\perp SI$, I là trung điểm của CD.

Gọi x là cạnh hình vuông $ABCD$ với $x=AB$.

Ta có phương trình :

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{49}{9.7a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{4}{3x^2}=\frac{7}{9a^2},$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3x^2}=\frac{7}{9a^2}$$

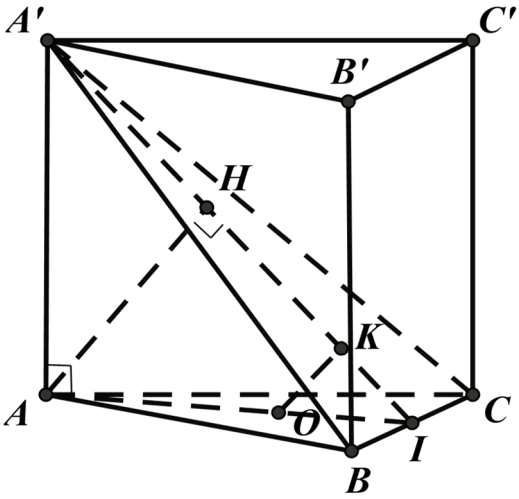
$$\Leftrightarrow x^2=3a^2$$

Suy ra $x=a\sqrt{3}\Rightarrow V=\frac{1}{3}.x^2.\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}a^3$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$, K là hình chiếu vuông góc của O lên $A'I$.

Diện tích đáy là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$, $AI=2a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$

Ta có $AH\perp(A'BC)\Rightarrow d\left(A;(A'BC)\right)=AH$ và $OK\perp(A'BC)\Rightarrow d\left(O;(A'BC)\right)=OK.$

Do đó $\dfrac{d\left(O;(A'BC)\right)}{d\left(A;(A'BC)\right)}=\dfrac{OK}{AH}=\dfrac{OI}{AI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(O;(A'BC)\right)=\dfrac{d\left(A;(A'BC)\right)}{3}=\dfrac{AH}{3}=\dfrac{a}{3}\Rightarrow AH=a.$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2}{3a^2}.$$

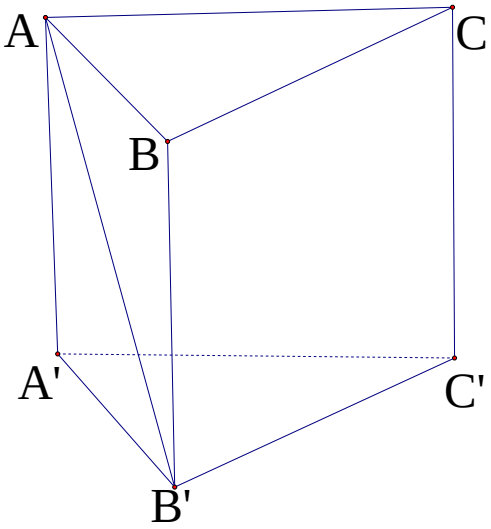
$$\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Biết khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** a^3.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AC \perp AB$ (1).

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AC$ (2).

Từ (1),(2), suy ra $AC \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C,(ABB'A')) = AC$.

Mặt khác $CC' // (ABB'A') \Rightarrow d(AB',CC') = d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = AC$.

$\Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = BB' = a\sqrt{2}$.

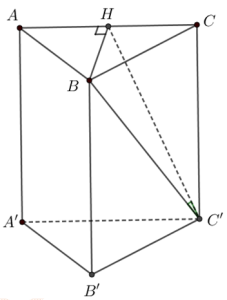
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. **B.** $\frac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. **C.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. **D.** $\frac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC.

Do tam giác ABC đều nên $BH \perp AC$ và $BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = a$.

Ta có: $BH \perp AC$, $BH \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$) suy ra $BH \perp (ACC'A')$.

Do đó: $\widehat{(BC',(ACC'A'))} = (BC',HC') = \widehat{BC'H} = \alpha$.

Xét tam giác vuông HBC': $\cot\alpha = \dfrac{C'H}{BH} \Rightarrow C'H = BH.\cot\alpha = 2a$.

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông CHC': $CC' = \sqrt{C'H^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$

.

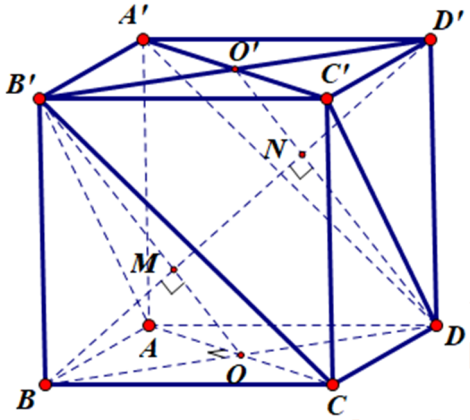
Thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.CC' = \frac{1}{2}.BH.AC.CC' = \frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{11}.$$

Câu 17. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và $B'C$ là a. Khi đó thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $9\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** $18a^3$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD; O' = A'C' \cap B'D'; M = B'O \cap BD'; N = DO' \cap BD'$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} B'C \perp (BC'D'A) \Rightarrow B'C \perp BD' \\ AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow AC \perp BD' \end{array}\right\} \Rightarrow BD' \perp (ACB') \text{ tại M}$$

$$\left.\begin{array}{l} BD' \perp (ACB') \text{ tại M} \\ \text{mà } (B'AC)//(A'C'D) \end{array}\right\} \Rightarrow BD' \perp (A'C'D) \text{ tại N}$$

Ta lại có:

$$\left.\begin{array}{l} B'C \subset (B'AC) \\ C'D \subset (A'C'D) \\ (B'AC)//(A'C'D) \end{array}\right\} \Rightarrow d(B'C, C'D) = d\big((B'AC),(A'C'D)\big) = MN = a$$

$$\Rightarrow BD' = 3MN = 3a$$

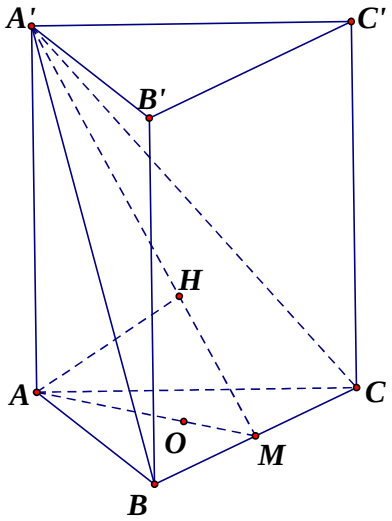
Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương

$$DD'^2 + BD^2 = BD'^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\sqrt{2}x\right)^2 = (3a)^2 \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3\sqrt{3}a^3$$

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{3}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AM \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (AA'M)\Rightarrow BC\perp AH$ (1)

Mà $AH\perp A'M$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH\perp (A'BC)\Rightarrow d(A,(A'BC))=AH$.

Ta có $\frac{d(O,(A'BC))}{d(A,(A'BC))}=\frac{MO}{MA}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(A,(A'BC))=3d(O,(A'BC))=a \Leftrightarrow AH=a$.

Vì tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM=a\sqrt{3}$

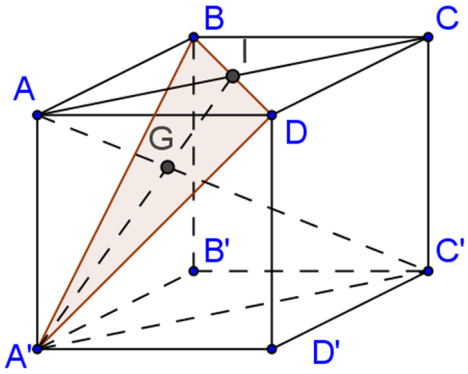
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AM^2}\Leftrightarrow \frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{3a^2}=\frac{2}{3a^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Tính theo a thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=8a^3$. **B.** $V=3\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=8\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=6a^3$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$: AC' cắt $A'I$ tại G.

Do AI song song $A'C'$ và $AI=\frac{1}{2}AC'$ nên $IG=\frac{1}{2}GA'$.

Suy ra G là trọng tâm tam giác $A'BD$, mà tam giác $A'BD$ đều (các cạnh là các đường chéo của những hình vuông bằng nhau)

Vì vậy $GA'=GB=GD$ và $AA'=AB=AD$, suy ra $AG\perp(A'BD)$.

Do đó khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $C'G$.

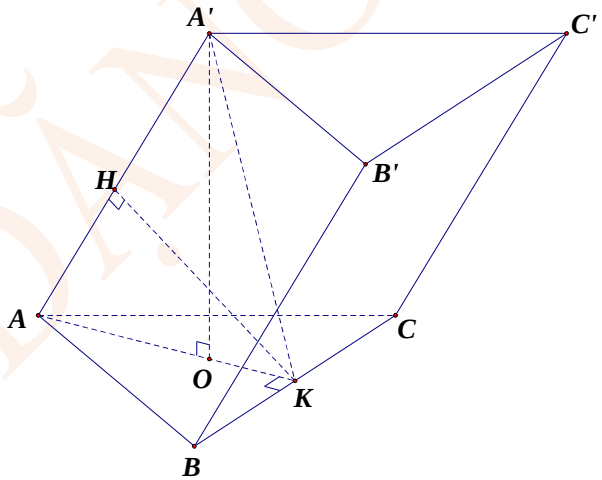
Mặt khác $C'G=\frac{2}{3}AC'=\frac{2}{3}AB\sqrt{3}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AB=2a$.

Vậy thể tích $V=8a^3$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa 2 đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC và $K=AO\cap BC$.

Dựng $KH\perp AA'$ $(H\in AA')$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AK\\BC\perp A'O\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AA'K)\Rightarrow BC\perp HK$.

Khi đó: $d\left(AA',BC\right)=HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác AHK vuông tại H: $AH=\sqrt{AK^2-HK^2}=\dfrac{3a}{4}$ và $\tan\widehat{HAK}=\dfrac{HK}{AH}$.

Tam giác $A'AO$ vuông tại O: $\tan\widehat{A'AO}=\dfrac{A'O}{AO}$.

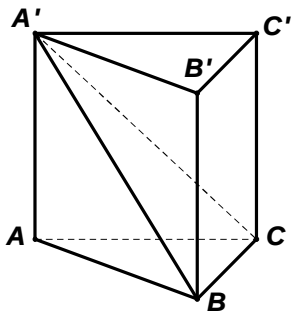
Suy ra $\dfrac{HK}{AH}=\dfrac{A'O}{AO}\Rightarrow A'O=\dfrac{a}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'O.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 21. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông và $A'BC$ là tam giác đều. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{14\sqrt{21}}{27}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\dfrac{28\sqrt{7}}{27}a^3$.

Lời giải



Do tam giác $A'BC$ là tam giác đều nên tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Đặt: $AB=AC=x\Rightarrow BC=x\sqrt{2}\Rightarrow A'C=A'B=BC=x\sqrt{2}$.

Ta có: $d\left(C',\left(A'BC\right)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(A'BC\right)\right).S_{A'BC}=\dfrac{1}{3}AA'.S_{ABC}\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a.\dfrac{\left(x\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=AA'.\dfrac{1}{2}x^2\Leftrightarrow AA'=2a$.

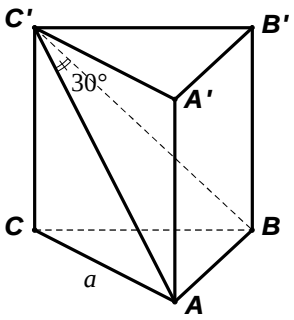
$AA'^2+AB^2=A'B^2\Leftrightarrow 4a^2+x^2=2x^2\Leftrightarrow x=2a$.

Vậy $V=2a.\dfrac{1}{2}.\left(2a\right)^2=4a^3$.

Câu 22. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB=a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{3}{8}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \perp AC \\ A'A \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (A'C'CA)$.

Mặt khác: A là hình chiếu của B lên $(A'C'CA) \Rightarrow \left(\widehat{BC',(A'C'CA)}\right) = \widehat{AC'B} = 30°$

$\Rightarrow \tan \widehat{AC'B} = \dfrac{AB}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{3}a$

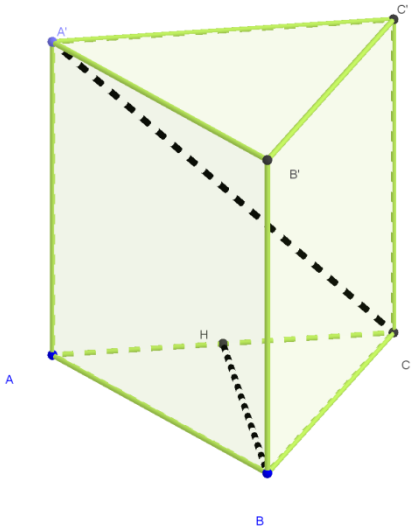
$\Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}.a^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều, $A'C = 3a$ và khoảng cách từ B đến $(A'AC)$ bằng $2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{33}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{11}}{9}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải



Gọi $AB = x$

Gọi H là trung điểm của AC

$* \; d\left(B,(A'AC)\right) = BH = 2a \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 2a \Leftrightarrow x = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

* $A'A=\sqrt{A'C^2-AC}=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{33}}{3}$

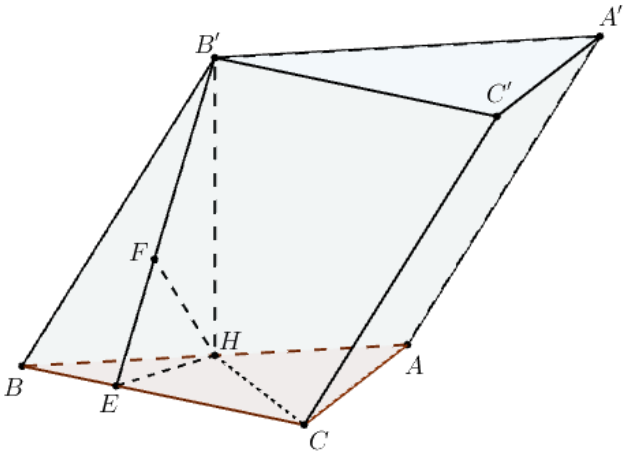
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V=A'A.S_{ABC}=A'A'.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a\sqrt{33}}{3}.\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4a^3\sqrt{11}}{3}$.

Câu 24. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng đáy trùng trung điểm H của cạnh AB, biết góc giữa $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải



Dựng $HE\perp BC$ tại E, $HF\perp B'E$ tại F.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp B'H\\BC\perp HE\end{cases}$ suy ra $BC\perp HF\Rightarrow HF\perp(B'BCC')$

$\Rightarrow\widehat{(B'H;(BCC'B'))}=\widehat{HB'F}=\widehat{HB'E}=30°$.

Ta có: $HE=HB\sin\widehat{HBE}=\frac{a}{2}\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

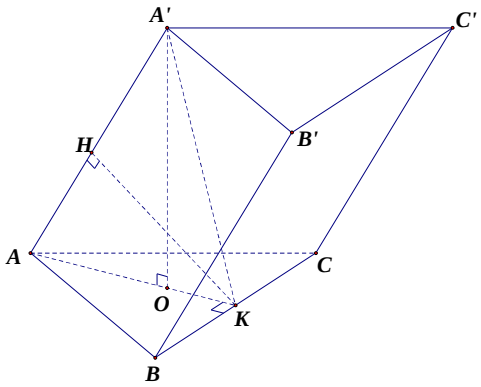
Khi đó $B'H=\frac{HE}{\tan 30°}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $V=V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.B'H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 25. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng đáy trùng trọng tâm tam giác ABC, biết khoảng cách giữa AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC và $K=AO\cap BC$.

Dựng $KH\perp AA'\ (H\in AA')$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AK\\ BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp (AA'K)\Rightarrow BC\perp HK$.

Khi đó: $d(AA';BC)=HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác AHK vuông tại H: $AH=\sqrt{AK^2-HK^2}=\dfrac{3a}{4}$ và $\tan\widehat{HAK}=\dfrac{HK}{AH}$

Tam giác $A'AO$ vuông tại O: $\tan\widehat{A'AO}=\dfrac{A'O}{AO}$.

Suy ra $\dfrac{HK}{AH}=\dfrac{A'O}{AO}\Rightarrow A'O=\dfrac{a}{3}$.

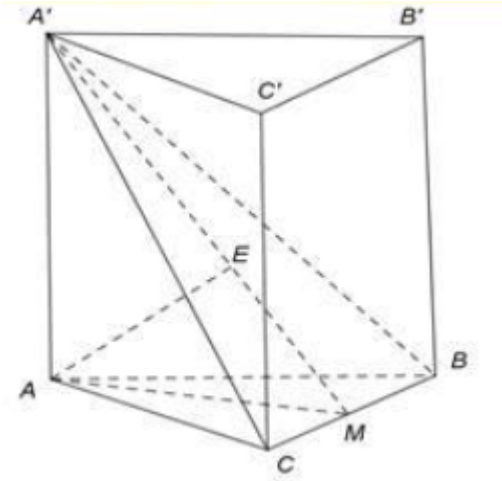
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'O.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 26. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là $2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



- Gọi M là trung điểm của BC
- Ta có $BC \perp AM$ (*vì* ΔABC *đều*) và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (AA'M)$.
- Dựng $AE \perp A'M$, khi đó $AE \perp (A'BC)$, do đó $d(A;(A'BC)) = AE = a$
- $\Delta A'AM$ vuông tại A' với đường cao AE nên

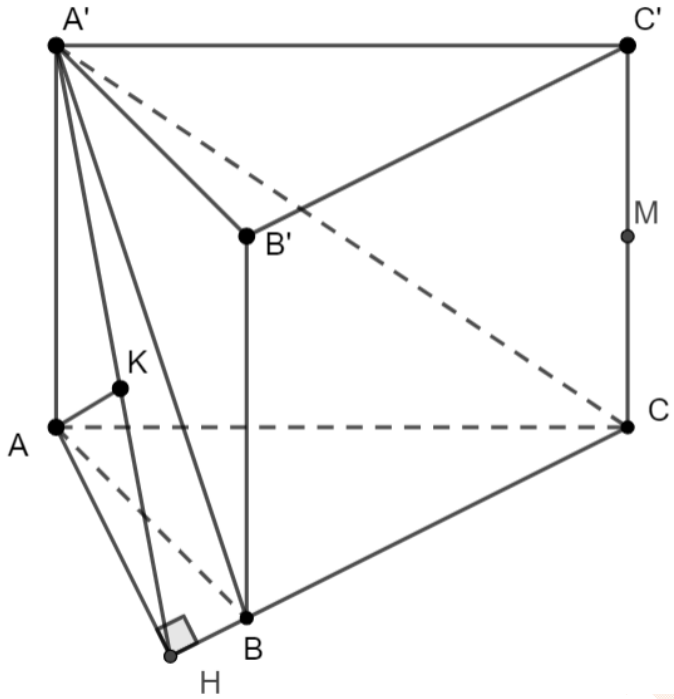
$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AE^2} - \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 27. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB = a; AC = a\sqrt{3}; BC = a$. Gọi M là trung điểm CC' và khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{14}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Ta có $d\left(M;\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A;\left(A'BC\right)\right)$ nên $d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC.

Ta có: $\begin{cases}AH\perp BC\\AA'\perp BC\end{cases}\Rightarrow\left(AHA'\right)\perp BC\Rightarrow\left(AHA'\right)\perp\left(A'BC\right)$.

Dựng $AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp\left(A'BC\right)$.

Vậy $d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=AK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Trong tam giác ABC có: $\cos\widehat{ABC}=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2.a.a}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\widehat{ABC}=120°$.

$s_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC.\sin120°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AH=\frac{2S}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

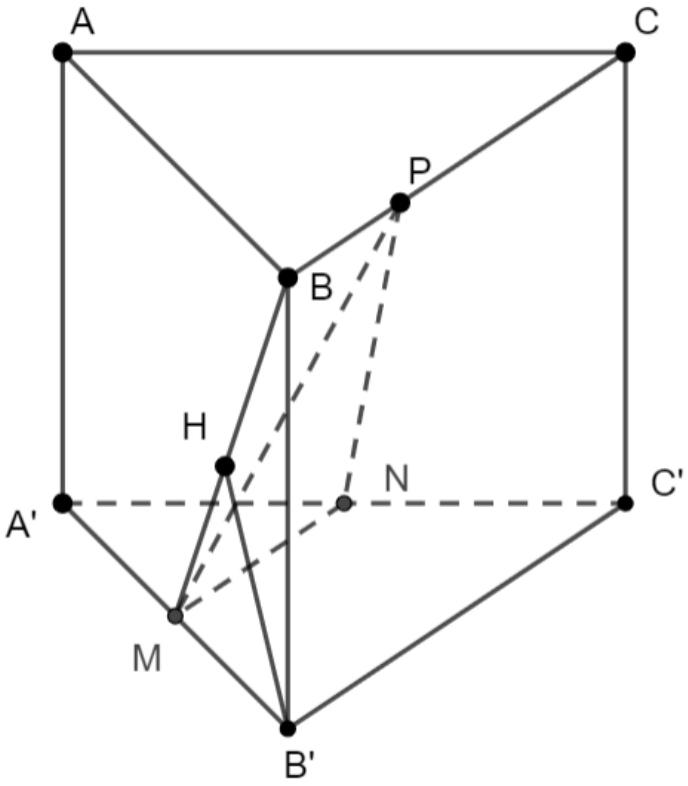
Trong tam giác vuông $A'AH$ có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AA'^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AK^2}-\frac{1}{AH^2}=1\Rightarrow AA'=1$.

Vậy $V=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông đỉnh B có $AB=a;BC=a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$, P thuộc cạnh BC sao cho $BP=\frac{1}{3}BC$. Biết khoảng cách từ điểm A đến $\left(PMN\right)$ bằng $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, thể tích khối lăng trụ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $MN \,//\, BC$ nên M,N,B,P đồng phẳng.

$$\Rightarrow \frac{d\left(A;(PMN)\right)}{d\left(A';(PMN)\right)}=\frac{AB}{A'M}=2 \Rightarrow d\left(B';(PMN)\right)=\frac{1}{2}d\left(A;(PMN)\right)=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Ta có: $\begin{cases} B'M \perp MN \\ BB' \perp MN \end{cases} \Rightarrow (BB'M) \perp MN \Rightarrow (BB'M) \perp (PMN).$

Gọi H là hình chiếu của B' trên cạnh BM.

$\Rightarrow B'H \perp (PMN).$

$$\Rightarrow d\left(B';(PMN)\right)=B'H=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $BB'M$ ta có:

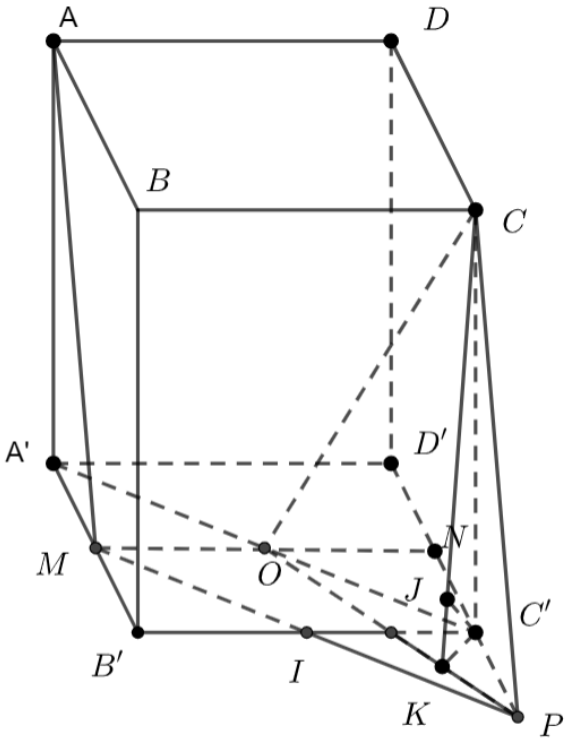
$$\frac{1}{B'H^2}=\frac{1}{B'M^2}+\frac{1}{BB'^2} \Rightarrow B'B=a\sqrt{2}.$$

Vậy $V=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=a^3.$

Câu 29. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên có độ dài bằng $2a$. Gọi M,O lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Biết khoảng cách giữa AM và CO bằng $\frac{4a}{9}$. Thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $2a^3$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



*Gọi N, I lần lượt là trung điểm $D'C'$ và $B'C'$.

Gọi P đối xứng M qua I, khi đó $AMPC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AM // (COP)$.

$\Rightarrow d(AM;OC) = d(AM;(COP)) = d(M;(COP)) = d(N;(COP)) = 2d(C';(COP)) = \frac{4a}{9}$

$\Rightarrow d(C';(COP)) = \frac{2a}{9}$.

Gọi K là hình chiếu của C' trên cạnh OP, gọi J là hình chiếu của C' trên CK.

$\Rightarrow d(C';(COP)) = C'K$.

*Gọi độ dài cạnh đáy bằng x.

Ta có: $S_{C'OP} = \frac{1}{2}S_{NOP} = \frac{1}{2}.x.\frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$; $OP = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow C'K = \frac{2S_{C'OP}}{OP} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x\sqrt{5}}{2}} = \frac{x\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác $CC'K$ có: $\frac{1}{C'J^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{C'K^2}\Leftrightarrow\frac{81}{4a^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{C'K^2}\Rightarrow C'K=\frac{a\sqrt{5}}{10}$.

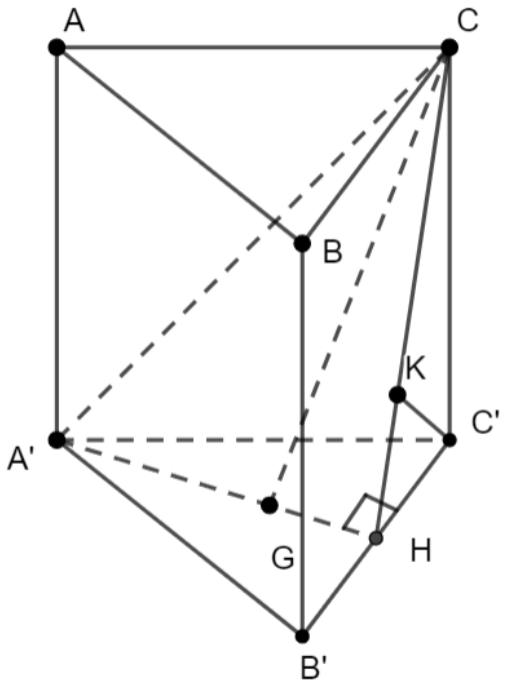
$\Rightarrow\frac{x\sqrt{5}}{5}=\frac{a\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$.

Vậy $V=2a.\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^3}{2}$

Câu 30. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có CA' tạo với $(BCC'B')$ mọt góc $45°$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, khoảng cách từ C' đến $(CA'G)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ?

A. $9a^3\sqrt{2}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi độ dài cạnh đáy là x.

Gọi H là trung điểm cạnh $B'C'$, suy ra $A'H=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}(BCC'B')\perp(A'B'C')\\A'H\perp B'C'\end{cases}$ nên $A'H\perp(BCC'B')$.

Vậy $(CA';(BCC'B'))=(CA';CH)=\widehat{A'CH}=45°$.

Vì $A'H\perp(BCC'B')$ nên $A'H\perp CH\Rightarrow A'H=CH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam gác $CC'H$ có: $CC'=\sqrt{\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$

Gọi K là hình chiếu của C' trên CH.

$\Rightarrow C'K \perp (CA'H)$

$\Rightarrow d(C';(CA'H)) = C'K = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\frac{1}{C'K^2} = \frac{1}{C'H^2} + \frac{1}{C'C^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2a^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{3}$

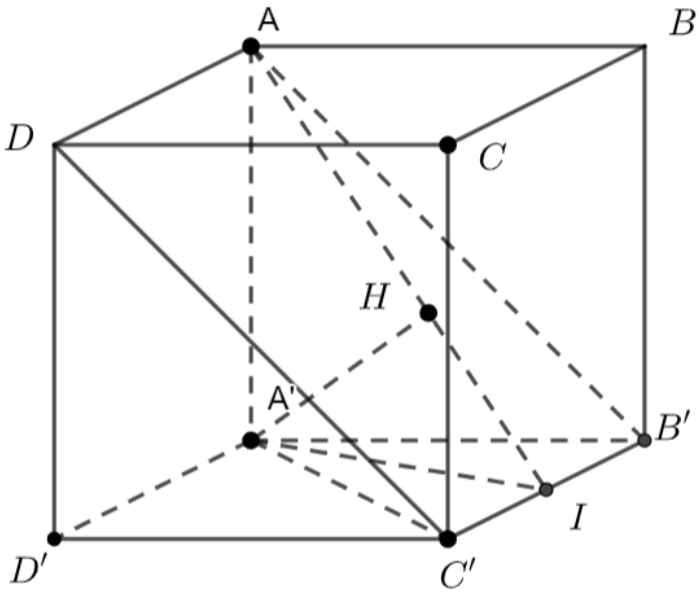
$\Rightarrow CC' = \frac{2a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{6}$.

Vậy $V = \frac{(2a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{6} = 9a^3\sqrt{2}$.

Câu 31. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có $\widehat{DAB} = 120°$. Biết $(AB'C'D)$ tạo với đáy một góc $60°$ và khoảng cách từ điểm C đến $(AB'C')$ bằng $a\sqrt{3}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$?

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $16\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{32\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $24\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm $B'C'$.

Gọi độ dài cạnh đáy bằng $x(x>0) \Rightarrow A'I = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $(AA'I) \perp B'C \Rightarrow ((AB'C'D);(A'B'C'D')) = \widehat{AIA'} = 60°$.

$\Rightarrow AA' = \frac{3x}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên cạnh AI.

$\Rightarrow A'H \perp (AB'C'D)$. Mặt khác $d(C;(AB'C'D)) = d(A';(AB'C'D))$.

Vậy $d(A';(AB'C'D)) = A'H = a\sqrt{3}$.

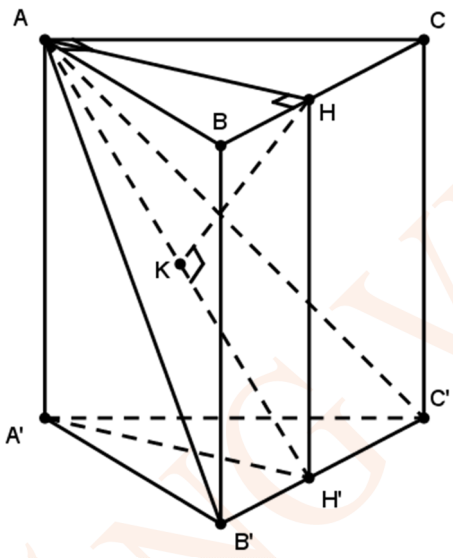
Trong tam giác $AA'I$ có: $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'I^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9x^2} + \frac{4}{3x^2} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V = 4a.\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 32. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = a$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Biết khoảng cách đường thẳng BC và mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên BC, H' là hình chiếu của H trên $B'C'$, K là hình chiếu của H trên AH'.

Tam giác vuông ABC có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ và $BC = a$ nên ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp HH' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHH')$

$\Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow B'C' \perp HK$

$\begin{cases} HK \perp AH' \\ HK \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow HK \perp (AB'C')$

$\Rightarrow HK = d(BC,(AB'C')) = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Tam giác AHH' vuông tại H và HK là đường cao của nó nên ta có

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{HH'^2}\Rightarrow\frac{1}{HH'^2}=\frac{1}{HK^2}-\frac{1}{AH^2}=\frac{25}{3a^2}-\frac{16}{3a^2}=\frac{9}{3a^2}$$

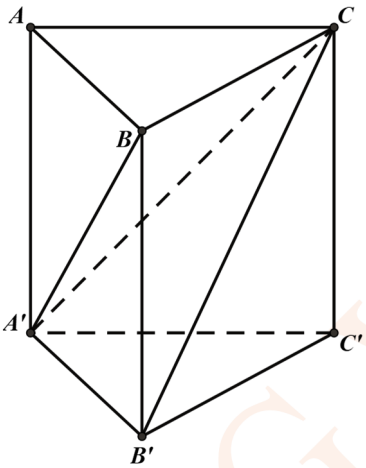
$$\Rightarrow HH'=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.HH'=\frac{a^3}{8}.$$

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$. Biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $CC'//(AA'B'B)$ mà $A'B\subset(AA'B'B)$

Nên $d(CC';A'B)=d(CC';(AA'B'B))=C'A'=a\sqrt{3}$

$A'C'=a\sqrt{3}, A'B'=a$

$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$A'B'\perp(ACC'A')$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{B'CA'}=\alpha$

$\sin\alpha=\frac{A'B'}{B'C}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\Leftrightarrow B'C=2a\sqrt{5}$

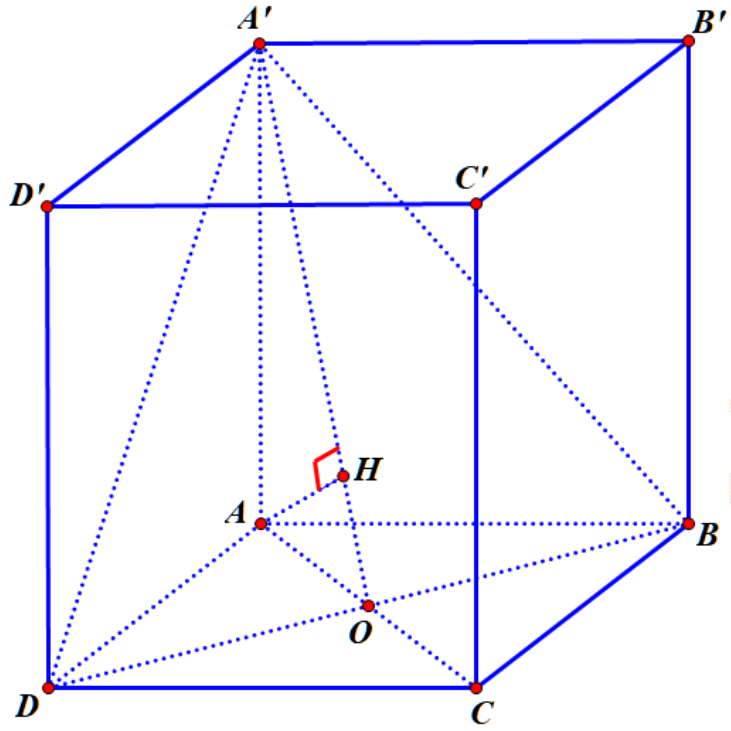
$CC'=\sqrt{B'C^2-B'C'^2}=\sqrt{20a^2-4a^2}=4a$

Thể tích lăng trụ là $V=B.h$ với $h=CC'$ $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a=2a^3\sqrt{3}.$

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** a^3. **D.** $6a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Kẻ $AH \perp A'O,\ (H \in A'O)$; (1)

$\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp AH;\ (2)$

Từ (1) và (2), ta có $AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH = \frac{\sqrt{2}}{3}a$.

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A, ta có

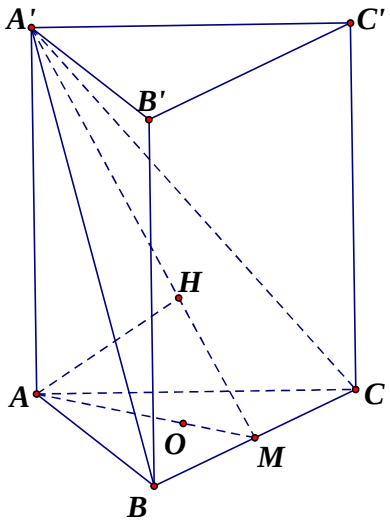
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2} - \frac{1}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow A'A = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'A = (2a)^2 \frac{a}{2} = 2a^3$.

Câu 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH$ (1)

Mà $AH \perp A'M$ (2)

Từ (1) và (2) $AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Ta có $\dfrac{d(O,(A'BC))}{d(A,(A'BC))} = \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{1}{3}$ (do tính chất trọng tâm).

$\Rightarrow d(A,(A'BC)) = 3d(O,(A'BC)) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

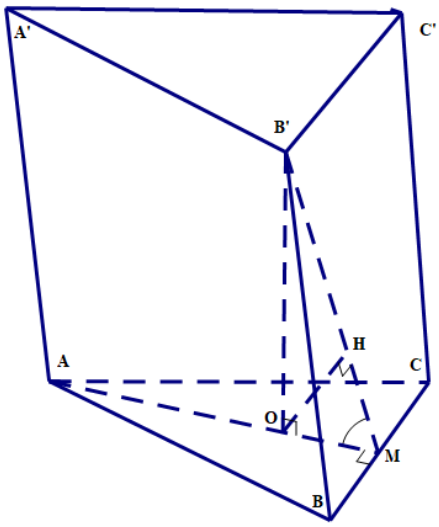
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC, góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và $(BCC'B')$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $8a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác ABC, H là hình chiếu vuông góc của O lên $B'M$. Giả sử cạnh đáy bằng x.

Ta có $B'O \perp (ABC)$ và $((A'B'C'),(BCC'B')) = ((ABC),(BCC'B')) = \widehat{B'MO} = 60^0$.

$d(A'A,B'C') = d(A'A,(B'C'CB)) = d(A,(B'C'CB)) = 3d(O,(B'C'CB)) = 3OH = 3a$

$\Rightarrow OH = a$.

Trong tam giác $B'OM$ có

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{B'O^2} + \dfrac{1}{OM^2}$, trong đó $\begin{cases} OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \\ B'O = OM.\tan 60° = \dfrac{x}{2} \end{cases}$.

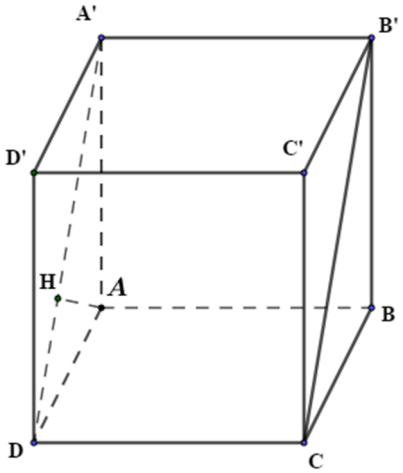
Suy ra $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{12}{x^2} \Rightarrow x = 4a$.

Thể tích khối lăng trụ $V = B'O.S_{ABC} = \dfrac{x}{2}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 8a^3\sqrt{3}$.

Câu 37. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối hộp theo a.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{7}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $A'D$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp A'D \\ AH \perp A'B' \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (A'B'CD) \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác $AA'D$

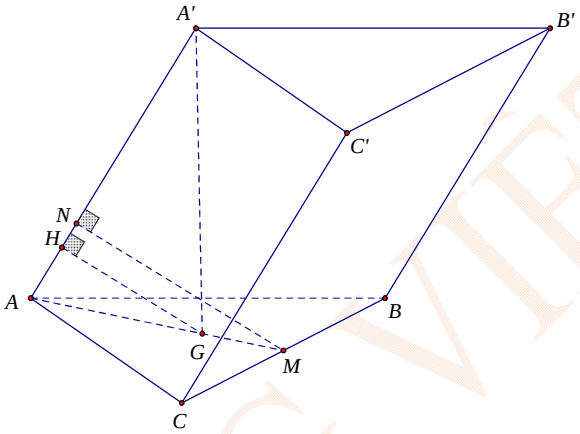
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AA'^2 = 3a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = a\sqrt{3}.a.a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 38. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

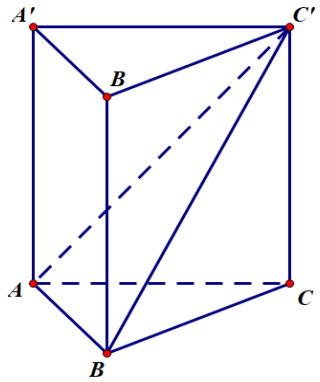
Ta có: $GH // MN \Rightarrow \dfrac{GH}{MN} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

$\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GA^2} + \dfrac{1}{GA'^2} \Rightarrow \dfrac{1}{GA'^2} = \dfrac{1}{GH^2} - \dfrac{1}{GA^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{9}{a^2} \Rightarrow GA' = \dfrac{a}{3}$.

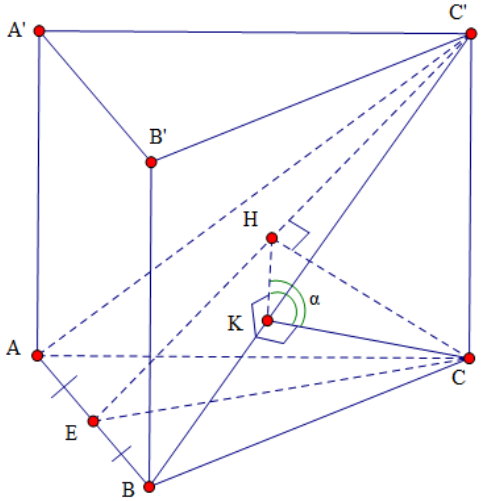
Vậy thể tích của khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 39. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa 2 mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (tham khảo hình dưới đây). Thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ bằng



A. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AB, gọi H là hình chiếu vuông góc hạ từ điểm C lên $C'E$.

Khi đó ta có: $AB \perp (C'CE) \Rightarrow AB \perp CH$ (1) và $CH \perp C'E$ (2)

Từ $(1),(2).\Rightarrow CH \perp (ABC') \Rightarrow d(C;(ABC')) = CH = a$

Kẻ $HK \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (CHK) \Rightarrow BC' \perp CK$.

$\Rightarrow \widehat{((ABC'),(BCC'B'))} = \widehat{CKH} = \alpha$.

$\sin\alpha = \frac{CH}{CK} \Rightarrow CK = \frac{CH}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$. Đặt $CB = x > 0$. Ta có

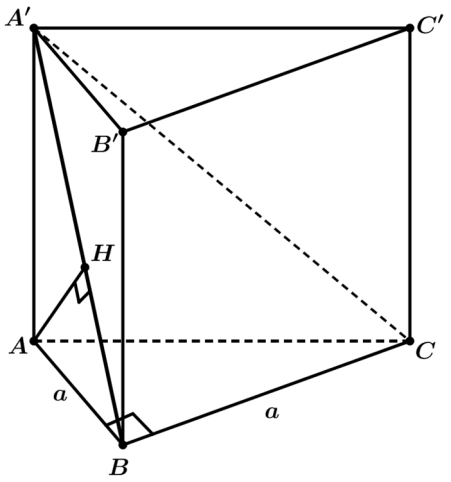
$$\begin{cases} \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CE^2} \\ \frac{1}{CK^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CC'^2} \end{cases} \Rightarrow x = a\sqrt{3} \Rightarrow CC' = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \; ; \; S_{\Delta ABC} = \left(a\sqrt{3}\right)^2 . \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy thể tích khối chóp $ABCA'B'C'$ là: $V = CC'.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$.

Câu 40. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải



Do ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$ nên $AB=AC=a$.

Gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$, ta có

$$\frac{d\left(A,(A'BC)\right)}{d\left(C',(A'BC)\right)}=\frac{IA}{IC'}=1\Rightarrow d\left(C',(A'BC)\right)=d\left(A,(A'BC)\right)=\frac{a}{2}.$$

Kẻ $AH\perp A'B$, $H\in A'B$.

Vì $\left.\begin{matrix}BC\perp AB\\ BC\perp AA'\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(ABB'A')\Rightarrow BC\perp AH$.

Ta có $BC\perp AH$, $AH\perp A'B\Rightarrow AH\perp(A'BC)$. Do đó $d\left(A,(A'BC)\right)=AH=\frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A, ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AB^2}$

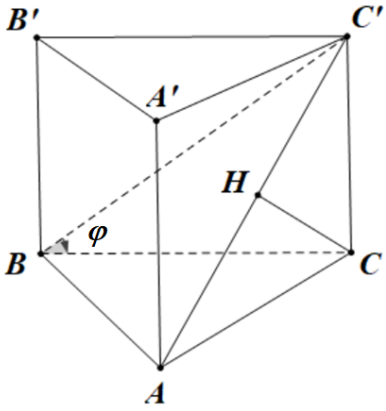
$$\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow A'A=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}\cdot A'A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 41. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AC=a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng (ABC) bằng φ với $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{18}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{18}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải



Kẻ CH vuông góc với AC' tại H, ta có $CH \perp (ABC')$ (vì $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp CH$).

Ta có $d(A',(ABC')) = d(C,(ABC')) = CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác vuông ACC' có CH là đường cao, có $\dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CH^2} - \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $CC' \perp (ABC)$ nên $\widehat{(BC',(ABC))} = \widehat{(BC',BC)} = \varphi$.

Với $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{CC'}{BC'} \Rightarrow BC' = CC'.\dfrac{4}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}a$.

Xét tam giác vuông BCC' có $BC^2 = \sqrt{BC'^2 - CC'^2} = a\sqrt{5}$

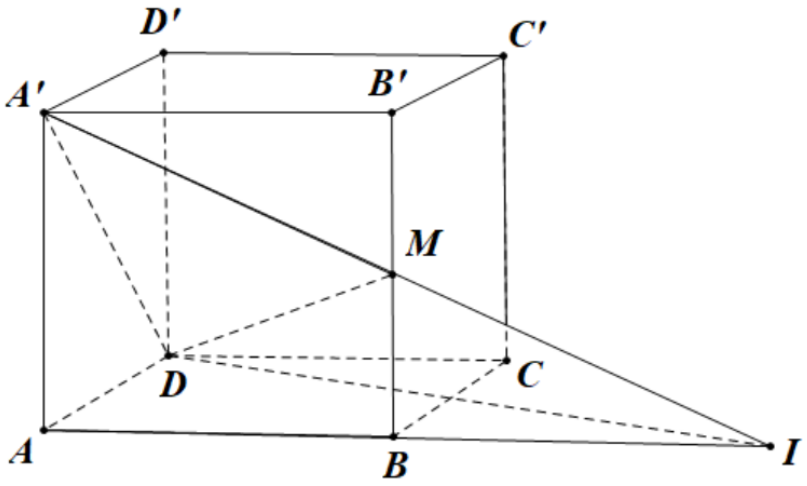
Xét tam giác vuông ABC có $AB^2 = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$, có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

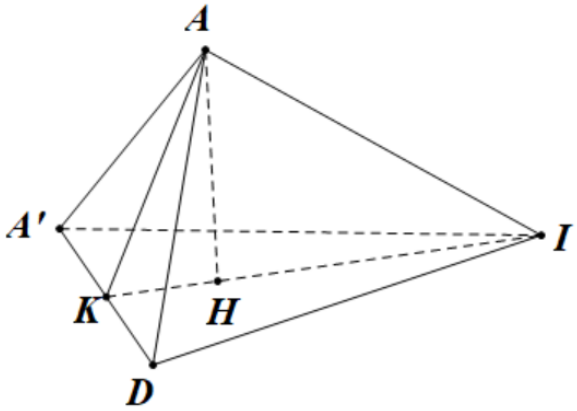
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{18}}{2}$.

Câu 42. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm cạnh BB'. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MDA') bằng $\dfrac{2a}{3}$. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $8a^3$. **D.** a^3.

Lời giải





Gọi độ dài cạnh lập phương là $x\ (x>0)$. Gọi $I=AB\cap A'M$, do M là trung điểm của BB' và $BB'\,//\,AA'$ nên B là trung điểm của AI, suy ra $AI=2x$.

Ta có $d\left(A,\left(A'DM\right)\right)=d\left(A,\left(A'DI\right)\right)=AH$, với $AH\perp IK$ tại H, $A'D\perp IK$ tại K.

Vì tứ diện $AA'DI$ có AA', AD, AI đôi một vuông góc nên $AH\perp\left(A'DI\right)$.

Xét hai tam giác vuông AKI, $A'AD$ có đường cao lần lượt là AH, AK, khi đó

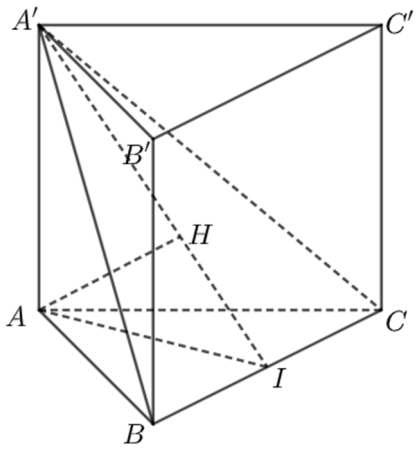
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{9}{4x^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow x=a.$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=a^3$.

Câu 43. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, $AB=2a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

Mà $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (AA'I)$.

Kẻ $AH \perp A'I$ (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp (AA'I) \\ AH \subset (AA'I) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

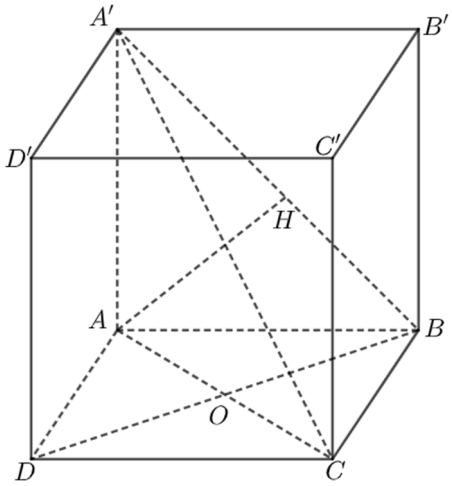
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow AA' = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = (2a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.a = \sqrt{3}a^3$.

Câu 44. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB = 3a$. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng $(A'D'CB)$ bằng a, thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}a^3$. **B.** $\dfrac{54\sqrt{5}}{15}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{54\sqrt{5}}{5}a^3$.

Lời giải



Kẻ $AH \perp A'B\,(1)$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp AH\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (A'BC)$ hay $AH \perp (A'D'CB) \Rightarrow d(A,(A'D'CB)) = AH$.

Ta có: $\dfrac{d(A,(A'D'CB))}{d(O,(A'D'CB))} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A,(A'D'CB)) = 2d(O,(A'D'CB)) = 2a$.

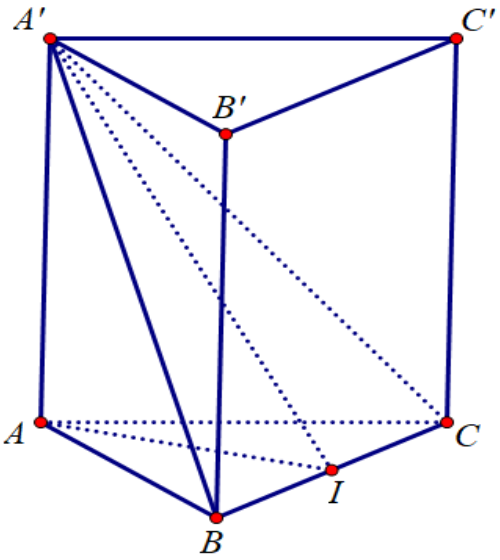
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(2a)^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{(3a)^2} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}a$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = (3a)^2.\dfrac{6\sqrt{5}}{5}a = \dfrac{54\sqrt{5}}{5}a^3$

Câu 45. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\dfrac{\sqrt{7}}{4}a^2$ và góc giữa $A'C$ và đáy bằng $45°$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải



Ta có góc giữa $A'C$ và (ABC) là góc $\widehat{A'CA}=45°$.

Đặt cạnh của tam giác ABC bằng x. Khi đó ta có

$AA'=x$ và $AI=\frac{\sqrt{3}}{2}x$; $A'I=\sqrt{AI^2+AA'^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}x$

và $S_{A'BC}=\frac{1}{2}A'I.BC=\frac{\sqrt{7}}{4}x^2$. Mà $S_{A'BC}=\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$

nên ta có $\frac{\sqrt{7}}{4}x^2=\frac{\sqrt{7}}{4}a^2\Rightarrow x=a$.

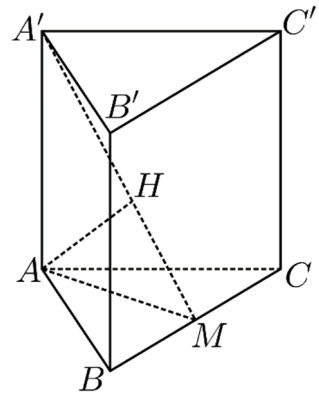
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V=S_{ABC}.AA'=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=2a$, $BC=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là $\frac{3\sqrt{85}}{17}a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\sqrt{15}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{15}}{2}a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{15}}{3}a^3$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{15}}{4}a^3$.

Lời giải

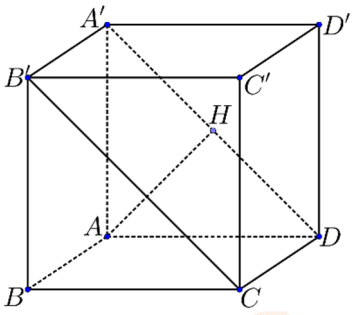


Gọi M là trung điểm BC.
Vẽ $AH \perp A'M$, $(H \in A'M)$.
Ta có $d(A,(A'BC)) = AH$.
Xét tam giác ABM vuông tại M ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a$.
Xét tam giác $A'AM$ vuông tại A ta có
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{85}}{17}a\right)^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}a\right)^2} \Rightarrow AA' = 3a$$
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = AA'.\frac{1}{2}.AM.BC = 3a.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{15}}{2}a.a = \frac{3\sqrt{15}}{4}a^3$ (đvtt).

Câu 47. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'B'CD)$ là $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = 8a^3$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = 4a^3$.

Lời giải

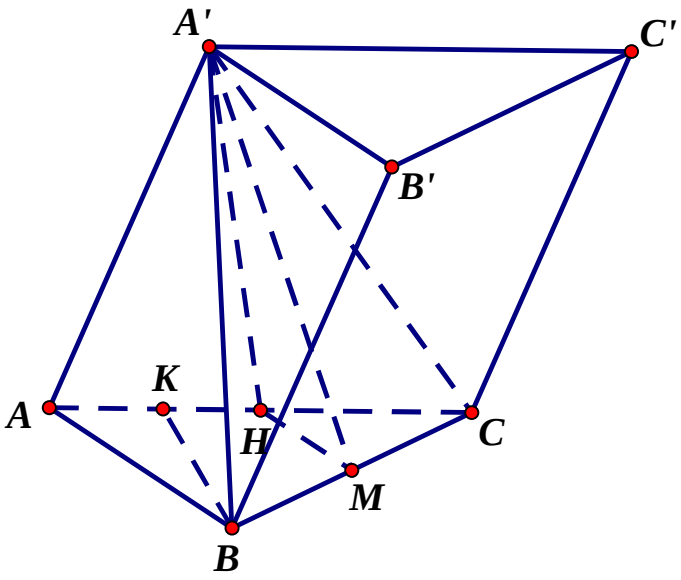


Vẽ $AH \perp A'D$, $H \in A'D$.
Ta có $d(A,(A'B'CD)) = AH$.
Xét tam giác $A'AD$ vuông tại A ta có
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{(2a)^2} \Rightarrow AA' = 4a.$$
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = a.2a.4a = 8a^3$ (đvtt).

Câu 48. . Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có $A'A = A'B = A'C$, đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $BC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0 và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(AA'C'C)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải



+ Gọi H là trung điểm của AC. Lại có ΔABC vuông tại B suy ra $HA = HB = HC$.
Mà theo đề bài cho $A'A = A'B = A'C$. Vậy $A'H$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC do đó $A'H \perp (ABC)$ (1)

Gọi M là trung điểm của BC khi đó $HM \perp BC$ (do $AB // HM$). (2)

Lại do từ (1) ta suy ra $BC \perp A'H$ (3).

Từ $(2),(3)$ ta suy ra $BC \perp (A'HM)$ hay $BC \perp A'M$ (4)

Từ $(2),(4)$ ta suy ra góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MH} = 60^0$.

+ Dựng $BK \perp AC$, lại có $BK \perp A'H$ suy ra $BK \perp (AA'C'C)$.

Vì $BB' // AA'$ nên $d(B';AA'C'C) = d(B;AA'C'C) = BK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông ABC vuông tại B, có BK là đường cao

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BA = a\sqrt{3}$$

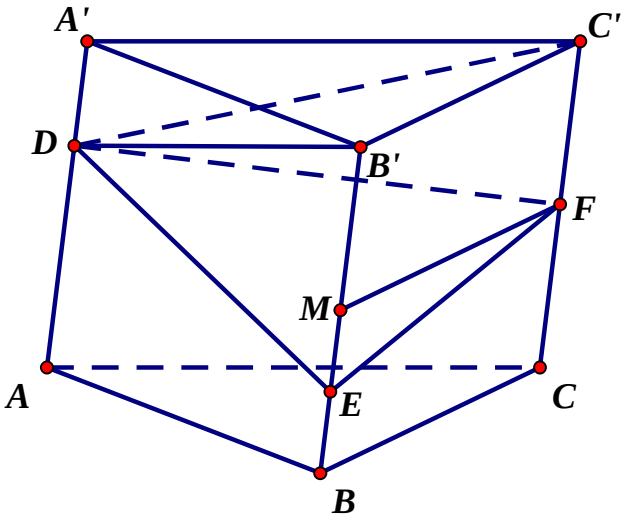
Trong tam giác vuông $A'HM$ có $A'H = HM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}.BA.BC.A'H = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.a.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 49. . Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AD = 2DA'$, $EB' = 3EB$, $FC = FC'$. Biết thể tích của khối đa diện $DB'C'FE$ là $15(m^3)$, khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là bao nhiêu.

A. $30(m^3)$. **B.** $36(m^3)$. **C.** $24(m^3)$. **D.** $45(m^3)$.

Lời giải



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có

$V_{D.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(D,(ABC)\right)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d\left(A',(ABC)\right)=\frac{2}{9}V.$

Tương tự $V_{D.A'B'C'}=\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(D,(A'B'C')\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(A,(A'B'C')\right)=\frac{1}{9}V$.

Từ đó suy ra $V_{D.BCC'B'}=V-\frac{1}{9}V-\frac{2}{9}V=\frac{2}{3}V$. Gọi M là trung điểm của BB', ta có diện tích

$S_{B'C'FE}=S_{B'C'FM}+S_{EFM}=\frac{1}{2}S_{BCC'B'}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}S_{BCC'B'}=\frac{5}{8}S_{BCC'B'}$

Do đó $V_{D.B'C'FE}=\frac{5}{8}V_{D.BCC'B'}=\frac{5}{8}.\frac{2}{3}V=\frac{5}{12}V$. Từ đây ta suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{12}{5}.15=36\left(m^3\right)$.

Câu hỏi trên ta cũng có thể sử dụng cách 2 áp dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích

$\frac{V_{A'B'C'.DEF}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a+b+c}{3}$, trong đó $a=\frac{A'D}{A'A}=\frac{1}{3},b=\frac{B'E}{BE}=\frac{3}{4},c=\frac{C'F}{C'C}=\frac{1}{2}$

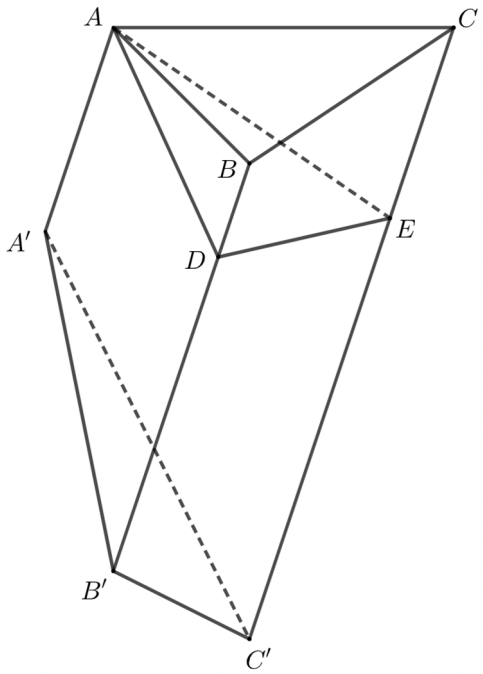
Suy ra $\frac{V_{A'B'C'.DEF}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a+b+c}{3}=\frac{19}{36}\Rightarrow V_{A'B'C'.DEF}=\frac{19}{36}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{19}{36}V$.

Do đó $V_{D.B'C'FE}=\frac{19}{36}V-\frac{1}{9}V=\frac{5}{12}V$.

Câu 50. Cho khối đa diện $ABC\cdot A'B'C'$ có $AA'//BB'//CC'$. Biết khoảng cách từ điểm A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; khoảng cách giữa hai đường thẳng BB',CC' bằng 2 và $AA'=1,BB'=2,CC'=3$. Thể tich khối đa diện $ABC\cdot A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Hạ $\begin{cases} AD \perp BB' \\ AE \perp CC' \end{cases} \Rightarrow (ADE) \perp AA' // BB' // CC'$ và $AD = 1, AE = \sqrt{3}, DE = 2.$

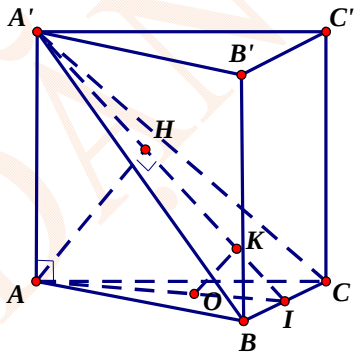
$AD^2 + AE^2 = 1 + 3 = 4 = DE^2$ Theo định lý pytago đảo suy ra $\triangle ADE$ vuông tại A

Ta có $S_{ADE} = \dfrac{AD.AE}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ADE} \cdot \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1+2+3}{3} = \sqrt{3}.$

Câu 51. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$,

Ta có $AH \perp A'I$, $AH \perp BC$ (do $BC \perp (A'AI), AH \subset (A'AI)$)

$\Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH$

$\frac{d(O;(A'BC))}{d(A;(A'BC))} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(O;(A'BC)) = \frac{d(A;(A'BC))}{3} = \frac{AH}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow AH = a$

Ta có $AI = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

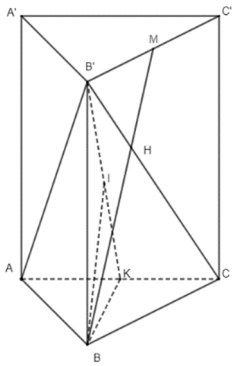
Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3a^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC} = 60^0$, $AB = 3a$ và $AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $9a^3$. **B.** $27a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $32a^3$.



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.3a.4a.\sin 60^0 = 3\sqrt{3}a^2$.

Gọi H là giao điểm của MB và $B'C$. Khi đó, theo định lý Ta-let ta có $\frac{HM}{HB} = \frac{MB'}{BC} = \frac{1}{2}$.

Ta có $\frac{d(M,(B'AC))}{d(B,(B'AC))} = \frac{HM}{HB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B,(B'AC)) = 2d(M,(B'AC)) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Từ B kẻ BK vuông góc với AC với $K \in AC$. Kẻ BI vuông góc với $B'K$ với $I \in B'K$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp B'K \\ BI \perp AC \end{cases} \Rightarrow BI \perp (B'AC) \Rightarrow BI = d(B,(B'AC)) = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Lại có $BK = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2.3\sqrt{3}a^2}{4a} = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và $\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BB'^2} \Rightarrow BB' = \sqrt{\frac{BI^2.BK^2}{BK^2 - BI^2}} = 3\sqrt{3}a$.

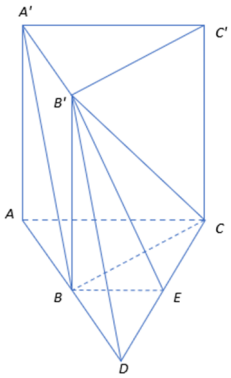
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB' = 3\sqrt{3}a^2.3\sqrt{3}a = 27a^3$.

Câu 53. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $90°$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=a^3\sqrt{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D, E là điểm sao cho B là trung điểm của AD và E là trung điểm của CD.

Khi đó tam giác ACD vuông tại C ($BC=BA=BD$) và $CD=\sqrt{3}a$; $BE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}a$ (1).

Vì $A'B'\overline{//}BD$ nên $B'D//A'B$. Mà $\left(A'B,B'C\right)=90°$, do đó tam giác $CB'D$ vuông tại B' và có đường trung tuyến $B'E=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (2).

$BB'\perp\left(ABC\right)$ nên tam giác $B'BE$ vuông tại B.

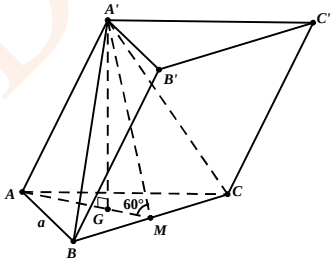
Từ (1) và (2) suy ra $h=B'B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Ta có: $V=Sh=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{\sqrt{6}}{8}a^3$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $60°$, $A'A=A'B=A'C$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $A'G \perp (ABC)$.

Kết hợp với $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $GM \perp BC$ suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MG} = 60°$.

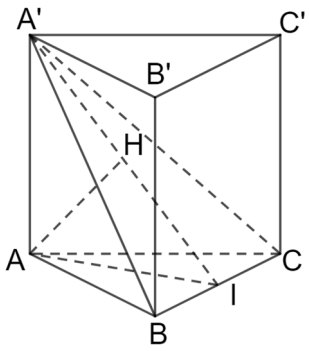
Ta tính được $MG = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $A'G = MG \tan \widehat{A'MG} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 55. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{34}}{68}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{34}}{68}$.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC$ tại I (I là trung điểm của BC, mà $BC \perp AA'$

Suy ra $BC \perp (A'AI)$.

Kẻ $AH \perp A'I$, mà $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (A'AI) \supset AH$)

Suy ra $AH \perp (A'BC)$.

Vậy $d(A,(A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{6a^2} \Leftrightarrow A'A = a\sqrt{6}$.

Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 44. **(Đề TK BGD 2023)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=4x^3+4x+2 \Leftrightarrow (x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3+4x+2$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]'=4x^3+4x+2 \Leftrightarrow x.f(x)=x^4+2x^2+2x+C \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^4+2x^2+2x+C}{x}$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=x^3+2x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^3+2x+2=3x^2+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là: $S=\int_0^2 \left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 44 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2$ và $f(0)=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\frac{256}{15}$. **B.** $\frac{256}{15}\pi$. **C.** $\frac{16}{3}\pi$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=4x^3+2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f^2(2)$ bằng

A. $\frac{272}{15}$. **B.** $\frac{136}{15}$. **C.** $\frac{68}{15}$. **D.** $\frac{4000}{15}$.

Câu 3. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+x.f'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$.

A. $S=8$. **B.** $S=4$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=4x^3+3x^2-xf'(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. 7,31. **B.** 7,32. **C.** 7,33. **D.** 7,34

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x+3, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng

A. $(27;28)$. **B.** $(26;27)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(29;30)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos x f'(x)-\sin x f(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y=f(x)$ có hoành độ $x=2$.

A. $\dfrac{2400}{12}$. **B.** $\dfrac{2401}{12}$. **C.** $\dfrac{333}{4}$. **D.** $\dfrac{335}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và trục Ox, trục Oy và $x=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $x^2-x(f'(x)-2)+(f(x)-f'(x)+1)=0$, $\forall x\in[0;+\infty)$ và có $f(0)=0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $f(1)=26$ và $f(x)=x.f'(x)-8x^3-5x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, $x=2$, $x=3$ bằng

A. $\dfrac{127}{6}$. **B.** $\dfrac{172}{6}$. **C.** $\dfrac{12}{6}$. **D.** $\dfrac{27}{6}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$ và $f(2)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=6$ và $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\dfrac{162}{5}$. **B.** $\dfrac{324}{5}$. **C.** $\dfrac{104}{5}$. **D.** $\dfrac{229}{10}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2).f(x)=x.f'(x)-x^3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{2}{3}$. **B.** $\mathrm{e}-\frac{2}{3}$. **C.** $\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\mathrm{e}-\frac{2}{\mathrm{e}}-\frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thoả mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $f(1)-f(0)$.

A. $9\ln 2-\frac{1}{2}$. **B.** $9\ln 2+\frac{1}{2}$. **C.** $9\ln\frac{1}{2}+2$. **D.** $9\ln\frac{1}{2}-2$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'(x)-2f(x)=4x-8$ và $f(2)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{3}{7}$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $(-1;+\infty)$, thỏa mãn $(x+1)\left[f'(x)-2x^2-2x\right]=f(x)$ với $\forall x\in(-1;+\infty)$ và $f(0)=2$. Tính diện tích hình phẳng được tạo bởi đồ thị $y=f(x)$ với trục hoành và trục tung.

A. 3. **B.** 6. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{12}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1,\forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; $x=1;x=3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 12. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 20. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xf(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$, $x=1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoã mãn $f(1)=3$ và $f^2(x)-8xf(x)-f'(x)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$; $f(1)-f(0)=2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S=\ln a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=14$. **B.** $T=25$. **C.** $T=36$. **D.** $T=43$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x),\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0,\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x),y=0,x=e,x=e^2$.

A. $S=\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=\dfrac{5}{2}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

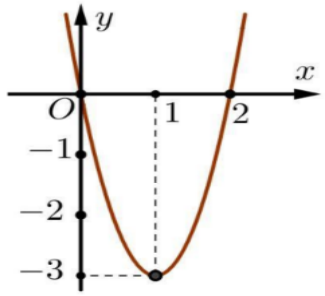
Câu 24. Cho hàm số $f(x)=e^{3x}+ae^{2x}+be^x$ với a, b là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)$ có hai giá trị cực trị là 2 và 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g^3(x)$ và $\left(-f(x)+5f'(x)+2e^{3x}\right)g^2(x)$ bằng:

A. 40. **B.** 7. **C.** 21. **D.** 39.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=2x^3-9+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx$. Đồ thị hàm số $y=g(x)=ax^3+bx^2+cx-9$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ có diện tích bằng:

A. $I=2$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{37}{12}$. **D.** $I=1$.

Câu 26. Cho $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2;3]$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $g(x)=xf^2(x)$, $h(x)=-x^2f(x)f'(x)$ và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$ bằng 72. Tính $f(1)$.



A. $f(1)=2$. **B.** $f(1)=-1$. **C.** $f(1)=1$. **D.** $f(1)=\dfrac{-65}{2}$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+23x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với a, b, c, m, $n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ có ba cực trị là -2; 1 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{253}{3}$. **B.** $\frac{253}{9}$. **C.** $\frac{253}{12}$. **D.** $\frac{63}{4}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)-f(x)=x$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=-x^2+1$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $2xf(x)+f'(x)=x(x^2-1)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e-4}{8e}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{e-4}{4e}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(x)=e^x+\int_0^1\frac{f(t)}{e^t}dt$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1+\ln 2022)=a+be$, với $a,b\in\mathbb{N}$. Khi đó $a+b$ có giá trị là

A. 2022. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2025.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $[f'(x)]^2+8xf(x)=x^4-2x$, $\forall x\in[0;1]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox, Oy. Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{7}$. **B.** $\frac{2\pi}{7}$. **C.** $\frac{3\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$

Câu 33. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{9}{2}$. **B.** $I=\frac{45}{8}$. **C.** $I=\frac{11}{2}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x)-4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1}=1$, $f(0)=1$. Biết rằng $I=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1)f(x)dx = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T=a-2b$ bằng

A. $T=12277$. **B.** $T=6127$. **C.** $T=12281$. **D.** $T=6125$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thoả mãn $(xf'(x)-2f(x)).\ln x = x^3 - f(x), \forall x \in (1;+\infty)$. Biết $f(\sqrt[3]{e})=3e$. Khi đó giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$; $f(2)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=-2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x), x=0$ và $x=1$.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{32}{5}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2, x=1$.

A. $\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\frac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\frac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\frac{3e^2-1}{e^2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 f^2(x)$, $\forall x \in (1;+\infty)$, $f(x)>0$, $\forall x \in (1;+\infty)$ và $f(e)=\frac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

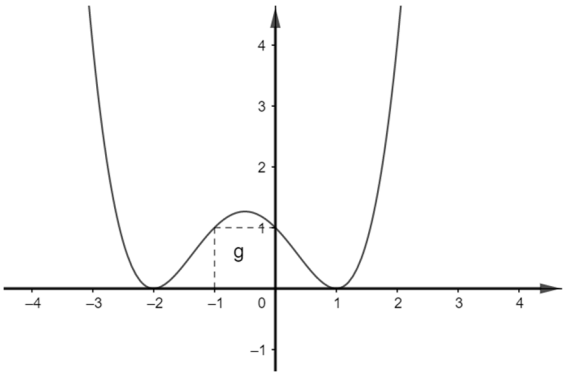
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{127}{40}$. **B.** $\dfrac{107}{5}$. **C.** $\dfrac{127}{10}$. **D.** $\dfrac{13}{5}$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{5}$. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2, x=1$.

A. $\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\dfrac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\dfrac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\dfrac{3e^2-1}{e^2}$.

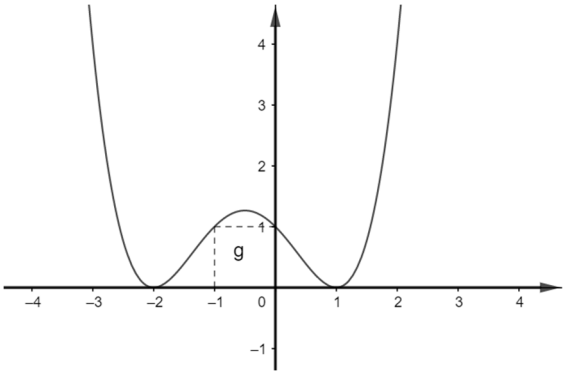
Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=x^3+\int_0^1(10u-4x)f(u)du$ có đồ thị (C). Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)=x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f(1)=-1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int_0^2 xf(x)dx$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. 0,98. **B.** 0,88. **C.** 0,78. **D.** 0,68.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f(1)=1$ và $\begin{cases}f(x)>0\\f'(x)>0\end{cases}$ trên $(1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $2[f'(x)]^2=(x-1)^2.\left(4f(x)-[f'(x)]^2+4\right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với các đường $x=1;x=2$ và Ox?

A. $S=\frac{4}{3}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{-4}{3}$. **D.** $S=\frac{-8}{3}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f''(x).f(x)-[f'(x)]^2-[f(x)]^2=0$, $f(0)=1;f(1)=\sqrt{e}$. Tính $f(2)=?$

A. $f(2)=2\sqrt{e}$. **B.** $f(2)=e$.

C. $f(2)=e^4$. **D.** $f(2)=e^2$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=5x^4+6x^2+4x, \forall x\in\mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\frac{1}{2}$, $f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ bằng

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{6}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^2+c(b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d):y=g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0=1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ và $\int_{x_1}^{x_2}\frac{g(x)-f(x)}{(x-1)^2}dx=\frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d).

A. $\frac{29}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** $\frac{143}{5}$ **D.** $\frac{43}{5}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g(x)=f(x)-2xf'(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=1;x=4$.

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{124}{5}$. **C.** $\frac{62}{5}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;+\infty)$ và thỏa mãn $(x+2)f'(x)-2f(x)=(x-2)(x+2)^3$ với mọi $x\in[-2;+\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{432}{5}$. **B.** $\frac{448}{5}$. **C.** $\frac{464}{5}$. **D.** $\frac{446}{5}$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{41}{400}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $-\frac{391}{400}$. **D.** $-\frac{1}{40}$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[-1;1]$ thoả mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^{3}$. **C.** $f(-1)=e^{4}$. **D.** $f(-1)=3$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[1;4]$ thoả mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;4], f(1)=\frac{3}{2}$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=\frac{361}{18}$. **B.** $f(4)=\frac{371}{18}$. **C.** $f(4)=\frac{381}{18}$. **D.** $f(4)=\frac{391}{18}$.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2$ và $f(0)=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\frac{256}{15}$. **B.** $\frac{256}{15}\pi$. **C.** $\frac{16}{3}\pi$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2 \Leftrightarrow f'(x).e^{-x}-f(x).e^{-x}=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x).e^{-x}\right)'=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x} \Rightarrow f(x).e^{-x}=\int\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}dx$$

$$\Leftrightarrow f(x).e^{-x}=\left(4x^2-8x\right).e^{-x}+C$$

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$. Ta có $f(x)=4x^2-8x$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành thỏa mãn phương trình

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox là $V=\pi\int_0^2\left(4x^2-8x\right)^2dx=\frac{256}{15}\pi$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=4x^3+2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của $f^2(2)$ bằng

A. $\frac{272}{15}$. **B.** $\frac{136}{15}$. **C.** $\frac{68}{15}$. **D.** $\frac{4000}{15}$.

Lời giải

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=\left[f(x).f'(x)\right]'$

Từ giả thiết ta có: $\left[f(x).f'(x)\right]'=4x^3+2x$

Suy ra: $f(x).f'(x)=\int\left(4x^3+2x\right)dx=x^4+x^2+C$

Với $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Nên ta có: $f(x).f'(x)=x^4+x^2$

Suy ra: $\int_0^2 f(x).f'(x)dx=\int_0^2\left(x^4+x^2\right)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^2=\frac{136}{15}\Rightarrow f^2(2)=\frac{272}{15}$

Câu 3. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+x.f'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$.

A. $S=8$. **B.** $S=4$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Lời giải

Ta có $f(x)+x.f'(x)+f'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)=\left[(x+1)f(x)\right]'$

Nên $f(x)+x.f'(x)+f'(x)=4x^3-6x^2-2x+4\Leftrightarrow 4x^3-6x^2-2x+4=\left[(x+1)f(x)\right]'$

$\Rightarrow(x+1)f(x)=x^4-2x^3-x^2+4x+C\ (1)$

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $C-2=0\Leftrightarrow C=2$. Suy ra $(x+1)f(x)=x^4-2x^3-x^2+4x+2$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2x+2$

Khi đó $f'(x)=3x^2-6x+2$.

Xét phương trình $x^3-3x^2+2x+2=3x^2-6x+2\Leftrightarrow x^3-6x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=4\end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\int_0^4\left|x^3-6x^2+8x\right|dx=8$

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=4x^3+3x^2-xf'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. 7,31. **B.** 7,32. **C.** 7,33. **D.** 7,34

Lời giải

Ta có $f(x)=4x^3+3x^2-xf'(x)$

$\Leftrightarrow\ f(x)+xf'(x)=4x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow\ \left[x.f(x)\right]'=4x^3+3x^2$

$\Rightarrow x.f(x)=x^4+x^3+C$

Cho $x=0$ ta được $C=0\ \Rightarrow f(x)=x^3+x^2$ và $f'(x)=3x^2+2x$.

Xét phương trình: $f(x)=f'(x)$

$\Leftrightarrow\ x^3+x^2=3x^2+2x$

$\Leftrightarrow\ x^3-2x^2-2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng là: $S=\int\limits_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\left|x^3-2x^2-2x\right|\mathrm{d}x\approx 7,33$ (đvdt).

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng

A. $(27;28)$. **B.** $(26;27)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(29;30)$.

Lời giải

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=5x^4+6x+3\Leftrightarrow (x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=5x^4+6x+3$

$$\Leftrightarrow [x.f(x)]'=5x^4+6x+3\Leftrightarrow x.f(x)=x^5+3x^2+3x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^5+3x^2+3x+C}{x}$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^4+3x+3\Rightarrow f'(x)=4x^3+3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^4+3x+3=4x^3+3\Leftrightarrow x\left(x^3-4x^2+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2-3x-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là:

$$S=\int\limits_{\frac{3-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x\approx 28,87$$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos xf'(x)-\sin xf(x)=2\cos 2x+2\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Lời giải

Ta có: $\cos xf'(x)-\sin xf(x)=2\cos 2x+2\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \cos x\cdot f'(x)+\left(\cos x\right)'.f(x)=2\cos 2x+2\sin x$$

$\Leftrightarrow [\cos x.f(x)]' = 2\cos 2x + 2\sin x \Leftrightarrow \cos x.f(x) = \sin 2x - 2\cos x + C$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\sin 2x - 2\cos x + C}{\cos x} = \dfrac{2\sin x.\cos x - 2\cos x + C}{\cos x}$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C = 0$. Do đó $f(x) = 2\cos x - 2 \Rightarrow f'(x) = -2\sin x$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = f'(x), x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ là:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| f(x) - f'(x) \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 2\cos x + 2\sin x - 2 \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 2\sin x - 2)\, dx$$

$$= (2\sin x - 2\cos x - 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 - \pi .$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f'(x) + \dfrac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y = f(x)$ có hoành độ $x = 2$.

A. $\dfrac{2400}{12}$. **B.** $\dfrac{2401}{12}$. **C.** $\dfrac{333}{4}$. **D.** $\dfrac{335}{4}$.

Lời giải

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + x'f(x) = 4x^3 + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[x.f(x)\right]' = 4x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow \int \left[x.f(x)\right]' dx = \int (4x^3 + 3x^2) dx \Leftrightarrow xf(x) = x^4 + x^3 + C .$$

Vì $f(1) = 2$ nên $1f(1) = 1 + 1 + C \Leftrightarrow C = 0$. Do đó $f(x) = x^3 + x^2$.

Lại có $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

$f'(2) = 16, f(2) = 12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $y = 16x - 20$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x) = x^3 + x^2$ và $y = 16x - 20$

$$x^3 + x^2 = 16x - 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$S_{hp} = \int_{-5}^{2} \left| x^3 + x^2 - 16x + 20 \right| dx = \frac{2401}{12} .$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(1) = 3$ và $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1$ với mọi $x > 0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ và trục Ox, trục Oy và $x = 1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

$$x(4 - f'(x)) = f(x) - 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x + 1 \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]' = 4x + 1$$

$\Leftrightarrow \int \left[x.f\left(x\right)\right]' dx = \int \left(4x+1\right) dx \Leftrightarrow x.f\left(x\right) = 2x^2 + x + C$

Vì $f\left(1\right) = 3$ nên $C = 0$.

Do đó $f\left(x\right) = 2x + 1$

$S_{hp} = \int_0^1 \left|2x+1\right| dx = 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm xác định trên $\left[0;+\infty\right)$ và thoả mãn $x^2 - x\left(f'\left(x\right)-2\right) + \left(f\left(x\right) - f'\left(x\right)+1\right) = 0$, $\forall x \in \left[0;+\infty\right)$ và có $f\left(0\right) = 0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y = f\left(x\right)$ và $y = f'\left(x\right)$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Ta có

$x^2 - x\left(f'\left(x\right)-2\right) + \left(f\left(x\right) - f'\left(x\right)+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - xf'\left(x\right) + 2x + f\left(x\right) - f'\left(x\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right) f'\left(x\right) - f\left(x\right) = \left(x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{\left(x+1\right) f'\left(x\right) - f\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2} = 1, \forall x \in \left[0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f\left(x\right)}{x+1}\right]' = 1, \forall x \in \left[0;+\infty\right)$

$\Rightarrow \frac{f\left(x\right)}{x+1} = x + C$

Mà $f\left(0\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f\left(x\right) = x^2 + x \Rightarrow f'\left(x\right) = 2x + 1$

Xét $f\left(x\right) = f'\left(x\right) \Leftrightarrow x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy $S = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left|x^2 - x - 1\right| dx = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

Câu 10. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right) = 26$ và $f\left(x\right) = x.f'\left(x\right) - 8x^3 - 5x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$ và $y = f'\left(x\right)$, $x = 2$, $x = 3$ bằng

A. $\frac{127}{6}$. **B.** $\frac{172}{6}$. **C.** $\frac{12}{6}$. **D.** $\frac{27}{6}$.

Lời giải

Trên $[1;3]$, ta có $f(x)=x.f'(x)-8x^3-5x^2 \Leftrightarrow \dfrac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}=8x+5$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+5x+C$ hay $f(x)=4x^3+5x^2+Cx$ (với C là hằng số).

Vì $f(1)=26$ nên $C=17$. Do đó $f(x)=4x^3+5x^2+17x \Rightarrow f'(x)=12x^2+10x+17$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, $x=2$, $x=3$ là

$S=\int_2^3\left(4x^3-7x^2+7x-17\right)\mathrm{d}x=\dfrac{127}{6}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$ và $f(2)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Lời giải

Ta có $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x)-f(x)=-2x^3+3x^2-1$ (*)

+ Nếu $x=1$ thì $f(1)=0$

+ Nếu $x\neq 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=-2x-1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)'=-2x-1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}=-x^2-x+C$

Mà $f(2)=-6 \Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=(x-1)\left(-x^2-x\right)=-x^3+x \Rightarrow f'(x)=-3x^2+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ là:

$S=\int_{-1}^3\left|x^3-3x^2-x+3\right|\mathrm{d}x=8$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=6$ và $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\dfrac{162}{5}$. **B.** $\dfrac{324}{5}$. **C.** $\dfrac{104}{5}$. **D.** $\dfrac{229}{10}$.

Lời giải

Từ giả thiết $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2 \Rightarrow xf'(x)-f(x)=3x^4-3x^2$.

Có $f(0)=0$, với $x\neq 0$ thì $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=3x^2-3 \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=3x^2-3$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^3-3x+C$, mà $f(1)=6$ nên $C=8$. Do đó $f(x)=x^4-3x^2+8x$ (thỏa mãn).

Xét phương trình $f(x)=f'(x) \Leftrightarrow x^4-4x^3-3x^2+14x-8=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=4$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\int\limits_{-2}^{4}\left|x^4-4x^3-3x^2+14x-8\right|\mathrm{d}x=\dfrac{324}{5}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2).f(x)=x.f'(x)-x^3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\mathrm{e}-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\mathrm{e}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $(x+2).f(x)=x.f'(x)-x^3 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-(x+2)f(x)}{x^3}=1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'=\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}=\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C \Leftrightarrow f(x)=-x^2+C.x^2\mathrm{e}^{x}$

Vì $f(1)=\mathrm{e} \Rightarrow -1+C.\mathrm{e}=\mathrm{e} \Leftrightarrow C=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Do đó $f(x)=-x^2+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^{x}$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[-x^2+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^{x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -x^2\mathrm{d}x+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right)=-\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[\mathrm{e}-\int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right]=-\dfrac{1}{3}+e+1-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right).$

$=\dfrac{2}{3}+e-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right]=\dfrac{2}{3}+e-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-(e-1)\right]=-\dfrac{4}{3}+e-\dfrac{2}{e}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thoả mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $f(1)-f(0)$.

A. $9\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **B.** $9\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **C.** $9\ln\dfrac{1}{2}+2$. **D.** $9\ln\dfrac{1}{2}-2$.

Lời giải

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9\Rightarrow 9(f''(x)-1)=-\left[f'(x)-x\right]^2$

$\Rightarrow -\dfrac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\dfrac{1}{9}$

Nguyên hàm 2 vế $-\int\dfrac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}dx=\int\dfrac{1}{9}dx\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x)-x}=\dfrac{x}{9}+C$

Do $f'(0)=9$ nên $C=\dfrac{1}{9}\Rightarrow f'(x)-x=\dfrac{9}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int\limits_0^1\left(\dfrac{9}{x+1}+x\right)dx=\left(9\ln|x+1|+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=9\ln 2+\dfrac{1}{2}$

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'(x)-2f(x)=4x-8$ và $f(2)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$x.f'(x)-2f(x)=4x-8\Rightarrow\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{4x-8}{x^3}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)'=\dfrac{4x-8}{x^3}$

$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x^2}=\int\dfrac{4x-8}{x^3}dx\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x^2}=-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}+C\Leftrightarrow f(x)=Cx^2-4x+4$

Vì $f(2)=0$ nên $C=1$

Vậy $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$f(x)=0\Leftrightarrow x=2$

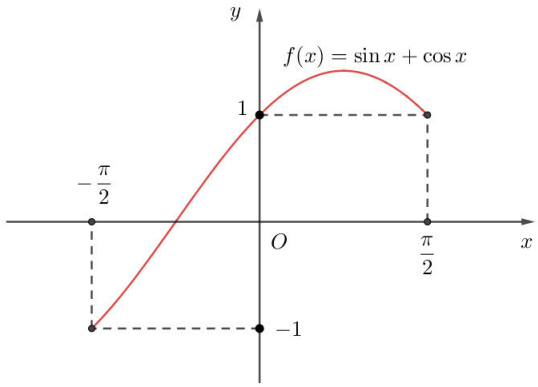
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy là

$S=\int\limits_0^2(x^2-4x+4)dx=\dfrac{8}{3}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f(0)=1$ và $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải



Với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$

$\Leftrightarrow\frac{f'(x)\cos x-f(x)(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$

$\Rightarrow\frac{f(x)}{\cos x}=\tan x+C.$

Mà $f(0)=1$nên $C=1$. Suy ra: $f(x)=\sin x+\cos x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) là:

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}.$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}.$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và $y=f'(x)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Lời giải

$f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3;\forall x\neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=2x+3 \Leftrightarrow \int\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'dx=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$

Vì $f(1)=4$ nên $\Leftrightarrow 4=1^2+3.1+C \Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=x^3+3x^2;\forall x\neq 0$.

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2;\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x);y=f'(x)$ là

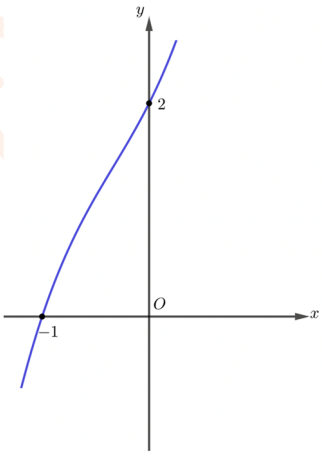
$$x^3+3x^2=3x^2+6x \Leftrightarrow x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{6} \\ x=\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$S_{hp}=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|x^3-6x\right|dx=18$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $(-1;+\infty)$, thỏa mãn $(x+1)\left[f'(x)-2x^2-2x\right]=f(x)$ với $\forall x\in(-1;+\infty)$ và $f(0)=2$. Tính diện tích hình phẳng được tạo bởi đồ thị $y=f(x)$ với trục hoành và trục tung.

A. 3. **B.** 6. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{12}$.

Lời giải



Đây là phương trình vi phân dạng thương: $\left(\frac{f(x)}{u}\right)' = \frac{u.f'(x)-u'f(x)}{u^2}$.

Giả thiết $\Leftrightarrow (x+1)f'(x)-f(x)=2x(x+1)^2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{(x+1)^2}=2x$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{(x+1)}\right]' = 2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x+1)} = \int 2xdx = x^2+C$

Thay $x=0$ vào hai vế của (2), ta được: $\frac{f(0)}{0+1}=0^2+C \Leftrightarrow \frac{2}{1}=C \Leftrightarrow C=2$

Thay $C=2$ vào (2), suy ra: $\frac{f(x)}{x+1}=x^2+2 \Leftrightarrow f(x)=\left(x^2+2\right)(x+1)$.

Cho $f(x)=\left(x^2+2\right)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ vì $\left(x^2+2\right)>0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-1}^{0}\left|\left(x^2+2\right)(x+1)\right| = \frac{13}{12}$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1, \forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; $x=1; x=3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 12. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Ta có $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1 \Rightarrow xf'(x)-f(x)=x^2-1$

$\Rightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow \frac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = 1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x+\frac{1}{x}+C.$

Mặt khác: $f(1)=2 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)=x^2+1$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_1^3 \left|f(x)\right|dx = \frac{32}{3}$.

Câu 20. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xf(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$, $x=1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+3\right)}{x^2+3}$.

Vậy $\ln\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$, mà $f(0)=\sqrt{3} \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

Suy ra $xf(x)=x\sqrt{x^2+3}$, $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xf(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$, $x=1$ là

$$S=\int_0^1\left(x\sqrt{x^2+3}-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoã mãn $f(1)=3$ và $f^2(x)-8xf(x)-f'(x)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Lời giải

Ta có $f^2(x)-8xf(x)-f'(x)=-16x^2-4\Leftrightarrow f^2(x)-8xf(x)+16x^2=f'(x)-4$

$\Leftrightarrow\left(f(x)-4x\right)^2=\left(f(x)-4x\right)'$ (1). Đặt $f(x)-4x=h(x)$. Ta có $(1)\Leftrightarrow h^2(x)=h'(x)$

$$\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h^2(x)}=1\Rightarrow\int\frac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int 1dx\Leftrightarrow-\frac{1}{h(x)}=x+C\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{x+C}$$

$\Rightarrow f(x)-4x=-\dfrac{1}{x+C}$ Do $f(1)=3\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)-4x=-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x}+4x$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$ là $S=\displaystyle\int_1^2\left|f(x)\right|dx=\int_1^2\left|-\frac{1}{x}+4x\right|dx=6-\ln 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$; $f(1)-f(0)=2$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S=\ln a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=14$. **B.** $T=25$. **C.** $T=36$. **D.** $T=43$.

Lời giải

Ta có $f(x)+f'(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+5x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{(2x-1)\left(x^2-x+1\right)-2x^2+2x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

$$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x+\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{2x^2-2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x+\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\int\frac{\dfrac{2x^2-2x-1}{(2x-1)^2}}{\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + f(x) = \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} - \int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)}{\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}\right)^2} = \ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{2x-1}{x^2-x+1} + C.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left(\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{2x-1}{x^2-x+1} - f(x) + C\right)\Big|_0^1.$$

Vì

$$\begin{cases} \ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1 = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ \left(\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\Big|_0^1 = 1-(-1) = 2 = f(1) - f(0) \end{cases} \text{ nên suy ra } \begin{cases} C = 0 \\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} \end{cases}.$$

Do đó

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right| \mathrm{d}x = -\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^2 = \ln\frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 25$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 f^2(x), \forall x \in (1;+\infty)$, $f(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty)$ và $f(e) = \dfrac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = xf(x), y = 0, x = e, x = e^2$.

A. $S = \dfrac{3}{2}$. **B.** $S = \dfrac{5}{2}$. **C.** $S = \dfrac{7}{3}$. **D.** $S = \dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có: $-xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 f^2(x) \Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x + \dfrac{1}{f(x)} = 2x^2, \forall x \in (1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x + g(x) = 2x^2, \forall x \in (1;+\infty)$ với $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x + \dfrac{g(x)}{x} = 2x, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow \int g'(x)\ln x\,\mathrm{d}x + \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow g(x)\ln x - \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x + \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x = x^2 + C \Leftrightarrow g(x)\ln x = x^2 + C, \forall x \in (1;+\infty)$.

Do $f(e) = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow g(e) = e^2 \Rightarrow C = 0$.

Suy ra $g(x)\ln x = x^2, \forall x \in (1;+\infty)$.

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{\ln x} > 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

$\Rightarrow y = xf(x) = \dfrac{x}{g(x)} = \dfrac{\ln x}{x}, \forall x \in (1;+\infty)$.

Ta có $S = \int_e^{e^2} xf(x)\mathrm{d}x = \int_e^{e^2} \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = e^{3x} + ae^{2x} + be^x$ với a, b là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x)$ có hai giá trị cực trị là 2 và 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g^3(x)$ và $\left(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x}\right)g^2(x)$ bằng:

A. 40. **B.** 7. **C.** 21. **D.** 39.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3e^{3x} + 2ae^{2x} + be^x$.

$\Rightarrow g(x) = 4e^{3x} + 3ae^{2x} + 2be^x \Rightarrow g'(x) = 12e^{3x} + 6ae^{2x} + 2be^x$

Ta có: $g'(x) = 2e^x\left(6e^{2x} + 3ae^x + b\right) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} + 3ae^x + b = 0$

(Đây là một phương trình bậc hai với e^x nên có tối đa 2 nghiệm, suy ra $g(x)$ có tối đa 2 cực trị).

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm m, n và $\begin{cases} g(n) = 2 \\ g(m) = 5. \end{cases}$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{3x} + ae^{2x} + be^x\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3x} + ae^{2x} + be^x\right) = +\infty$, mặt khác hàm số $g(x)$ có tối đa 2 cực trị có giá trị là 2 và 5 nên phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.

Xét phương trình: $\left(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x}\right)g^2(x) = g^3(x) \Leftrightarrow -f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x} = g(x)$

$\Leftrightarrow -\left(e^{3x} + ae^{2x} + be^x\right) + 5\left(3e^{3x} + 2ae^{2x} + be^x\right) + 2e^{3x} = 4e^{3x} + 3ae^{2x} + 2be^x$

$\Leftrightarrow 12e^{3x} + 6ae^{2x} + 2be^x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = n. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \left|\int_m^n \left[\left(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x}\right)g^2(x) - g^3(x)\right]\mathrm{d}x\right|$

$$=\left|\int_m^n g^2(x)\left(-f(x)+5f'(x)+2e^{3x}-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n g^2(x)\mathrm{g}'(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_m^n g^2(x)\mathrm{d}g(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}g^3(x)\right|_m^n\Big|=\frac{1}{3}\left|g^3(n)-g^3(m)\right|=39.$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=2x^3-9+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx$.

Đồ thị hàm số $y=g(x)=ax^3+bx^2+cx-9$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ có diện tích bằng:

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{37}{12}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Đặt $k=\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx=\int_1^4\frac{t}{15}f(t)dt=\frac{1}{15}\int_1^4 xf(x)dx\Leftrightarrow 15k=\int_1^4 xf(x)dx\ (1)$.

Khi đó $f(x)=2x^2-9+k\Rightarrow x.f(x)=2x^3-9x+kx$ thay vào (1), ta được:

$$(1)\Leftrightarrow 15k=\int_1^4\left(2x^3-9x+kx\right)dx\Leftrightarrow 15k=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{k}{2}x^2\right)\Big|_1^4\Rightarrow k=8\Rightarrow f(x)=2x^2-1.$$

Mặt khác: $g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=\left(ax^3+bx^2+cx-9\right)-\left(2x^2-1\right)$.

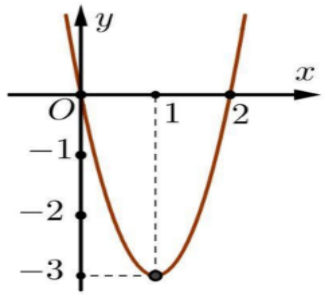
$\Leftrightarrow g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=ax^3+(b-2)x^2+cx-8$.

Cho $x=0\Rightarrow -8a=-8\Rightarrow a=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ bằng:

$$S=\int_1^4\left|(x-1)(x-2)(x-4)\right|dx=\frac{37}{12}.$$

Câu 26. Cho $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2;3]$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $g(x)=xf^2(x)$, $h(x)=-x^2f(x)f'(x)$ và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$ bằng 72. Tính $f(1)$.



A. $f(1)=2$. **B.** $f(1)=-1$. **C.** $f(1)=1$. **D.** $f(1)=\frac{-65}{2}$.

Lời giải

Từ hình vẽ ta có : $f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+C$.

Diện tích hình phẳng là : $S=\int_2^3 \left|g(x)-h(x)\right|\mathrm{d}x=\int_2^3 \left|xf^2(x)+x^2f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x$.

Do $xf^2(x)+x^2f(x)f'(x)\geq 0,\ \forall x\in[2;3]$ nên $S=\int_2^3 \left(xf^2(x)+x^2f(x)f'(x)\right)\mathrm{d}x$.

Ta có: $S=\frac{1}{2}\int_2^3 \left(x^2f^2(x)\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2f^2(x)\Big|_2^3=\frac{9}{2}f^2(3)-2f^2(2)=\frac{9}{2}C^2-2(C-4)^2$.

Mà $S=72\Leftrightarrow\frac{9}{2}C^2-2(C-4)^2=72\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=4\\C=-\frac{52}{5}\end{array}\right.$.

Do $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[2;3] \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f(1)=2$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+23x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với a, b, c, m, $n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ có ba cực trị là -2; 1 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{253}{3}$. **B.** $\frac{253}{9}$. **C.** $\frac{253}{12}$. **D.** $\frac{63}{4}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+23$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -2; 1 và 3.

Nên $h'(x)=f'(x)-g'(x)=4a(x+2)(x-1)(x-3)\ (1)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của phương trình (1), ta được: $f'(0)-g'(0)=24\Leftrightarrow 4.a.6=24\Leftrightarrow a=1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\int_{-2}^3 \left|4(x+2)(x-1)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{3}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)-f(x)=x$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=-x^2+1$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)-f(x)=x$

$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=xe^{-x}$.

$\Leftrightarrow \left(e^{-x}.f(x)\right)'=xe^{-x}$.

Nguyên hàm hai vế ta được: $e^{-x}.f(x)=\int xe^{-x}\mathrm{d}x\ (1)$

Xét $A=\int xe^{-x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x & \longrightarrow \mathrm{d}u=dx\\ \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x & \longrightarrow v=-e^{-x}\end{cases}$

$\Rightarrow A=-xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}-e^{-x}+C$.

$(1)\Leftrightarrow e^{-x}.f(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+C$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-1\Rightarrow f(0)=-1$.

Khi đó: $e^{0}.f(0)=-e^{0}+C\Leftrightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=-x-1$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y=-x^2+1$ và $y=f(x)$ là : $-x^2+1=-x-1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|-x^2+x+2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $2xf(x)+f'(x)=x\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_{0}^{1}xf(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{e-4}{8e}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{e-4}{4e}$.

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế giả thiết với e^{x^2} ta được

$e^{x^2}.2x.f(x)+e^{x^2}.f'(x)=e^{x^2}.x\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left[e^{x^2}.f(x)\right]'=x^3.e^{x^2}-x.e^{x^2}$

$\Rightarrow e^{x^2}.f(x)=\int x.\left(x^2-1\right).e^{x^2}dx=\dfrac{e^{x^2}}{2}\left(x^2-2\right)+c\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-2\right)+c.e^{-x^2}$.

Do $f(0)=0\Rightarrow c=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-2\right)+e^{-x^2}$.

Vậy $\int\limits_{0}^{1}x.f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}x\left[\dfrac{1}{2}\left(x^2-2\right)+e^{-x^2}\right]dx=\dfrac{e-4}{8e}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

+ Trước tiên ta đưa phương trình về dạng tổng quát $f'(x)+\dfrac{1}{x(x+1)}f(x)=1$

+ $P(x)=\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=\ln\dfrac{x}{x+1}$. (ta chỉ cần xét $x>0$)

+ Nhân hai vế cho $e^{P(x)}$ ta được $f'(x).\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow\left(f(x).\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{x}{x+1}$

+ Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế ta được

$\left(f(x).\frac{x}{x+1} \right)\Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \left(x - \ln(x+1) \right)\Big|_1^2 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln 3.$

Suy ra $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{3}{2}$. Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(x) = e^x + \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t}dt$ với $\forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1+\ln 2022) = a + be$, với $a, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a+b$ có giá trị là

A. 2022. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2025.

Lời giải

Đặt $T = \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t}dt$. Ta có: $f(x) = e^x + T$.

Khi đó $T = \int_0^1 \frac{e^t + T}{e^t}dt = \int_0^1 \left(1 + T.e^{-t}\right)dt = \left(t - Te^{-t}\right)\Big|_0^1 = \left(1 - Te^{-1}\right) - (0 - T)$

Suy ra: $T = e$.

Từ giả thiết ta có: $f(x) = e^x + e$

Vậy $f(1+\ln 2022) = e^{1+\ln 2022} + e = 2022e + e = 2023e$

Do đó $a = 0; b = 2023 \Rightarrow a + b = 2023$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$; $\left[f'(x) \right]^2 + 8xf(x) = x^4 - 2x, \forall x \in [0;1]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox, Oy. Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{7}$. **B.** $\frac{2\pi}{7}$. **C.** $\frac{3\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 xf(x)dx = \int f(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = f(x).\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)dx$

$= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

+) $\left[f'(x) \right]^2 + 8xf(x) = x^4 - 2x, \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 dx + 8\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x\right)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 dx - 4\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \frac{-4}{5}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x - 4\int\limits_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 4x^4 = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(f'(x) - 2x^2 \right)^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow f'(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$

Do $f(1) = 0$ nên $C = \frac{-2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}$

Xét phương trình: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 33. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$, tính tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{9}{2}$. **B.** $I = \frac{45}{8}$. **C.** $I = \frac{11}{2}$. **D.** $I = \frac{15}{4}$.

Lời giải

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f'(x).\frac{e^{f^3(x)}}{e^{x^2+1}} = \frac{2x}{f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)} = 2x.e^{x^2+1}$

$\Leftrightarrow \left(e^{f^3(x)} \right)' = \left(e^{x^2+1} \right)' \Leftrightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C\,(*)$.

Thế $x = 0$ vào $(*)$ ta được $e = e + C \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $I = \int\limits_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}} \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}.\left.\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^{\sqrt{7}} = \left.\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right|_0^{\sqrt{7}}$

$= \frac{3}{8}.(16-1) = \frac{45}{8}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x = 9$ và $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x) \right]^2 \mathrm{d}x = 9 \ (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3.\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}.f(x) \right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)\mathrm{d}x = -18 \ (2)$$

- Lại có: $\int_0^1 x^8 \mathrm{d}x = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 \mathrm{d}x = 9 \ (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x) \right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8 \right] \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4 \right]^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).\mathrm{d}x = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Lại do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x \right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f^2(x).f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1$, $f(0) = 1$. Biết rằng $I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1) f(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a - 2b$ bằng

A. $T = 12277$. **B.** $T = 6127$. **C.** $T = 12281$. **D.** $T = 6125$.

Lời giải

Ta có: $3f^2(x).f'(x) - 4xe^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}}{e^x} - 4xe^{2x^2+1} = \frac{e^{f^3(x)}}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}-e^{f^3(x)}}{e^x}=4xe^{2x^2+1}\Leftrightarrow\left[\frac{e^{f^3(x)}}{e^x}\right]'=4xe^{2x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{f^3(x)}}{e^x}=\int 4xe^{2x^2+1}dx=\int e^{2x^2+1}d\left(2x^2+1\right)=e^{2x^2+1}+C.$$

Do $f(0)=1$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{e^{f^3(x)}}{e^x}=e^{2x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=2x^2+x+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{2x^2+x+1}$.

Do đó $I=\int\limits_0^{\frac{1+\sqrt{4089}}{4}}\left(2x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2x^2+x+1\right)=\frac{3}{4}\left(2x^2+x+1\right)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^{\frac{1+\sqrt{4089}}{4}}=\frac{12285}{4}=\frac{a}{b}$

Vậy $T=a-2b=12285-8=12277$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thoả mãn $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x),\forall x\in(1;+\infty)$. Biết $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$. Khi đó giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Xét phương trình $\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$

$$\left(xf'(x)-2f(x)\right).\ln x=x^3-f(x)\Leftrightarrow x.\ln x.f'(x)+(1-2\ln x)f(x)=x^3$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x\ln x}.f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$$

Đặt $g(x)=\frac{1-2\ln x}{x\ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)dx=\int\frac{1-2\ln x}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)-2\ln x+C$

Ta chọn $G(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$.

Nhân cả hai vế của $f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x\ln x}.f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ cho $e^{G(x)}=\frac{\ln x}{x^2}$ ta được

$$\frac{\ln x}{x^2}.f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x^3}.f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{\ln x}{x^2}.f(x)\right]'=1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x^2}.f(x)=x+C$$

Vì $f\left(\sqrt[3]{e}\right)=3e$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}$. Suy ra $f(2)=\frac{2^3}{\ln 2}=\frac{8}{\ln 2}\in\left(\frac{23}{2};12\right)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}; f(2)=\frac{1}{5}$ và $f'(x)=-2x\left[f(x)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x), x=0$ và $x=1$.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

$$f'(x)=-2x\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x\Leftrightarrow\int\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=x^2+C$$

Vì $f(2)=\frac{1}{5}$ nên $C=1$.

Do đó $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$$S_{hp}=\int_0^1\left|\frac{1}{x^2+1}\right|dx=\frac{\pi}{4}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{32}{5}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Ta có: $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x\Leftrightarrow\left[x^2.f(x)\right]'=4x^3-12x^2+8x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int\left[x^2.f(x)\right]'dx=\int\left(4x^3-12x^2+8x\right)dx$

$$\Leftrightarrow x^2.f(x)=x^4-4x^3+4x^2+C$$

Chọn $x=0\Rightarrow C=0$, nên $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-4x+4$ với trục hoành là $x=2$.

Nên thể tích cần tìm là: $V=\pi\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)^2dx=\pi\int_0^2(x-2)^4dx=\frac{\pi}{5}(x-2)^5\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2, x=1$.

A. $\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\frac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\frac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\frac{3e^2-1}{e^2}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\ln f(x)=\int \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}dx \Leftrightarrow \ln f(x)=2\sqrt{x+3}+C$

Do $f(1)=1$ nên $C=-4$. Vậy $f(x)=e^{2\sqrt{x+3}-4}=\dfrac{e^{2\sqrt{x+3}}}{e^4}$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\dfrac{1}{e^4}\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx$

Đặt $I=\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow t^2=4(x+3) \Leftrightarrow dx=\dfrac{tdt}{2}$

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=4; x=-2 \Rightarrow t=2$

Nên: $I=\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} e^t.tdt=\dfrac{1}{2}\left(e^t t\Big|_2^4-e^t\Big|_2^4\right)=\dfrac{3e^4-e^2}{2} \Rightarrow S=\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x) \Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x+\dfrac{1}{f(x)}=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x+g(x)=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$ với $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x+\dfrac{g(x)}{x}=2x, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow \int g'(x)\ln x\,dx+\int\dfrac{g(x)}{x}dx=\int 2x dx$

$\Leftrightarrow g(x)\ln x-\int\dfrac{g(x)}{x}dx+\int\dfrac{g(x)}{x}dx=x^2+C \Leftrightarrow g(x)\ln x=x^2+C, \forall x\in(1;+\infty)$

Do $f(e)=\dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow g(e)=e^2 \Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $g(x)\ln x=x^2, \forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}>0, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow xf(x)=\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{\ln x}{x}>0, \forall x\in(1;+\infty)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ là:

$$\int_e^{e^2} xf(x)\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_e^{e^2} \ln x\,d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+12$

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm m,n

Vì $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên nếu giả sử $m<n$ thì $\begin{cases} g(m)=g_{CD}=4 \\ g(n)=g_{CT}=-4 \end{cases}$

Xét phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)+12}=1 \Rightarrow g(x)+12-f(x)=0$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+12=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=n \end{array}\right.$$

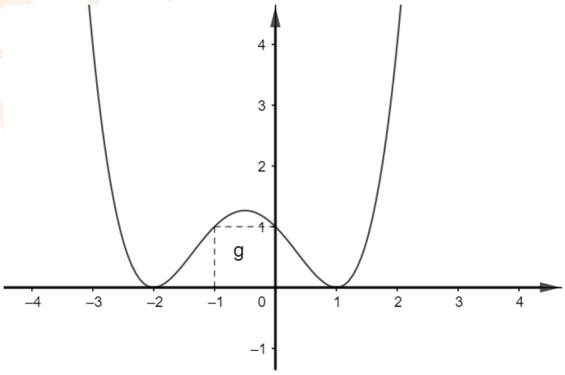
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\int_m^n \left|1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right|dx = \left|\int_m^n \left(1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right)dx\right| = \left|\int_m^n \left(\frac{g(x)+12-f(x)}{g(x)+12}\right)dx\right|$$

$$= \left|\int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+12}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{d(g(x)+12)}{g(x)+12}\right| = \left|\ln|g(x)+12|\right|\Big|_m^n$$

$$= \left|\ln|g(n)+12|-\ln|g(m)+12|\right| = \left|\ln|-4+12|-\ln|4+12|\right| = \left|\ln\frac{8}{16}\right| = \ln 2.$$

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$

$\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Từ hình vẽ đã cho ta thấy đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại các điểm $(-2;0)$, $(1;0)$ và đi qua điểm $(0;1)$ nên:

$$\begin{cases} f(x)=k.(x+2)^2.(x-1)^2 \\ f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}.(x+2)^2.(x-1)^2$$

Vậy $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

Do $f(x)$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có:

$$\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|=\frac{107}{5}\ (\text{đvdt}).$$

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{32}{5}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Ta có: $2x.f(x)+x^2.f'(x)=4x^3-12x^2+8x \Leftrightarrow \left[x^2.f(x)\right]'=4x^3-12x^2+8x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int\left[x^2.f(x)\right]'dx=\int\left(4x^3-12x^2+8x\right)dx$

$\Leftrightarrow x^2.f(x)=x^4-4x^3+4x^2+C$

Chọn $x=0\Rightarrow C=0$, nên $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $y=x^2-4x+4$ với trục hoành là $x=2$.

Nên thể tích cần tìm là: $V=\pi\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)^2dx=\pi\int_0^2(x-2)^4dx=\frac{\pi}{5}(x-2)^5\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2, x=1$.

A. $\frac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\frac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\frac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\frac{3e^2-1}{e^2}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\ln f(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx\Leftrightarrow\ln f(x)=2\sqrt{x+3}+C$

Do $f(1)=1$ nên $C=-4$. Vậy $f(x)=e^{2\sqrt{x+3}-4}=\frac{e^{2\sqrt{x+3}}}{e^4}$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\frac{1}{e^4}\int_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx$

Đặt $I=\int_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow t^2=4(x+3)\Leftrightarrow dx=\frac{tdt}{2}$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=4; x=-2\Rightarrow t=2$

Nên: $I=\int_{-2}^{1}e^{2\sqrt{x+3}}dx=\frac{1}{2}\int_2^4e^t.tdt=\frac{1}{2}\left(e^tt\Big|_2^4-e^t\Big|_2^4\right)=\frac{3e^4-e^2}{2}\Rightarrow S=\frac{3e^2-1}{2e^2}$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\frac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x)\Leftrightarrow-x\frac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x+\frac{1}{f(x)}=2x^2,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x+g(x)=2x^2,\forall x\in(1;+\infty)$ với $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x+\frac{g(x)}{x}=2x,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow\int g'(x)\ln x\,dx+\int\frac{g(x)}{x}dx=\int2xdx$

$\Leftrightarrow\ g(x)\ln x-\int\frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=x^2+C\Leftrightarrow g(x)\ln x=x^2+C,\ \forall x\in(1;+\infty)$

Do $f(e)=\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow g(e)=e^2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $g(x)\ln x=x^2,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow\ g(x)=\frac{x^2}{\ln x}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow\ xf(x)=\frac{x}{g(x)}=\frac{\ln x}{x}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ là:

$\int\limits_e^{e^2}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_e^{e^2}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+12$

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm m,n

Vì $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên nếu giả sử $m<n$ thì $\begin{cases}g(m)=g_{CD}=4\\g(n)=g_{CT}=-4\end{cases}$

Xét phương trình $\frac{f(x)}{g(x)+12}=1\Rightarrow g(x)+12-f(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+12=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=n\end{array}\right.$

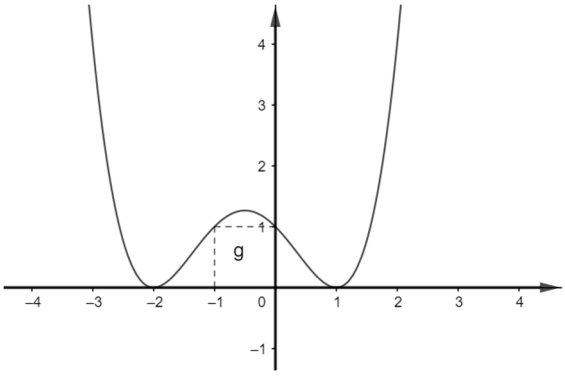
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$\int\limits_m^n\left|1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_m^n\left(1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_m^n\left(\frac{g(x)+12-f(x)}{g(x)+12}\right)\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\int\limits_m^n\frac{f'(x)+f''(x)+12}{g(x)+12}dx\right|=\left|\int\limits_m^n\frac{g'(x)}{g(x)+12}dx\right|=\left|\int\limits_m^n\frac{d\left(g(x)+12\right)}{g(x)+12}\right|=\left|\ln\left|g(x)+12\right|\right|\Big|_m^n$

$=\left|\ln\left|g(n)+12\right|-\ln\left|g(m)+12\right|\right|=\left|\ln\left|-4+12\right|-\ln\left|4+12\right|\right|=\left|\ln\frac{8}{16}\right|=\ln 2$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $a\neq 0$

$\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Từ hình vẽ đã cho ta thấy đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại các điểm $(-2;0)$, $(1;0)$ và đi qua điểm $(0;1)$ nên:

$$\begin{cases} f(x)=k.(x+2)^2.(x-1)^2 \\ f(0)=1 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}.(x+2)^2.(x-1)^2$$

Vậy $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

Do $f(x)$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có:

$$\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right|=\frac{107}{5}\text{ (đvdt).}$$

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=x^3+\int_0^1(10u-4x)f(u)du$ có đồ thị (C). Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x^3+\int_0^1(10u-4x)f(u)du=x^3-4x\int_0^1 f(u)du+10\int_0^1 uf(u)du$

Đặt $a=\int_0^1 f(u)du$ và $b=\int_0^1 uf(u)du$. Khi đó hàm số $f(x)$ có dạng $f(x)=x^3-4ax+10b$.

Suy ra $f(u)=u^3-4au+10b$

+) $a=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1\left(u^3-4au+10b\right)du=\left(\frac{1}{4}u^4-2au^2+10bu\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}-2a+10b$.

$\Rightarrow a=\frac{1}{4}-2a+10b\Leftrightarrow 3a-10b=\frac{1}{4}$ (1).

+) $b=\int_0^1 uf(u)du=\int_0^1 u\left(u^3-4au+10b\right)du=$

$=\int_0^1\left(u^4-4au^2+10bu\right)du=\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{4}{3}au^3+5bu^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{4}{3}a+5b$.

$\Rightarrow b=\frac{1}{5}-\frac{4}{3}a+5b\Leftrightarrow\frac{4}{3}a-4b=\frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b=\frac{1}{5}\end{cases}$

Suy ra $f(x)=x^3-3x+2;\ f'(x)=3x^2-3.$

Ta có: $f(2)=4;\ f'(2)=9.$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$:

$y=9(x-2)+4\Leftrightarrow y=9x-14.$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) với tiếp tuyến d là:

$x^3-3x+2=9x-14\Leftrightarrow x^3-12x+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, tiếp tuyến d là

$S=\int_0^2\left|x^3-3x+2-(9x-14)\right|dx=\int_0^2\left|x^3-12x+16\right|dx=\left|\int_0^2\left(x^3-12x+16\right)dx\right|=12.$

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)=x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f(1)=-1$, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $xf'(x)-f(x)=x^2-1\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1-\dfrac{1}{x^2}$.

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=1-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}+C\ (*)$

Mà $f(1)=-1$ nên từ $(*)$ có: $\dfrac{f(1)}{1}=1+\dfrac{1}{1}+C\Leftrightarrow-1=2+C\Leftrightarrow C=-3$

$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}-3\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x+1=2x-3\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng bằng: $S=\int\limits_1^4\left|x^2-5x+4\right|dx=\dfrac{9}{2}$.

Chọn C

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\,dx$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Lời giải

Ta có $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\,dx$. Đặt $\int\limits_0^2 xf(x)\,dx=a$.

Khi đó $f(x^2)=6x^4+a\Rightarrow f(x)=6x^2+a$.

Do đó $a=\int\limits_0^2 xf(x)\,dx=\int\limits_0^2 x\left(6x^2+a\right)dx\Leftrightarrow a=\left(\dfrac{3}{2}x^4+\dfrac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^2\Leftrightarrow a=24+2a\Leftrightarrow a=-24$.

Nên $f(x)=6x^2-24$.

Ta có $6x^2-24=6x-12\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^2\left|6x^2-6x-12\right|dx=\left|\int\limits_{-1}^2\left(6x^2-6x-12\right)dx\right|=27$

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1;\ f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. 0,98. **B.** 0,88. **C.** 0,78. **D.** 0,68.

Lời giải

Ta có $\left(f'(x)\right)^2+f''(x).f(x)=-4\Leftrightarrow\left(f'(x).f(x)\right)'=-4$

$\Leftrightarrow \int \left(f'(x).f(x) \right)' dx = \int -4dx \Leftrightarrow f'(x).f(x) = -4x + C$

$\Leftrightarrow \int f'(x).f(x)dx = \int (-4x + C)dx \Leftrightarrow \int f(x)d\left(f(x) \right) = -4\frac{x^2}{2} + C.x + B$

$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = -2x^2 + C.x + B \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2C.x + B}$.

Theo giả thiết $f(0) = 1$ và $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nên ta có

$$\begin{cases} \sqrt{B} = 1 \\ \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{C}{2} + B} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} \quad (C)$$

*) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành $\sqrt{-4x^2 + 2x + 1} = 0$.

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{array} \right.$$

Vì (C) luôn ở phía trên trục hoành nên $S = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \sqrt{-4x^2 + 2x + 1}dx \approx 0,98$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f(1) = 1$ và $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$ trên $(1; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $2\left[f'(x) \right]^2 = (x-1)^2.\left(4f(x) - \left[f'(x) \right]^2 + 4 \right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với các đường $x = 1; x = 2$ và Ox?

A. $S = \frac{4}{3}$. **B.** $S = \frac{8}{3}$. **C.** $S = \frac{-4}{3}$. **D.** $S = \frac{-8}{3}$.

Lời giải

Ta có $2\left[f'(x) \right]^2 = (x-1)^2.\left(4f(x) - \left[f'(x) \right]^2 + 4 \right)$.

$\Leftrightarrow 2\left[f'(x) \right]^2 + \left[f'(x) \right]^2.(x-1)^2 = 4(x-1)^2.\left(f(x) + 1 \right)$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x) \right]^2.\left(x^2 - 2x + 3 \right) = 4(x-1)^2.\left(f(x) + 1 \right)$.

$\Leftrightarrow f'(x).\sqrt{\left(x^2 - 2x + 3 \right)} = 2(x-1).\sqrt{f(x) + 1}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) + 1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x) + 1} \right]' = \left[\sqrt{x^2 - 2x + 3} + C \right]'$.

Mặt khác ta có $f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$\Rightarrow S=\int_1^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=0$, $f(0)=1; f(1)=\sqrt{e}$. Tính $f(2)=?$

A. $f(2)=2\sqrt{e}$. **B.** $f(2)=e$.

C. $f(2)=e^4$. **D.** $f(2)=e^2$.

Lời giải

Ta có $f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=0$.

$\Leftrightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=1 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=1$.

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=x+C_1. \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

$\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2}$.

Với $f(0)=1; f(1)=\sqrt{e} \Rightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$. Vậy $f(2)=e^2$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=5x^4+6x^2+4x, \forall x\in\mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$\int\left(2xf(x)+x^2f'(x)\right)dx=\int\left(\left(x^2\right)'f(x)+x^2f'(x)\right)dx=\int\left(5x^4+6x^2+4x\right)dx=x^5+2x^3+2x^2+C$

$\Rightarrow x^2f(x)=x^5+2x^3+2x^2+C$

Cho $x=0$ ta được $C=0$.

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x+2$

$f'(x)=3x^2+2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$:

$x^3+2x+2=3x^2+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_0^2\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\frac{1}{2}$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\frac{1}{2}$, $f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ bằng

A. $S=\frac{5}{6}$. **B.** $S=\frac{1}{6}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Từ giả thiết $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$, cho $x=1$, ta có

$f(1)=2f(1).f'(1)\Leftrightarrow f(1).\left[1-2f'(1)\right]=0\Rightarrow f(1)=0$.

Mặt khác, $\forall x\in[0;2]$, ta có

$(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)\Leftrightarrow\left[(x-1).f(x)\right]'=\left[f^2(x)\right]'\Rightarrow(x-1).f(x)=f^2(x)+C$

Thay $x=1$, ta suy ra $f^2(1)+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Do đó, ta được $(x-1).f(x)=f^2(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=x-1.\end{array}\right.$

Vì $f(x)\neq 0,\forall x\neq 1$ nên ta suy ra được $f(x)=x-1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=x^2-1$, ta có:

$x-1=x^2-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=x^2-1$ là: $S=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=x^4+bx^2+c(b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d):y=g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0=1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ và $\int_{x_1}^{x_2}\frac{g(x)-f(x)}{(x-1)^2}dx=\frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d).

A. $\frac{29}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** $\frac{143}{5}$ **D.** $\frac{43}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)=x^4+bx^2-mx+n\ (*)$

Ta có: $\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^2}dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_1+x_1-x_2)dx$

$=\int_{x_1}^{x_2}\left[(x-x_1)^2+(x-x_1)(x_1-x_2)\right]dx=\left(\frac{(x-x_1)^3}{3}+(x_1-x_2)\frac{(x-x_1)^2}{2}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$

$=\frac{(x_2-x_1)^3}{3}-\frac{(x_2-x_1)^3}{2}=-\frac{(x_2-x_1)^3}{6}=\frac{-4}{3}$

Suy ra $(x_2-x_1)^3=8\Leftrightarrow x_2-x_1=2\quad(1)$

Mặt khác theo định lí viet bậc 4 của phương trình (*) ta được:

$1+1+x_2+x_1=0\Leftrightarrow x_2+x_1=-2(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_1=-2\end{cases}$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là:

$S=\int_{-2}^{1}\left|(x-1)^2(x+2)x\right|dx=\frac{29}{5}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g(x)=f(x)-2xf'(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=1;x=4$.

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{124}{5}$. **C.** $\frac{62}{5}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Lời giải

Với $x>0$ ta có:

$2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{2xf'(x)+f(x)}{2\sqrt{x}}=\frac{4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x}.f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)=2x$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=2x\Rightarrow\sqrt{x}.f(x)=x^2+C$

Với $x=1$ ta có $\sqrt{1}.f(1)=1^2+C\Leftrightarrow1=1+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow\sqrt{x}.f(x)=x^2\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$,

$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Suy ra $g(x)=-2x\sqrt{x}$.

Vậy diện tích $S=\int_{1}^{4}\left|-2x\sqrt{x}\right|=\frac{124}{5}$ (Đvtt)

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;+\infty)$ và thỏa mãn $(x+2)f'(x)-2f(x)=(x-2)(x+2)^3$ với mọi $x\in[-2;+\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{432}{5}$. **B.** $\frac{448}{5}$. **C.** $\frac{464}{5}$. **D.** $\frac{446}{5}$.

Lời giải

+ Xét $x=-2$: từ điều kiện ta có $f(-2)=0$.

+ Xét $x>-2$: chia hai vế của điều kiện cho $(x+2)^3$ ta được

$\frac{1}{(x+2)^2}f'(x)-\frac{2}{(x+2)^3}f(x)=x-2$.

Do $\left[\frac{1}{(x+2)^2}\right]'=-\frac{2}{(x+2)^3}$ nên $\left[\frac{f(x)}{(x+2)^2}\right]'=x+2$, suy ra $\frac{f(x)}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{2}-2x+C$ hay

$f(x)=(x+2)^2\left(\frac{x^2}{2}-2x+C\right)$

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$, suy ra $f(x)=x\left(\frac{x}{2}-2\right)(x+2)^2$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $f(x)=x\left(\frac{x}{2}-2\right)(x+2)^2$ với mọi $x\in[-2;+\infty)$.

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm $x=-2$, $x=0$ và $x=4$. Bên cạnh đó $f(x)\le 0$ với mọi $x\in[0;4]$ và $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in[-2;0]$.

Vậy diện tích cần tìm là

$$S=\int_{-2}^{0}x\left(\frac{x}{2}-2\right)(x+2)^2\,dx-\int_{0}^{4}x\left(\frac{x}{2}-2\right)(x+2)^2\,dx=\frac{464}{5}.$$

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\left(x^2\right)'f(x)+x^2f'(x)=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\left[x^2f(x)\right]'=\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4-3x^3-3x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2f(x)=\frac{1}{4}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4-x^3+x^2+C$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1+\frac{C}{x^2}$$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Do đó

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1\Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{rcl}x&=&-2\\x&=&-1\\x&=&1\\x&=&4\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ là

$$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\frac{107}{5}(dvdt).$$

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{41}{400}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $-\frac{391}{400}$. **D.** $-\frac{1}{40}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=4x^3[f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=-4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}=-x^4+C$.

Do $f(2)=-\frac{1}{25}$ nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^4+9} \Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[-1;1]$ thoả mãn $f(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(-1)$.

A. $f(-1)=e^{-2}$. **B.** $f(-1)=e^3$. **C.** $f(-1)=e^4$. **D.** $f(-1)=3$.

Lời giải

Theo đề bài, $\frac{f'(x)}{f(x)}=-2 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int 2dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)}=-2x+C$

$\Leftrightarrow \ln|f(x)|=-2x+C \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \ln f(x)=-2x+C \Leftrightarrow f(x)=e^{-2x+C}$

Đề bài có $f(1)=1 \Rightarrow 1=e^{-2+C} \Leftrightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=e^{-2x+2} \Rightarrow f(-1)=e^4$.

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[1;4]$ thoả mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2, \forall x \in [1;4], f(1)=\frac{3}{2}$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=\frac{361}{18}$. **B.** $f(4)=\frac{371}{18}$. **C.** $f(4)=\frac{381}{18}$. **D.** $f(4)=\frac{391}{18}$.

Lời giải

Theo đề bài, $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2=x(1+2f(x)) \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1+2f(x)}=x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$

Tích phân 2 vế: $\int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{d(1+2f(x))}{\sqrt{1+2f(x)}}=\frac{14}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2\sqrt{1+2f(x)}\Big|_1^4=\frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)}-\sqrt{1+2f(1)}=\frac{14}{3} \overset{f(1)=\frac{3}{2}}{\Rightarrow} f(4)=\frac{391}{18}$.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx=5$. Tính tích phân $\int_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=4-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận: Khi $x=1\Rightarrow t=3$; khi $x=3\Rightarrow t=1$

Ta có, $5=\int\limits_1^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(4-t\right)f\left(4-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_1^3\left(4-x\right)f\left(4-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(4-x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Suy ra, $10=\int\limits_1^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\left(4-x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=4\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 45. **(Đề TK BGD 2023)** Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta' = 2m+2$

TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{m^2}$.

Suy ra: $2\sqrt{m^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1\ (l) \end{array}\right.$.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Vì $a.c = m^2 \geq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2 \geq 0$ hoặc $z_1.z_2 \leq 0$.

Suy ra: $|z_1|+|z_2|=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=2 \Leftrightarrow |2m+2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\ (l) \\ m=0 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 45 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $z^2-2mz+6m-5=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 2. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2(m+1)z+12m-8=0$, $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1+1|=|z_2+1|$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 3. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ (m là số thực). Với m thuộc khoảng nào dưới đây để phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $A=|z_1z_2|-2(|z_1+z_2|)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $\left(-\frac{13}{2};-\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{4};\frac{14}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{10}{3};8\right)$

Câu 4. Cho phương trình $2z^2-az+b=0$ với a, b là những số thực và phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn hệ thức $z_1+1+3i=|z_2|i$. Biết M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 trong mặt phẳng Oxy, sao cho tam giác OMN cân tại O. Giá trị của $9b+a$ bằng:

A. 46. **B.** 45. **C.** 28. **D.** 34.

Câu 5. Cho m là số thực, biết phương trình $z^2-2mz+9=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho $z_1\left|\overline{z_2}\right|+z_2\left|\overline{z_1}\right|<16$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 6. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 14.

Câu 8. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+2)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 9. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2(m+1)z+m^2+5=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=8$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 10. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2z+m-5=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=20$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 15. **B.** 12. **C.** -3. **D.** -10.

Câu 11. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+2(m-2)z+m^2+4=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 12. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+(m+1)z+m^2+m=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1|+|z_2+1|=2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 13. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-4(m+1)z+4m^2+4m=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 14. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+2m^2-3m+2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $(z_1+2i)(z_2+2i)$ là số thuần ảo?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 15. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-4z+4-m=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|+|z_1-z_2|=6$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2023;2023)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$?

A. 4043. **B.** 4045. **C.** 4044. **D.** 4046.

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m sao cho phương trình $z^2+(m-2)z+2m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2, và các điểm biểu diễn của z_1, z_2 cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có một góc bằng $120°$. Tính tổng các phần tử của tập S

A. -6. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 18. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $(z_1-z_2)^2+7m=z_1-2\overline{z_2}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Tổng tất cả các giá trị nguyên của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0|=2\sqrt{2}$.

A. 4. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 20. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1=w+3i$; $z_2=w+9i$; $z_3=2w-4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P=|a+2b+3c|$.

A. 368. **B.** 468. **C.** 100. **D.** 203.

Câu 21. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 22. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+2)z+m^2+1=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+3m^2+4m+5=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $(z-1)(z^2-2(m-3)z+m^2+2)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của $m\in(0;+\infty)$ để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|=7$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $(2-z)\left(z^2+2(m-1)z+m^2+3m+4\right)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2023)$ để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|\geq 6$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 26. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+4(m+3)z+4m^2+24=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2023;2023]$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\geq 8$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 4047. **D.** 2040.

Câu 27. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+2(m+1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28. Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=7$.

Câu 29. Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$.

A. $m=1$ hoặc $m=-35$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-35$.

C. $m=1$ hoặc $m=35$. **D.** $m=-1$ hoặc $m=35$.

Câu 30. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m+1=0$ (m là số thực). Tính tổng các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thoả mãn $|z_1|+|z_2|=|z_1z_2|-3$.

A. 4. **B.** 2. **C.** $2-\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 31. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m+1=0$ (m là số thực). Gọi B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho hai nghiệm phức z_1, z_2 của phương trình. Biết rằng có hai giá trị của tham số m để tam giác ABC là tam giác vuông tại $A(1;0)$. Gọi T là tổng bình phương các giá trị đó. Tìm T.

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $\frac{33}{2}$.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $z^2-mz+6m-15=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33. Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-3$, $m=9$.

C. $m=1$, $m=9$. **D.** $m=-3$, $m=1$, $m=9$.

Câu 34. Phương trình $x^2-2x+b=0$ có hai nghiệm phức được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi hai điểm A, B. Tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ) thì b bằng:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 4

Câu 35. Gọi S là tổng các bình phương các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$. Tính S.

A. $S=10$. **B.** $S=25$. **C.** $S=29$. **D.** $S=49$.

Câu 36. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$.

A. 1. **B.** –2. **C.** 3. **D.** –3.

Câu 37. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+1=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 39. Gọi S là tập hợp các số thực m để phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0$ có một nghiệm phức z_0 với $|z_0|=2$. Tổng tất cả các phần tử trong S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 40. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và $\left|z^3+2024z+\overline{z}\right|-2\sqrt{3}\left|z+\overline{z}\right|=2019$ $(*)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 41. Trong tập số phức, cho phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2-3m+6=0,\ m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa $|z_1|+|z_2|=8$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 42. Trong tập hợp số phức, xét phương trình $z^3-(2m+1)z^2+3mz-m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|=3$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43. Trong tập hợp số phức, xét phương trình $z^4-2(m+1)z^2+2m+1=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có bốn nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3, z_4 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 44. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-2(m+1)z+7m-5=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 sao cho $|z_1|=|z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46. Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-4z+4-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=-6$. **B.** $S=-13$. **C.** $S=9$. **D.** $S=16$.

Câu 47. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 49. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 50. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-(m+2)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa nãm $|z_1|^3+|z_2|^3=16$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 51. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 52. Cho các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2-2i|=|z-4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz+1|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $z^2-2mz+6m-5=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình $z^2-2mz+6m-5=0$ có có hai nghiệm phức phân biệt nên $\Delta=4m^2-4(6m-5)=4(m^2-6m+5)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1, m\neq 5$.

Hai nghiệm thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$ nên xét hai trường hợp:

TH1: Hai nghiệm thực đối nhau

Xét tổng $S=0\Rightarrow m=0$. Thế vào phương trình: $z^2=5\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{5}$ (thỏa mãn đề).

TH1: Hai nghiệm phức phân biệt là hai số phức liên hợp $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 1<m<5$

Khi đó hiển nhiên ta có $|z_1|=|z_2|$ (thỏa mãn đề)

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: $m\in\{0;2;3;4\}$.

Câu 2. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2(m+1)z+12m-8=0$, $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn : $|z_1+1|=|z_2+1|$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(12m-8)=m^2-10m+9$.

Trường hợp 1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m^2-10m+9<0\Leftrightarrow 1<m<9$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$z_1=-m-1+i\sqrt{-m^2+10m-9}$; $z_2=-m-1-i\sqrt{-m^2+10m-9}$

Theo bài ra ta có: $|z_1+1|=|z_2+1|\Leftrightarrow\left|-m+i\sqrt{-m^2+10m-9}\right|=\left|-m-i\sqrt{-m^2+10m-9}\right|$

$\Leftrightarrow(-m)^2-m^2+10m-9=(-m)^2-m^2+10m-9$ (luôn đúng)

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-10m+9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>9\\m<1\end{array}\right.$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2

Theo bài ra ta có: $|z_1+1|=|z_2+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1+1=z_2+1 \\ z_1+1=-z_2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2 \quad (loại) \\ z_1+z_2=-2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -2m-2=-2 \Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn).

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Kết hợp hai trường hợp có 8 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 3. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ (m là số thực). Với m thuộc khoảng nào dưới đây để phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $A=|z_1z_2|-2(|z_1+z_2|)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $\left(-\frac{13}{2};-\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{4};\frac{14}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{10}{3};8\right)$

Lời giải

Xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+2=0(*)$.

Ta có: $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+2)=m^2+2m+1-(m^2+2)=2m-1$.

Để phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $m\neq\frac{1}{2}$.

Xét $A=|z_1z_2|-2(|z_1+z_2|)-6=|m^2+2|-2|2(m+1)|-6$.

TH1: Với $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Khi đó $A=|z_1z_2|-2(|z_1+z_2|)-6=|m^2+2|-2|2(m+1)|-6=m^2+2-4(m+1)-6=m^2-4m-8$

.

Suy ra $A_{\min}=-12 \Leftrightarrow m=2\in(-1;+\infty)/\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Vậy với $m=2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

TH2: Với $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Xét $A=|z_1z_2|-2(|z_1+z_2|)-6=|m^2+2|-2|2(m+1)|-6=m^2+2+4(m+1)-6=m^2+4m$.

$\Rightarrow A=(m+2)^2-4\geq -4$

Suy ra $A_{\min}=-4 \Leftrightarrow m=-2\in(-\infty;-1)$.

Vậy với $m=-2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ **TH1** và **TH2** ta có: Với $m=2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho phương trình $2z^2-az+b=0$ với a, b là những số thực và phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn hệ thức $z_1+1+3i=|z_2|i$. Biết M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 trong mặt phẳng Oxy, sao cho tam giác OMN cân tại O. Giá trị của $9b+a$ bằng:

A. 46. **B.** 45. **C.** 28. **D.** 34.

Lời giải

Xét phương trình $2z^2 - az + b = 0$ (*)

Biết M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 trong mặt phẳng Oxy, sao cho tam giác OMN cân tại O nên phương trình (*) luôn cho hai nghiệm phức liên hợp:

$\overline{z_1} = z_2 \Rightarrow |\overline{z_1}| = |z_2| = |z_1| = x$; $x \in \mathbb{R}$; $x > 0$. (Vì O không trùng với M)

$z_1 + 1 + 3i = |z_2| i \Leftrightarrow z_1 + 1 + 3i = |z_1| i \Leftrightarrow z_1 = -1 + (x-3)i$

Lấy modun hai vế ta có: $x^2 = 1 + (x-3)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Khi đó $z_1 = -1 - \frac{4}{3}i; z_2 = -1 + \frac{4}{3}i$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{a}{2} \\ z_1.z_2 = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{a}{2} \\ \frac{25}{9} = \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = \frac{50}{9} \end{cases}$.

Do đó $9b + a = 46$.

Câu 5. Cho m là số thực, biết phương trình $z^2 - 2mz + 9 = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho $z_1|\overline{z_2}| + z_2|\overline{z_1}| < 16$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

$z^2 - 2mz + 9 = 0$ (*) có $\Delta' = m^2 - 9$.

* $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2 thỏa mãn $z_1|\overline{z_2}| + z_2|\overline{z_1}| = z_1.z_2 + z_2.z_1 = 18 > 16$ (không thỏa mãn bài toán)

* $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có, $z_1 + z_2 = 2m$, $z_1 z_2 = 9$.

Ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|z_1||z_2|} = \sqrt{|z_1 z_2|} = \sqrt{9} = 3$ và $|z_1| = |\overline{z_1}|, |z_2| = |\overline{z_2}|$.

$\Rightarrow z_1|\overline{z_2}| + z_2|\overline{z_1}| = z_1.3 + z_2.3 = 3(z_1 + z_2) = 6m$.

Theo đề, $z_1|\overline{z_2}| + z_2|\overline{z_1}| < 16 \Leftrightarrow 6m < 16 \Leftrightarrow m < \frac{8}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $-3<m<\frac{8}{3}$. Mà m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+4m-3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Từ $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$ suy ra $|z_1|^2=|z_2|^2$ hay $|z_1|=|z_2|$

Ta có $\Delta'=m^2-4m+3$.

* $\Delta'=0\Leftrightarrow m\in\{1;3\}$. Khi đó phương trình có nghiệm kép (loại).

* $\Delta'>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2.

$|z_1|=|z_2|\Rightarrow z_1=-z_2$ (do $z_1\neq z_2$) $\Rightarrow z_1+z_2=0\Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn).

* $\Delta'<0\Leftrightarrow m\in(1;3)$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức z_1,z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $|z_1|=|z_2|$. Suy ra $m=2$

* Vậy có 2 giá trị nguyên của m.

Câu 7. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Đặt $w=z-2$, ta được phương trình: $(w+2)^2-2m(w+2)+2m^2-2m=0$

$\Leftrightarrow w^2-(2m-4)w+2m^2-6m+4=0$ (1).

Khi đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt w_1, w_2 thỏa mãn $|w_1|=|w_2|$.

Xét phương trình (1) có $\Delta'=(m-2)^2-2m^2+6m-4=-m^2+2m$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow m\in(0;2)$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$. Thay vào phương trình ta được:

$w^2+2w=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}w=0\\w=-2\end{array}\right.$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bà.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$. Khi đó phương trình luôn có hai nghiệm phức phân biệt không phải số thực, hai nghiệm này là hai số phức liên hợp nên mô-đun của chúng luôn bằng nhau.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên và $m \in (-10;10)$.

Suy ra $m \in \{-9;-8;....;-1\} \cup \{3;4;...;9\}$.Vậy có 16 giá trị của m thoả mãn.

Câu 8. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+2)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} = 1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\Delta' = 4m + 4$.

TH1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$, phương trình đã cho có 2 nghiệm thực z_1, z_2, khi đó

$$\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} = 1 \Leftrightarrow \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2}{(z_1.z_2)^2} + \frac{2}{|z_1.z_2|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+2)^2 - 2m^2}{(m^2)^2} + \frac{2}{|m^2|} = 1 \Leftrightarrow 4(m+2)^2 = m^4 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Kết hợp với điều kiện, $m = 1 + \sqrt{5}$ thỏa mãn.

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_{1,2} = m + 2 \pm i\sqrt{-\Delta'}$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$, khi đó $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(m+2)^2 + (-\Delta')} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Kết hợp với điều kiện, $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2(m+1)z + m^2 + 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 8$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $z^2 + 2(m+1)z + m^2 + 5 = 0$ (1) có $\Delta' = 2m - 4$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1.z_2 = m^2+5 > 0 \\ z_1+z_2 = -2(m+1) < 0 \end{cases}$ (do $m > 2$).

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm âm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2| = 8$.

$\Rightarrow -z_1 - z_2 = 8$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = -8 \Rightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Suy ra phương trình (1) trở thành $z^2 + 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = -3$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 = \overline{z}_1$

$\Rightarrow |z_1|+|z_2| = 8 \Rightarrow |z_1|+|\overline{z}_1| = 8$

$\Rightarrow |z_1| = 4 \Rightarrow |z_1|^2 = 16$

$\Rightarrow z_1\overline{z}_1 = 16 \Rightarrow z_1 z_2 = 16$

$\Rightarrow m^2 + 5 = 16 \Rightarrow m = \pm\sqrt{11}$.

Kết hợp điều kiện $m < 2$ suy ra $m = -\sqrt{11}$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 10. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2z + m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 15. **B.** 12. **C.** -3. **D.** -10.

Lời giải.

Xét phương trình: $z^2 - 2z + m - 5 = 0\ (1)$.

Ta có: $\Delta' = (b')^2 - ac = (-1)^2 - 1.(m-5) = 6 - m$.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thực z_1, z_2 thỏa mãn

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 20 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2 - 2z_1.z_2 = 20$ $(*)$. Theo Vi-ét có: $\begin{cases} z_1+z_2 = 2 \\ z_1.z_2 = m-5 \end{cases}$

thay vào (*) ta có $4 - 2(m-5) = 20 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phức là z_1, z_2.

Vì $z_1.z_2 = z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2} = m-5 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = m-5 \Leftrightarrow 2(m-5) = 20 \Leftrightarrow m = 15$ (thỏa mãn).

Vậy $S = \{-3; 15\}$ nên tổng các phần tử của S là 12.

Câu 11. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+2(m-2)z+m^2+4=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có 2 nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$\Delta'=(m-2)^2-m^2-4=-4m$.

Trường hợp 1: $\Delta'=-4m\geq 0\Leftrightarrow m\leq 0$.

Phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} z_1.z_2=m^2+4>0 \ \ \forall m \\ z_1+z_2=-2(m-2) \end{cases}$.

Khi đó: $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{2}{|z_1z_2|}=\frac{1}{4}$.

$\Leftrightarrow\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{(z_1z_2)^2}+\frac{2}{|z_1z_2|}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{4(m-2)^2-2(m^2+4)}{(m^2+4)^2}+\frac{2}{m^2+4}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4(m-2)^2-2(m^2+4)+2(m^2+4)=\frac{1}{4}(m^2+4)^2$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m^2+4=4(m-2) \\ m^2+4=-4(m-2) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m^2-4m+12=0 \text{ (PTVN)} \\ m^2+4m-4=0 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-2+2\sqrt{2} \\ m=-2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$. So với điều kiện $m\leq 0$, nhận $m=-2-2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $\Delta'=-4m<0\Leftrightarrow m>0$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_1=-(m-2)+i\sqrt{4m}$ và $z_2=-(m-2)-i\sqrt{4m}$.

Ta có $|z_1|=|z_2|$.

Khi đó: $\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{|z_1|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|z_1|=4\Leftrightarrow\sqrt{(m-2)^2+4m}=4$.

$\Rightarrow(m-2)^2+4m=16\Leftrightarrow m^2=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=2\sqrt{3} \\ m=-2\sqrt{3} \end{array}\right.$. So với điều kiện $m>0$, nhận $m=2\sqrt{3}$.

Vậy $m\in\{-2-2\sqrt{2};2\sqrt{3}\}$

$\Rightarrow$có 2 giá trị thực m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 12. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+(m+1)z+m^2+m=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1|+|z_2+1|=2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Xét phương trình $z^2+(m+1)z+m^2+m=0$ (1)

Đặt $z=w-1$, $(1)\Rightarrow (w-1)^2+(m+1)(w-1)+m^2+m=0\Leftrightarrow w^2+(m-1)w+m^2=0$ (2)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1|+|z_2+1|=2$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt w_1,w_2 thỏa mãn $|w_1|+|w_2|=2$.

Ta có: $\Delta=-3m^2-2m+1$

TH1: $\Delta<0\Leftrightarrow m<-1\cup m>\frac{1}{3}$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phức, khi đó: $|w_1|=|w_2|$.

Suy ra: $m^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \quad (n) \\ m=-1 \quad (l)\end{array}\right.$.

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow -1<m<\frac{1}{3}$.

Vì $a.c=m^2\geq 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2\geq 0$ hoặc $z_1.z_2\leq 0$.

Suy ra: $|w_1|+|w_2|=2\Leftrightarrow |w_1+w_2|=2\Leftrightarrow |m-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=3 \quad (l) \\ m=-1 \quad (l)\end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-4(m+1)z+4m^2+4m=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\Delta'=4(m+1)^2-4m^2-4m=4m+4$

TH1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-1$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2}=2(m+1)\pm i\sqrt{-\Delta'}$

Khi đó:

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow |4(m+1)|=|2i\sqrt{-\Delta'}|$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2=-\Delta'\Leftrightarrow 4m^2+12m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1\ (l) \\ m=-2\ (n)\end{array}\right.$

TH2: $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\geq -1$.

Khi đó: $|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2\Leftrightarrow 4z_1z_2=0\Leftrightarrow 4m^2+4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \quad (n) \\ m=-1 \quad (n)\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 14. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+2m^2-3m+2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $(z_1+2i)(z_2+2i)$ là số thuần ảo?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-(2m^2-3m+2)=(m^2-2m+1)-(2m^2-3m+2)=-m^2+m-1$

Suy ra $\Delta' = -m^2 + m - 1 < 0$ với mọi giá trị của số thực m.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức.

$(z_1 + 2i)(z_2 + 2i) = z_1.z_2 + 2(z_1 + z_2).i + 4i^2 = (2m^2 - 3m + 2) + 2(m-1)i - 4$

$(z_1 + 2i)(z_2 + 2i) = (2m^2 - 3m - 2) + 2(m-1)i$ là số thuần ảo

$\Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn là $m = 2$ và $m = \frac{-1}{2}$.

Câu 15. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 4z + 4 - m = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 6$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - (4 - m) = m$

Trường hợp 1: $\Delta' = m > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số thực.

$z_1 = 2 + \sqrt{m}$, $z_2 = 2 - \sqrt{m}$.

$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(2 + \sqrt{m}\right) + \left(2 - \sqrt{m}\right)\right| + \left|\left(2 + \sqrt{m}\right) - \left(2 - \sqrt{m}\right)\right| = 6$

$\Leftrightarrow |4| + \left|2\sqrt{m}\right| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (TM).

Xét **trường hợp 2**: $\Delta' = m < 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức.

$z_1 = 2 + \sqrt{-m}.i$, $z_2 = 2 - \sqrt{-m}.i$ (với $m < 0$).

$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(2 + \sqrt{-m}.i\right) + \left(2 - \sqrt{-m}.i\right)\right| + \left|\left(2 + \sqrt{-m}.i\right) - \left(2 - \sqrt{-m}.i\right)\right| = 6$

$\Leftrightarrow |4| + \left|2\sqrt{-m}.i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\sqrt{-m}.i\right| = 1 \Leftrightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1$ (TM).

Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn là $m = 1$ và $m = -1$.

Câu 16. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2023; 2023)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2| = |z_2 - 2|$?

A. 4043. **B.** 4045. **C.** 4044. **D.** 4046.

Lời giải

Chọn C

Đặt $w = z - 2$, ta được phương trình: $(w+2)^2 - 2m(w+2) + 2m^2 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow w^2 - (2m - 4)w + 2m^2 - 6m + 4 = 0$ (1).

Khi đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt w_1, w_2 thỏa mãn $|w_1| = |w_2|$.

Xét phương trình (1) có $\Delta' = (m-2)^2 - 2m^2 + 6m - 4 = -m^2 + 2m$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (0;2)$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$. Thay vào phương trình ta được:

$w^2 + 2w = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 0 \\ w = -2 \end{array}\right.$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$. Khi đó phương trình luôn có hai nghiệm phức phân biệt không phải số thực, hai nghiệm này là hai số phức liên hợp nên mô-đun của chúng luôn bằng nhau.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên và $m \in (-2023;2023)$.

Suy ra $m \in \{-2023;-8;....;-1\} \cup \{3;4;...;2023\}$. Vậy có 4044 giá trị của m thoả mãn.

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các số thực m sao cho phương trình $z^2 + (m-2)z + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2, và các điểm biểu diễn của z_1, z_2 cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có một góc bằng $120°$. Tính tổng các phần tử của tập S

A. -6. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = (m-2)^2 - 4(2m-3) = m^2 - 12m + 16$.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z_1, z_2

TH1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 + 2\sqrt{5} \\ m < 6 - 2\sqrt{5} \end{array}\right.$ khi đó O, M, N thẳng hàng nên không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} < m < 6 + 2\sqrt{5}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{2 - m \pm i\sqrt{-m^2 + 12m - 16}}{2}$

Suy ra $M\left(\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{\sqrt{-m^2 + 12m - 16}}{2}\right)$ và $N\left(\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{-\sqrt{-m^2 + 12m - 16}}{2}\right)$.

Điều kiện để O, M, N là ba đỉnh của tam giác là $m \neq 2$.

Khi đó tam giác OMN cân tại O và theo yêu cầu bài toán thì $\widehat{MON} = 120°$ suy ra

$\tan 60° = \dfrac{\sqrt{-m^2 + 12m - 16}}{|2 - m|}$ $\Leftrightarrow 3(2-m)^2 = -m^2 + 12m - 16 \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 28 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 + \sqrt{2} \\ m = 3 - \sqrt{2} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy tổng các phần tửa của tập S bằng 6.

Câu 18. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $(z_1-z_2)^2+7m=z_1-2\overline{z_2}$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\Delta'=(m-1)^2-m^2=-2m+1$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thì $\Delta'\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}$

TH1: $\Delta'>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt nên $\overline{z_2}=z_2$

Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=2(m-1) & (1)\\ z_1.z_2=m^2 & (2)\end{cases}$

Theo giả thiết $(z_1-z_2)^2+7m=z_1-2z_2\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2-4z_1z_2+7m=z_1-2z_2$

$4(m-1)^2-4m^2+7m=z_1-2z_2\Leftrightarrow z_1-2z_2=-m+4$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}z_1+z_2=2(m-1)\\ z_1-2z_2=-m+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_2=m-2\\ z_1=m\end{cases}$

Thay vào (2) ta có: $(m-2)m=m^2\Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn).

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$. Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt nên $\overline{z_2}=z_1$

Theo giả thiết $(z_1-z_2)^2+7m=z_1-2z_1\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2-4z_1z_2+7m=-z_1$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2-4m^2+7m=-z_1\Leftrightarrow z_1=m-4$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases}z_1+z_2=2(m-1)\\ z_1=m-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_2=m+2\\ z_1=m-4\end{cases}$

Thay vào (2) ta có:

$(m+2)(m-4)=m^2\Leftrightarrow -2m-8=0\Leftrightarrow m=-4$ (loại).

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Tổng tất cả các giá trị nguyên của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0|=2\sqrt{2}$.

A. 4. **B.** –2. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\Delta=3-4(a^2-2a)=3-4a^2+8a$.

Phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức khi và chỉ khi

$\Delta<0\Leftrightarrow 3-4a^2+8a<0\Leftrightarrow 4a^2-8a-3>0\quad (*)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm z_1,z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $|z_1|=|z_2|$.

Ta có

$z_1.z_2=a^2-2a\Rightarrow|z_1.z_2|=|a^2-2a|\Leftrightarrow|z_1|.|z_2|=|a^2-2a|\Rightarrow|z_0|^2=|a^2-2a|$.

Theo giả thiết có $\left(2\sqrt{2}\right)^2=|a^2-2a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a=8\\a^2-2a=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2\\a=4\end{array}\right.$.(Thỏa mãn điều kiện)

Vậy tổng các giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $4+(-2)=2$.

Câu 20. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1=w+3i$; $z_2=w+9i$; $z_3=2w-4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P=|a+2b+3c|$.

A. 368. **B.** 468. **C.** 100. **D.** 203.

Lời giải

Đặt $w=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $z_1+z_2+z_3=-a\Rightarrow 4w+4+12i=-a\Leftrightarrow(4x+4+a)+(12+4y)i=0$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4x+4+a=0\\12+4y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4x+4=-a\\y=-3\end{array}\right.$.

Từ đó $w=x-3i\Rightarrow z_1=x$; $z_2=x+6i$; $z_3=2x-4-6i$.

Vì phương trình bậc ba $z^3+az^2+bz+c=0$ có một nghiệm thực nên hai nghiệm phức còn lại phải là hai số phức liên hợp, suy ra $x=2x-4\Leftrightarrow x=4$.

Như vậy $z_1=4$; $z_2=4+6i$; $z_3=4-6i$.

Do đó

$\left\{\begin{array}{l}z_1+z_2+z_3=-a\\z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-\\z_1z_2z_3=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}12=-a\\84=b\\208=-c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-12\\b=84\\c=-208\end{array}\right.$.

Vậy $P=|a+b+c|=|-12+2.84+3(-208)|=468$.

Câu 21. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2=0\ (1)$, ta có $\Delta'=1-2m$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow 1-2m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$, khi đó $S=2(m-1)<0; P=m^2\geq 0$ và phương trình (1) có 2 nghiệm không dương phân biệt $z_1=(m-1)+\sqrt{1-2m}$, $z_2=(m-1)-\sqrt{1-2m}$.

Ta có: $|z_1|+|z_2|=2\Leftrightarrow -2(m-1)=2\Leftrightarrow m=0$ (nhận).

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 1-2m<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$. Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $z_1=(m-1)+\sqrt{|1-2m|}.i$, $z_2=(m-1)-\sqrt{|1-2m|}.i$.

Ta có: $|z_1|+|z_2|=2\Leftrightarrow (m-1)^2+(2m-1)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\ \ (n) \\ m=-1\ \ (l)\end{array}\right.$

Vậy $m\in\{0;1\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 22. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+2)z+m^2+1=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình $z^2-2(m+2)z+m^2+1=0$

Ta có: $\Delta'=4m+3$

TH1: $\Delta'=4m+3>0\Leftrightarrow 4m+3>0\Leftrightarrow m>\frac{-3}{4}$ và theo Viét, ta có $\left\{\begin{array}{l} S=2(m+2)>0, \forall m>\frac{-3}{4} \\ P=m^2+1>0\end{array}\right.$

nên phương trình có hai nghiệm thực dương phân biệt..

$|z_1|+|z_2|=3\Leftrightarrow m+2+\sqrt{4m+3}+m+2-\sqrt{4m+3}=3\Leftrightarrow m+2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 4m+3<0\Leftrightarrow m<\frac{-3}{4}$.

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=m+2\pm\sqrt{-4m-3}.i$.

$|z_1|+|z_2|=3\Leftrightarrow \sqrt{(m+2)^2-4m-3}+\sqrt{(m+2)^2-4m-3}=3$

$\Leftrightarrow m^2+1=\frac{9}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{\sqrt{5}}{2}(l) \\ m=-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 23. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+3m^2+4m+5=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình $z^2-2(m+1)z+3m^2+4m+5=0$

Ta có: $\Delta'=-2m^2-2m-4<0,\forall m\in\mathbb{R}$

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=m+1\pm\sqrt{2m^2+2m+4}.i$.

$|z_1|+|z_2|=4\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^2+2m^2+2m+4}+\sqrt{(m+1)^2+2m^2+2m+4}=4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(m+1)^2+2m^2+2m+4}=4\Leftrightarrow 3m^2+4m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 24. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $(z-1)(z^2-2(m-3)z+m^2+2)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của $m\in(0;+\infty)$ để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|=7$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $(z-1)(z^2-2(m-3)z+m^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-1=0\\z^2-2(m-3)z+m^2+2=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\z^2-2(m-3)z+m^2+2=0(*)\end{array}\right.$

$\Delta'_{(*)}=-6m+7$ nên

TH1: $\Delta'_{(*)}=-6m+7>0\Leftrightarrow m<\frac{7}{6}$ và theo Viét, ta có $\left\{\begin{array}{l}S=2(m-3)<0,\forall m<\frac{7}{6}\\P=m^2+2>0\end{array}\right.$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.

$$\text{ycbt}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<\frac{7}{6}\\1^2-2(m-3).1+m^2+2\neq 0\\|z_1|+|z_2|+|z_3|=7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<\frac{7}{6}\\m^2-2m+9\neq 0\\|z_2|+|z_3|=6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<\frac{7}{6}\\m\in\mathbb{R}\\-m+3+\sqrt{-6m+7}-m+3-\sqrt{-6m+7}=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<\frac{7}{6}\\m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=0\text{ (loại).}$$

TH2: $\Delta'_{(*)}<0\Leftrightarrow -6m+7<0\Leftrightarrow m>\frac{7}{6}$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức phân biệt $z_{2,3}=m-3\pm\sqrt{6m-7}.i$.

$|z_1|+|z_2|+|z_3|=7 \Leftrightarrow 2\sqrt{(m-3)^2+6m-7}=6$

$\Leftrightarrow m^2+2=9 \Leftrightarrow m^2=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\sqrt{7}\,(l) \\ m=\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.

Câu 25. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $(2-z)\left(z^2+2(m-1)z+m^2+3m+4\right)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2023)$ để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|\geq 6$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Ta có: $(2-z)\left(z^2+2(m-1)z+m^2+3m+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-z=0 \\ z^2-2(m-1)z+m^2+3m+4=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z^2-2(m-1)z+m^2+3m+4=0\,(*) \end{array}\right.$

TH1: $\Delta'_{(*)}=5-5m>0 \Leftrightarrow m<1$ và theo Viét, ta có $\left\{\begin{array}{l} S=-2(m-1)>0, \forall m<1 \\ P=m^2+3m+4>0 \end{array}\right.$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực dương phân biệt.

$\text{ycbt} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<1 \\ 2^2-2(m-1)2+m^2+3m+4\neq 0 \\ |z_1|+|z_2|+|z_3|\geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<1 \\ m^2-m+12\neq 0 \\ |z_2|+|z_3|\geq 4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<1 \\ m\in\mathbb{R} \\ 2(1-m)\geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m<1 \\ m\leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\leq -1 (\text{loại}).$

TH2: $\Delta'_{(*)}<0 \Leftrightarrow 5-5m<0 \Leftrightarrow m>1$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức phân biệt $z_{2,3}=1-m\pm\sqrt{5m-5}.i$.

$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geq 6 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{(1-m)^2+5m-5}\geq 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+3m-4}\geq 2 \Leftrightarrow m^2+3m-8\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \\ m\leq \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{array}\right.$.

So với đk $m>1$, ta được $m\geq \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}$.

Mặt khác $m\in(0;2023)$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{2;3;..;2022\}$.

Vậy có 2021 giá trị m.

Câu 26. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+4(m+3)z+4m^2+24=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2023;2023]$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\geq 8$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 4047. **D.** 2040.

Lời giải

Xét phương trình $z^2+4(m+3)z+4m^2+24=0$

Ta có: $\Delta'=24m+12$

TH1: $\Delta'=24m+12>0\Leftrightarrow m>\dfrac{-1}{2}$ và theo Viét, ta có $\begin{cases}S=-2(m+3)<0,\forall m>\dfrac{-1}{2}\\ P=4m^2+24>0\end{cases}$ nên phương trình có hai nghiệm thực âm phân biệt..

$|z_1|+|z_2|\geq 8\Leftrightarrow 4m+12\geq 8\Leftrightarrow m\geq -1$.

So với đk $m>\dfrac{-1}{2}$ thì $m>-\dfrac{1}{2}$ thỏa. (1)

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow 24m+12<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=-2(m+3)\pm\sqrt{-24m-12}.i$.

$|z_1|+|z_2|\geq 8\Leftrightarrow 2\sqrt{4(m+3)^2-24m-12}\geq 8$

$\Leftrightarrow\sqrt{4m^2+24}\geq 4\Leftrightarrow 4m^2+8\geq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$

So với đk thì $m<\dfrac{-1}{2}$ (2)

Vậy từ (1), (2) và $m\in[-2023;2023]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in[-2023;2023]$ suy ra có 4047 giá trị m.

Câu 27. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2+2(m+1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\Delta'=2m+1$

TH1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\dfrac{c}{a}}=\sqrt{m^2}$.

Suy ra: $2\sqrt{m^2}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\quad(ktm)\\ m=-2\quad(tm)\end{array}\right.$.

TH2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Vì $a.c=m^2\geq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2\geq 0$ hoặc $z_1.z_2\leq 0$.

Suy ra: $|z_1|+|z_2|=4 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=4 \Leftrightarrow |2m+2|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \quad (tm) \\ m=-3 \quad (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 28. Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Ta có: $z^2-2z+1-m=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=m \quad (1)$

+) Với $m \geq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow z=1 \pm \sqrt{m}$. Do $|z|=2 \Leftrightarrow |1 \pm \sqrt{m}|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=9 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+) Với $m<0$ thì $(1) \Leftrightarrow z=1 \pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z|=2 \Leftrightarrow |1 \pm i\sqrt{-m}|=2 \Leftrightarrow 1-m=4 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Vậy $S=1+9-3=7$.

Câu 29. Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$.

A. $m=1$ hoặc $m=-35$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-35$.
C. $m=1$ hoặc $m=35$. **D.** $m=-1$ hoặc $m=35$.

Lời giải

Đặt $t=z^2$, phương trình trở thành $4t^2+mt+4=0$ có hai nghiệm t_1, t_2.

Ta có $\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{m}{4} \\ t_1.t_2=1 \end{cases}$. Do vai trò bình đẳng, giả sử ta có $z_1^2=z_2^2=t_1$, $z_3^2=z_4^2=t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (t_1+4)^2(t_2+4)^2=324 \Leftrightarrow \left[t_1t_2+4(t_1+t_2)+16\right]^2=324$

$\Leftrightarrow (-m+17)^2=18^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m+17=18 \\ -m+17=-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=35 \end{array}\right.$.

Câu 30. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m+1=0$ (m là số thực). Tính tổng các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thoả mãn $|z_1|+|z_2|=|z_1z_2|-3$.

A. 4. **B.** 2. **C.** $2-\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Ta có $\Delta'=m^2-(m^2-2m+1)=2m-1$

TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

Khi đó phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau.

Suy ra $|z_1| = |z_2|$.

Ta lại có $|z_1| + |z_2| = |z_1 z_2| - 3 \Leftrightarrow 2|z_1| = |z_1|^2 - 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z_2| = |z_1| = -1 \quad (L) \\ |z_2| = |z_1| = 3 \quad (TM) \end{array}\right.$$

Mà $z_1 z_2 = m^2 - 2m + 1$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |m^2 - 2m + 1| \Leftrightarrow 9 = m^2 - 2m + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Mà $m < \frac{1}{2} \Rightarrow m = -2$

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 thoả mãn $z_1 z_2 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow z_1, z_2 \geq 0$ hoặc $z_1, z_2 \leq 0$

Suy ra $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Từ đó ta có $|z_1| + |z_2| = |z_1 z_2| - 3 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1 . z_2| - 3 \Leftrightarrow |2m| = \left|(m-1)^2\right| - 3$.

Mà $m > \frac{1}{2}$ suy ra $2m = (m-1)^2 - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{6} \quad (TM) \\ m = 2 - \sqrt{6} \quad (L) \end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của m là $-2 + 2 + \sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Câu 31. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m + 1 = 0$ (m là số thực). Gọi B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho hai nghiệm phức z_1, z_2 của phương trình. Biết rằng có hai giá trị của tham số m để tam giác ABC là tam giác vuông tại $A(1;0)$. Gọi T là tổng bình phương các giá trị đó. Tìm T.

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $\frac{33}{2}$.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (m+1) = m^2 - 3m$.

Vì A, B, C tạo thành tam giác nên B, C không cùng nằm trên trục Ox. Suy ra phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 không là số thực, khi đó $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (0;3)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z_1 = m-1+\sqrt{3m-m^2}.i \\ z_2 = m-1-\sqrt{3m-m^2}.i \end{array}\right.$.

Vậy ta có $B\left(m-1;\sqrt{3m-m^2}\right), C\left(m-1;-\sqrt{3m-m^2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(m-2;\sqrt{3m-m^2}\right); \overrightarrow{AC}=\left(m-2;-\sqrt{3m-m^2}\right)$.

Tam giác ABC là tam giác vuông tại A khi $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2-\left(3m-m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}$.

Vậy $T=\left(\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}\right)^2=\dfrac{33}{4}$.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $z^2-mz+6m-15=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\Delta = m^2-24m+60$.

TH1: $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 12-2\sqrt{21}\le m\le 12+2\sqrt{21}$

Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\dfrac{c}{a}}=\sqrt{6m-15}$.

Suy ra: $\sqrt{6m-15}=2\Leftrightarrow m=\dfrac{19}{6}(N)$.

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>12+2\sqrt{21} \\ m<12-2\sqrt{21} \end{array}\right.$

Suy ra: $|z_1|+|z_2|=4\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2|z_1z_2|=16$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2|=16$

$\Leftrightarrow m^2-2(6m-15)+2|6m-15|=16$ (1)

TH2.1: Nếu $m\ge\dfrac{5}{2}$ thì

(1) $\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=4(L) \\ m=-4(L) \end{array}\right.$.

TH2.: Nếu $m<\dfrac{5}{2}$ thì

(1) $\Leftrightarrow m^2-4(6m-15)=16\Leftrightarrow m^2-24m+44=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=2(N) \\ m=22(L) \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-3,\ m=9$.

C. $m=1,\ m=9$. **D.** $m=-3,\ m=1,\ m=9$.

Lờigiải

Ta có: $\Delta'=m,\ P=1-m$.

TH1: $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực: $z=1+\sqrt{m}$ hoặc $z=1-\sqrt{m}$.

+ Với $z=1+\sqrt{m}$. Suy ra: $1+\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=1$ (nhận).

+ Với $z=1-\sqrt{m}$. Suy ra: $|1-\sqrt{m}|=2\Leftrightarrow m=9$ (nhận).

TH2: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<0$.

Vì đây là phương trình hệ số thực có $\Delta'<0$ nên phương trình có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau. Do đó:

$|z|=2\Leftrightarrow z.\bar{z}=4\Leftrightarrow P=4\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$ (nhận).

Vậy $m\in\{-3;1;9\}$.

Câu 34. Phương trình $x^2-2x+b=0$ có hai nghiệm phức được biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi hai điểm A, B. Tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ) thì b bằng:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 4

Lời giải

Phương trình $x^2-2x+b=0(*)$ có $\Delta'=1-b$.

TH1: $b\leq 1$ khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực và ba điểm O, A, B không tạo thành tam giác nên ta loại trường hợp này.

TH2: $b>1$ khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức.

Giả sử hai nghiệm lần lượt là $m\pm ni,\ n>0$.

Dễ thấy do $x_1+x_2=2\Rightarrow 2m=2\Rightarrow m=1$.

Tam giác OAB đều suy ra $OA=OB=AB\Leftrightarrow\sqrt{m^2+n^2}=2n\Leftrightarrow 1=3n^2\Rightarrow n^2=\frac{1}{3}$.

Ta lại có $x_1x_2=b\Leftrightarrow m^2+n^2=b\Rightarrow b=\frac{4}{3}$.

Câu 35. Gọi S là tổng các bình phương các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$. Tính S.

A. $S=10$. **B.** $S=25$. **C.** $S=29$. **D.** $S=49$.

Lời giải

Ta có: $z^2-2z+1-m=0\Leftrightarrow(z-1)^2=m\ (1)$

+) Với $m\ge 0$ thì $z_1=1+\sqrt{m}, z_2=1-\sqrt{m}$. Do $|z_1|+|z_2|=4$.

Nên nếu $m\ge 1$ thì $|z_1|+|z_2|=4\Leftrightarrow 2\sqrt{m}=4\Leftrightarrow m=4$

+) Với $m<0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z_1|+|z_2|=4\Leftrightarrow |z_1|=2\Leftrightarrow |1\pm i\sqrt{-m}|=2\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Vậy $S=4^2+3^2=25$.

Câu 36. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$.

A. 1. **B.** –2. **C.** 3. **D.** –3.

Lời giải

Phương trình đã cho có $\Delta'=m^2+m-12$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow m^2+m-12>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-4\\m>3\end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt.

Do đó, $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$

$\Leftrightarrow\left(|z_1|+|z_2|\right)^2=\left(\sqrt{2}|z_1-z_2|\right)^2$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2|z_1z_2|=2\left(z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\right)$

$\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2|=2\left[\left(z_1+z_2\right)^2-4z_1z_2\right]$

$\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2-6z_1z_2-2|z_1z_2|=0$

$\Leftrightarrow 4m^2-6(-m+12)-2|-m+12|=0\ (*)$

Nếu $m<-4$ hoặc $3<m<12$ thì $(*)\Leftrightarrow 4m^2-8(-m+12)=0\Leftrightarrow m^2+2m-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-6\\m=4\end{array}\right.$.

Nếu $m \ge 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 4(-m+12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp:

$-m + i\sqrt{-m^2 - m + 12}$ và $-m - i\sqrt{-m^2 - m + 12}$.

Do đó, $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + (-m^2 - m + 12)} = 2\sqrt{-m^2 - m + 12}$

$\Leftrightarrow -m + 12 = -m^2 - m + 12$

$\Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài là $m = 0, m = 4, m = -6$. Do đó ta có tổng chúng là -2.

Câu 37. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 + 1 = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 4$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 2m$

TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = m + 1 \pm i\sqrt{-2m}$.

Ta có $|z_1| = |z_2|$, do đó $|z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m = 4 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \sqrt{3}\,(l) \\ m = -\sqrt{3}\,(tm) \end{array}\right.$.

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Ta có $z_1 + z_2 = 2(m+1) > 0; z_1 z_2 = m^2 + 1 > 0, \forall m > 0$. Suy ra: $z_1 > 0, z_2 > 0$.

Khi đó $|z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 4 \Leftrightarrow 2(m+1) = 4 \Leftrightarrow m = 1\,(tm)$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

$9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ $(*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1-m) \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 0$.

$|z| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$.

Với $z=2\Rightarrow m=49$ (thỏa mãn).

Với $z=-2\Rightarrow m=25$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi(b\neq 0)\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow 9-9(1-m)<0\Leftrightarrow m<0$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=2\Leftrightarrow |z|^2=4\Leftrightarrow z.\bar{z}=4\Leftrightarrow \frac{c}{a}=4\Leftrightarrow \frac{1-m}{9}=4\Leftrightarrow m=-35$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 giá trị của m.

Câu 39. Gọi S là tập hợp các số thực m để phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0$ có một nghiệm phức z_0 với $|z_0|=2$. Tổng tất cả các phần tử trong S là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

TH1: z_0 là số thực

$$|z_0|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=2 \\ z_0=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m+10=0(VN) \\ m^2-2m-2=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

TH2: z_0 không phải là số thực $\Leftrightarrow \Delta=9-4(m^2-2m)<0\Leftrightarrow m^2-2m>\frac{9}{4}$ (1)

Vì phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0\,(*)$ có các hệ số thực và z_0 là nghiệm của $(*)$ nên $\bar{z}_0$ cũng là nghiệm của $(*)$.

Theo Viet ta có $z_0.\bar{z}_0=m^2-2m\Leftrightarrow 4=|z_0|^2=m^2-2m$ (thỏa (1))

$\Leftrightarrow m^2-2m-4=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{5}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Cách 2

Gọi $z_0=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$|z_0|=2\Leftrightarrow a^2+b^2=4$ (1)

z_0 là nghiệm của phương trình $z^2+3z+m^2-2m=0\Leftrightarrow$

$(a+bi)^2+3(a+bi)+m^2-2m=0$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2+3a+m^2-2m+(2ab+3b)i=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2+3a+m^2-2m=0\ (2) \\ 2ab+3b=0\ (3) \end{array}\right.$$

Ta có $(3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $b=0$. Từ $(1)\Rightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$.

$b=0, a=2\Rightarrow (2)\Leftrightarrow m^2-2m+10=0$ (vô nghiệm)

$b=0, a=-2 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow m^2-2m-2=0 \Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{3}$

Với $a=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow b^2=\dfrac{7}{4} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow m^2-2m-4=0 \Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{5}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 40. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và $\left|z^3+2024z+\bar{z}\right|-2\sqrt{3}\left|z+\bar{z}\right|=2019\ (*)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z.\bar{z}=|z|^2=1 \Rightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left|z^3+2024z+\dfrac{1}{z}\right|-2\sqrt{3}\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2019$

$\Leftrightarrow |z|\left|z^2+\dfrac{1}{z^2}+2024\right|-2\sqrt{3}\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2019$

$\Leftrightarrow \left|\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+2022\right|-2\sqrt{3}\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2019 (**)$

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow z+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}}=2a$ (số thực) (Vì $z.\bar{z}=|z|^2=1$)

Vậy, $(**) \Leftrightarrow \left|4a^2+2022\right|-2\sqrt{3}|2a|=2019$

$\Leftrightarrow 4a^2-4\sqrt{3}|a|+3=0$

$\Leftrightarrow \left(2|a|-\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow |a|=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn.

Câu 41. Trong tập số phức, cho phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2-3m+6=0,\ m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa $|z_1|+|z_2|=8$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$\Delta'=(m+1)^2-\left(m^2-3m+6\right)=5m-5$.

Xét $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>1 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} z_1+z_2=2(m+1)>0\ \forall m>1 \\ z_1.z_2=m^2-3m+6>0\ \forall m \end{cases}$.

Vậy $m>1$ thì phương trình có hai nghiệm thực dương phân biệt

$|z_1|+|z_2|=8\Leftrightarrow z_1+z_2=8\Leftrightarrow 2m+2=8\Leftrightarrow m=3$(thỏa).

Xét $\Delta'<0\Leftrightarrow m<1$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 với $|z_1|=|z_2|=\sqrt{(m+1)^2+|5m-5|}$

$|z_1|+|z_2|=8\Leftrightarrow 2|z_1|=8\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5(l) \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Vậy $m=3, m=-2$.

Câu 42. Trong tập hợp số phức, xét phương trình $z^3-(2m+1)z^2+3mz-m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có ba nghiệm phân biệt z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|=3$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$z^3-(2m+1)z^2+3mz-m=0$ (1) $\Leftrightarrow (z-1)\left(z^2-2mz+m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-2mz+m=0\ (2) \end{array}\right.$

Đặt $z_3=1$, gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình (2).

Phương trình (2) có $\Delta'=m^2-m$ và: $\begin{cases} z_1+z_2=2m \\ z_1z_2=m \end{cases}$

*) TH1: Nếu $m>1$ ta có $\Delta'>0$ và phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt dương khác 1. Khi đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|=3\Leftrightarrow z_1+z_2+1=3\Leftrightarrow 2m+1=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

*) TH2: Nếu $m<0$ ta có $\Delta'>0$ và phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt là: $z_1=m+\sqrt{m^2-m}$ $(z_1>0)$; $z_2=m-\sqrt{m^2-m}$ $(z_2<0)$

Khi đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|=3\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-m}-m+\sqrt{m^2-m}+1=3\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m}=2$

$\Leftrightarrow m^2-m-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Vì $m<0$ nên $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

*) TH3: Nếu $0<m<1$ ta có $\Delta'<0$, khi đó phương trình (2) có hai nghiệm phức: $z_1=m+\sqrt{-m^2+m}.i$; $z_2=m-\sqrt{-m^2+m}.i$

Vậy $|z_1|+|z_2|+|z_3|=3\Leftrightarrow \sqrt{m^2-m^2+m}+\sqrt{m^2-m^2+m}+1=3\Leftrightarrow \sqrt{m}=1\Leftrightarrow m=1$(loại).

Vậy chỉ có một giá trị $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 43. Trong tập hợp số phức, xét phương trình $z^4-2(m+1)z^2+2m+1=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có bốn nghiệm phân biệt z_1,z_2,z_3,z_4 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

$z^4-2(m+1)z^2+2m+1=0$ (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=1 \\ z^2=2m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm 1 \\ z^2=2m+1 \ (2) \end{array}\right.$

Đặt $z_1=1, z_2=-1$

*) TH1: Nếu $m>-\frac{1}{2}$, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Leftrightarrow 2m+1\neq 1 \Leftrightarrow m\neq 0$

Hai nghiệm của phương trình (2) là $z_3=\sqrt{2m+1}, z_4=-\sqrt{2m+1}$.

Khi đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6 \Leftrightarrow 1+1+\left|\sqrt{2m+1}\right|+\left|-\sqrt{2m+1}\right|=6$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m+1}=4 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1}=2 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn).

*)TH2: Nếu $m<-\frac{1}{2}$, phương trình (2) có hai nghiệm phức là $z_3=\sqrt{-2m-1}.i, z_4=-\sqrt{-2m-1}.i$

Khi đó $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6 \Leftrightarrow 1+1+\left|\sqrt{-2m-1}\right|+\left|-\sqrt{-2m-1}\right|=6$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2m-1}=4 \Leftrightarrow \sqrt{-2m-1}=2 \Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-2(m+1)z+7m-5=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 sao cho $|z_1|=|z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(7m-5)=m^2+2m+1-7m+5=m^2-5m+6$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-5m+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>3 \end{array}\right.$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Do đó $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow z_1=-z_2 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow 2(m+1)=0 \Leftrightarrow m=-1$ (nhận).

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-5m+6<0 \Leftrightarrow 2<m<3$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt. Do đó ta luôn có $|z_1|=|z_2|$ với mọi $m\in(2;3)$.

Vậy $m\in(2;3)\cup\{-1\}$, suy ra có 1 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (2m+1)^2 - 4m^2 = 4m+1$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m+1>0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} z_1+z_2 = 2(2m+1) = 4m+2 \\ z_1 z_2 = 4m^2 \end{cases}$. Do đó

$|z_1|+|z_2| = 4 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 16 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2 + 2|z_1z_2| = 16$

$\Leftrightarrow (4m+2)^2 - 8m^2 + 2|4m^2| = 16 \Leftrightarrow |4m+2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m+2=4 \\ 4m+2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{2}(N) \\ m = -\frac{3}{2}(L) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4m+1<0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt với $|z_1| = |z_2|$. Do đó

$|z_1|+|z_2| = 4 \Leftrightarrow 2|z_1| = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow |z_1|.|z_2| = 4 \Leftrightarrow |4m^2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1\,(L) \\ m = -1\,(N) \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$. Suy ra có 1 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 46. Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 4z + 4 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$. Tính S.

A. $S = -6$. **B.** $S = -13$. **C.** $S = 9$. **D.** $S = 16$.

Lời giải

Ta có: $z^2 - 4z + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 = m \quad (1)$

+) Với $m \ge 0$ thì $(1) \Leftrightarrow z = 2 \pm \sqrt{m}$. Do $|z| = 2 \Leftrightarrow |2 \pm \sqrt{m}| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 16 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+) Với $m < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow z = 2 \pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z| = 2 \Leftrightarrow |2 \pm i\sqrt{-m}| = 2 \Leftrightarrow 4 - m = 4 \Leftrightarrow m = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy $S = 0 + 16 = 16$.

Câu 47. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$ và $|z_1 - iz_2| = 6$. Biết $|z_2| > |z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1 - \frac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$ (1)

Lại có: $|z_1 - iz_2| = 6 \Leftrightarrow \left|1 - i\frac{z_2}{z_1}\right| = 2$ (2)

Đặt $\frac{z_2}{z_1}=x+yi$ ($x,y\in\mathbb{R}$)

Từ (1), (2) suy ra: $\begin{cases}\left|1-\frac{z_2}{z_1}\right|=2\Leftrightarrow(1-x)^2+y^2=2\\ \left|1-i\frac{z_2}{z_1}\right|=2\Leftrightarrow(1+y)^2+x^2=4\end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(1-x)^2+y^2=2\\(1+y)^2+x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+y^2=1\\x^2+2y+y^2=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\x^2-2x+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x^2-2x+(1-x)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x=0\\y=1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,y=1\\x=2,y-1\end{cases}$

Suy ra: $\frac{z_2}{z_1}=0+i\Rightarrow|z_2|=|z_1|$ (loại).

$\frac{z_2}{z_1}=2-i\Rightarrow|z_2|=|z_1|.\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ (thỏa mãn).

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=|z_2-2|$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Ta có: $z^2-2mz+2m^2-2m=0$ $(*)$ thì $\Delta'=-m^2+2m$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0\Leftrightarrow-m^2+2m>0\Leftrightarrow0<m<2$.

Với $0<m<2$ phương trình có hai nghiệm thực $z_1\neq z_2$.

Khi đó $|z_1-2|=|z_2-2|\Leftrightarrow\begin{bmatrix}z_1-2=z_2-2\\z_1-2=-(z_2-2)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}z_1=z_2\ (L)\\z_1+z_2=4\end{bmatrix}$.

Suy ra $z_1+z_2=4\Leftrightarrow2m=4\Leftrightarrow m=2$ (loại).

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m>2\\m<0\end{bmatrix}$.

Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2}=m\pm i\sqrt{|-m^2+2m|}$.

Do đó $|z_1-2|=|z_2-2|$ (luôn đúng).

Kết hợp điều kiện $\begin{bmatrix}m>2\\m<0\end{bmatrix}$ và $m\in(-10;10)$, m nguyên suy ra $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$

Vậy các giá trị nguyên của thỏa mãn là: $m\in\{-9;-8;...;-1;3;4;...;9\}$ nên có 16 giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ thoả mãn.

Câu 49. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\Delta=-3a^2-10a+9$.

+ TH1: $\Delta\geq 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow|a-3|=\left|\sqrt{\Delta}\right|\Leftrightarrow(a-3)^2=\Delta\Leftrightarrow 4a^2+4a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-1\end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta\geq 0$).

+ TH2: $\Delta<0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow|a-3|=\left|i\sqrt{-\Delta}\right|\Leftrightarrow(a-3)^2=-\Delta\Leftrightarrow 2a^2+16a-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-9\end{array}\right.$. (thỏa mãn điều kiện $\Delta<0$).

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-(m+2)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa năm $|z_1|^3+|z_2|^3=16$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\Delta=-3m^2+4m+4$

TH 1: $\Delta<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{2}{3}\\m>2\end{array}\right.$

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

Khi đó $|z_1|^3+|z_2|^3=16\Leftrightarrow 2|z_1|^3=16\Leftrightarrow|z_1|=2\Leftrightarrow z_1.z_2=4$.

Theo Vi-ét ta có $m^2=4\Leftrightarrow m=\pm 2$. Kết hợp điều kiện ta được $m=-2$.

TH 2: $\Delta>0\Leftrightarrow-\dfrac{2}{3}<m<4$.Vì

$$\begin{aligned}|z_1|^3+|z_2|^3&=|z_1+z_2|^3-3|z_1z_2|\left(|z_1|+|z_2|\right)\\&=|z_1+z_2|^3-3z_1z_2\left(z_1+z_2\right)\\&=(m+2)^3-3m^2(m+2)\\&=-2m^3+12m+8\end{aligned}$$

nên

$-2m^3+12m+8=16 \Leftrightarrow -2m^3+12m-8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1+\sqrt{3} \\ m=-1-\sqrt{3} \\ m=2 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $m=2; m=-1+\sqrt{3}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta=9-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 9$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m<9$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1=\overline{z_1}$, $z_2=\overline{z_2}$. Nên $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow {z_1}^2={z_2}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2 \\ z_1=-z_2 \end{array}\right.$

Với $z_1=z_2$, không thoả mãn yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, nên loại.

Với $z_1=-z_2 \Leftrightarrow z_1+z_2=0$ không thỏa mãn, do theo Vi-ét, ta có $z_1+z_2=6$.

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow m>9$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 và $z_2=\overline{z_1}$, $z_1=\overline{z_2}$. Yêu cầu $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2=z_1z_2$ luôn đúng với $m>9$.

Vậy trong khoảng $(0;20)$ có 10 số m_0 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52. Cho các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2-2i|=|z-4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz+1|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có $|z+2-2i|=|z-4i| \Leftrightarrow |(x+2)+(y-2)i|=|x+(y-4)i|$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=x^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow x+y-2=0$

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$ là đường thẳng $(\Delta): x+y-2=0$.

Mặc khác $|iz+1|=|i(x+yi)+1|=|(1-y)+xi|=\sqrt{(1-y)^2+x^2}=MN$ với $N(0;1)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điểm $M\in(\Delta): x+y-2=0$ sao cho MN bé nhất.

$\min|iz+1|=\min MN=d(N,(\Delta))=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46. **(Đề TK BGD 2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy $B(2;1;1)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;4;4)=2(1;2;2)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):x+2y+2z-6=0$

Vậy $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|x_M+2y_M+2z_M-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 46 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1);B(-1;0;3)$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-2=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2=3$. **B.** $a^2+b^2+c^2=13$. **C.** $a^2+b^2+c^2=5$. **D.** $a^2+b^2+c^2=10$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$, mặt phẳng $(P):4x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u}=(a;b;-4)$ là một vec tơ chỉ phương của Δ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -6.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3t\\z=3-t\end{cases}$ và $\begin{cases}x=1-2t'\\y=4+3t'\\z=2+t'\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $7x-2y+8z-31=0$. **B.** $7x-2y+8z-1=0$.

C. $7x+2y+8z-1=0$. **D.** $7x+2y+8z-31=0$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$ và điểm $A(1;3;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết (P) có dạng $ax+by+cz+6=0$. Tính $a+b+c$.

A. 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Điểm nào sau đây thuộc (P)?

A. $M(1;-1;5)$. **B.** $N(-1;1;2023)$.

C. $I(1;1;2023)$. **D.** $K(0;-3;5)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(1;-7;-8)$, $N(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ $A(7;-1;-2)$ đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Gọi $\vec{n}=(a;b;4)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Giá trị $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(1;7;-1)$. **B.** $\vec{u}=(3;4;-4)$. **C.** $\vec{u}=(2;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;4)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{8}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song với trục Ox. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(0;-2;5)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{23}{\sqrt{195}}$. **D.** $\dfrac{29}{\sqrt{195}}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm của MN. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn MN là

A. $7x-4y-z+7=0$. **B.** $7x+4y-z-17=0$.

C. $8x+7y+z-31=0$. **D.** $8x+7y+z+31=0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$; $d_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ và cách điểm $A(1;2;-5)$ một đoạn bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ là

A. $(P): x+y+z+3=0 \vee x+y+z-3=0$.

B. $(P): x-y+z+7=0 \vee x-y+z+5=0$.

C. $(P): x-y-z-7=0 \vee x-y-z-5=0$.

D. $(P): 5x-5y+5z+7=0 \vee 5x-5y+5z+9=0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $\Delta // (P)$ và Δ cắt d.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm cạnh MN.

A. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{-1}$. **B.** $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}$. **D.** $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;13;2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với d sao cho khoảng cách

giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;1;1)$ đến (P) bằng

A. 15. **B.** $\frac{154}{\sqrt{171}}$. **C.** 10. **D.** $\frac{145}{\sqrt{157}}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ và $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}$. Viết các phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2 sao cho khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) gấp hai lần khoảng cách khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

A. $(P):2x+2y+z+3=0$. **B.** $(P):2x+2y+z-4=0$.

C. $\left[\begin{array}{l}(P):2x+2y+z-6=0\\(P):2x+2y+z+2=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}(P):2x+2y+z+6=0\\(P):2x+2y+z-2=0\end{array}\right.$.

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z-8=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$. Tính khoảng cách từ điểm $A(0;-4;2)$ đến mặt phẳng (Q) biết mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với (S).

A. 1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) cắt trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó b,c là các số thực dương. Biết rằng $mp(P)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q):y-z+1=0$ và $d(O,(P))=\frac{1}{3}$. Khi đó tích $4bc$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$, và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $(P):x-y+z-2=0$, $(P):7x+5y+z+2=0$.

B. $(P):x-y+z+2=0$, $(P):7x+5y+z+2=0$.

C. $(P):x-y+z-2=0$, $(P):7x+5y+z-2=0$.

D. $(P):x-y+z+2=0$, $(P):7x+5y+z-2=0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng song song $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$, $d':\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng trên. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}, d':\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng trên. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;-3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm O là gốc tọa độ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi chứa d. Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến (P) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{6}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Biết rằng có hai điểm $M_1(a;0;0), M_2(b;0;0)$ thuộc trục hoành để khoảng cách từ điểm M đến (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $a+b$

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d. Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{3}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;-2)$ và chứa trục Oz. Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{19\sqrt{2}}{10}$. **C.** $\frac{19\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-1=0$.

A. $-\frac{\sqrt{5}}{15}$. **B.** $-\frac{2\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\frac{\sqrt{195}}{15}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, điểm $B(2;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và song song với d. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{6}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và đường thẳng $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2. Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(Q): x-3y+4z-1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (Q). Tính khoảng cách từ điểm $A(0;1;2)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{6}{\sqrt{185}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{185}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{185}}$. **D.** $\frac{16}{\sqrt{185}}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết khoảng cách giữa d và (P) bằng $\sqrt{2}$ và (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $x-y-1=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x-z-1=0$. **D.** $x-z-3=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$, điểm $A(1;0;2)$. Gọi mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(2;-1;4)$ đến (P) là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** 6.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+y^2+z^2=4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2;-1;3)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{19}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{7}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$. Gọi mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất. Tính khoảng cách từ $M(2;-3;4)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{7}{\sqrt{41}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{42}}{6}$. **C.** $\dfrac{5}{\sqrt{42}}$. **D.** $\dfrac{5}{13}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) chứa $\Delta_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\\z=1-t\end{cases}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{7\sqrt{93}}{31}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{93}}{3}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{93}}{13}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{39}}{31}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{8\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{2\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ và chứa đường thẳng $(\Delta):\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-m}$. Giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây sao cho khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$; $B(11;15;4)$; $C(3;9;-2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-4+3t\\y=-3+2t\\z=-2+2t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $S=MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q):2x+y+2z-3=0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=-8+4t\\z=-3+3t\end{cases}$ và $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-3}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(0;2;1)$ đến (P) bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{217}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{271}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{217}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{271}}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $A(2;-2;4)$. **B.** $D(2;2;4)$. **C.** $B(2;2;-4)$. **D.** $C(-2;2;4)$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+z=0$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Biết rằng $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d có hoành độ âm đồng thời $AM=\sqrt{6}$. Tính $S=2a+3b+c$.

A. $S=-10$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=12$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa trục Oy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$; $d':\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=1-2t\end{cases}$ và điểm $M(5;0;-1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và d'. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\dfrac{23\sqrt{2}}{10}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $x+2y-3z-10=0$. **B.** $x-2y+3z-10=0$.
C. $x-2y+3z+10=0$. **D.** $x-2y-3z-10=0$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 và M có hoành độ âm. Gía trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng

A. -9. **B.** -3. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-2;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\\z=-1-t\end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d. Khoảng cách từ $M(-1;0;4)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{\sqrt{30}}$. **D.** $\dfrac{14}{\sqrt{30}}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách từ điểm $M(0;4;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\frac{19\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\frac{35\sqrt{26}}{26}$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ và $d':\frac{x}{3}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+18}{4}$. (P) là mặt phẳng chứa d và d'. Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{99}{16250}$. **B.** $\frac{99}{25\sqrt{25}}$. **C.** $\frac{99}{25\sqrt{26}}$. **D.** $\frac{8}{625}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;5;-3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{25\sqrt{18}}{18}$. **B.** $25\sqrt{18}$. **C.** $\frac{21\sqrt{18}}{18}$. **D.** $\frac{25}{18}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$. Gọi $A(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox sao cho A cách đều d và (P). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\le -3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a>2$. **D.** $a>5$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1); B(-1;0;3)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-2=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2=3$. **B.** $a^2+b^2+c^2=13$. **C.** $a^2+b^2+c^2=5$. **D.** $a^2+b^2+c^2=10$.

Lời giải

Mp(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$, $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2)$.

Vì (Q) vuông góc với của (P) nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n}$.

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB}$. Ta có: $\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right]=(5;-5;5)$

Mp(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q}=\frac{1}{5}\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right]=(1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 1(x-2)-1(y-1)+1(z-1)=0$, hay $(Q): x-y+z-2=0$

Vậy $a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$, mặt phẳng $(P): 4x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u}=(a;b;-4)$ là một vec tơ chỉ phương của Δ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -6.

Lời giải

Vì N là giao điểm của Δ và d nên $N(2+2t;-1+2t;2-t)$.

A là trung điểm của đoạn $MN \Rightarrow \begin{cases} x_M=2.x_A-x_N=2-2t \\ y_M=2.y_A-y_N=-1-2t \\ z_M=2.z_A-z_N=4+t \end{cases} \Rightarrow M(2-2t;-1-2t;4+t)$

Vì $M \in (P)$ nên ta có phương trình:

$(P): 4(2-2t)-(-1-2t)+4+t-10=0 \Leftrightarrow -5t=-3 \Leftrightarrow t=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow N\left(\frac{16}{5};\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Khi đó, đường thẳng Δ có một VTCP là $\overrightarrow{NA}=\left(-\frac{6}{5};-\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right) \Rightarrow \vec{u}=(3;3;-4)$

Suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy $a+b=6$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3t \\ z=3-t \end{cases}$ và $\begin{cases} x=1-2t' \\ y=4+3t' \\ z=2+t' \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $7x-2y+8z-31=0$. **B.** $7x-2y+8z-1=0$.

C. $7x+2y+8z-1=0$. **D.** $7x+2y+8z-31=0$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;0;3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;-1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;4;2)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;3;1)$.

Ta thấy $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{u_2}\\ N\notin d_1\end{cases}\Rightarrow d_1//d_2$.

$\overrightarrow{MN}=(0;4;-1)$, $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]=(7;2;8)$.

Mặt phẳng (d_1,d_2) đi qua $N(1;4;2)$ và nhận $\vec{n}=(7;2;8)$ làm VTPT.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (d_1,d_2): $7(x-1)+2(y-4)+8(z-2)=0\Leftrightarrow 7x+2y+8z-31=0$

.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$ và điểm $A(1;3;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết (P) có dạng $ax+by+cz+6=0$. Tính $a+b+c$.

A. 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(2;1;-1)$; $AI=\sqrt{6}<R$, suy ra điểm A nằm trong mặt cầu (S)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P), khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$, do đó r nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất.

Mặt khác ta luôn có $IH\le IA$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng với A, hay $(P)\perp IA$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{IA}=(2;1;-1)$ và qua $A(1;3;2)$ có phương trình

$2(x-1)+(y-3)-1(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-z-3=0$

$\Leftrightarrow -4x-2y+2z+6=0$

Vậy $a+b+c=-4$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-5}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Điểm nào sau đây thuộc (P)?

A. $M(1;-1;5)$. **B.** $N(-1;1;2023)$.

C. $I(1;1;2023)$. **D.** $K(0;-3;5)$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-1;1)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;-2;-5)$.

VTPT của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{k}=(0;0;1)$.

$\vec{n}=\left[\vec{k},\vec{u}\right]=(2;1;0)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;1)$ và nhận $\vec{n}=(2;1;0)$ làm VTPT

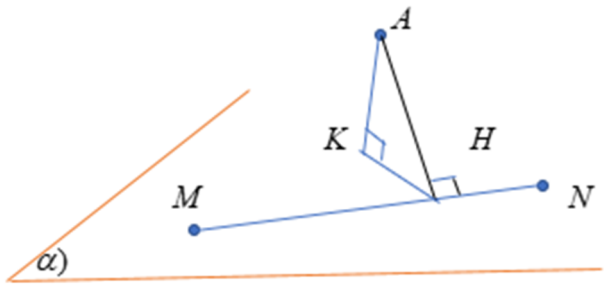
Phương trình $(P):2(x-2)+1(y+1)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Do đó điểm $I(1;1;2023)$ thuộc (P).

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(1;-7;-8)$, $N(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ $A(7;-1;-2)$ đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Gọi $\vec{n}=(a;b;4)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Giá trị $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(7;-1;-2)$ lên đường thẳng MN và (α).

Ta có $d(A,(\alpha))=AK\le AH\Rightarrow$ khoảng cách từ $A(7;-1;-2)$ đến mặt phẳng (α) là lớn nhất khi $d(A,(\alpha))=AH$ hay $K\equiv H\Rightarrow \overrightarrow{AH}$ là một vectơ pháp tuyến của $(\alpha)\Rightarrow \overrightarrow{AH},\vec{n}$ cùng phương.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;2;-1)\Rightarrow MN:\begin{cases}x=1+t\\y=-7+2t\\z=-8-t\end{cases}$.

$H\in MN\Rightarrow H(1+t;-7+2t;-8-t)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(t-6;2t-6;-t-6)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{MN}=0\Leftrightarrow (t-6).1+(2t-6).2+(-t-6).(-1)=0\Leftrightarrow t=2$

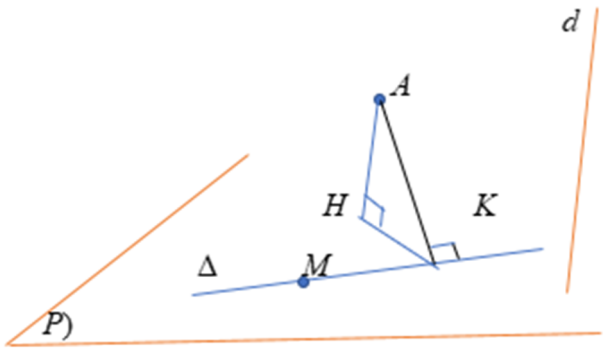
$\Rightarrow H(3;-3;-10)\Rightarrow \overrightarrow{AH}(-4;-2;-8)$.

$\overrightarrow{AH}(-4;-2;-8)\Rightarrow \vec{n}=(2;1;4)\Rightarrow a=2,b=1\Rightarrow a+b=3$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(1;7;-1)$. **B.** $\vec{u}=(3;4;-4)$. **C.** $\vec{u}=(2;2;-1)$. **D.** $\vec{u}=(2;0;4)$.

Lời giải



Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với d là $2x+2y-z+9=0$, khi đó (P) chứa Δ. Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;-3)$ lên đường thẳng Δ và (P). Ta có $d(A,\Delta)=AK\geq d(A,(P))=AH$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ $H\equiv K\Rightarrow$đường thẳng AH và đường thẳng d có cùng vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}\Rightarrow H(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Do $H\in(P)\Rightarrow 2.(1+2t)+2.(2+2t)-(-3-t)+9=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HM}=(1;0;2)$ là một vectơ chỉ phương của $\Delta\Rightarrow \vec{u}=(2;0;4)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{8}$.

Lời giải

Ta thấy đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;1)$. Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$. Vì mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với (P) nên mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(0;2;2)$. Vậy mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(2;-1;1)$, có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(0;2;2)$ có phương trình là: $2y+2z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (Q) bằng: $d(M;(Q))=\dfrac{|2-4|}{\sqrt{4+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song với trục Ox. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta thấy đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;1)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với trục $Ox \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{i}\right]=(0;1;1)$. Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;2)$, có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(0;1;1)$ có phương trình là: $y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(1;-1;0)$ đến (P) bằng: $d(M;(P))=\dfrac{|-1+0-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(0;-2;5)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{23}{\sqrt{195}}$. **D.** $\dfrac{29}{\sqrt{195}}$.

Lời giải

Lấy $B(1;-2;3)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-5;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(13;-1;-5)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=(13;-1;-5)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):13x-y-5z=0$

Vậy $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|13x_M-y_M-5z_M|}{\sqrt{13^2+(-1)^2+(-5)^2}}=\dfrac{23}{\sqrt{195}}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm của MN. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn MN là

A. $7x-4y-z+7=0$. **B.** $7x+4y-z-17=0$.

C. $8x+7y+z-31=0$. **D.** $8x+7y+z+31=0$.

Lời giải

Vì $N\in d$ nên toạ độ N có dạng $N(-2+2t;1+t;1-t),\ t\in\mathbb{R}$.

Do $A(1;3;2)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN suy ra toạ độ điểm $M(4-2t;5-t;3+t)$.

Vì $M\in(P)$ nên

$2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow -4-2t=0\Leftrightarrow t=-2$.

Khi đó $M(8;7;1),\ N(-6;-1;3)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-14;-8;2)=-2(7;4;-1)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn MN là: $7x+4y-z-17=0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$; $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ và cách điểm $A(1;2;-5)$ một đoạn bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$ là

A. $(P):x+y+z+3=0\vee x+y+z-3=0$.

B. $(P):x-y+z+7=0\vee x-y+z+5=0$.

C. $(P):x-y-z-7=0\vee x-y-z-5=0$.

D. $(P):5x-5y+5z+7=0\vee 5x-5y+5z+9=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{n_1}=(2;1;-1);\overrightarrow{n_2}=(1;3;2)$ lần lượt là VTCP của $d_1;d_2$.

$\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(5;-5;5)=5(1;-1;1)$

(P) song song đường thẳng $d_1;d_2\Rightarrow(P)$ có VTPT $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương $\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]$.

Chọn $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x-y+z+m=0$.

$$d\left[A;(P)\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{|m-6|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=5\end{array}\right.$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):x-y+z+7=0\vee x-y+z+5=0$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $\Delta\,//\,(P)$ và Δ cắt d.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ, khi đó tọa độ điểm M có dạng $M(-1+2t;1+t;2+3t)$. Suy ra $\overrightarrow{AM}=(2t-2;t;3t+4)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-1;-1)$.

Δ song song với $(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_{(P)}} = 0 \Leftrightarrow 2t-2-t-3t-4=0 \Leftrightarrow t=-3$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-8;-3;-5)$.

Vậy $\Delta : \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{5}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm cạnh MN.

A. $\dfrac{x-6}{7} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{7} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ, khi đó tọa độ điểm M có dạng $M(-2+2t,1+t,1-t)$.

Do A là trung điểm MN nên $N(4-2t;\ 5-t;\ t+3)$.

Mà $N \in (P)$ nên ta có phương trình $2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Do đó, $M(-6;-1;3)$.

$\overrightarrow{AM} = (-7;-4;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;13;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;1;1)$ đến (P) bằng

A. 15. **B.** $\dfrac{154}{\sqrt{171}}$. **C.** 10. **D.** $\dfrac{145}{\sqrt{157}}$.

Lời giải

Vì (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với d nên gọi d' là đường thẳng đi qua A và song song với d, ta có: $d' \subset (P)$.

Phương trình d' là: $d': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-13}{1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Lấy $B(1;0;1) \in d$ và gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm B lên (P) và d'.

Ta có: $\begin{cases} K(2t;13+t;2+3t) \\ \overrightarrow{BK} \perp \vec{u}_{d'} \end{cases} \Leftrightarrow K(-2;12;-1)$.

Ta có: $d(d,(P)) = d(B,(P)) = BH \le BK = \sqrt{157}$.

Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv K$. Suy ra $\overrightarrow{BK}(-3;12;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là: $-3(x+2)+12(y-12)-2(z+1)=0$

$\Leftrightarrow -3x+12y-2z-152=0$.

Vậy $d(\mathrm{M},(P)) = \dfrac{|-3.1+12.1-2.1-152|}{\sqrt{(-3)^2+12^2+(-2)^2}} = \dfrac{145}{\sqrt{157}}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$ và $d_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+2}{2}$. Viết các phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2 sao cho khoảng cách giữa đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) gấp hai lần khoảng cách khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

A. $(P): 2x+2y+z+3=0$.

B. $(P): 2x+2y+z-4=0$.

C. $\left[\begin{array}{l} (P): 2x+2y+z-6=0 \\ (P): 2x+2y+z+2=0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} (P): 2x+2y+z+6=0 \\ (P): 2x+2y+z-2=0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Ta có d_1 đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;0)$.

d_2 đi qua điểm $B(0;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;2)$.

Do mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2 nên $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-2;-2;-1)$.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x+2y+z+m=0$.

Ta có: $d_{(d_1,(P))} = \dfrac{|m+6|}{3}$; $d_{(d_2,(P))} = \dfrac{|m|}{3}$.

Theo đề ta có $d_{(d_1,(P))} = 2d_{(d_2,(P))} \Leftrightarrow \dfrac{|m+6|}{3} = \dfrac{2|m|}{3} \Leftrightarrow |m+6| = 2|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+6=2m \\ m+6=-2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Với $m=6$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+6=0$.

Với $m=-2$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-2=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-8=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$. Tính khoảng cách từ điểm $A(0;-4;2)$ đến mặt phẳng (Q) biết mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với (S).

A. 1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q): 2x+2y-z+m=0$ (với $m \neq -8$)

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$ và bán kính $R=2$.

Do mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \dfrac{|m+2|}{3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=- \end{array}\right.$ (loại

Vậy $(Q): 2x+2y-z+4=0$. Suy ra $d(A,(Q))=\dfrac{|2.0-2.4-2+4|}{3}=2$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó b,c là các số thực dương. Biết rằng $mp(P)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q): y-z+1=0$ và $d(O,(P))=\dfrac{1}{3}$. Khi đó tích $4bc$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có phương trình $mp(P)$ là : $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

$(P) \perp (Q) \Rightarrow \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=0 \Rightarrow b=c$ (1)

Ta có $d(O,(P))=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=8$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 4bc=1$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$, và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. $(P): x-y+z-2=0$, $(P): 7x+5y+z+2=0$.

B. $(P): x-y+z+2=0$, $(P): 7x+5y+z+2=0$.

C. $(P): x-y+z-2=0$, $(P): 7x+5y+z-2=0$.

D. $(P): x-y+z+2=0$, $(P): 7x+5y+z-2=0$.

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;-1;-2)$, lấy $M(0;0;-2)\in d$ suy ra $M\in(P)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+c(z+2)=0, (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}\\ \mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b-2c=0\\ \dfrac{|a+b+3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2c\\ \dfrac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+(a-2c)^2+c^2}}=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2c\\ |2a+c|=\sqrt{3}\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2c\\ 4a^2+4ac+c^2=3(2a^2-4ac+5c^2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2c\\ 2a^2-16ac+14c^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2c\\ (a-c)(a-7c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=a-2c\\ a-c=0\end{cases}\\ \begin{cases}b=a-2c\\ a-7c=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}b=a-2c\\ a-c=0\end{cases}$. Chọn bộ số $(a;b;c)=(1;-1;1)\Rightarrow(\mathrm{P}): x-y+z+2=0$.

Với $\begin{cases}b=a-2c\\ a-7c=0\end{cases}$. Chọn bộ số $(a;b;c)=(7;5;1)\Rightarrow(\mathrm{P}): 7x+5y+z+2=0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Lấy $B(1;1;2)\in d$ ta có $\overrightarrow{AB}=(0;0;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(-1;2;0)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(-1;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): -x+2y-1=0$

Vậy $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|-1+4-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng song song $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$, $d':\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng trên. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

d qua $A(1;1;2), vtcp\ \vec{u}=(2;1;2); d'$ qua $B(0;0;1), vtcp\ \vec{u'}=(2;1;2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-1;0;1)$

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d và d' nên đi qua $A(1;1;2), \overrightarrow{n_P}=(-1;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):-x+z-1=0$

Vậy $d(M,(P))=\frac{|-1+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}, d':\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng trên. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;-3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

d qua $A(0;0;-1), vtcp\ \vec{u}=(1;1;2); d'$ qua $B(0;1;1), vtcp\ \vec{u'}=(2;1;2)$

$d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}, d':\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

Ta có $\Rightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(0;2;-1)$

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d và d' nên đi qua $A(0;0;-1), \overrightarrow{n_P}=(0;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):2y-z-1=0$

Vậy $d(M,(P))=\frac{|4+3-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm O là gốc tọa độ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi chứa d. Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến (P) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{6}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên $(P), d$

Ta có tam giác HOK vuông tại $H \Rightarrow OH \le OK$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến (P) bằng $OK = d(O;d)$

Lấy $B(1;1;2) \in d$ ta có $\overrightarrow{OB} = (1;1;2)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{u_d}\right] = (-3;3;0)$

Vậy $\mathrm{d}(O,d) = \dfrac{\sqrt{3^2+3^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Biết rằng có hai điểm $M_1(a;0;0), M_2(b;0;0)$ thuộc trục hoành để khoảng cách từ điểm M đến (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Tính $a+b$

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Lấy $B(1;1;2) \in d$ ta có $\overrightarrow{AB} = (0;0;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}\right] = (-1;2;0)$

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}\right] = (-1;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): -x+2y-1=0$

Gọi $M(x;0;0)$

$\mathrm{d}(M,(P)) = \dfrac{|-x-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow |x+1| = 2 \Rightarrow x = 1; x = -3$.

Vậy $a+b=-2$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa đường thẳng d. Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Từ phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$, ta thấy đường thẳng d đi qua điểm $B(-1;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)$.

Suy ra, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ nhận $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=(-2;2;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $x-y-z+4=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(-2;1;0)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\dfrac{|-2-1+4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-1;-2)$ và chứa trục Oz. Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;-1;-2)$ nhận $\vec{n}=\left[\vec{k},\overrightarrow{OA}\right]=(1;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;1;4)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\dfrac{|2+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến (P) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{19\sqrt{2}}{10}$. **C.** $\dfrac{19\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(Q):x+y+3z=0$, $(R):2x-y+z=0$ lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P):4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$ $\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\dfrac{|-4+10-3-22|}{\sqrt{16+25+9}}=\dfrac{19\sqrt{2}}{10}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox. Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q):x+2y+2z-1=0$.

A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$. **B.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{195}}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;2;1)$ và mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(1;2;2)$.

Vì (P) là mặt phẳng chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox nên có có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0;1;-2)$.

Suy ra góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q):

$$\cos((P),(Q))=\frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\cdot\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}=\frac{|2-4|}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) bằng:

A. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Do $(P)\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_{\Delta}}=(3;-2;1)$

(P) qua $M(3;-1;1)$ nên phương trình (P) là:

$3(x-3)-2(y+1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Khoảng cách từ điểm $A(2;1;4)$ đến (P) là: $d(M,(P))=\frac{|6-2+4-12|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, điểm $B(2;-1;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A,B và song song với d. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{6}{\sqrt{29}}$. **D.** $\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Lời giải

ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$.

Do (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;1;2),B(2;-1;0)$ và song song với d

Suy ra mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(2;-3;4)$.

Vậy $(P):2x-3y+4z-7=0$.

Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến (P) bằng: $\frac{|2.3-3.1+4.(-2)-7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{12}{\sqrt{29}}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và đường thẳng $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2. Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Ta có d_1 đi qua $M_1(1;0;2)$ và có vtcp $\vec{u}_1(2;1;2)$; d_2 đi qua $M_2(0;2;-1)$ và có vtcp $\vec{u}_2(1;1;2)$

Vì (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với d_2 nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u}_1;\vec{u_2}\right]=(0;-2;1)$.

Do (P) chứa d_1 nên điểm $M_1\in(P)$. Khi đó phương trình $(P):-2y+z-2=0$.

Vì d_2 song song với (P) nên $d\left(d_2,(P)\right)=d\left(M_2,(P)\right)=\frac{|-4-1-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(Q):x-3y+4z-1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (Q). Tính khoảng cách từ điểm $A(0;1;2)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{6}{\sqrt{185}}$. **B.** $\frac{10}{\sqrt{185}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{185}}$. **D.** $\frac{16}{\sqrt{185}}$.

Lời giải

Ta có d đi qua $M(1;0;2)$ và có vtcp $\vec{u}(2;1;2)$; và (Q) có vtpt $\vec{n}_{(Q)}=(1;-3;4)$

Vì (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (Q) nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u};\vec{n}_{(Q)}\right]=(10;-6;-7)$.

Do (P) chứa d nên điểm $M\in(P)$. Khi đó phương trình $(P):10x-6y-7z+4=0$.

Khi đó $d\left(A,(P)\right)=\frac{|-6-14+4|}{\sqrt{100+36+49}}=\frac{16}{\sqrt{185}}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(0;-1;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết khoảng cách giữa d và (P) bằng $\sqrt{2}$ và (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $x-y-1=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x-z-1=0$. **D.** $x-z-3=0$.

Lời giải

Ta có d đi qua $M(2;1;1)$ và có vtcp $\vec{u}(2;1;2)$

Vì (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng AB và đường thẳng d nên vtpt $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]=(-7;0;7)$. Chọn $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$.

Phương trình $(P): x-z+D=0$ (vì (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ dương nên $D<0$).

Vì d song song với (P) nên $d\left(d,(P)\right)=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|1+D|}{\sqrt{2}}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{|1+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|1+D|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-3\end{array}\right.\Rightarrow D=-3$.

Vậy phương trình $(P): x-z-3=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;6;4)$, Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua A,B và song song với đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(16;8;-4)=4(4;2;-1)$.

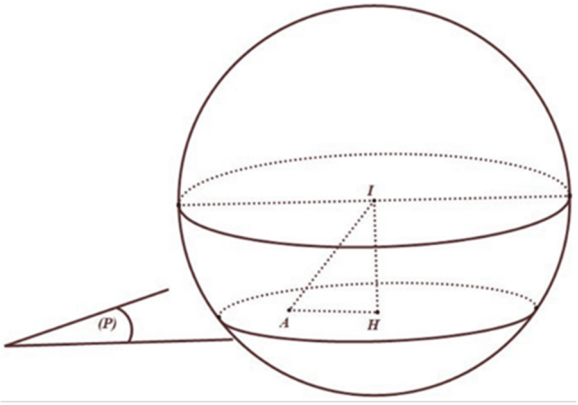
Mặt phẳng (α) có phương trình là $4(x-1)+2(y+2)-(z+3)=0\Leftrightarrow 4x+2y-z-3=0$.

Khi đó $d\left(O,(\alpha)\right)=\dfrac{|-3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$, điểm $A(1;0;2)$. Gọi mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(2;-1;4)$ đến (P) là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** 6.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=4$.

Ta có $IA=3<R\Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.

Ta luôn có $IA\geq IH\Rightarrow\sqrt{R^2-IH^2}\geq\sqrt{R^2-IA^2}\Rightarrow r\geq\sqrt{R^2-IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2}\Leftrightarrow H\equiv A$.

Khi đó $IA\perp(P)\Rightarrow$mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}=(2;-2;1)$ làm một VTPT.

$\Rightarrow$phương trình mặt phẳng (P): $2(x-1)-2y+(z-2)=0\Leftrightarrow 2x-2y+z-4=0$.

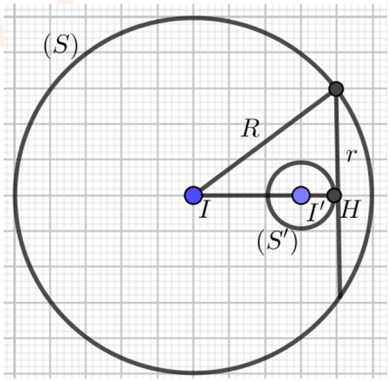
Vậy khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là $d(M,(P))=\dfrac{|4+2+4-4|}{3}=2$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=36$ và $(S'):(x+1)^2+y^2+z^2=4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2;-1;3)$ đến (P) bằng

A. $\dfrac{19}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{7}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải

Lờigiải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=6$, mặt cầu (S') có tâm $I'(-1;0;0)$, bán kính $R'=2$

Vì $I'I=3<R-R'=4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc $(S')\Rightarrow d\left(I',(P)\right)=R'=2$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$ nên $d\left(I,(P)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=5$.

Nhận thấy $d\left(I,(P)\right)-d\left(I',(P)\right)=I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S). Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H, nhận $\overrightarrow{II'}=(-2;1;-2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{5}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=-\frac{7}{3}\\ y_H=\frac{2}{3}\\ z_H=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{7}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $-2\left(x+\frac{7}{3}\right)+\left(y-\frac{2}{3}\right)-2\left(z+\frac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x-y+2z+8=0$.

Khoảng cách từ M đến (P) là $d\left(M,(P)\right)=\frac{19}{3}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. Gọi mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất. Tính khoảng cách từ $M(2;-3;4)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{7}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{\sqrt{42}}{6}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{42}}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A đến d. Khi đó $H(2+t;-1-2t;1+3t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1+t;-2t;-1+3t)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow -1+t+4t-3+9t=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{7}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{4}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH\perp(\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(5;4;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α): $5(x-2)+4(y+1)+(z-1)=0\Leftrightarrow 5x+4y+z-7=0$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là $d(M,(P))=\dfrac{5}{\sqrt{42}}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) chứa $\Delta_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-3+2t\\z=1-t\end{cases}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{7\sqrt{93}}{31}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{93}}{3}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{93}}{13}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{39}}{31}$.

Lời giải

Nhận xét: hai đường thẳng đã cho cắt nhau

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1;-3;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(2;2;3)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_1(1;-3;1)$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(1;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_1(1;-3;1)$ và nhận vectơ $\vec{n}=\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=(-8;5;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M_1(1;-3;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-8;5;2)$ là

$-8(x-1)+5(y+3)+2(z-1)=0\Leftrightarrow 8x-5y-2z-21=0$.

Vậy $d(O,(\alpha))=\dfrac{|-21|}{\sqrt{8^2+(-5)^2+(-2)^2}}=\dfrac{7\sqrt{93}}{31}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{8\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0$, $c>0$).

Theo đề: $\dfrac{OA}{1}=\dfrac{OB}{2}=\dfrac{OC}{4}\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{b}{2}\\c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b}=1\Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Vậy $d(O,(\alpha))=\frac{|-8|}{\sqrt{4^2+(2)^2+(1)^2}}=\frac{8\sqrt{21}}{21}$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;2)$ và chứa đường thẳng $(\Delta):\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-m}$. Giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây sao cho khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

+) (Δ) đi qua $B(2;1;1)$ và có vtcp $\vec{u}(2;2;-m)$.

+) $\overrightarrow{AB}(2;0;-1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(2;2m-2;4)=2(1;m-1;2)$

+) Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{n}(1;m-1;2)$ làm vtpt nên có phương trình:

$x+(m-1)y+2z-3-m=0$

+) $d(M;(P))=\frac{|9-2m|}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

+) Đặt $f(m)=\frac{|9-2m|}{\sqrt{m^2-2m+6}}$

$\Rightarrow f'(m)=\frac{14m^2-57m-27}{|9-2m|\left(\sqrt{m^2-2m+6}\right)^3}$, với $m\neq\frac{9}{2}$, $f'(m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{9}{2}\\ m=\frac{-3}{7}\end{array}\right.$

+) Bảng biến thiên

m	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(m)$	$-\infty$	↗	$\frac{\sqrt{345}}{5}$	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy $\max f(m)=\frac{\sqrt{345}}{5}$ tại $m=\frac{-3}{7}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$; $B(11;15;4)$; $C(3;9;-2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-4+3t\\y=-3+2t\\z=-2+2t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $S=MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q):2x+y+2z-3=0$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $E(-4;-3;-2)$ và có một vector chỉ phương $\vec{u}=(3;2;2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=(-3;-4;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\vec{u}\right]=\left(\begin{vmatrix}-4&-3\\2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-3\\2&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-4\\3&2\end{vmatrix}\right)=(-2;-3;6)$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A nên có một vector pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-6)$.

$\Rightarrow$Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x+1)+3(y-1)-6(y-1)=0$ hay $2x+3y-6z+5=0$.

Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow I(7;12;1)$.

Ta có: $S=MB^2+MC^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=2IM^2+IB^2+IC^2\geq 2\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2+IB^2+IC^2=const$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Khi đó đường thẳng IM đi qua điểm $I(7;12;1)$ và có một vector chỉ phương $\vec{n}=(2;3;-6)$.

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng IM là: $\begin{cases}x=7+2t_1\\y=12+3t_1\\z=1-6t_1\end{cases}$.

Do $M=IM\cap(P)$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x=7+2t_1\\y=12+3t_1\\z=1-6t_1\\2x+3y-6z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-1\\x=5\\y=9\\z=7\end{cases}$

$\Rightarrow M(5;9;7)$.

Vậy $d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{|2.5+9+2.7-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=10$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=-8+4t\\z=-3+3t\end{cases}$ và $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-3}{-3}$. Gọi

(P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và Δ. Khoảng cách từ điểm $M(0;2;1)$ đến (P) bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{217}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{271}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{217}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{271}}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;-8;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;4;3)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $B(-1;4;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-4;-3)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;12;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]=(12;-3;8)$

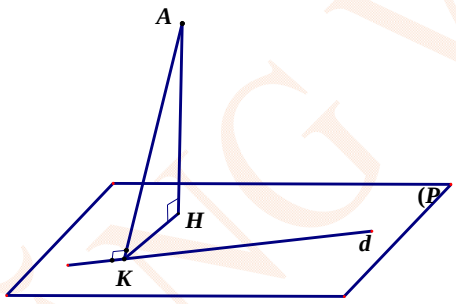
Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;-8;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(12;-3;8)$ có phương trình $12x-3y+8z=0$

Vậy $d\left(M;(P)\right)=\frac{|12.0-3.2+8.1|}{\sqrt{12^2+3^2+8^2}}=\frac{2}{\sqrt{217}}$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $A(2;-2;4)$. **B.** $D(2;2;4)$. **C.** $B(2;2;-4)$. **D.** $C(-2;2;4)$.

Lời giải



Gọi K là hình chiếu của A trên đường thẳng d.

Ta có $K\in d\Rightarrow K(-2+3t;-2+2t;t)\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(3t-1;2t-4;t-3)$.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(3;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow3(3t-1)+2(2t-4)+1(t-3)=0\Leftrightarrow t=1$

Với $t=1$, ta có $K(1;0;1)$ và $\overrightarrow{AK}=(2;-2;-2);AK=2\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Ta có $AH\le AK\Rightarrow d\left(A,(P)\right)\le2\sqrt{3}\Rightarrow\max d\left(A,(P)\right)=2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$. Khi đó $AK \perp (P)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $K(1;0;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{AK} = (2;-2;-2)$.

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-1)-2y-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-z=0$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy có điểm $A(2;-2;4)$ thỏa mãn.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (α) cắt Oz tại $C(0;0;c)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{c}\right)$

Mặt phẳng (Oyz) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1;0;0)$

Mặt phẳng (α) tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc bằng 30^0 nên ta có

$$\cos\left(30^0\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{5c^2+4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{3}$$

Với $c = 2\sqrt{3} \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z-2\sqrt{3}=0$

Với $c = -2\sqrt{3} \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-z-2\sqrt{3}=0$

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là: $d\left(O;(\alpha)\right) = \frac{\left|-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12+3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Biết rằng $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d có hoành độ âm đồng thời $AM = \sqrt{6}$. Tính $S = 2a+3b+c$.

A. $S=-10$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=12$.

Lời giải

Ta có $A \in d \Rightarrow A(2t+1;t;-t-2)$.

Lại có $A \in (P) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A(-1;-1;-1)$.

Với $M \in d \Rightarrow M(2m+1;m;-m-2)$

Theo đề $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow (2m+2)^2 + (m+1)^2 + (-m-1)^2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right.$.

$m=-2 \Rightarrow M(-3;-2;0)$ (chọn).

$m=0 \Rightarrow M(1;0;-2)$ (loại).

$S = 2a+3b+c = 2.(-3)+3.(-2)+0 = -12$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa trục Oy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OM} = (2;-1;1)$ và và vecto đơn vị $\vec{j} = (0;1;0)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{OM}, \vec{j}\right] = (-1;0;2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm M và chứa trục Oy nên có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1;0;2)$.

Suy ra phương trình của (α) là: $-x+2z=0$.

Vậy $d(A,(\alpha)) = \frac{|-1+2.3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$; $d': \begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$ và điểm $M(5;0;-1)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và d'. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\frac{27\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\frac{23\sqrt{2}}{10}$.

Lời giải

Ta thấy d và d' là hai đường thẳng song song và $M_1(1;-2;0) \in d$, $M_2(3;-1;1) \in d'$, $\vec{u} = (1;-2;2)$ là một véctơ chỉ phương của chúng.

Có $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}\right] = (4;-3;-5)$.

Mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng d và d' nên có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4;-3;-5)$, do đó nó có phương trình: $4x-3y-5z-10=0$.

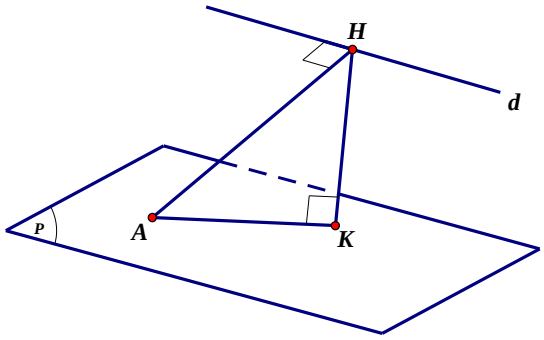
Vậy $d(M,(\alpha))=\dfrac{|4.5-3.0+5-10|}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).

A. $x+2y-3z-10=0$. **B.** $x-2y+3z-10=0$.

C. $x-2y+3z+10=0$. **D.** $x-2y-3z-10=0$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do d // (P) nên ta có $d(d,(P))=d(H,(P))=HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK\le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH Khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH}=(-1;2;3)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x-2y-3z-10=0$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 và M có hoành độ âm. Gía trị của biểu thức $P=a+b+c$ bằng

A. -9. **B.** -3. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=-2+3t\end{cases}$

Vì $M\in d$ nên tọa độ của M có dạng $M(t;-1+2t;-2+3t)$.

Vì khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng 2 nên

$$\frac{\left|t+2\left(-1+2t\right)-2\left(-2+3t\right)+3\right|}{\sqrt{1+2^2+\left(-2\right)^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|t-2+4t+4-6t+3\right|}{\sqrt{1+4+4}}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|5-t\right|}{3}=2\Leftrightarrow \left|5-t\right|=6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-t=6\\5-t=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\Rightarrow M\left(-1;-3;-5\right)\\t=11\Rightarrow M\left(11;21;31\right)\end{array}\right.$$

Vì M có hoành độ âm nên $M\left(-1;-3;-5\right)$. Vậy $P=a+b+c=\left(-1\right)+\left(-3\right)+\left(-5\right)=-9.$

Câu 46 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(\alpha\right):x-2y-z+1=0$ và $\left(\beta\right):2x+2y-3z-4=0$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua điểm $M\left(1;-1;0\right)$ và chứa đường thẳng Δ. Tính khoảng cách từ điểm $N\left(1;2;3\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$.

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải

$\left(a\right)$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left(1;-2;-1\right)$, $\left(\beta\right)$ có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=\left(2;2;-3\right)$.

Ta có: Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và $\left(\beta\right)$ nên Δ có 1 VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]=\left(8;1;6\right)$.

Gọi $A\left(x_A;y_A;0\right)$ là 1 điểm thuộc Δ, ta có: $\left\{\begin{array}{l}x_A-2y_A+1=0\\2x_A+2y_A-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_A=1\\y_A=1\end{array}\right.\Rightarrow A\left(1;1;0\right)$.

Vì $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ nên $\left(P\right)$ nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(8;1;6\right)$ và $\overrightarrow{AM}=\left(0;-2;0\right)$ là 2 VTCP, suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AM}\right]=\left(12;0;-16\right)=4\left(3;0;-4\right)$.

Phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua $M\left(1;-1;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left(3;0;-4\right)$ là:

$$\left(P\right):3x-4z-3=0\Rightarrow d\left(N;\left(P\right)\right)=\frac{\left|3.1-4.3-3\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{12}{5}.$$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-2;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\left\{\begin{array}{l}x=2+3t\\y=-1+t\\z=-1-t\end{array}\right.$.

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d. Khoảng cách từ $M(-1;0;4)$ đến $\left(P\right)$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{30}}{5}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{30}}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{30}}$.

Lời giải

Lấy $B(2;-1;-1)\in d$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;-2)$, một VTCP của d là $\vec{u}(3;1;-1)$. Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(1;-5;-2)$. (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;1)$ và chứa d nên một VTPT của (P) là: $\vec{n}=(1;-5;-2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là: $1(x-1)-5(y+2)-2(z-1)=0\Leftrightarrow x-5y-2z-9=0$.

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{\left|-1-5.0-2.4-9\right|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+(-2)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách từ điểm $M(0;4;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\frac{19\sqrt{26}}{26}$. **D.** $\frac{35\sqrt{26}}{26}$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(3;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(1;1;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(3;2;1)$.

(P) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1,d_2\Rightarrow(P)$ đi qua điểm $A(3;0;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u_1};\vec{u_2}\right]=(3;-4;-1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:

$3(x-3)-4(y-0)-(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-4y-z-7=0$.

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{\left|0-16-3-7\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\sqrt{26}.$$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ và $d':\frac{x}{3}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+18}{4}$. (P) là mặt phẳng chứa d và d'. Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P) bằng

A. $\frac{99}{16250}$. **B.** $\frac{99}{25\sqrt{25}}$. **C.** $\frac{99}{25\sqrt{26}}$. **D.** $\frac{8}{625}$.

Lời giải

d có VTCP $\vec{u}=(3;-1;4)$ và đi qua $A(-7;5;9)$,

d' có VTCP $\vec{u'}=(3;-1;4)$ và đi qua $B(0;-4;-18)$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{AB}=(7;-9;-27)$, $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{u'}$ và $[\vec{u};\overrightarrow{AB}]\neq\vec{0}$

Suy ra d song song d'. (P) là mặt phẳng chứa d và d' nên (P) đi qua $A(-7;5;9)$ và có VTPT $\vec{n}=\left[\vec{u};\overrightarrow{AB}\right]=(63;109;-20)$. Do đó ta có phương trình mặt phẳng (P):

$63(x+7)+109(y-5)-20(z-9)=0\Leftrightarrow 63x+109y-20z+76=0$.

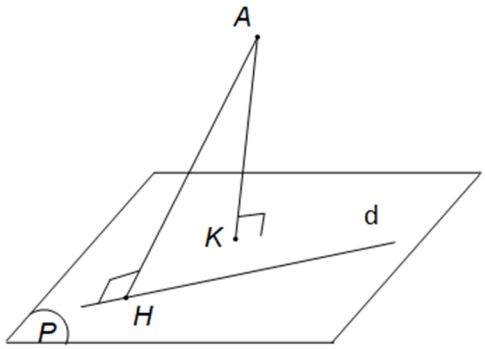
Khoảng cách từ $M(1;0;2)$ đến (P): $d(M;(P))=\dfrac{|63.1+109.0-20.2+76|}{\sqrt{63^2+109^2+(-20)^2}}=\dfrac{99}{25\sqrt{26}}$

Câu 53. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;5;-3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{25\sqrt{18}}{18}$. **B.** $25\sqrt{18}$. **C.** $\dfrac{21\sqrt{18}}{18}$. **D.** $\dfrac{25}{18}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).



Ta có $d(A,(P))=AK\le AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(A,(P))$ là AH

$\Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất khi $K\equiv H\Leftrightarrow AH\perp(P)$.

Xác định điểm H : Gọi (α) là mp qua A và vuông góc với d

$\Rightarrow H=d\cap(\alpha)$, dễ thấy (α): $2x+y+2z-15=0$

$\Rightarrow H(3;1;4)$

Xác định (P) :

(P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy $d(M,(P))=\dfrac{25\sqrt{18}}{18}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi $A(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox sao cho A cách đều d và (P). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\le -3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a>2$. **D.** $a>5$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(1;0;-2)$ và có một VTCP là $\vec{u}_d=(1;2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(a-1;0;2)$, suy ra $\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{MA}\right]=(4;2a-4;-2a+2)$.

Theo đề bài ta có:

$$d(A,d)=d(A,(P))\Leftrightarrow\frac{\left|\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{MA}\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}=\frac{|2a|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{16+(2a-4)^2+(-2a+2)^2}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|2a|}{\sqrt{4+1+4}}\Leftrightarrow a=3.$$

Vậy $A(3;0;0)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47. **(Đề TK BGD 2023)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$?

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$

.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: $(1)\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-4)^2\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 8$, mà $x>0$ nên $0<x\le 8$.

Với $x=1,x=7\Rightarrow y=\{\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x=2,x=6\Rightarrow y=\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=3,x=5\Rightarrow y=\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=4\Rightarrow y=\{\pm 4;\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 47 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_2 x+\log_3\left(x^2+y^2+16x\right)$
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$\log_3\left(2x^2+2y^2+5x\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_5\left(20x^2+20y^2+10x\right)$
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$\log_2\left(x^2+y^2\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_2(x+y)+\log_5\left(x^2+y^2+96x+96y\right)$?
A. 3. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 10.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên dương $a,(a\le 2021)$ sao cho tồn tại số thực x thoả mãn $x(\ln a+e^x)\le e^x\left(1+\ln\left(xlna\right)\right)$?
A. 2006. **B.** 2019. **C.** 2005. **D.** 2007.

Câu 7. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 8. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{2023}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+3y+7}{x+y+5}$.
A. $\frac{33}{19}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{23}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 9. Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$?
A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017×2020.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)+2\le x+\log_3(x+1)^3$?
A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 3776.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$\log_2\left(1-\frac{6y+8}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2}-2\right)-\frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)}2}$
A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $e^{x^2+y^2}\le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$?
A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn
$\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\ge\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1$.

A. 10. **B.** 20. **C.** 27. **D.** 28

Câu 14. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $0<y<x<1$. Biểu thức $P=\log_x \frac{4(3y-1)}{9}+8\log_{\frac{y}{x}}^2 x-1$ đạt giá trị nhỏ nhất, thì $3x^3+9y^2$ bằng

A. 6. **B.** $3\sqrt[3]{2}$. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 15. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\ln\frac{x^2+y^2+11}{8x+6y+2}+x^2+y^2-8x-6y+9\le 0$?

A. 45. **B.** 47 **C.** 48. **D.** 49.

Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)+2\le x+\log_3(x+1)^3$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 3776.

Câu 17. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\le m.\log_{5-\sqrt{4-x}}3$ có nghiệm.

A. $m>2\sqrt{3}$. **B.** $m\ge 2\sqrt{3}$. **C.** $m\ge 12\log_3 5$. **D.** $2\le m\le 12\log_3 5$.

Câu 19. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log\frac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x\ (1)$. Biết $y\le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. **B.** 1501300. **C.** 1501400. **D.** 1501500.

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** vô số.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $y\le 2023$ và $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2$?

A. 10. **B.** 2023. **C.** 3776. **D.** 3780.

Câu 23. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa

$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$

A. 2021. **B.** 2003. **C.** 4042. **D.** 4024.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x là số nguyên tố; $y\le 4320$ và $2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2(y+1)^2$?

A. 6340. **B.** 2024. **C.** 7286. **D.** 8022.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+y^2+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)$?

A. 29. **B.** 28. **C.** 48. **D.** 49.

Câu 26. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+y+3x\right)+\log_2\left(x^2+y\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y+18x\right)$?

A. 42. **B.** 36. **C.** 35. **D.** 41.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le 16$ và

$\log_3\left(x^2+y+x\right)+\log_2\left(x^2+y\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y+24x\right)$?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 13.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(4x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+6x\right)$?

A. 12. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)$?

A. 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 30.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\frac{1}{2}\left(1+\log_2(1-xy)\right)$ và $2\left(x^3+y^3\right)-3xy\ge\frac{13}{2}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\frac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2023$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2023. **B.** 5. **C.** 2022. **D.** 4.

Câu 33. Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_2 y+6\log_2 x-\log_2^2 x+1\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2 x^2-4yx^6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 18. **B.** 36. **C.** 38. **D.** 19.

Câu 34. có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 4046.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-2023;2023)$ để phương trình $e^x+e^{x+y}=\ln(x+1)-\ln(x+y+1)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2023. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 36. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thuộc đoạn $[1;100]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x+\log_2 x=y+2^y$?

A. 100. **B.** 99. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 37. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20\le x\le 20, 1\le y\le 20$ $3^{x+3}+5x+10=3^{y^2+1}+5y^2$?

A. 13. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 20.

Câu 38. Gọi S là tập hợp điểm $M(x;y)$ với x,y là các số nguyên thỏa mãn $8<x<3000$ và $\log_3(x-2)+3x=y+9\left(3^{y+2}+1\right)$. Có bao nhiêu tứ giác lập được từ các điểm thuộc tập S ?

A. 15. **B.** 6. **C.** 3091. **D.** 360.

Câu 40. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là:

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x=y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x+y>0; -4\le x\le 4$ và $\log_3\frac{(x+2y)}{4}+x^2+2y^2+3xy-4x-4y\le 0$?

A. 11. **B.** 10 **C.** 12. **D.** 13.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|}\le\log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 44. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 45. Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

A. 2017. **B.** 2. **C.** 2020. **D.** 4034.

Câu 46. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2-x+1}}$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa $x\in[0;3]$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^x+\log_3\left(3y^3\right)$?

A. 819. **B.** 817. **C.** 816. **D.** 88.

Câu 48. Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x^2\ln\frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1}=x^2+1-\sqrt{5x^4+x^2}$, biết $x_0^2=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$, với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=a-b+2c$.

A. $S=26$. **B.** $S=34$. **C.** $S=-8$. **D.** $S=0$.

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên dương y trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình $(10x)^{y+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$ đúng với mọi $x \in (1;100)$?

A. 2022. **B.** 2016. **C.** 2020. **D.** 2018.

Câu 50. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để có đúng 3 số thực x thỏa mãn $x+\sqrt{x^2+1}-e^{x^3-3x^2+m}=0$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 51. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64) \geq \log_4(x-y)$.

A. 301. **B.** 302. **C.** 602. **D.** 2.

Câu 52. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(2^x+3\right)+\log_3\left(4^x+2\right) \leq 3$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để bất phương trình $\log_2\sqrt{x^2-4x+a}+4\sqrt{\log_4\left(x^2-4x+a\right)} \leq 12$ có nghiệm với $x \in [0;4]$.

A. 256. **B.** 253. **C.** 255. **D.** 252.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0\Leftrightarrow x+y>0.$

$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t,\ t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t.\ln 3}+1>0,\forall t\in(0;+\infty).$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$

$\Leftrightarrow x^2+(y-3)x+y^2-3y+2=0.$

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(y-3)^2-4(y^2-3y+2)\ge 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}.$

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2\}$.

+ Với $y=0$, ta được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

+ Với $y=1$, ta được $x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.($x=-2$ loại)

+ Với $y=2$, ta được $x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy có 5 cặp số thỏa mãn đề bài.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$

$\Leftrightarrow 3^x+3x-6=9y+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-2=3y+\log_3 y$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3y+\log_3(3y)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}+x-1=3^{\log_3(3y)}+\log_3(3y)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$. Ta có: $f'(t)=1+3^t.\ln 3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x-1)=f(\log_3(3y))\Leftrightarrow x-1=\log_3(3y)\Leftrightarrow x-2=\log_3 y\Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Vì $y\in(0;2020)$ nên $3^{x-2}<2020\Leftrightarrow x-2<\log_3 2020\Leftrightarrow x<2+\log_3 2020$

Do $x;y\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị nguyên của x cho ta 1 giá trị nguyên của y.

Vậy có 7 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_2(x^2+y^2+2x)+\log_3(x^2+y^2)\le\log_2 x+\log_3(x^2+y^2+16x)$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y^2>0\\ x>0\end{cases}$.

Ta có: $\log_2(x^2+y^2+2x)+\log_3(x^2+y^2)\le\log_2 x+\log_3(x^2+y^2+16x)$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+y^2+2x)-\log_2 x+\log_3(x^2+y^2)-\log_3(x^2+y^2+16x)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2+2x}{x}\right)+\log_3\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+16x}\right)\le 0$ (1)

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}+2\right)+\log_3\left(\frac{\frac{x^2+y^2}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x}+16}\right)\le 0$ (1)

Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{x}\quad (t>0)$

Bất phương trình (1) trở thành $\log_2(t+2)+\log_3\left(\frac{t}{t+16}\right)\le 0$

Gọi $f(t)=\log_2(t+2)+\log_3\left(\frac{t}{t+16}\right)$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{(t+2)\ln 2}+\frac{16}{t(t+16)\ln 3}>0\ \ \forall t>0$

Do đó hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f(2)=0$ nên $\log_2(t+2)+\log_3\left(\frac{t}{t+16}\right)\le 0 \Leftrightarrow t\le 2$

Suy ra $\frac{x^2+y^2}{x}\le 2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1.$

Ta có các trường hợp sau xảy ra đối với cặp số nguyên $(x;y)$:

TH1: $x=1\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow y\in\{-1;0;1\}$

TH2: $x=2\Rightarrow y^2\le 0\Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán là $(1;-1),(1;0),(1;1),(2;0)$.

Câu 4. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3(2x^2+2y^2+5x)+\log_5(x^2+y^2)\le \log_3 x+\log_5(20x^2+20y^2+10x)$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ x>0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_3(2x^2+2y^2+5x)+\log_5(x^2+y^2)\le \log_3 x+\log_5(20x^2+20y^2+10x)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2+2y^2+5x)-\log_3 x+\log_5(x^2+y^2)-\log_5(20x^2+20y^2+10x)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x^2+2y^2+5x}{x}\right)+\log_5\left(\frac{x^2+y^2}{20x^2+20y^2+10x}\right)\le 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(2\frac{x^2+y^2}{x}+5\right)+\log_3\left(\frac{\frac{x^2+y^2}{x}}{20\frac{x^2+y^2}{x}+10}\right)\le 0 \quad (1)$

Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{x} \quad (t>0)$

Bất phương trình (1) trở thành $\log_3(2t+5)+\log_5\left(\frac{t}{20t+10}\right)\le 0$

Gọi $f(t)=\log_3(2t+5)+\log_5\left(\frac{t}{20t+10}\right)\le 0$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\frac{2}{(2t+5)\ln 2}+\frac{10}{t(20t+10)\ln 5}>0 \ \forall t>0$

Do đó hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $f(2)=0$ nên $\log_3(2t+5)+\log_5\left(\frac{t}{20t+10}\right)\le 0 \Leftrightarrow t\le 2$

Suy ra $\frac{x^2+y^2}{x} \le 2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$.

Ta có các trường hợp sau xảy ra đối với cặp số nguyên $(x;y)$:

TH1: $x=1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow y \in \{-1;0;1\}$

TH2: $x=2 \Rightarrow y^2 \le 0 \Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán là $(1;-1),(1;0),(1;1),(2;0)$.

Câu 5. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_2(x^2+y^2)+\log_5(x^2+y^2) \le \log_2(x+y)+\log_5(x^2+y^2+96x+96y)$?

A. 3. **B.** 26. **C.** 24. **D.** 10.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+y>0 \\ x,y \in Z \end{cases}$.

$bpt \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \le \log_5 \frac{x^2+y^2+96x+96y}{x^2+y^2}.(*)$

Đặt $t=\log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \Leftrightarrow x^2+y^2=(x+y)2^t$.

$bpt(*) \Leftrightarrow t \le \log_5 \frac{(x+y)2^t+96(x+y)}{(x+y)2^t} \Leftrightarrow t \le \log_5 \frac{2^t+96}{2^t} \Leftrightarrow 5^t \le \frac{2^t+96}{2^t}$

$\Leftrightarrow 10^t \le 2^t+96 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^t+96\left(\frac{1}{10}\right)^t \ge 1$.

Xét $f(u)=\left(\frac{1}{5}\right)^u+96\left(\frac{1}{10}\right)^u$; $f'(u)=\left(\frac{1}{5}\right)^u \ln\left(\frac{1}{5}\right)+96\left(\frac{1}{10}\right)^u \ln\left(\frac{1}{10}\right)<0 (\forall u>0)$

$\Leftrightarrow f(t) \ge f(2) \Leftrightarrow 0<t \le 2 \Leftrightarrow 0<\log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \le 2$

$\Leftrightarrow 1<\frac{x^2+y^2}{x+y} \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y<x^2+y^2 \ (\forall x \in D) \\ x^2+y^2 \le 4x+4y \end{cases} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8$

Đặt $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X+2 \\ y=Y+2 \end{cases}; (x;y;X;Y \in Z)$

Khi đó $\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8 \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+Y^2 \le 8 \\ X+Y>-4 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 8 \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+Y^2 \le 8 \\ X+Y>-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in \{-2;-1;-0;1;2\} \\ Y \in \{-2;-1;-0;1;2\} \end{cases}$

$\square$ $\begin{cases} X \in \{-2\} \\ Y \in \{-1;-0;1;2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0\} \\ y \in \{1;2;3;4\} \end{cases} \Rightarrow 4$ cặp số nguyên $(x;y)$.

$\square$ $\begin{cases} X \in \{-1;0;1;2\} \\ Y \in \{-2;-1;-0;1;2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{1;2;3;4\} \\ y \in \{0;1;2;3;4\} \end{cases} \Rightarrow 20$ cặp số nguyên $(x;y)$.

Vậy 24 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa điều kiện bài toán.

Câu 6. Có bao nhiêu số nguyên dương $a,(a \le 2021)$ sao cho tồn tại số thực x thoả mãn $x(\ln a + e^x) \le e^x\left(1+\ln\left(xlna\right)\right)$?

A. 2006. **B.** 2019. **C.** 2005. **D.** 2007.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ln a > 0 \\ a > 0 \end{cases} \xleftrightarrow{a\in\mathbb{N}^*} \begin{cases} a \ge 2 \\ x > 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \ln(\ln x \ln a) \Leftrightarrow x\ln a = e^t$.

Bất phương trình trở thành:

$e^t + xe^x \le e^x(1+t) \Leftrightarrow g(t) = e^t - e^x.t + xe^x - e^x \le 0$ (*)

Có $g'(t) = e^t - e^x = 0 \Leftrightarrow t = x$. Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		x		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(*) $\Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow la = \dfrac{e^x}{x} = h(x)$.

Có $h'(x) = \dfrac{e^x.x - e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\ln a \ge e \Leftrightarrow a \ge e^e \approx 15,15 \Rightarrow a \in \{16;...;2021\}$.

Câu 7. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)=\log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5[5(a+b)]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x)=\log_5 x+x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x.\ln 5}+1>0, \forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$f(4a+2b+5)=f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5=5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5$.

Mặt khác: $5^2=(a+3b)^2 \le (1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T=a^2+b^2 \ge \frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{2}; b=\frac{3}{2}$.

Câu 8. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2023}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3x+3y+7}{x+y+5}$.

A. $\frac{33}{19}$. **B.** 1. **C.** $\frac{10}{23}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có:

$\log_{2023}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy}=x(x-1)+y(y-1)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{2023}(x+y)-\log_{2023}(x^2+y^2+xy)=x^2-x+y^2-y+xy$

$\Leftrightarrow \log_{2023}(x+y)+(x+y)=\log_{2023}(x^2+y^2+xy)+(x^2+y^2+xy)$ (*)

Xét hàm số $f(u)=\log_{2023}u+u, \ (u>0) \Rightarrow f'(u)=\frac{1}{u.\ln 2023}+1>0, \forall u>0$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên ta có: (*) $\Leftrightarrow x+y=x^2+y^2+xy \Leftrightarrow x^2+y^2+xy-x-y=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-(x+y)=xy$

Ta có $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$

$\Rightarrow (x+y)^2-(x+y)\le \dfrac{(x+y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}(x+y)^2-(x+y)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x+y\le \dfrac{4}{3}$

Đặt $x+y=t\Rightarrow t\le \dfrac{4}{3}$.

Ta có: $P=\dfrac{3x+3y+7}{x+y+5}=\dfrac{3t+7}{t+5}=3-\dfrac{8}{t+5}\le 3-\dfrac{8}{\frac{4}{3}+5}=\dfrac{33}{19}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{33}{19}$ khi $\begin{cases}x=y\\ x+y=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{2}{3}$.

Câu 9. Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017×2020.

Lời giải

+ Điều kiện $\begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ \dfrac{2x+1}{x-3}>0, \dfrac{2y}{y+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020\\ x>3, y>0\end{cases}$.

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0$ (*).

+ Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-3)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+3(x+4)\log_3\dfrac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>3$ vì $-(x-3)<0,\ \log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0,\ 3(x+4)>0,\ \log_3\dfrac{2}{3}<0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+4)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

+ Với $y>2, x>3$ thì $VT(*)>0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3(9^y+2y)+2\le x+\log_3(x+1)^3$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 3776.

Lời giải

Ta có $3(9^y+2y)+2\le x+\log_3(x+1)^3\Leftrightarrow 3.9^y+6y+2\le x+3\log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1}+3(2y+1)\le (x+1)+3\log_3(x+1)$. (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t$ có $f'(t)=3^t.\ln 3+3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)=3^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(2y+1)\le f\left(\log_3(x+1)\right)\Leftrightarrow 2y+1\le\log_3(x+1)\Leftrightarrow 3^{2y+1}-1\le x$.

Vì $x\le 2023$ nên $3^{2y+1}-1\le 2023\Leftrightarrow y\le\dfrac{\log_3 2024-1}{2}\approx 2,96$.

Với giả thiết y nguyên dương suy ra $y\in\{1;2\}$.

Với $y=1$ có $26\le x\le 2023$ suy ra có 1998 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2$ có $242\le x\le 2023$ suy ra có 1782 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(1-\frac{6y+8}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2}-2\right)-\frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)}2}$$

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}0<x^2+y^2\ne 1\\ \dfrac{6y+8}{x^2+y^2}<1\\ \dfrac{157+12y}{x^2+y^2}>2\end{cases}$

$$\log_2\left(1-\frac{6y+8}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(x^2+y^2\right)\le\log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2}-2\right)-\frac{1}{\log_{\left(x^2+y^2\right)}2}$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(1-\frac{6y+8}{x^2+y^2}\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_5\left(\frac{157+12y}{x^2+y^2}-2\right)+\log_5\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+y^2-6y-8\right)\le\log_5\left(157-2x^2-2y^2+12y\right)$$

Đặt $t=x^2+y^2-6y$, điều kiện: $8<t<\dfrac{157}{2}$. Bất phương trình trên trở thành:

$\log_2(t-8)\le\log_5(157-2t)\Leftrightarrow\log_2(t-8)-\log_5(157-2t)\le 0$ (1).

Đặt $g(t)=\log_2(t-8)-\log_5(157-2t)$

$g'(t)=\dfrac{1}{(t-8)\ln 2}+\dfrac{2}{(157-2t)\ln 5}>0\ \forall t\in\left(8;\dfrac{157}{2}\right)$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\left(8;\dfrac{157}{2}\right)$.

Mà $g(t)\le g(16)$ (Do $g(16)=0$)

Suy ra: $8<t\le 16\Leftrightarrow 8<x^2+y^2-6y\le 16\Leftrightarrow 17<(x-3)^2+y^2\le 25$

Ta có: $y^2\le 25\Rightarrow -5\le y\le 5$.

+ Với $y=\pm 5\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3$ nên có 2 cặp.

+ Với $y=\pm 4 \Rightarrow 1<(x-3)^2 \le 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x-3\le 3 \\ -3\le x-3<-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4<x\le 6 \\ 0\le x<2 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{0;1;5;6\}$ nên có 8 cặp.

+ Với $y=\pm 3 \Rightarrow 8<(x-3)^2 \le 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2}<x-3\le 4 \\ -4\le x-3<-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2}+3<x\le 7 \\ -1\le x<3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-1;0;6;7\}$

nên có 8 cặp.

+ Với $y=\pm 2 \Rightarrow 13<(x-3)^2 \le 21$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên $(x-3)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$

suy ra có 4 cặp.

+ Với $y=\pm 1 \Rightarrow 16<(x-3)^2 \le 24$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên sẽ không tồn tại x thỏa mãn.

+ Với $y=0 \Rightarrow 17<(x-3)^2 \le 25$ mà $(x-3)^2$ là số chính phương nên nên $(x-3)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-2 \end{array}\right.$ suy ra có 2 cặp.

Vậy có 24 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $e^{x^2+y^2} \le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

$$e^{x^2+y^2} \le e^{2x+2y}\left[(x+y+1)(3-x-y)+2(xy-1)\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2-2(x+y)} \le 2(x+y)-(x^2+y^2)+1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2-2(x+y)}+\left[x^2+y^2-2(x+y)\right]\le 1$$

Đặt $t=x^2+y^2-2(x+y)$ $(t\ge -2)$, bất phương trình trên trở thành $e^t+t\le 1$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ có $f'(t)=e^t+1>0, \forall t\ge -2$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Do đó $f(t)\le 1=f(0) \Leftrightarrow t\le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2(x+y)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 2$.

Trường hợp 1: $(x-1)^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Trường hợp 2: $(x-1)^2+(y-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=\pm 1 \\ y-1=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=2 \\ x=1;y=0 \\ x=2;y=1 \\ x=0;y=1 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3: $(x-1)^2+(y-1)^2=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\pm 1 \\ y-1=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2;y=2 \\ x=2;y=0 \\ x=0;y=2 \\ x=0;y=0 \end{array}\right.$.

Vậy có 9 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn

$\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\ge\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1$.

A. 10. **B.** 20. **C.** 27. **D.** 28

Lời giải

Điều kiện $x>0$

Ta có $\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)\ge\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_5 2x+1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)-\left[\log_5\left(x^2+y^2+4x\right)-\log_5 2x\right]\ge 1$

$\Leftrightarrow\log_2\dfrac{x^2+y^2+18x}{x^2+y^2}-\log_5\dfrac{x^2+y^2+4x}{2x}\ge 1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(1+\dfrac{18x}{x^2+y^2}\right)-\log_5\left(2+\dfrac{x^2+y^2}{2x}\right)\ge 1$

Đặt $\dfrac{x^2+y^2}{2x}=t>0$, bất phương trình trở thành $\log_2\left(1+\dfrac{9}{t}\right)-\log_5\left(2+t\right)\ge 1$ (1).

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2\left(1+\dfrac{9}{t}\right)-\log_5\left(2+t\right)$ có $f'\left(t\right)=-\dfrac{9}{\left(t^2+9t\right)\ln 2}-\dfrac{1}{\left(2+t\right)\ln 5}<0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0\,;\,+\infty\right)$ (2).

Mà $f\left(3\right)=1$ nên từ (1) và (2) ta có $f\left(t\right)\ge f\left(3\right)\Leftrightarrow t\le 3$.

Từ đó ta có $\dfrac{x^2+y^2}{2x}\le 3\Leftrightarrow x^2+y^2-6x\le 0\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+y^2\le 9$.

Suy ra $\left(x-3\right)^2\le 9\Leftrightarrow -3\le x-3\le 3\Leftrightarrow 0\le x\le 6$. Mà $x>0$ nên $0<x\le 6$; $x,y\in\mathbb{Z}$:

Nếu $x=1$ hoặc $x=5$ thì $y\in\left\{\pm1;\ \pm2;\ 0\right\}$: trường hợp này có 10 cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn.

Nếu $x=2$ hoặc $x=4$ thì $y\in\left\{\pm1;\ \pm2;\ 0\right\}$: trường hợp này có 10 cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn.

Nếu $x=3$ thì $y\in\left\{\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ 0\right\}$: trường hợp này có 7 cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn.

Nếu $x=6$ thì $y=0$: trường hợp này có 1 cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 28 cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Câu 14. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $0<y<x<1$. Biểu thức $P=\log_x\dfrac{4\left(3y-1\right)}{9}+8\log_{\frac{y}{x}}^2 x-1$ đạt giá trị nhỏ nhất, thì $3x^3+9y^2$ bằng

A. 6. **B.** $3\sqrt[3]{2}$. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\left(3y-2\right)^2\ge 0\Leftrightarrow 9y^2-12y+4\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{4\left(3y-1\right)}{9}\le y^2$.

Suy ra $P\ge\log_x y^2+8\log_{\frac{y}{x}}^2 x-1\Leftrightarrow P\ge 2\log_x\dfrac{y}{x}+8\log_{\frac{y}{x}}^2 x+1$

$\Leftrightarrow P \ge 3\sqrt[3]{\log_x \frac{y}{x}.\log_x \frac{y}{x}.8\log^2_{\frac{y}{x}} x}+1=7$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}3y=2\\ \log_x \frac{y}{x}=8\log^2_{\frac{y}{x}} x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{2}{3}(1)\\ \log_x \frac{2}{3x}=8\log^2_{\frac{2}{3x}} x(2)\end{cases}$

Giải (2): $\log_x \frac{2}{3x}=8\log^2_{\frac{2}{3x}} x \Leftrightarrow 8\log^2_{\frac{2}{3x}} x=\frac{1}{\log_{\frac{2}{3x}} x} \Leftrightarrow 8\log^3_{\frac{2}{3x}} x=1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3x}} x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_x \frac{2}{3x}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_x \frac{2}{3}-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x \frac{2}{3}=3 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Vậy $3x^3+9y^2=3\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3+9\left(\frac{2}{3}\right)^2=6$.

Câu 15. Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $\ln\frac{x^2+y^2+11}{8x+6y+2}+x^2+y^2-8x-6y+9\le 0$?

A. 45. **B.** 47 **C.** 48. **D.** 49.

Lời giải

Ta có

$\ln\frac{x^2+y^2+11}{8x+6y+2}+x^2+y^2-8x-6y+9\le 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+y^2+11\right)-\ln\left(8x+6y+2\right)+x^2+y^2-8x-6y+9\le 0$

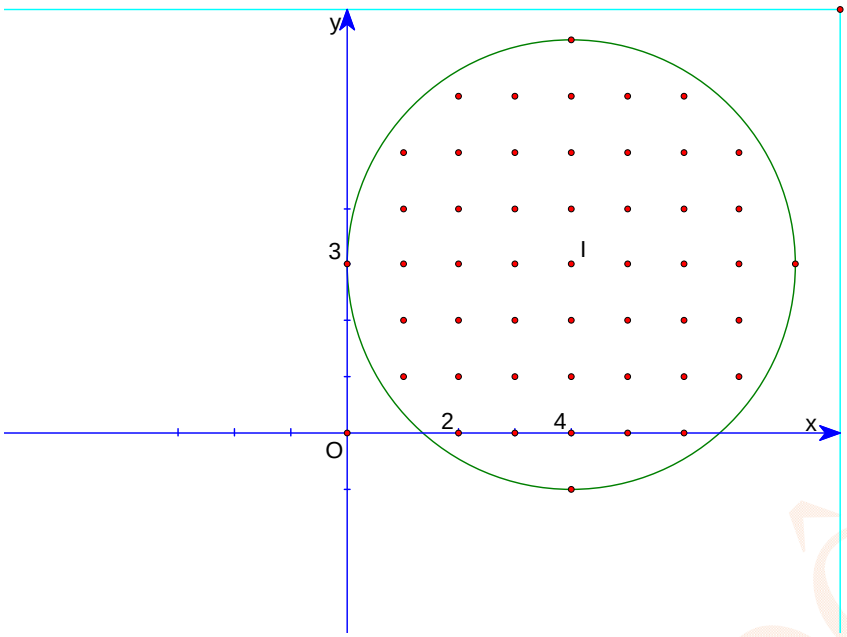
$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+y^2+11\right)+x^2+y^2+11\le \ln\left(8x+6y+2\right)+8x+6y+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\ln t+t$ có $f'(t)=1+\frac{1}{t}>0\ \forall t>0$ do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vậy $pt \Leftrightarrow x^2+y^2+11\le 8x+6y+2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2\le 16$

Vì x, y là số nguyên không âm nên ta coi các cặp số nguyên là các điểm nguyên nằm trong đường tròn tâm $I(4;3)$ bán kính $R=4$ ở góc phần tư thứ nhất

Theo hình vẽ ta có 49 điểm thỏa mãn



Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)+2\le x+\log_3\left(x+1\right)^3$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 3776.

Lời giải

Ta có

$3\left(9^y+2y\right)+2\le x+\log_3\left(x+1\right)^3$

$\Leftrightarrow 3.9^y+6y+2\le x+3\log_3\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1}+3\left(2y+1\right)\le\left(x+1\right)+3\log_3\left(x+1\right).\ (1)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+3t$ có $f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)=3^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(2y+1\right)\le f\left(\log_3\left(x+1\right)\right)\Leftrightarrow 2y+1\le\log_3\left(x+1\right)\Leftrightarrow 3^{2y+1}-1\le x$.

Vì $x\le 2023$ nên $3^{2y+1}-1\le 2023\Leftrightarrow y\le\dfrac{\log_3 2024-1}{2}\approx 2,96$.

Với giả thiết y nguyên dương suy ra $y\in\{1;2\}$.

Với $y=1$ có $26\le x\le 2023$ suy ra có 1998 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2$ có $242\le x\le 2023$ suy ra có 1782 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+2x\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2+y^2+x}{x} \le \log_2 \frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}$.

Đặt $\log_3 \frac{x^2+y^2+x}{x} = t \Rightarrow x^2+y^2+x = x.3^t$.

Khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2} \ge t \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2} \ge 2^t \Leftrightarrow \frac{x.3^t+x}{x.3^t-x} \ge 2^t$

$\Leftrightarrow \frac{3^t+1}{3^t-1} \ge 2^t \Leftrightarrow 3^t+1 \ge 2^t\left(3^t-1\right) \Leftrightarrow 3^t+1+2^t \ge 6^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{6}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t \ge 1\ (1).$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{6}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow f(t) \ge f(1) \Leftrightarrow t \le 1.$

Khi đó ta có $\log_3 \frac{x^2+y^2+x}{x} \le 1 \Rightarrow x^2+y^2+x \le 3x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1.$

Ta có $(x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

Với $x=0 \Rightarrow y=1$

Với $x=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Với $x=1 \Rightarrow y=0$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le m.\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.

A. $m > 2\sqrt{3}$. **B.** $m \ge 2\sqrt{3}$. **C.** $m \ge 12\log_3 5$. **D.** $2 \le m \le 12\log_3 5$.

Lời giải

Điều kiện : Ta có

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x+12 \ge 0 \\ 5-\sqrt{4-x} > 0 \\ 5-\sqrt{4-x} \ne 1 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x > -21 \\ x \ne -12 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 4.$$

Ta có $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \le m.\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right).\frac{1}{\log_{5-\sqrt{4-x}} 3} \le m$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right) \le m$

Đặt : $g(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right),\ x\in[0;4]$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để $m\ge \underset{[0;4]}{Max}\, g(x)$

$$g'(x)=\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}\right).\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right)+\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\frac{\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{\left(5-\sqrt{4-x}\right).\ln 3}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}\right).\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right)+\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right).\frac{1}{2\sqrt{4-x}.\left(5-\sqrt{4-x}\right).\ln 3}$$

$\Rightarrow g'(x)>0,\ \forall x\in[0;4]$

Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;4]$.

$\underset{[0;4]}{Max}\, g(x)=g(4)=\left(4\sqrt{4}+\sqrt{4+12}\right).\log_3\left(5-\sqrt{4-4}\right).$

$\Leftrightarrow \underset{[0;4]}{Max}\, g(x)=12\log_3 5.$

$\Rightarrow m\ge 12\log_3 5.$

Vậy: $m\ge 12\log_3 5.$

Câu 19. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log\frac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x\ (1).$

Biết $y\le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. **B.** 1501300. **C.** 1501400. **D.** 1501500.

Lời giải

Ta có

$$\log\frac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x\Leftrightarrow \log\frac{xy+y}{3y^2+y}\le\left(9y^4+6y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2xy.y+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(3y^2+y\right)\le\left(3y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y)+(xy+y)^2\le\log\left(3y^2+y\right)+\left(3y^2+y\right)^2\ (*)$$

Xét hàm $f(t)=\log t+t^2$ với $t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=\frac{1}{t\ln 10}+2t>0\ \forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $t\in(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f(xy+y)\le f\left(3y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y\le 3y^2+y\Leftrightarrow x\le 3y.$

Vì $y\le 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$y=1\Rightarrow x\in\{1;2;3\}$

$y=2\Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

.

$y=1000 \Rightarrow x \in \{1;2;.....;3000\}$

Câu 21. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** vô số.

Lời giải

Ta có: $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}7\left(x^2+2x+2\right)>x^2+6x+5+m\\ x^2+6x+5+m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x^2+8x+9>m\\ x^2+6x+5>-m\end{cases}$.

Xét $\begin{cases}f(x)=6x^2+8x+9\\ g(x)=x^2+6x+5\end{cases}, \forall x\in(1;3)$, ta có $\begin{cases}f'(x)=12x+8>0\\ g'(x)=2x+6>0\end{cases}, \forall x\in(1;3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases}6x^2+8x+9>m\\ x^2+6x+5>-m\end{cases}$ có nghiệm $\forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}f(1)\ge m\\ g(1)\ge -m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}23\ge m\\ 12\ge -m\end{cases} \Leftrightarrow -12\le m\le 23$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-12,-11,-10,...21,22,23\}$. Vậy có 36 giá trị m cần tìm.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $y\le 2023$ và $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2$?

A. 10. **B.** 2023. **C.** 3776. **D.** 3780.

Lời giải

Ta có $3\left(9^x+2x\right)\le y+\log_3(y+1)^3-2 \Leftrightarrow 3.9^x+6x\le y+3\log_3(y+1)-2$

$\Leftrightarrow 3^{2x+1}+3(2x+1)\le (y+1)+3\log_3(y+1)$. (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t$ có $f'(t)=3^t.\ln 3+3>0,\ \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)=3^t+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(2x+1)\le f\left(\log_3(y+1)\right) \Leftrightarrow 2x+1\le \log_3(y+1) \Leftrightarrow 3^{2x+1}-1\le y$.

Vì $y\le 2023$ nên $3^{2x+1}-1\le 2023 \Leftrightarrow x\le \dfrac{\log_3 2024-1}{2}\approx 2,96$.

Với giả thiết x nguyên dương suy ra $x\in\{1;2\}$.

Với $x=1$ có $26\le y\le 2023$ suy ra có 1998 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $x=2$ có $242\le y\le 2023$ suy ra có 1782 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 23. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa
$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$

A. 2021. **B.** 2003. **C.** 4042. **D.** 4024.

Lời giải

Điều kiện: $(x-2023)^3(1-x)^3>0\Leftrightarrow (x-2023)(1-x)>0\Leftrightarrow 1<x<2023$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2\le x\le 2022$

$3\left(81^y+4y\right)+2026\le -x^2+2024x+\log_3\left[(x-2023)^3(1-x)^3\right]$

$\Leftrightarrow 3.3^{4y}+3.4y+3\le -x^2+2024x-2023+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$

$\Leftrightarrow 3^{4y+1}+3(4y+1)\le (x-2023)(1-x)+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$

$\Leftrightarrow 3^{4y+1}+3(4y+1)\le 3^{\log_3[(x-2023)(1-x)]}+3\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t,\ t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3+3>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)=3^t+3t,\ t\in\mathbb{R}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f(4y+1)\le f\left[\log_3(x-2023)(1-x)\right]\Leftrightarrow 4y+1\le\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]$ (1)

Ta có:

$(x-2023)(1-x)\le 1022121,\forall x\in(1;2023)$

$\Rightarrow\log_3\left[(x-2023)(1-x)\right]\le\log_3 1022121\sim 12,59$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4y+1\le 12,59\Rightarrow y\le 2,89,\ y\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow y\in\{1,2\}$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow (x-2023)(1-x)\ge 3^{4y+1}\Leftrightarrow -x^2+2024x-2023-3^{4y+1}\ge 0$

Với $y=1$: $-x^2+2024x-2266\ge 0\Leftrightarrow 1,12\le x\le 2022,8\Rightarrow 2\le x\le 2022$: có 2021 giá trị x

Với $y=2$: $-x^2+2024x-21706\ge 0\Leftrightarrow 10,78\le x\le 2013,2\Rightarrow 11\le x\le 2013$: có 2003 giá trị x

Vậy có $2021+2003=4024$ cặp $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x là số nguyên tố; $y\le 4320$ và $2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2(y+1)^2$?

A. 6340. **B.** 2024. **C.** 7286. **D.** 8022.

Lời giải:

Do $x;y$ nguyên dương, nên ta có

$2\left(2.8^x+9x\right)\le y-11+3\log_2\left(y+1\right)^2 \Leftrightarrow 4.8^x+18x\le y-11+\log_2\left(y+1\right)^6$

$\Leftrightarrow 2^{3x+2}+18x+12\le y+1+\log_2\left(y+1\right)^6 \Leftrightarrow 2^{3x+2}+6\left(3x+2\right)\le\left(y+1\right)+6\log_2\left(y+1\right)$. (1)

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+6t$ có $f'\left(t\right)=2^t.\ln 2+6>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)=2^t+6t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(3x+2\right)\le f\left(\log_2\left(y+1\right)\right)\Leftrightarrow 3x+2\le\log_2\left(y+1\right)\Leftrightarrow 2^{3x+2}-1\le y$.

Vì $y\le 4320$ nên $2^{3x+2}-1\le 4320\Leftrightarrow x\le\dfrac{\log_2 4321-2}{3}\approx 3,359$.

Theo đề bài,do x là số nguyên tố suy ra $x\in\left\{2;3\right\}$.

Với $x=2$ có $255\le y\le 4320$ suy ra có 4066 cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Với $x=3$ có $2047\le y\le 4320$ suy ra có 2274 cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 6340 cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn
$\log_3\left(x^2+y^2+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)$?

A. 29. **B.** 28. **C.** 48. **D.** 49.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$\log_3\left(x^2+y^2+3x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+18x\right)$ (1)

$\Leftrightarrow\log_3\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}\le\log_2\dfrac{x^2+y^2+18x}{x^2+y^2}$.

Đặt $t=\log_3\dfrac{x^2+y^2+3x}{x}=\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+\quad\right)>1.\quad 3$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}=3^t-3$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow t\le\log_2\left(1+18.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow 2^t\le 1+\dfrac{18}{3^t-3},\left(t>0\right)$.

$\Leftrightarrow 3^t+15\ge 6^t-3.2^t\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1\ge 0$.

Xét $f\left(t\right)=3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1$ với $t>1$.

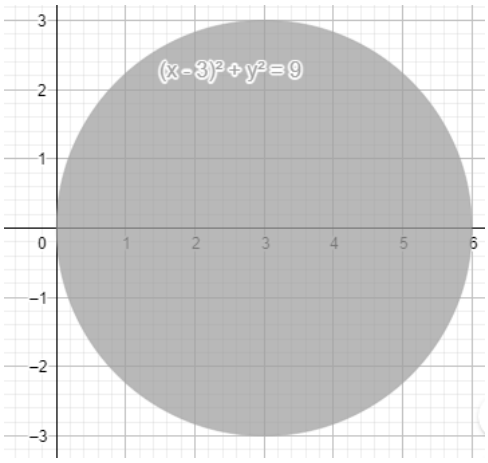
Có $f'\left(t\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>1$.

Vậy hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

$(1) \Leftrightarrow f(t) \geq f(2) \Leftrightarrow 1 < t \leq 2 \Leftrightarrow 1 < \log_3 \dfrac{x^2+y^2+3x}{x} \leq 2.$

$\Leftrightarrow 3 < \dfrac{x^2+y^2+3x}{x} \leq 9 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2 \leq 9.$

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(3;0)$ bán kính bằng 3 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 28 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 26. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\log_3(x^2+y+3x)+\log_2(x^2+y) \leq \log_3 x+\log_2(x^2+y+18x)$?

A. 42. **B.** 36. **C.** 35. **D.** 41.

Lời giải

$\log_3(x^2+y+3x)+\log_2(x^2+y^2) \leq \log_3 x+\log_2(x^2+y+18x)$ (1).

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x^2+y+3x}{x} \leq \log_2 \dfrac{x^2+y+18x}{x^2+y}.$

Đặt $t = \log_3 \dfrac{x^2+y+3x}{x} = \log_3\left(\dfrac{x^2+y}{x}+\right) > 1.$ 3

$\Rightarrow \dfrac{x^2+y}{x} = 3^t-3.$

$(1) \Leftrightarrow t \leq \log_2\left(1+18.\dfrac{x}{x^2+y}\right) \Leftrightarrow 2^t \leq 1+\dfrac{18}{3^t-3}, (t>0).$

$\Leftrightarrow 3^t+15 \geq 6^t-3.2^t \Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1 \geq 0.$

Xét $f(t) = 3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^t-1$ với $t>1$.

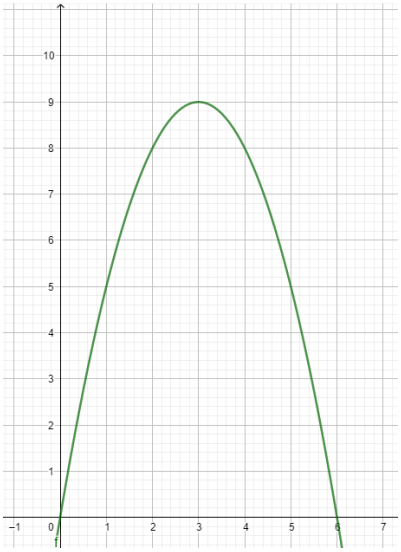
Có $f'(t) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-15.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t \ln 6-3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^t \ln 3 < 0$ với $\forall t>1$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow f(t) \geq f(2) \Leftrightarrow 1 < t \leq 2 \Leftrightarrow 1 < \log_3 \dfrac{x^2+y+3x}{x} \leq 2.$

$\Leftrightarrow 3 < \dfrac{x^2+y+3x}{x} \leq 9 \Leftrightarrow 3x < x^2+y \leq 6x \Leftrightarrow -x^2 < y \leq -x^2+6x.$

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong parabol $(P): y = -x^2+6x$ và trục hoành (không tính các điểm trên trục hoành).



Từ hình vẽ ta có 35 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2 \leq 16$ và $\log_3(x^2+y+x)+\log_2(x^2+y) \leq \log_3 x+\log_2(x^2+y+24x)$?

A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải

$\log_3(x^2+y+x)+\log_2(x^2+y) \leq \log_3 x+\log_2(x^2+y+24x)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x^2+y+x}{x} \leq \log_2 \dfrac{x^2+y+24x}{x^2+y}.$

Đặt $t = \log_3 \dfrac{x^2+y+x}{x} \Leftrightarrow x^2+y+x = x.3^t.$

$(1) \Leftrightarrow t \leq \log_2 \dfrac{x.3^t+23x}{x.3^t-x} \Leftrightarrow 2^t \leq \dfrac{3^t+23}{3^t-1}, (t>0).$

$\Leftrightarrow 3^t+23 \geq 6^t-2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t \geq 1.$

Xét $f(t) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t-1$ với $t>0$.

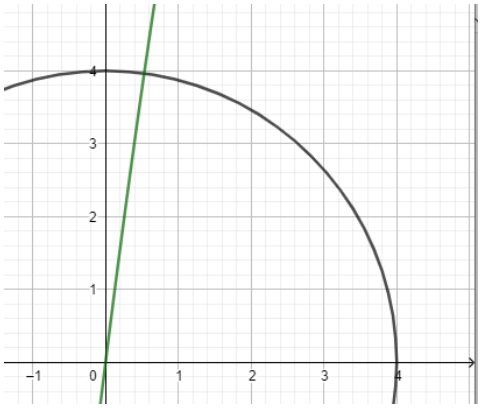
Có $f'(t) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t \ln 6-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t \ln 3 < 0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow f(t) \geq f(2) \Leftrightarrow 0 < t \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \log_3 \dfrac{x^2+y+x}{x} \leq 2.$

$\Leftrightarrow 1 < \dfrac{x^2+y+x}{x} \le 9 \Leftrightarrow y \le -x^2+8x$.

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn đề là phần nằm trong parabol $(P): y=-x^2+8x$ và đường tròn (C) tâm gốc tọa độ, bán kính $R=4$ và trục hoành (không tính các điểm trên trục hoành).



Từ hình vẽ ta có 8 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 28. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_3(4x^2+4y^2+x)+\log_2(x^2+y^2) \le \log_3 x+\log_2(x^2+y^2+6x)$?

A. 12. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$\log_3(4x^2+4y^2+x)+\log_2(x^2+y^2) \le \log_3 x+\log_2(x^2+y^2+6x)$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{4x^2+4y^2+x}{x} \le \log_2 \dfrac{x^2+y^2+6x}{x^2+y^2}$.

Đặt $t=\log_3 \dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}=\log_3\left(\dfrac{4x^2+4y^2}{x}+1\right)>0$.

$\Rightarrow 4.\dfrac{x^2+y^2}{x}=3^t-1$.

$(1) \Leftrightarrow t \le \log_2\left(1+6.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow 2^t \le 1+\dfrac{24}{3^t-1}, (t>0)$.

$\Leftrightarrow 3^t+23 \ge 6^t-2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t-1 \ge 0$.

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t+\left(\dfrac{1}{3}\right)^t-1$ với $t>0$.

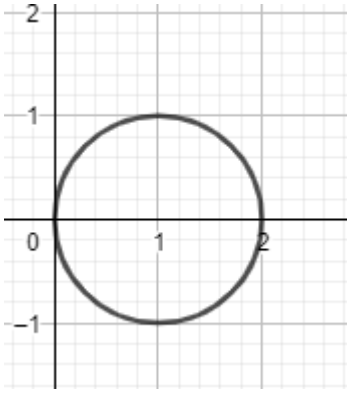
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t.\ln 2-23.\left(\dfrac{1}{6}\right)^t\ln 6-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t\ln 3<0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow f(t) \ge f(2) \Leftrightarrow 0<t \le 2 \Leftrightarrow 0<\log_3 \dfrac{4x^2+4y^2+x}{x} \le 2$.

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{4x^2+4y^2+x}{x}\le 9\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+4y^2>0\,(ld)\\ 4x^2+4y^2\le 8x\end{cases}\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1.$

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính bằng 1 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 4 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)$?

A. 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 30.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$\log_5\left(x^2+y^2+x\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_5 x+\log_3\left(x^2+y^2+8x\right)\ (1)$

$\Leftrightarrow \log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le\log_3\dfrac{x^2+y^2+8x}{x^2+y^2}.$

Đặt $t=\log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}=\log_5\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)(t>0).$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+y^2}{x}=5^t-1.$

$(1)\Leftrightarrow t\le\log_3\left(1+8.\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow 3^t\le 1+\dfrac{8}{5^t-1},(t>0).$

$\Leftrightarrow 5^t+7\ge 15^t-3^t\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{1}{15}\right)^t-1\ge 0.$

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^t+\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{1}{15}\right)^t-1$

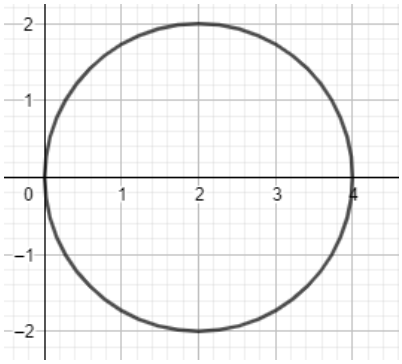
Có $f'(t)=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^t.\ln 2-.\left(\dfrac{1}{5}\right)^t\ln 5-\left(\dfrac{1}{15}\right)^t\ln 15<0$ với $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(t)\ge f(1)\Leftrightarrow 0<t\le 1\Leftrightarrow 0<\log_5\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le 1.$

$\Leftrightarrow 1<\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\le 5 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x\le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\le 4.$

Tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa mãn (1) là phần nằm trong đường tròn tâm $I(2;0)$ bán kính bằng 2 bao gồm cả đường tròn, trừ điểm $O(0;0)$ do $x>0$.



Từ hình vẽ ta có 12 cặp số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)=\dfrac{1}{2}(1+\log_2(1-xy))$ và $2(x^3+y^3)-3xy\ge\dfrac{13}{2}$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $x>y; xy<1$.

Từ giả thiết thứ nhất ta có: $3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x-y)^2=\log_2(2-2xy)$

$\Leftrightarrow 3^{x^2+y^2-2}.\log_2(x^2+y^2-2+2-2xy)=\log_2(2-2xy)$.

Nếu $x^2+y^2>2\Rightarrow VT>\log_2(2-2xy)=VP$.

Nếu $x^2+y^2<2\Rightarrow VT<\log_2(2-2xy)=VP$.

Từ đó suy ra: $x^2+y^2=2$.

Khi đó $(x+y)^2=2+2xy\Leftrightarrow xy=\dfrac{(x+y)^2-2}{2}$. Do $xy<1$ nên $x+y\in(-2;2)$.

Xét giả thiết thứ hai, đặt $P=2(x^3+y^3)-3xy=2(x+y)^3-6xy(x+y)-3xy$.

Đặt $a=x+y$, $P=2a^3-3a(a^2-2)-3\dfrac{(a^2-2)}{2}=f(a)$.

Lập BBT cho $f(a)$ ta được $P=f(a)\le f(1)=\dfrac{13}{2}$.

Mà ở giả thiết thứ hai $P\ge\dfrac{13}{2}$ suy ra $P=\dfrac{13}{2}$, khi đó $x+y=1$.

Vậy số các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề là số giao điểm của đường tròn và đường thẳng.

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng nhỏ hơn bán kính nên chúng có hai điểm chung, hay có 2 cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\dfrac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$

A. 24. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 48.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+4y^2\right)+\dfrac{x^2-8x+4y^2}{x}\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+4y^2+x\right)-\log_3 x+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(x^2+4y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+4y^2\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+4y^2+x}{x}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(\dfrac{x^2+4y^2+24x}{x^2+4y^2}\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+4y^2}\right)+8$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+4y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+4y^2}\right)+\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le 8.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+4y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)+t\le 8$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=1+\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=8+\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=8$

Từ đó suy ra: $(1)\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow(x-4)^2+4y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $4y^2\le 16\Leftrightarrow -2\le y\le 2$

Với $y=2,y=-2\Rightarrow x=4$ nên có 2 cặp.

Với $y=1,y=-1\Rightarrow x=\{1;2;3;4;5;6;7\}$ nên có 14 cặp.

Với $y=0\Rightarrow x=\{1;2;3;....;8\}$ nên có 8 cặp.

Vậy có 24 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2023$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2023. **B.** 5. **C.** 2022. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow 1+\log_3(x+1)+x=2y+9^y \quad (1)$

◆ Đặt $t=\log_3(x+1)$. Suy ra: $x+1=3^t \Leftrightarrow x=3^t-1$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow t+3^t=2y+3^{2y}\ (2)$

◆ Xét hàm số: $f(u)=u+3^u$. Ta có: $f'(u)=1+3^u.\ln 3>0, \forall u\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

◆ Do đó: Từ $(2)\Rightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y\Leftrightarrow \log_3(x+1)=2y\Leftrightarrow x+1=3^{2y}\Leftrightarrow x+1=9^y$

Vì: $0\le x\le 2023$ nên $1\le x+1\le 2024\Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2024\Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2024\approx 3,46$

◆ Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2;3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thoả mãn.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 33. Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_2 y+6\log_2 x-\log_2^2 x+1\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2 x^2-4yx^6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để tập hợp S có nhiều nhất 32 phần tử?

A. 18. **B.** 36. **C.** 38. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>0$ và $y>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$\log_2(yx^6)-\log_2^2 x+1\ge 2^{\log_2^2(2x)}+2\log_2 x-4yx^6$

$4yx^6+\log_2(yx^6)+1\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2^2 x+2\log_2 x$

$\Leftrightarrow 4yx^6+\log_2(yx^6)+2\ge 2^{\log_2^2(2x)}+(\log_2^2 x+2\log_2 x+1)$

$\Leftrightarrow 4yx^6+\log_2(4yx^6)\ge 2^{\log_2^2(2x)}+(\log_2 x+1)^2$

$\Leftrightarrow 4yx^6+\log_2(4yx^6)\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2^2(2x)$

$\Leftrightarrow 4yx^6+\log_2(4yx^6)\ge 2^{\log_2^2(2x)}+\log_2 2^{\log_2^2(2x)}$

$\Leftrightarrow f(4yx^6)\ge f\left(2^{\log_2^2 2x}\right)(1).$

Trong đó $f(t)=t+\log_2 t,\ t>0$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với $t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow 4yx^6\ge 2^{\log_2^2 2x}\Leftrightarrow 2+\log_2 y+6\log_2 x\ge \log_2^2 2x$

$\Leftrightarrow 2+\log_2 y+6\log_2 x\ge (\log_2 x+1)^2$

$\Leftrightarrow \log_2 y\ge \log_2^2 x-4\log_2 x-1=g(x)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{2}{x\ln 2}\log_2 x-\dfrac{4}{x\ln 2}=\dfrac{2}{x\ln 2}(\log_2 x-2)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \log_2 x=2\Leftrightarrow x=4$.

x	0		1		4		33
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	-1	↘	-5	↗	$g(33)$

Để tập S có nhiều nhất 32 phần tử thì $\log_2 y<g(33)\Leftrightarrow 0<y<2^{g(33)}\Rightarrow 0<y\le 19$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 3778. **B.** 3780. **C.** 2. **D.** 4046.

Lời giải

$3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2\Leftrightarrow 3^{2y+1}+3(2y+1)\le x+1+\log_3(x+1)^3$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+3t,\forall t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến $\forall t\in\mathbb{R}$.

Khi đó $f(2y+1)\le f\left(\log_3(x+1)\right)\Leftrightarrow 2y+1\le\log_3(x+1)\Leftrightarrow y\le\dfrac{\log_3(x+1)-1}{2}$.

Vì $x\le 2023$ nên $y\le\dfrac{\log_3 2024-1}{2}\approx 2{,}965$.

Vì y nguyên dương nên $y\in\{1;2\}$.

Với $y=1\Rightarrow x\ge 3^{2y+1}-1=26$. Có 1998 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2\Rightarrow x\ge 3^{2y+1}-1=242$. Có 1782 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có 3780 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-2023;2023)$ để phương trình $e^x+e^{x+y}=\ln(x+1)-\ln(x+y+1)$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 2023. **B.** 4044. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

Nhận xét: $e^x+e^{x+y}>0\Rightarrow\ln(x+1)>\ln(x+y+1)\Rightarrow x+1>x+y+1\Rightarrow y<0$

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases}x+1>0\\x+y+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-1-y.$

Từ: $e^x+e^{x+y}=\ln(x+1)-\ln(x+y+1)\Leftrightarrow e^x+e^{x+y}-\ln(x+1)+\ln(x+y+1)=0.$

Đặt $f(x)=e^x+e^{x+y}-\ln(x+1)+\ln(x+y+1),\forall y<0,\forall x>-1-y.$

Ta có $f'(x)=e^x+e^{x+y}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+y+1}=e^x+e^{x+y}-\frac{y}{(x+1)(x+y+1)}>0,\forall y<0,\forall x>-1-y.$

Suy ra $f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-1-y;+\infty)$ với $y<0$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-(1+y)^+}f(x)=-\infty.$

Nên $f(x)=0$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi số nguyên $y<0$.

Vậy có 2022 số nguyên y thỏa mãn.

Câu 36. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thuộc đoạn $[1;100]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x+\log_2 x=y+2^y$?

A. 100. **B.** 99. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=t+2^t\Rightarrow f'(t)=1+2^t\ln 2>0,\forall t\in\mathbb{R}.$

Ta có $f(\log_2 x)=f(y)\Rightarrow\log_2 x=y\Rightarrow x=2^y.$

Để $1\le x\le 100$ thì $1\le 2^y\le 100\Rightarrow 0\le y\le\log_2 100\approx 6,64$

Do y nguyên và $y\in[1;100]$ nên $y\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vì mỗi giá trị của y thì chỉ có một giá trị của x thỏa mãn $1\le x\le 100$ nên có 6 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 37. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $-20\le x\le 20,1\le y\le 20$ $3^{x+3}+5x+10=3^{y^2+1}+5y^2$?

A. 13. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 20.

Lời giải

$3^{x+3}+5x+10=3^{y^2+1}+5y^2\Leftrightarrow 3^{x+3}+5(x+3)=3^{y^2+1}+5(y^2+1).$

Xét hàm số $f(t)=3^t+5t\Rightarrow f'(t)=3^t\ln 3+5>0,\forall t\in\mathbb{R}.$

Ta có $f(x+3)=f(y^2+1)\Rightarrow x+3=y^2+1\Rightarrow x=y^2-2.$

Vì $-20 \le x \le 20 \Rightarrow -20 \le y^2 - 2 \le 20 \Rightarrow -18 \le y^2 \le 22 \Rightarrow -\sqrt{22} \le y \le \sqrt{22}$.

Do y nguyên và $1 \le y \le 20$ nên $y \in \{1;2;3;4\}$.

Mỗi giá trị của y chỉ ứng với một giá trị của x với $-20 \le x \le 20$ nên có 4 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Câu 38. Gọi S là tập hợp điểm $M(x;y)$ với x, y là các số nguyên thỏa mãn $8 < x < 3000$ và $\log_3(x-2) + 3x = y + 9\left(3^{y+2} + 1\right)$. Có bao nhiêu tứ giác lập được từ các điểm thuộc tập S ?

A. 15. **B.** 6. **C.** 3091. **D.** 360.

Lời giải

$\log_3(x-2) + 3x = y + 9\left(3^{y+2} + 1\right) \Leftrightarrow \log_3(x-2) + 1 + 3x - 6 = y + 4 + 3^{y+4}$

$\Leftrightarrow \log_3(3x-6) + 3x - 6 = y + 4 + 3^{y+4}$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\log_3(3x-6)\right) = f(y+4) \Rightarrow \log_3(3x-6) = y + 4 \Rightarrow y = -4 + \log_3(3x-6)$.

Do $8 < x < 3000$ nên $-4 + \log_3 18 < y < -4 + \log_3(8994) \Rightarrow y \in \{-1;0;1;2;3;4\}$.

Vì $x = 3^{y+3}$ và $8 < x < 3000$ nên mỗi giá trị của y có một giá trị của x nên có 6 điểm thuộc S.

Do các điểm này nằm trên đồ thị hàm số $y = -4 + \log_3(3x-6)$ nên không có 4 điểm nào thẳng hàng.

Vậy có $C_6^4 = 15$ tứ giác được tạo thành từ các điểm thuộc S.

Câu 40. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là:

A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Ta đặt $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x) = t$. Khi đó

$2020x + m = 6^t$ và $1010x = 4^t$. Ta suy ra $2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = 6^t - 2 \cdot 4^t$

Đặt $f(t) = -2.4^t + 6^t$

$f'(t) = 6^t \ln 6 - 2.4^t . \ln 4$

$f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2\ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Hơn nữa, $\begin{cases} m<2020 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} -2\le m\le 2019 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy ta có 2022 giá trị m thỏa mãn.

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Ta có $4(x-1)e^x = y\left(e^x+xy-2x^2-3\right) \Leftrightarrow 4(x-1)e^x - y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)=0\ (*)$.

Xét hàm số $f(x)=4(x-1)e^x - y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$ trên $(1;6)$.

$f'(x)=4e^x+4(x-1)e^x - y\left(e^x+y-4x\right)=4xe^x-ye^x+y(4x-y)=(4x-y)\left(e^x+y\right)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-y)\left(e^x+y\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{4}$ (do $e^x+y>0,\ \forall y\in\mathbb{N}^*$).

Trường hợp 1: $\dfrac{y}{4}\le 1 \Leftrightarrow y\le 4$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(6)$

$f(1)=-y(e+y-5)$; $f(6)=20e^6-y\left(e^6+6y-75\right)=-6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6$.

Ta có $f(6)>0 \Leftrightarrow -6y^2+\left(75-e^6\right)y+20e^6>0 \Leftrightarrow -72,1<y<18,4$.

Suy ra $\forall y\in\mathbb{N}^*, y\le 4$, thì $f(6)>0$.

Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $x\in(1;6)\Leftrightarrow f(1)<0\Leftrightarrow e+y-5>0\Leftrightarrow y>5-e\approx 2,3$.

Cùng điều kiện $y\le 4$ và y nguyên dương, ta có $y\in\{3;4\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\frac{y}{4}\ge 6\Leftrightarrow y\ge 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		6
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(1)$	↘	$f(6)$

Với $y\ge 24$ ta luôn có $f(1)=-y(e+y-5)<0$ nên không tồn tại $x\in(1;6)$ thỏa mãn $(*)$.

Trường hợp 3: $1<\frac{y}{4}<6\Leftrightarrow 4<y<24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1;6)$:

x	1		$\frac{y}{4}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	↘	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	↗	$f(6)$

Với $y\in(4;24)$ ta luôn có $f(1)=-y(e+y-5)<0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x\in(1;6)$ $\Leftrightarrow f(6)>0\Leftrightarrow -72,1<y<18,4$.

Cùng điều kiện $y\in(4;24)$ và y nguyên dương ta có $y\in\{5;6;...;18\}$.

Do đó, tập các giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3;4;....;18\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x+y>0;-4\le x\le 4$ và $\log_3\frac{(x+2y)}{4}+x^2+2y^2+3xy-4x-4y\le 0$?

A. 11. **B.** 10 **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

+ Điều kiện: $x+2y>0$

+ Do $x+y>0$ nên

$$\log_3\frac{(x+2y)}{4}+x^2+2y^2+3xy-x-y\le 0$$

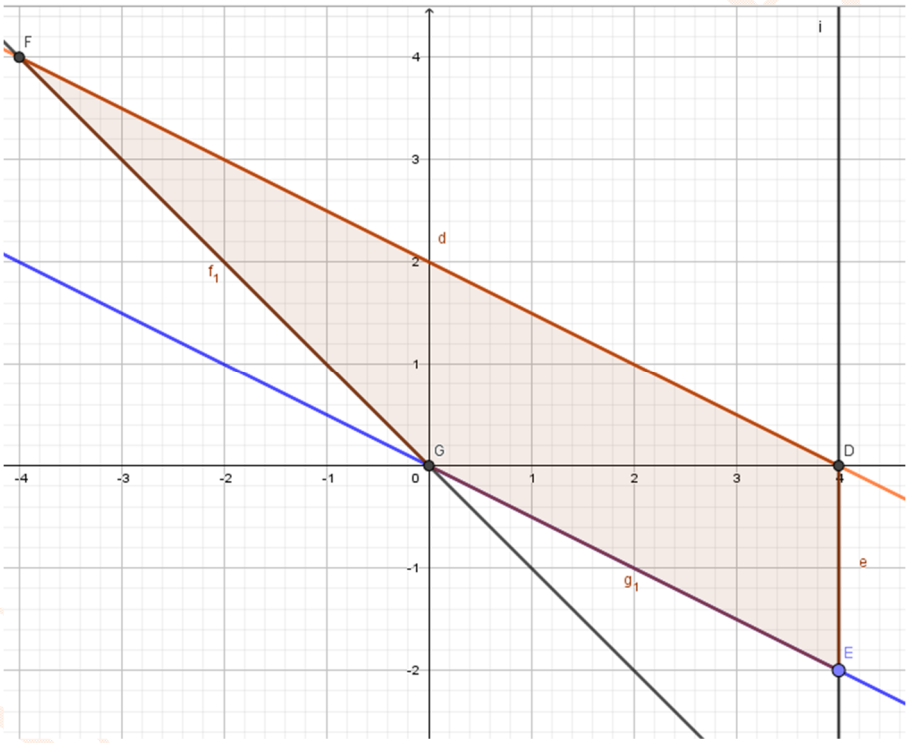
$$\Leftrightarrow \log_3\frac{(x+y)(x+2y)}{4(x+y)}+x^2+2y^2+3xy-4x-4y\le 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+3xy+2y^2\right)+x^2+2y^2+3xy\le \log_2 4(x+y)+4(x+y) \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t, t>0$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0\forall t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+2y^2+3xy\right)\le f\left[4(x+y)\right]\Leftrightarrow x^2+2y^2+3xy\le 4(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-4)\le 0\Leftrightarrow x+2y-4\le 0$ (vì $x+y>0$).



Biểu diễn miền nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y>0\\x+2y>0\\x+2y-4\le 0\\-4\le x\le 4\end{cases}$, tìm được 12 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|}\le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

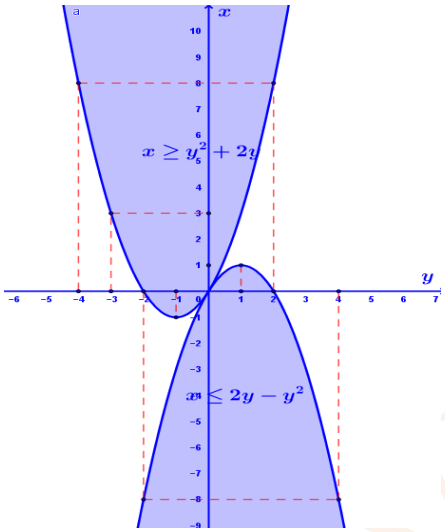
$3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \le \dfrac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right) \le 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right)$. Xét hàm số $f(t)=3^t\ln t$ với $t\ge 3$.

$f'(t)=3^t\ln t.\ln t+\dfrac{3^t}{t}>0, \forall t\ge 3 \Rightarrow$ hàm số đồng trên $[3;+\infty)$.

Ta có: $f\left(y^2+3\right)\le f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2+3\le |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2\le |x-2y|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge y^2+2y=g_1(y) \\ x\le 2y-y^2=g_2(y) \end{array}\right.$



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3\le x<8 \\ x=0 \\ -8<x\le -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của y với mỗi giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

Câu 44. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Theo đề bài: $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1)+2(x-1)=2y+2^{2y}$

Đặt $t=\log_2 2(x-1) \Rightarrow 2(x-1)=2^t$

Ta có: $2^t+t=2^{2y}+2y$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=2^t+t$

Có: $f'(t)=2^t.\ln 2+1>0 \ \forall t\in R \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

$(1) \Leftrightarrow f(t)=f(2y) \Leftrightarrow t=2y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1)=2y$

$\Leftrightarrow 2(x-1)=2^{2y} \Leftrightarrow x=2^{2y-1}+1$

Mà $x\le 2020 \Rightarrow 2^{2y-1}+1\le 2020 \Leftrightarrow y\le \dfrac{1}{2}(1+\log_2 2019)$.

Vì $y \in Z^+ \Rightarrow y \in \{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 cặp số nguyên dương thỏa mãn ycbt.

Câu 45. Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x;y)$ và $1 \le x, y \le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right) \le (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

A. 2017. **B.** 2. **C.** 2020. **D.** 4034.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x, y \in N^*: x, y \le 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in N^*: x, y \le 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$.

Bpt cho có dạng: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right) - (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right) + (x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) \le 0 \ (*)$

+ Xét $y=1$ thì $(*)$ trở thành: $3(x+4)\log_3\frac{2}{3} - (x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) \le 0$

Bpt nghiệm đúng với $\forall x > 3$ vì: $x+4>0, \log_3\frac{2}{3}<0$; $x-3>0, \log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) > \log_2(0+1) = 0$

Vậy trường hợp này cho ta 2017 bộ $(x,y) = (x;1)$ với $4 \le x \le 2020, x \in N$

+ Xét $y=2$ thì $(*)$ trở thành: $4(x+4)\log_3 1 \le 0$

Bpt nghiệm đúng với $\forall x$ mà $4 \le x \le 2020, x \in N$

Trường hợp này cho ta 2017 bộ (x,y) nữa.

+ Xét $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên không xảy ra.

Vậy có 4034 bộ số (x,y) thỏa mãn ycbt.

Câu 46. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1} - 3^{2+\frac{11}{x}} \le \log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2-x+1}}$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Điều kiện $-\frac{11}{2} < x \ne 0$.

Với điều kiện trên ta có $3^{x+\frac{1}{x}-1} - 3^{2+\frac{11}{x}} \le \log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2-x+1}} \Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1} - 3^{2+\frac{11}{x}} \le \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x+11}{x^2-x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1} - 3^{2+\frac{11}{x}} \le \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2+\frac{11}{x}}{x-1+\frac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{2}\log_2\left(x-1+\frac{1}{x}\right) \le 3^{2+\frac{11}{x}} + \frac{1}{2}\log_2\left(2+\frac{11}{x}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + \frac{1}{2}\log_2 t$ với $t > 0$. Khi đó $f'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{1}{2t\ln 2} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó

$f\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\le f\left(2+\frac{11}{x}\right)\Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x}\le 2+\frac{11}{x}\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x}\le 0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{11}{2};-2\right]\cup(0;5]$.

Vậy có 9 nghiệm nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa $x\in[0;3]$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+\log_3\left(3y^3\right)$?

A. 819. **B.** 817. **C.** 816. **D.** 88.

Lời giải

ĐK: $y>0$.

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+\log_3\left(3y^3\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}+6x+1>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+1+3\log_3 y$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}-3\log_3 y>\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-6x\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 y}-3\log_3 y>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-3.2x\ (1)$

Xét hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}-3t$ có $f'(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}\ln\frac{1}{2}-3<0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow\log_3 y<2x\Leftrightarrow y<3^{2x}\Leftrightarrow y<9^{x}\ (2)$.

Vì x nguyên và thuộc đoạn $[0;3]$ nên có các trường hợp sau

TH1: $x=0$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^0=1$ (loại)

TH2: $x=1$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^1=9$ (Có 8 giá trị y)

TH3: $x=2$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^2=81$ (Có 80 giá trị y)

TH4: $x=3$: Từ $(2)\Rightarrow 0<y<9^3=729$ (Có 728 giá trị y)

Vậy có 816 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề bài.

Câu 48. Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x^2\ln\frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1}=x^2+1-\sqrt{5x^4+x^2}$, biết $x_0^2=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$, với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=a-b+2c$.

A. $S=26$. **B.** $S=34$. **C.** $S=-8$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\ln\frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2}-\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}\Leftrightarrow\ln\frac{\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}-\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}$

$\Leftrightarrow\ln\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+1+\frac{1}{x^2}$ (*)

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\ln t+t\ (t>0)$.

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t}+1$.

Với $t>0\Rightarrow f'(t)>0$.

Vậy hàm $f(t)=\ln t+t$ đồng biến và liên tục với $t>0$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{5+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 5+\frac{1}{x^2}=1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\Leftrightarrow \frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}-4=0$

$$\Leftrightarrow 4x^4-x^2-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\frac{1+\sqrt{17}}{8}(n)\\ x^2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}(l)\end{array}\right.\Leftrightarrow S=0.$$

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên dương y trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình $(10x)^{y+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$ đúng với mọi $x\in(1;100)$?

A. 2022. **B.** 2016. **C.** 2020. **D.** 2018.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $(10x)^{y+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{\log x}{10}\right)(\log x+1)\geq \frac{11}{10}\log x$$

$$\Leftrightarrow (\log x+10y)(\log x+1)-11\log x\geq 0\Leftrightarrow 10y(\log x+1)+(\log x)^2-10\log x\geq 0.$$

Vì $x\in(1;100)$ nên $\log x\in(0;2)$.

Do đó: $10y(\log x+1)+(\log x)^2-10\log x\geq 0\Leftrightarrow 10y\geq \frac{10\log x-(\log x)^2}{\log x+1}$.

Đặt $t=\log x, t\in(0;2)$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{10t-t^2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(t)=\frac{10-2t-t^2}{(t+1)^2}>0,\forall t\in(0;2)\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(t)=f(2)=\frac{16}{3}$.

Để bất phương trình $10y\geq \frac{10\log x-(\log x)^2}{\log x+1}$ đúng với mọi $x\in(1;100)$ thì $10y\geq\frac{16}{3}\Leftrightarrow y\geq\frac{8}{15}$

Do đó $y\in\left[\frac{8}{15};2018\right]$ hay có 2018 giá trị thỏa mãn

Câu 50. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để có đúng 3 số thực x thỏa mãn $x+\sqrt{x^2+1}-e^{x^3-3x^2+m}=0$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải:

Từ phương trình, ta có $x+\sqrt{x^2+1}=e^{x^3-3x^2+m}\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x^3-3x^2+m$

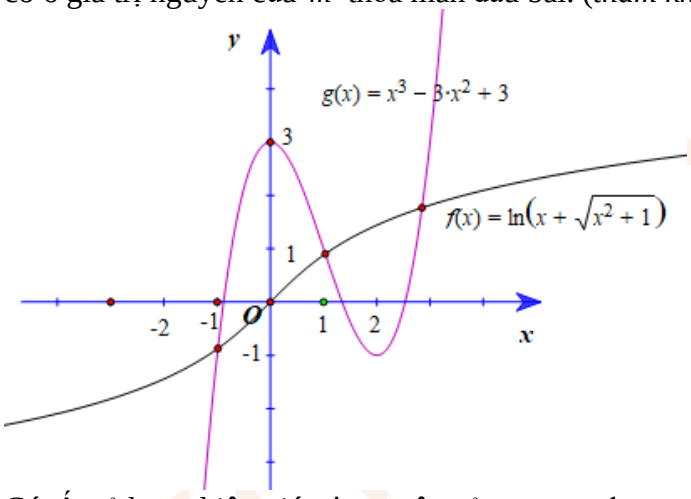
Đặt $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$. Vậy $f(x)$ là hàm lẻ.

Đặt $g(x)=x^3-3x^2+m;\ g'(x)=3x^2-6x$. Đồ thị hàm $g(x)$ luôn có 2 điểm cực trị là điểm cực đại $A(0;m)$ và điểm cực tiểu $B(2;m-4)$.

Nhận thấy, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-f(x)\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-f(x)\right)=+\infty$, do đó phương trình $f(x)=g(x)$ luôn có 1 nghiệm. Vậy để phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}g_{CD}\ge f(0)\\ g_{CT}\le f(2)\end{cases}$

Hay $\begin{cases}m\ge 0\\ m-4\le\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 4+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Với $m\in\mathbb{Z}$, suy ra $m\in\{0;1;2;3;4;5\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn đầu bài. (*tham khảo hình vẽ*)



Câu 51. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện

$\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y)$.

A. 301. **B.** 302. **C.** 602. **D.** 2.

.

Lời giải

$\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y)$

$\Leftrightarrow\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)-\log_4(x-y)\ge 0$ (1).

Đặt $f(x)=\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)-\log_4(x-y)$, (coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(x)$ là: $\begin{cases}x+y^2>0\\ y^2+y+64>0\\ x-y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-y^2\\ x>y\end{cases}$.

Do x, y nguyên, $x>y\ge-y^2$, tồn tại không quá 63 số nguyên x nên $x\in[y+1;y+64]$.

Xét hàm số $f(x)$ trên $[y+1;y+64]$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x+y^2\right)\ln 2020}-\dfrac{1}{(x-y)\ln 4}<0,\ \forall x\ge y+1.$

Bảng biến thiên

x	$y+1$	$y+64$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$		$f(y+64)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán trở thành

$f(y+64)<0\Leftrightarrow \log_{2020}(y^2+y+64)+\log_{2021}(y^2+y+64)<\log_4 64$

$\Leftrightarrow \log_{2020}(y^2+y+64)(\log_{2020}2021+1)<3$

$\Leftrightarrow y^2+y+64-2021^{\frac{3}{\log_{2020}2021+1}}<0$

$\Rightarrow -301,76<y<300,76$

Mà y nguyên nên $y\in\{-301,-300,...,299,300\}$. Vậy có 602 giá trị của y thỏa mãn.

Câu 52. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(2^x+3\right)+\log_3\left(4^x+2\right)\le 3$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\log_2\left(2^x+3\right)+\log_3\left(4^x+2\right)$, ta có:

$f'(x)=\dfrac{2^x}{2^x+3}+\dfrac{4^x\ln 4}{\left(4^x+2\right)\ln 3}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

và $f(0)=3$.

Bất phương trình đã cho được viết lại là: $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow x\le 0$.

Vậy bất phương trình có vô số nghiệm nguyên.

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để bất phương trình $\log_2\sqrt{x^2-4x+a}+4\sqrt{\log_4\left(x^2-4x+a\right)}\le 12$ có nghiệm với $x\in[0;4]$.

A. 256. **B.** 253. **C.** 255. **D.** 252.

Lời giải

Theo đề bài: $\log_2\sqrt{x^2-4x+a}+4\sqrt{\log_4\left(x^2-4x+a\right)}\le 12\ \ (1)$.

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-4x+a>0\\ \log_4\left(x^2-4x+a\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-4x+a\ge 1\ \ (*)$

Đặt $t=x^2-4x+a$, với $x\in[0;4]\Rightarrow t\in[a-4;a]$.

Khi đó bất phương trình (1) trở thành $\log_2\sqrt{t}+4\sqrt{\log_4 t}\le 12\ \ (2)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2\sqrt{t}+4\sqrt{\log_4 t}$ xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ và $f(256)=12$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2t.\ln 2}+\dfrac{1}{t\sqrt{\log_4 t}.\ln 2}>0,\forall t>1$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Để bất phương trình (1) có nghiệm với $x\in[0;4]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm $t\in[a-4;a]$ đều này tương đương $\max\limits_{[1;+\infty)} f(t)\le 12 \Leftrightarrow \begin{cases}[a-4;a]\subset[1;+\infty)\\ f(a)\le f(256)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-4\ge 1\\ a\le 256\end{cases}$

$\Leftrightarrow 5\le a\le 256$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$). Do $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{5,6,7,...,256\}$.

Vậy có 252 giá trị nguyên của tham số a thỏa yêu cầu đề bài.

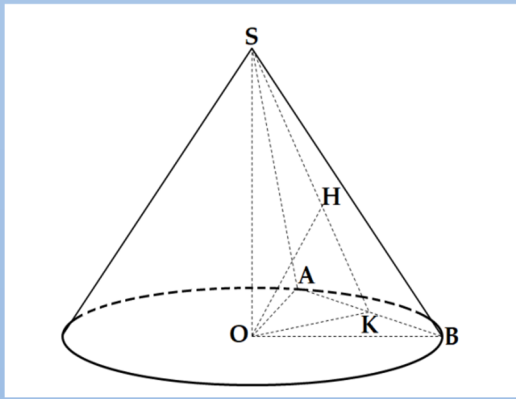
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 48. **(Đề TK BGD 2023)** Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón, K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK. Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h \Rightarrow R^2=\frac{3V}{\pi.h}=\frac{3.\frac{800\pi}{3}}{\pi.8}=100 \Rightarrow R=10$

Trong tam giác vuông OBK có: $OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Trong tam giác vuông SOK có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}=\frac{2}{8^2} \Rightarrow OH=4\sqrt{2}$.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 48 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng bao nhiêu?

A. $3\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{14}\pi a^2$.

Câu 2. Cho hình nón có đỉnh S, trục SO, bán kính R, chiều cao h. Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\frac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón và diện tích tam giác SAB. Biết $\frac{S_1}{S_2}=\frac{10\pi}{3\sqrt{3}}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $h=\left(\sqrt{2}-1\right)R.$. **B.** $h=\frac{1}{3}R.$. **C.** $h=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R.$. **D.** $h=\frac{\sqrt{11}}{8}R.$.

Câu 3. Cho hình nón có đường cao $h=40cm$, bán kính đáy $r=50cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón, có khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $24cm$. Tính diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $S=2000\left(cm^2\right)$. **B.** $S=800\left(cm^2\right)$.

C. $S=1200\left(cm^2\right)$. **D.** $S=1600\left(cm^2\right)$.

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 6. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 6. Khoảng cách từ tâm đáy tới mặt phẳng (P) bằng.

A. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều SAB có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{\sqrt{33}}{9}$. **B.** $\frac{4\sqrt{33}}{9}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 6. Cho hình nón có chiều cao $SO=12$, bán kính đáy $R=24$. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S và hợp với SO một góc bằng 60^o. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α).

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** 12.

Câu 7. Cho một hình nón có chiều cao $h=a$ và chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân có diện tích a^2. Gọi A,B là hai điểm bất kì trên đường tròn (O) sao cho thể tích khối chóp $S.OAB$ lớn nhất và bằng $\frac{a^3}{12}$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{xq}=\frac{a^2\sqrt{17}}{4}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$. **C.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Câu 9. Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy $r=10$ và và đường sinh $l=\sqrt{117}$. Gọi A, B và M là ba điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $\sqrt{117}$. **B.** $\frac{340}{13}$. **C.** 9. **D.** $\frac{1700}{117}$.

Câu 10. Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$. **B.** $S=400$. **C.** $S=300$. **D.** $S=406$

Câu 11. Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy bằng $3\sqrt{3}$ và có góc ở đỉnh bằng $120°$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB là tam giác vuông, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

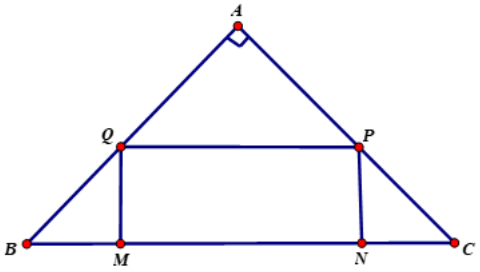
Câu 12. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với hình nón một thiết diện là tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}$. Biết mặt phẳng đó tạo với trục của hình nón một góc 30°. Thể tích của hình nón đã cho là

A. $V=\frac{8\pi}{3}$. **B.** $V=9\pi$. **C.** $V=\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$.

Câu 13. Một hình nón có chiều cao $h=4$; độ dài đường sinh $l=5$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng đó bằng

A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=10\sqrt{2}$ (cm). Hình chữ nhật $MNPQ$ có P,Q lần lượt thuộc cạnh AB,AC và M,N thuộc cạnh BC. Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong của nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn PQ để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.



A. $PQ=5\,cm$. **B.** $PQ=10\,cm$. **C.** $PQ=\frac{20}{3}\ cm$. **D.** $PQ=\frac{40}{3}\ cm$.

Câu 15. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 12 và thể tích bằng 36π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. $\frac{208\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{149}$. **C.** 144. **D.** $\sqrt{149}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B. Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{9\sqrt{3}\pi a^3}{4}$. **B.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $12\pi a^3$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 18. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 12 và thể tích bằng $\frac{1200\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{24\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Câu 19. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60^0, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h = \frac{R\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = a\sqrt{3}$. **D.** $h = a\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = a\sqrt{3}$. **D.** $h = a\sqrt{2}$.

Câu 21. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$, $\widehat{SAB} = 60^0$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Câu 23. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 6 và thể tích bằng 50π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 8$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Câu 24. Cho hình nón có chiều cao bằng $2a$, biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc 30^0, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\left(4\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **B.** $4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

C. $8\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $8\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Câu 25. Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao bằng $3a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích tam giác SAB bằng $9a^2$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho.

A. $\dfrac{219\pi a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{73\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{73\pi a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Câu 26. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng 4 và diện tích xung quanh hình nón bằng $16\sqrt{2}\pi$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B và $AB=4\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 27. Cho hình nón có chiều cao $h=6$ và thể tích khối nón bằng 50π. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Tính diện tích của thiết diện đó?

A. $24\sqrt{5}$. **B.** $12\sqrt{5}$. **C.** 9. **D.** $6\sqrt{5}$.

Câu 28. Hình nón (N) đỉnh S, có tâm của đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh 120^0. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$.

C. $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$.

Câu 29. Cho khối nón (S). Cắt khối nón bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và tạo với đáy góc $30°$ thiết diện thu được là tam giác đều cạnh có độ dài là 1. Thể tích khối nón (S) là

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{192}$ **B.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{192}$. **C.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{64}$. **D.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{48}$.

Câu 30. Cho hình nón có chiều cao $h=20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r=25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12\,\text{cm}$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S=500\,\text{cm}^2$. **B.** $S=300\,\text{cm}^2$. **C.** $S=406\,\text{cm}^2$. **D.** $S=400\,\text{cm}^2$.

Câu 31. Cho khối nón có đỉnh S, O là tâm đường tròn đáy, bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh là $6\sqrt{3}\pi$. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho ΔSAB có diện tích là 3 và AB không là đường kính. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 32. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **B.** $S=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 33. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng **cách** từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30°, \widehat{SAB}=60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Câu 34. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng $60°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 104π. **B.** $\dfrac{4\sqrt{39}\,\pi}{3}$. **C.** $104\sqrt{3}\,\pi$. **D.** $\dfrac{104\sqrt{3}\,\pi}{3}$.

Câu 35. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ và chiều cao bằng 3. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng:

A. 108π. **B.** 144π. **C.** 96π. **D.** 48π.

Câu 36. Cho hình nón (N) có đỉnh là S, tâm đường tròn đáy là O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích của hình nón (N)?

A. $V=36\pi$. **B.** $V=48\pi$. **C.** $V=64\pi$. **D.** $V=16\pi$.

Câu 37. Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 10, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho hình chóp $S.OAB$ có thể tích bằng 40. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{20\sqrt{29}}{29}$. Tính thể tích khối nón (N).

A. $\dfrac{250\pi}{3}$. **B.** 500π. **C.** 250π. **D.** $\dfrac{500\pi}{3}$.

Câu 38. Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 5, đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 12. Biết độ dài đoạn $AB<7$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{20\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\frac{20\sqrt{29}}{29}$. **D.** $\frac{15\sqrt{34}}{34}$.

Câu 39. Cho khối nón có đỉnh *S*, đáy là đường tròn tâm *O* bán kính bằng 7. Gọi *A* và *B* là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho *AB* = 10. Mặt phẳng (*SAB*) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối nón bằng

A. $98\sqrt{2}$. **B.** $98\pi\sqrt{2}$. **C.** $98\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $98a^3\sqrt{2}$.

Câu 40. Cho hình nón đỉnh *S*, đáy là đường tròn tâm *O* bán kính bằng *a*, độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (*Q*) qua đỉnh *S* cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $a\left(2\sqrt{3}+1\right)$. Khoảng cách từ *O* đến mặt phẳng (*Q*) bằng

A. $\frac{\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{66}}{11}$.

Câu 41. Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $6a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng $3a$ ta được thiết diện có diện tích bằng $12\sqrt{11}a^2$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $36\sqrt{5}\pi\ a^3$. **B.** $270\pi\ a^3$. **C.** $90\pi\ a^3$. **D.** $12\sqrt{5}\pi\ a^3$.

Câu 42. Cho khối nón có đỉnh S, cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh của khối nón tạo thành thiết diện là tam giác SAB. Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến thiết diện bằng 2, AB = 12, bán kính đường tròn đáy bằng 10. Chiều cao h của khối nón là:

A. $\frac{8\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{15}$. **C.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 43. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=2a$. Trên đường tròn đáy lấy 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $4a^2\sqrt{2}$, thể tích khối nón đã cho bằng

A. $V=\frac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **C.** $V=\frac{2\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{6}$.

HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

Câu 44. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq}=\frac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq}=\frac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq}=\frac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\frac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 45. Cho hình nón có thể tích là V, khối trụ nội tiếp trong hình nón có diện tích đáy bằng một nửa diện tích đáy của khối nón. Tính thể tích V' của khối trụ theo V.

A. $V'=\frac{V}{2}$. **B.** $V'=\frac{3V}{2}$. **C.** $V'=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.V$. **D.** $V'=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}}.V$.

Câu 46. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq}=\dfrac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 47. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích khối trụ được giới han bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Câu 48. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. $2\sqrt{3}\pi$. **B.** $\dfrac{52\pi}{3}$. **C.** 52π. **D.** 13π.

Câu 49. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V=7\sqrt{7}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $V=8\pi a^3$.

Câu 50. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD=a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC}=60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Câu 51. Cho hình trụ có đường cao bằng $8a$. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục hình trụ $3a$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ bằng

A. $S=80\pi a^2, \mathrm{V}=200\pi a^3$. **B.** $S=60\pi a^2, \mathrm{V}=200\pi a^3$.
C. $S=80\pi a^2, \mathrm{V}=180\pi a^3$. **D.** $S=60\pi a^2, \mathrm{V}=180\pi a^3$.

Câu 52. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\,\mathrm{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\,\mathrm{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\mathrm{cm}$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S=56\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **B.** $S=55\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **C.** $S=53\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **D.** $S=46\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Câu 53. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy (O,R) và (O',R), chiều cao $h=\sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha=30^0$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là

A. $\dfrac{3R^3}{2}$. **B.** $\dfrac{3R^3}{4}$. **C.** $\dfrac{R^3}{4}$. **D.** $\dfrac{R^3}{2}$.

Câu 54. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $4\sqrt{13}\pi a^2$. **B.** $12\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $6\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 55. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\frac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$. **C.** $\frac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 56. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $8\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **C.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **D.** $16\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 57. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $12\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $36\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $24\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $18\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 58. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O,R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Câu 59. Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Câu 60. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Câu 61. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Câu 62. Cho hình trụ có O,O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A,B cùng thuộc (O) và C,D cùng thuộc (O') sao cho $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 63. Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Câu 64. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Câu 65. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 66. Cho hình trụ có chiều cao bằng $18a$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục $6a$, ta được thiết diện có chu vi bằng $54a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng:

A. $\frac{2023\pi a^3}{2}$. **B.** $2025\pi a^3$. **C.** $1200\pi a^3$. **D.** $\frac{2025\pi a^3}{2}$.

Câu 67. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy của hình trụ bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 68. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O, R) và (O', R), chiều cao bằng $4a$ và thể tích bằng $4\pi a^3$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn (O', R) và (O, R) sao cho $MN = 3a\sqrt{2}$, khoảng cách giữa OO' và MN bằng

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 69. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với đáy chứa đường tròn (O) một góc 60^0. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq}=\dfrac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 70. Một hình trụ có chiều cao bằng $8cm$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10\,cm$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4\,cm$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $128\pi cm^3$. **B.** $320\pi cm^3$. **C.** $80\pi cm^3$. **D.** $200\pi cm^3$.

Câu 71. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tính V của khối trụ (T).

A. $V=\dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{8}{3}\pi a^3$. **C.** $V=8\pi a^3$. **D.** $V=7\sqrt{7}\pi a^3$.

Câu 72. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A,D sao cho $AD=a\sqrt{15}$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn (O') lấy điểm B (AB và CD chéo nhau). Đặt α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 73. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8\sqrt{2}$. Một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt mặt đáy theo hai dây cung AB và $A'B'$. Biết $AB=A'B'=4$. Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng $8\sqrt{37}$. Tính thể tích khối trụ đã cho.

A. $576\pi\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{288\pi\sqrt{2}}{3}$. **C.** $288\pi\sqrt{2}$. **D.** $72\pi\sqrt{2}$

Câu 74. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $3a$. Gọi A,B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy của hình trụ, biết $AB=5a$. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng AB đến trục của hình trụ.

A. $\sqrt{13}a$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{5}a$. **D.** 4.

Câu 75. Cho khối trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{3}$ và diện tích xung quanh bằng $32\pi\sqrt{3}$. Gọi A và B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của khối trụ sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0, khoảng cách AB và trục của hình trụ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

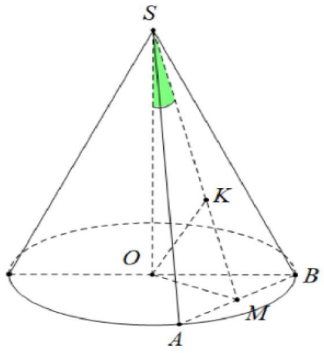
HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Câu 1. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $60°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng bao nhiêu?

A. $3\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{14}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB, tam giác ΔOAB cân tại đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ $\Rightarrow AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$ mà $OK \perp AB \Rightarrow OK \perp (SAB)$.

Ta có: $\begin{cases} SO \cap (SAB) = S \\ OK \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SO,(SAB))} = \widehat{(SO,SK)} = \widehat{OSM} = 60°$.

Tam giác vuông cân SAB có diện tích $4a^2$ suy ra $\frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = 2\sqrt{2}a$

$\Rightarrow AB = 4a \Rightarrow SM = 2a$

Xét tam giác vuông SOM có $\cos\widehat{OSM} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SO = a$

Ta có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = a\sqrt{7}$.

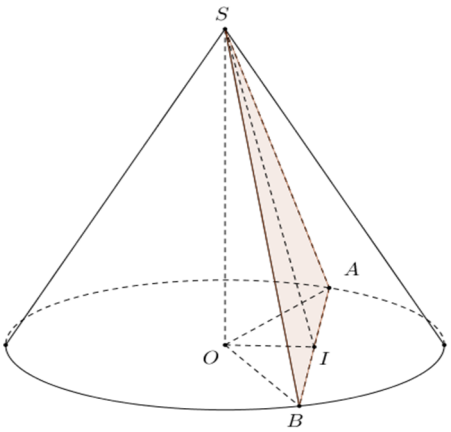
Vậy diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq} = \pi rl = 2a^2\sqrt{14}\pi$.

Câu 2. Cho hình nón có đỉnh S, trục SO, bán kính R, chiều cao h. Dây cung AB thuộc đường tròn đáy và cách O một khoảng $\frac{R}{2}$ như hình vẽ. Ký hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón và diện tích tam giác SAB. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{10\pi}{3\sqrt{3}}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $h = (\sqrt{2} - 1)R$.. **B.** $h = \frac{1}{3}R$.. **C.** $h = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}R$.. **D.** $h = \frac{\sqrt{11}}{8}R$..

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $OI \perp AB$ tại $I \Rightarrow d\left(O;AB\right)=OI=\dfrac{R}{2}$

Đường sinh của hình nón $\ell = SB = SA = \sqrt{R^2+h^2}$.

Khi đó $S_1 = \pi R\ell = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

Áp dụng định lý Pytago ta được

$SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{h^2+\dfrac{R^2}{4}}$ và $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=R\sqrt{3}.$

Khi đó $S_2=\dfrac{1}{2}AB.SI=\dfrac{1}{2}R\sqrt{3}.\sqrt{h^2+\dfrac{R^2}{4}}.$

Theo đề $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{10\pi}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3\sqrt{3}.\pi R\sqrt{R^2+h^2}=10\pi.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.\sqrt{h^2+\dfrac{R^2}{4}}\Rightarrow h=\dfrac{R\sqrt{11}}{8}.$

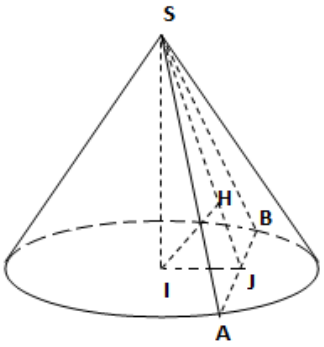
Câu 3. Cho hình nón có đường cao $h=40cm$, bán kính đáy $r=50cm$. Một mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua đỉnh của hình nón, có khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng $\left(P\right)$ bằng $24cm$. Tính diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$.

A. $S=2000\left(cm^2\right)$. **B.** $S=800\left(cm^2\right)$.

C. $S=1200\left(cm^2\right)$. **D.** $S=1600\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là đỉnh của hình nón, I là tâm của đường tròn đáy hình nón.

Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và cắt mặt mặt đáy tại hai điểm A,B sao cho $d\left(I,(P)\right)=24cm$.

Gọi J là trung điểm của AB. Kẻ $IH\perp SI$, $H\in SJ$.

Có: $\begin{cases}AB\perp IJ\\AB\perp SI\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SJI)\Rightarrow(SAB)\perp(SIJ)$

Có $\begin{cases}(SAB)\perp(SIJ)\\(SAB)\cap(SIJ)=SJ\Rightarrow d\left(I,(SAB)\right)=IH=24.\\IH\perp SJ\end{cases}$

Xét tam giác SIJ vuông tại I, đường cao IH, ta có

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{IJ^2}\Leftrightarrow\frac{1}{IJ^2}=-\frac{1}{40^2}+\frac{1}{24^2}$$

$\Rightarrow JI=30$. Suy ra $BJ=\sqrt{IB^2-IJ^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40\Rightarrow AB=80$.

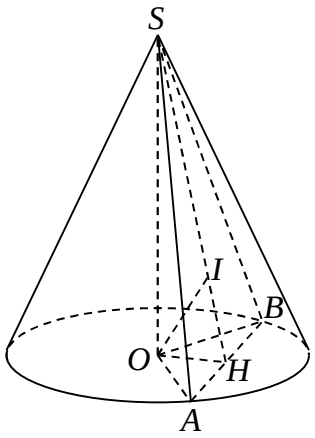
Mặt khác: $SJ=\sqrt{40^2+30^2}=50$.

Vậy $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SJ.AB=\frac{1}{2}50.80=2000\left(cm^2\right)$.

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 6. Mặt phẳng (P) qua đỉnh hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 6. Khoảng cách từ tâm đáy tới mặt phẳng (P) bằng.

A. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\sqrt{21}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



(P) qua đỉnh S cắt đáy theo dây cung $AB \Rightarrow AB = 6 \Rightarrow OA = OB = AB = 6 \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH = 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Kẻ $OI \perp SH$.

Do $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH)$.

Do $\begin{cases} AB \perp (SOH) \\ OI \subset (SOH) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OI$.

Ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ OI \perp SH \end{cases} \Rightarrow OI \perp (SAB) \Rightarrow d\left(O,(P)\right) = d\left(O,(SAB)\right) = OI$.

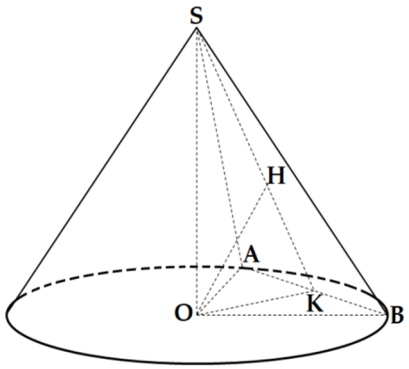
Xét ΔSOH vuông tại O có đường cao OI

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{7}{108} \Rightarrow OI^2 = \frac{108}{7} \Rightarrow OI = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều SAB có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{\sqrt{33}}{9}$. **B.** $\frac{4\sqrt{33}}{9}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải



Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}$ và $SO=\sqrt{11}$.

$S_{\Delta SAB}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\Leftrightarrow AB=6$. ΔSAB đều $\Rightarrow SA=AB=6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, theo định lý Pytago ta có: $R=OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{6^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}=5$.

Gọi K là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O lên SK. Khi đó $d\left(O,\left(SAB\right)\right)=OH$

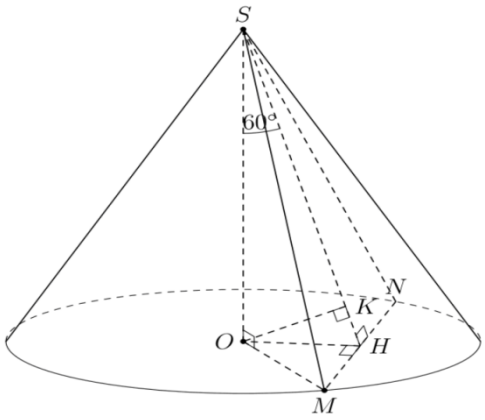
Trong tam giác vuông OBK có: $OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Trong tam giác vuông SOK có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{11}\right)^2}+\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{27}{176}\Rightarrow OH=\dfrac{4\sqrt{33}}{9}$.

Câu 6. Cho hình nón có chiều cao $SO=12$, bán kính đáy $R=24$. Cắt khối nón bởi một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh S và hợp với SO một góc bằng 60^o. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (α).

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** 12.

Lời giải



Gọi M,N lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn đáy, H,K lần lượt là hình chiếu của O lên MN và SH. Ta có $\begin{cases}MN\perp OH\\MN\perp SO\end{cases}\Rightarrow MN\perp OK$.

Mặt khác $SH \perp OK$ nên $OK \perp (SMN)$. Khi đó $(SO,(\alpha)) = (SO,SK) = (SO,SH) = \widehat{OSH} = 60^o$ và $OK = d(O,(\alpha))$.

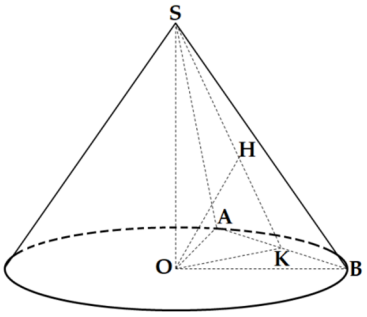
Trong tam giác vuông SOH ta có $OH = SO.\tan\widehat{OSH} = 12.\tan 60^o = 12\sqrt{3} \Rightarrow SH = 24.$

Trong tam giác vuông SOH có: $OK = \dfrac{SO.OH}{SH} = \dfrac{12.12\sqrt{3}}{24} = 6\sqrt{3}$.

Câu 7. Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải



Có $(P) \equiv (SAB)$.

Chu vi đường tròn đáy bằng $4\pi a \Leftrightarrow 2\pi r = 4\pi a \Leftrightarrow r = 2a$

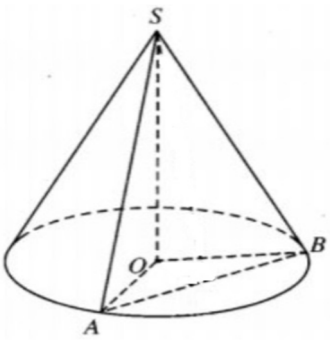
Ta có $SO = a = h, OA = OB = r = 2a, AB = 2a\sqrt{3}$, gọi K là hình chiếu của O lên AB suy ra K là trung điểm AB, gọi H là hình chiếu của O lên SK suy ra $d(O;(SAB)) = OH$.

Ta tính được $OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = a$ suy ra SOK là tam giác vuông cân tại O, suy ra H là trung điểm của SK nên $OH = \dfrac{SK}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân có diện tích a^2. Gọi A, B là hai điểm bất kì trên đường tròn (O) sao cho thể tích khối chóp $S.OAB$ lớn nhất và bằng $\dfrac{a^3}{12}$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{xq} = \dfrac{a^2\sqrt{17}}{4}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{2}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Lời giải



Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là h, r. Ta có $\frac{1}{2}h.2r = a^2 \Leftrightarrow hr = a^2$.

Ta có $V_{S.OAB} = \frac{1}{3}SO.S_{OAB} = \frac{1}{3}SO.\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} \le \frac{1}{6}hr^2$.

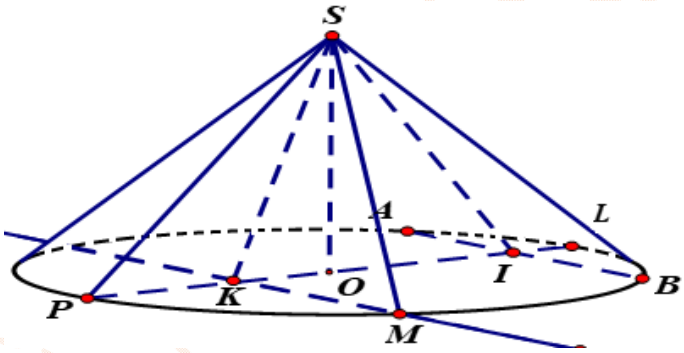
Suy ra $\frac{1}{6}hr^2 = \frac{a^3}{12} \Leftrightarrow 2a^2r = a^3 \Leftrightarrow r = \frac{a}{2} \Rightarrow h = 2a$.

Do đó độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Vậy $S_{xq} = \pi rl = \frac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$.

Câu 9. Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy $r = 10$ và và đường sinh $l = \sqrt{117}$. Gọi A, B và M là ba điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

A. $\sqrt{117}$. **B.** $\frac{340}{13}$. **C.** 9. **D.** $\frac{1700}{117}$.

Lời giải



Ta có chiều cao $h = \sqrt{117 - 100} = \sqrt{17}$.

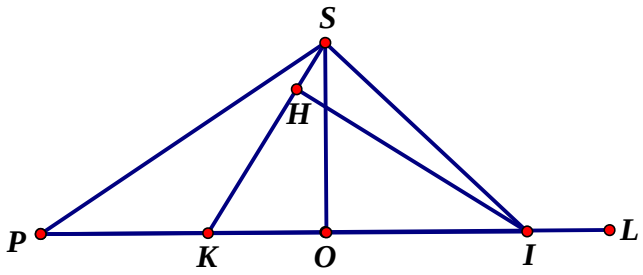
Không mất tổng quát ta cố định AB, điểm M di động

Gọi O là tâm đáy, I là trung điểm AB, P và L là giao điểm giữa IO với đường tròn đáy sao cho O nằm giữa I và P.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt IO tại K.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng SK

Xét tam giác ΔSPI, khi M thay đổi thì K thay đổ trên đoạn PL



Khoảng cách từ I đến SK là IH (với H là hình chiếu của I trên SK).

Nếu góc $\widehat{PSI}$ nhọn thì IH lớn nhất khi K trùng với P

Nếu góc $\widehat{PSI}$ tù hoặc vuông thì IH lớn nhất khi SK vuông góc với SI khi đó H trùng với S.

Ta có $IO=\sqrt{r^2-IA^2}=8$, $OP=r=10$, $SO=h=\sqrt{17}$, $IP=18$, $SP=\sqrt{117}$

Suy ra, $SI=\sqrt{IO^2+SO^2}=\sqrt{64+17}=9$, $\cos\left(\widehat{PSI}\right)=\dfrac{SP^2+SI^2-PI^2}{2SP.SI}=\dfrac{-143}{16\sqrt{117}}<0$ nên góc $\widehat{PSI}$ tù.

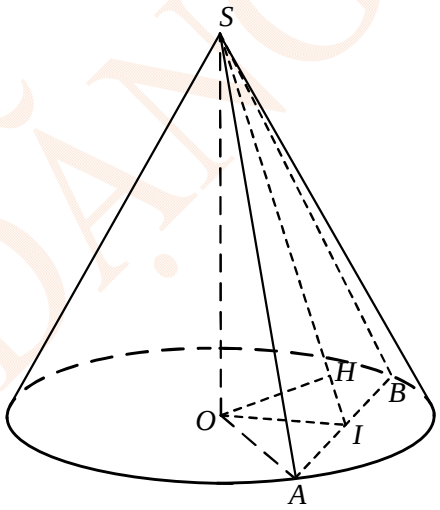
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng $SI=9$

Câu 10. Cho hình nón có chiều cao $h=20$, bán kính đáy $r=25$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=500$. **B.** $S=400$. **C.** $S=300$. **D.** $S=406$

Lời giải

Giả sử hình nón đỉnh S, tâm đáy O và có thiết diện qua đỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là ΔSAB (hình vẽ).



Ta có SO là đường cao của hình nón. Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow OI\perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI\Rightarrow OH\perp SI$.

Ta chứng minh được $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=12$.

Xét tam giác vuông SOI có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{12^2}-\frac{1}{20^2}=\frac{1}{225}$.

$\Rightarrow OI^2=225\Rightarrow OI=15$.

Xét tam giác vuông SOI có $SI=\sqrt{OS^2+OI^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

Xét tam giác vuông OIA có $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20\Rightarrow AB=40$.

Ta có $S=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.SI=\frac{1}{2}.40.25=500$.

Câu 11. Cho khối nón đỉnh S, bán kính đáy bằng $3\sqrt{3}$ và có góc ở đỉnh bằng $120°$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB là tam giác vuông, khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

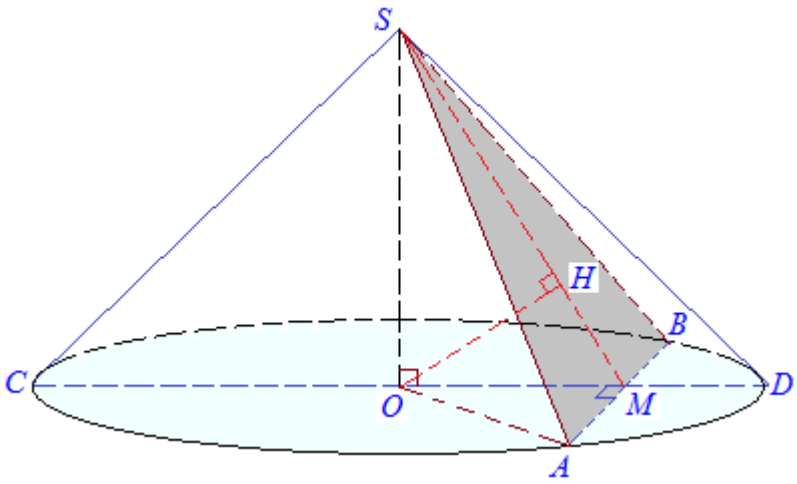
A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

+ Gọi O là tâm của đường tròn đáy và CD là đường kính vuông góc với dây cung AB.

+ Ta có $OA=OB=OC=OD=R=3\sqrt{3}$.

+ Do khối nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ nên $\widehat{OSD}=60°$.



+ Tam giác vuông SOD có: $\begin{cases}\tan\widehat{OSD}=\frac{OD}{SO}\Leftrightarrow\tan 60°=\frac{3\sqrt{3}}{SO}\Leftrightarrow SO=\frac{3\sqrt{3}}{\tan 60°}=3\\ \sin\widehat{OSD}=\frac{OD}{SD}\Leftrightarrow\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{SD}\Leftrightarrow SD=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}=6\end{cases}$.

$\Rightarrow$Khối nón có chiều cao $h=3$ và đường sinh $l=6$.

+ Do tam giác SAB vuông cân tại S, có $SA=SB=l=6$ nên $AB=SA\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

+ Gọi M là giao điểm của AB và CD ta có M là trung điểm của AB (tính chất đường kính vuông góc với dây cung thì đi qua trung điểm của dây cung đó).

Suy ra $MA=MB=\frac{AB}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

+ Tam giác vuông MOA có $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=3$.

+ Kẻ OH vuông góc với SM tại H ta có:

$$\begin{cases} OH\perp SM \\ OH\perp AB\left(do\begin{cases} AB\perp SO \\ AB\perp OM \end{cases}\Rightarrow AB\perp (SOM)\Rightarrow AB\perp OH\right) \end{cases}\Rightarrow OH\perp (SAB).$$

+ Suy ra $d\left(O,(SAB)\right)=OH$. Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao ứng với cạnh huyền SM nên ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OM^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\Leftrightarrow OH=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 12. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với hình nón một thiết diện là tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2}$. Biết mặt phẳng đó tạo với trục của hình nón một góc 30°. Thể tích của hình nón đã cho là

A. $V=\frac{8\pi}{3}$. **B.** $V=9\pi$. **C.** $V=\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

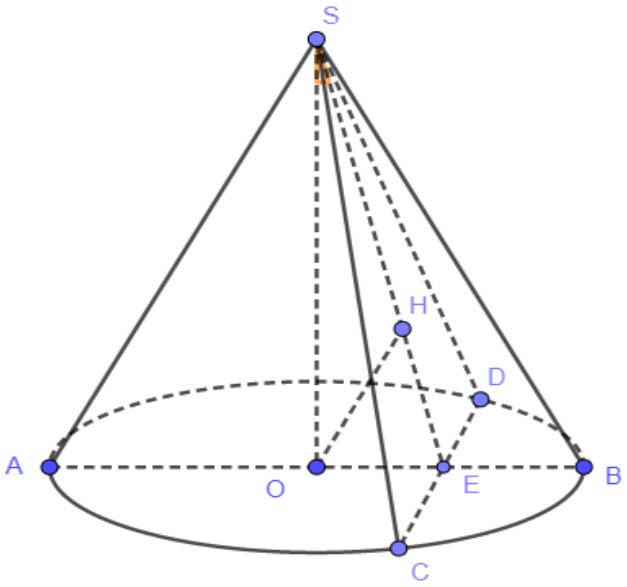
Gọi thiết diện qua trục của hình nón là ΔSAB, mặt phẳng qua đỉnh hình nón là (SCD)

$SO\cap(SCD)=\{S\}$

Gọi E là trung điểm của CD.

ΔOCD cân tại O nên $OE\perp CD$

Vẽ $OH\perp SE$ (1)



Ta có:

$$\left.\begin{matrix} CD\perp OE \\ CD\perp SO \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp(SOE) \text{ mà } OH\subset(SOE) \text{ nên } CD\perp OH\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SCD) \Rightarrow (SO,(SCD)) = \widehat{OSH} = \widehat{OSE} = 30^\circ$

Gọi $SO = x$.

ΔSOE vuông tại O: $OE = SO \cdot \tan 30^\circ = x \tan 30^\circ = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$

$\cos 30^\circ = \dfrac{SO}{SE} \Rightarrow SE = \dfrac{x}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$

ΔSAB vuông tại S nên $SO = OB = OD = x$

$ED = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$

$CD = 2ED = \dfrac{2x\sqrt{6}}{3}$

Ta có: $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} SE \cdot CD \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}x}{3} \cdot \dfrac{2x\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

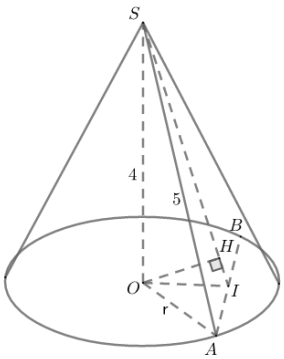
$V_n = \dfrac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$

Câu 13. Một hình nón có chiều cao $h = 4$; độ dài đường sinh $l = 5$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng đó bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón S và cắt đường tròn đáy theo dây cung $AB = 2\sqrt{5}$.

Từ hình vẽ, ta có:

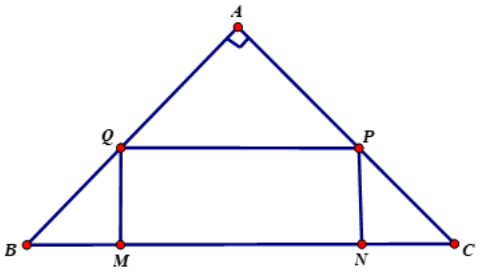
Bán kính đường tròn đáy của hình nón: $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$IA = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{5}$, $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = 2$.

Do đó, ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16}$

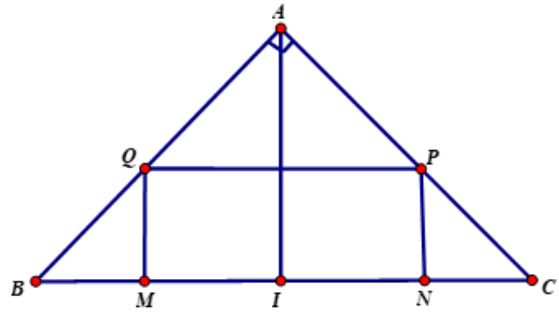
$d(O;(P))=OH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=10\sqrt{2}\,(cm)$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có P,Q lần lượt thuộc cạnh AB,AC và M,N thuộc cạnh BC. Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong của nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn PQ để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.



A. $PQ=5\,cm$. **B.** $PQ=10\,cm$. **C.** $PQ=\frac{20}{3}\ cm$. **D.** $PQ=\frac{40}{3}\ cm$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow I$ là trung điểm MN.

Có $AB=10\sqrt{2}\,(cm)\Rightarrow BC=20(cm)\Rightarrow BI=AI=10(cm)$.

Đặt $PQ=2x\ \ (0<x<10)\Rightarrow BM=BI-IM=10-x$.

Do $MQ//IA\Rightarrow\frac{MQ}{AI}=\frac{BM}{BI}\Rightarrow MQ=\frac{AI.BM}{BI}=\frac{10(10-x)}{10}=10-x$.

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R=MI=x$

$\Rightarrow V_T=\pi R^2h=\pi x^2(10-x)=\pi\left(-x^3+10x^2\right)$.

Xét $f(x)=\pi\left(-x^3+10x^2\right)$ với $0<x<10$.

Khi đó: $f'(x)=\pi\left(-3x^2+20x\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{20}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

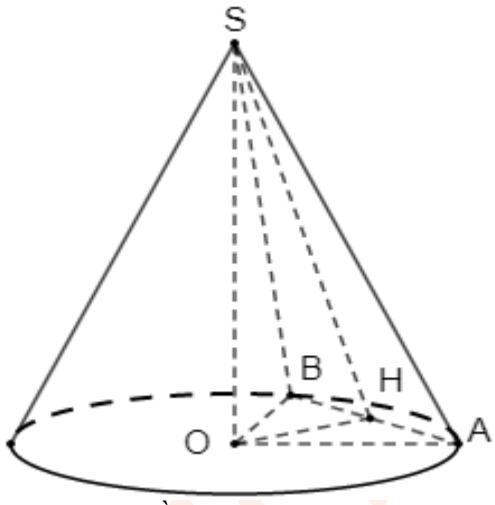
x	0		$\frac{20}{3}$		10
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{4000}{27}$	↘	

Vậy $\max\limits_{x\in(0;10)} f(x)=\frac{4000}{27}$ khi $x=\frac{20}{3}\Rightarrow PQ=\frac{40}{3}(cm)$.

Câu 15. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 12 và thể tích bằng 36π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=4$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. $\frac{208\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{149}$. **C.** 144. **D.** $\sqrt{149}$.

Lời giải



Gọi O, R lần lượt là tâm, bán kính đáy của khối nón và H là trung điểm của AB.

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Rightarrow R^2=\frac{3V}{\pi.h}=\frac{3.36\pi}{\pi.12}=9\Rightarrow R=3$.

Trong tam giác vuông OBH ta có: $OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

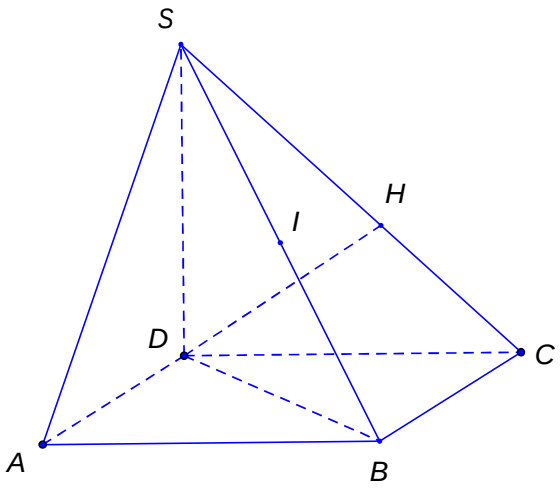
Trong tam giác vuông SOH ta có: $SH=\sqrt{OH^2+SO^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+(12)^2}=\sqrt{149}$.

Vậy diện tích tam giác SAB là $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SH.AB=\frac{1}{2}\sqrt{149}.4=2\sqrt{149}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B. Biết $AB=BC=a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{9\sqrt{3}\pi a^3}{4}$. **B.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $8\pi a^3$. **D.** $12\pi a^3$.

Lời giải



Gọi D là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Do $SA \perp AB \Rightarrow DA \perp AB$, và $SC \perp CB \Rightarrow DC \perp CB$. Vậy suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Trong (SCD) kẻ $DH \perp SC$ tại H.

Ta có $AD // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(D,(SBC)) = DH$.

Ta có $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SD = a\sqrt{6}$. Suy ra $SB = 2a\sqrt{3}$.

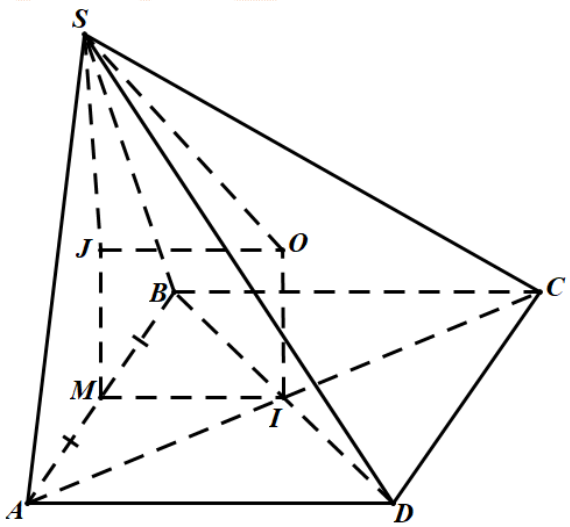
Gọi I là trung điểm SB suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = \frac{SB}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $ABCD$ và tam giác SAB.

M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM \perp AB$ và $IM \perp AB$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $IM \perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp IM$; $OJ \perp (SAB) \Rightarrow OJ \perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật.

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $R = SO = \sqrt{SJ^2 + OJ^2} = \sqrt{R_b^2 + IM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - AM^2} = \sqrt{R_b^2 + IA^2 - \dfrac{AB^2}{4}}$

Áp dụng định lý Pytago: $IA^2 = \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{AB^2 + AD^2}{4} = \dfrac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $R_b = \dfrac{AB}{2\sin \widehat{ASB}} = \dfrac{a}{2.\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

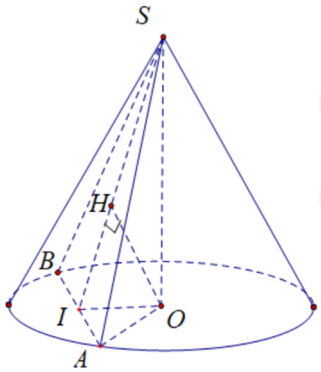
Do đó: $R = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{13}{12}a^2}$

Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{13}{3}\pi a^2$.

Câu 18. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 12 và thể tích bằng $\dfrac{1200\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{24}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{24\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải



Ta có $\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.12 = \dfrac{1200\pi}{3} \Rightarrow OA^2 = 100 \Rightarrow OA = 10$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$. $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = 8$.

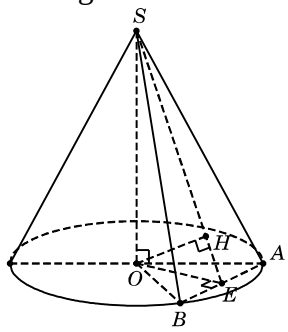
Kẻ $OH \perp SI$ tại $H \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OH = \sqrt{\dfrac{OI^2 SO^2}{OI^2 + SO^2}} = \dfrac{24\sqrt{13}}{13}$.

Câu 19. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng 60^0, khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{R}{2}$. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\dfrac{R\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có tam giác OAB đều cạnh R.



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $OE\perp AB$ và $OE=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH\perp SE$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp OE\\ AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOE)\Rightarrow AB\perp OH.$

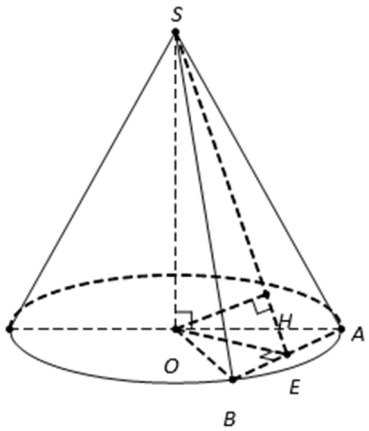
Từ đó suy ra $OH\perp(SAB)$ nên $d\left[O,(SAB)\right]=OH=\dfrac{R}{2}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có $\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{8}{3R^2}\Rightarrow SO=\dfrac{R\sqrt{6}}{4}$.

Câu 20. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Đường cao h của hình nón bằng

A. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=a\sqrt{3}$. **D.** $h=a\sqrt{2}$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S.

Gọi E là trung điểm AB, suy ra $\begin{cases}SE\perp AB\\ OE\perp AB\end{cases}$ và $SE=\dfrac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}AB.SE=4a^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}AB.\dfrac{1}{2}AB=4a^2\Rightarrow AB=4a\Rightarrow SE=2a$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SE, suy ra $OH\perp SE$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow AB \perp OH.$

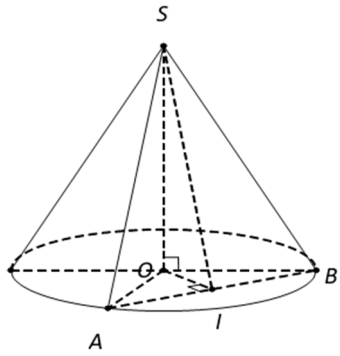
Từ đó suy ra $OH \perp (SAB)$ nên $30^0 = \left(\widehat{SO,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SO,SH}\right) = \widehat{OSH} = \widehat{OSE}.$

Trong tam giác vuông SOE, ta có $SO = SE.\cos\widehat{OSE} = a\sqrt{3}.$

Câu 21. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$, $\widehat{SAB} = 60^0$. Độ dài đường sinh ℓ của hình nón bằng

A. $\ell = a$. **B.** $\ell = a\sqrt{2}$. **C.** $\ell = a\sqrt{3}$. **D.** $\ell = 2a$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $OI \perp AB, SI \perp AB$ và $OI = a$.

Trong tam giác vuông SOA, ta có $OA = SA.\cos\widehat{SAO} = \dfrac{SA\sqrt{3}}{2}.$

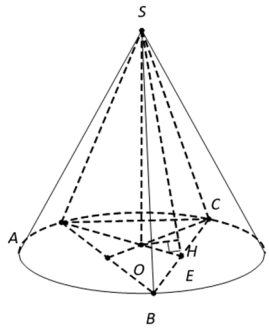
Trong tam giác vuông SIA, ta có $IA = SA.\cos\widehat{SAB} = \dfrac{SA}{2}.$

Trong tam giác vuông OIA, ta có $OA^2 = OI^2 + IA^2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}SA^2 = a^2 + \dfrac{1}{4}SA^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp của đáy ABC đến một mặt bên là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC, dựng $OH \perp SE$ tại H.

Chứng minh được $OH \perp (SBC)$ nên suy ra $OH = d\left[O,(SBC)\right] = \dfrac{a}{2}.$

S

Trong tam giác đều ABC, ta có $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OA=\frac{2}{3}AE=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

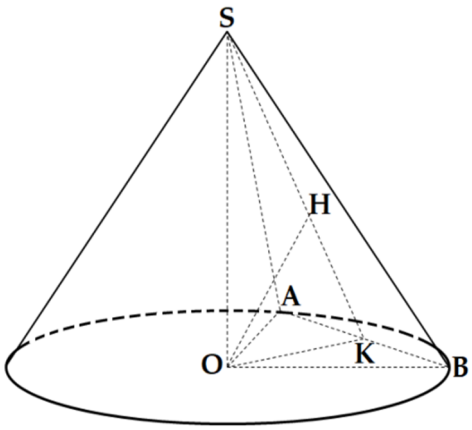
Trong tam giác vuông SOE, ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{SO^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow SO=a$.

Vậy thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi OA^2.SO=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a=\frac{4\pi a^3}{9}$ (đvtt).

Câu 23. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 6 và thể tích bằng 50π. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=8$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK.

$\left.\begin{matrix}AB\perp OK\\AB\perp SO\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp(SOK)$. Suy ra $AB\perp OH$.

$\left.\begin{matrix}OH\perp SK\\OH\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow OH\perp(SAB)$. Suy ra khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Ta có $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Rightarrow R^2=\frac{3V}{\pi.h}=\frac{3.50\pi}{\pi.6}=25\Rightarrow R=5$.

Trong tam giác vuông OBK có $OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

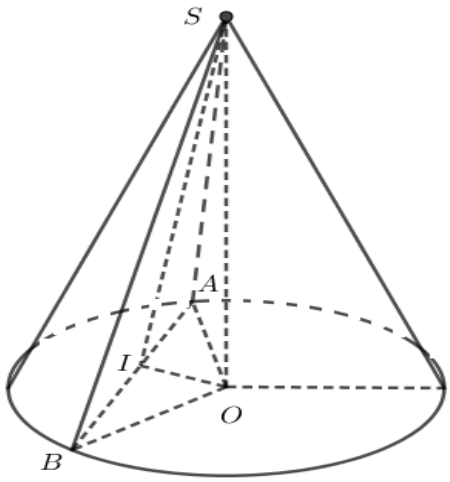
Trong tam giác vuông SOK có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{5}{36}\Rightarrow OH=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 24. Cho hình nón có chiều cao bằng $2a$, biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc 30^0, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $4\left(4\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$. **B.** $4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

C. $8\sqrt{14}\pi a^2$. **D.** $8\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Lời giải



Giả sử thiết diện thu được là tam giác vuông SAB.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có góc giữa (P) và mặt đáy của hình nón là góc $SIO = 30^0$. Xét ΔSOI vuông tại O, có $\sin 30^0 = \dfrac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{SO}{\sin 30^0} = \dfrac{2a}{\dfrac{1}{2}} = 4a$.

$OI^2 = SI^2 - SO^2 = (4a)^2 - (2a)^2 = 12a^2 \Rightarrow OI = 2a\sqrt{3}$.

Xét ΔSAB vuông cân tại S, ta có $SI = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 8a$. Suy ra $IB = 4a$.

$SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow 2SB^2 = (8a)^2 \Rightarrow SB = 4a\sqrt{2}$.

Xét ΔBIO vuông tại I, ta có $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{7}$.

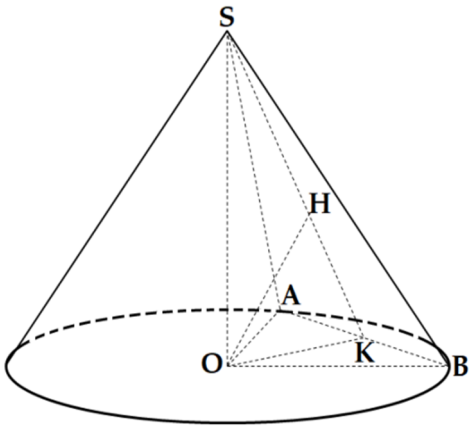
Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi.2a\sqrt{7}.4a\sqrt{2} + \pi\left(2a\sqrt{7}\right)^2 = 4\left(2\sqrt{14}+7\right)\pi a^2$.

Câu 25. Cho hình nón có đỉnh S, chiều cao bằng $3a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích tam giác SAB bằng $9a^2$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho.

A. $\dfrac{219\pi a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{73\pi a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{73\pi a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Lời giải



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK.

$\left.\begin{array}{l} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOK)$. Suy ra $AB \perp OH$.

$\left.\begin{array}{l} OH \perp SK \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB)$. Suy ra khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Trong tam giác vuông SOK có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{(3a)^2} = \dfrac{8}{9a^2}$

$\Rightarrow OK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$SK^2 = SO^2 + OK^2 = (3a)^2 + \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{81a^2}{8} \Rightarrow SK = \dfrac{9a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác cân SAB có

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SK.AB \Rightarrow AB = \dfrac{2.S_{\Delta SAB}}{SK} = \dfrac{2.9a^2}{\dfrac{9a\sqrt{2}}{4}} = 4a\sqrt{2}$.

Suy ra $BK = 2a\sqrt{2}$.

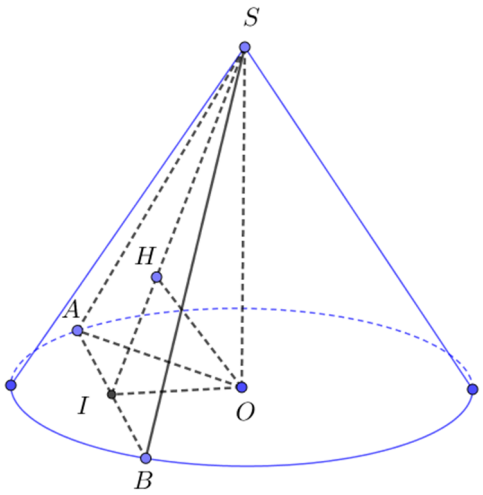
Trong tam giác vuông OBK có $OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{146}}{4}$.

Thể tích khối nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi . \left(\dfrac{a\sqrt{146}}{4}\right)^2 .3a = \dfrac{73\pi a^3}{8}$.

Câu 26. Cho hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng 4 và diện tích xung quanh hình nón bằng $16\sqrt{2}\pi$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A, B và $AB = 4\sqrt{3}$. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) bằng

A. 2. **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải



Ta có: $S_{xq}=\pi.r.l=16\sqrt{2}\pi\Rightarrow l=4\sqrt{2}$.

Mặt khác $l^2=h^2+r^2$ nên $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$.

Gọi I là trung điểm cạnh AB, suy ra $OI\perp AB$.

Do SO vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tâm O nên $SO\perp AB$.

Khi đó $AB\perp(SOI)$.

Trong tam giác SOI, dựng $OH\perp SI$.

Do $AB\perp(SOI)$, nên $AB\perp OH$, từ đó suy ra $OH\perp(SAB)$.

Vậy $d(O,(P))=d(O,(SAB))=OH$.

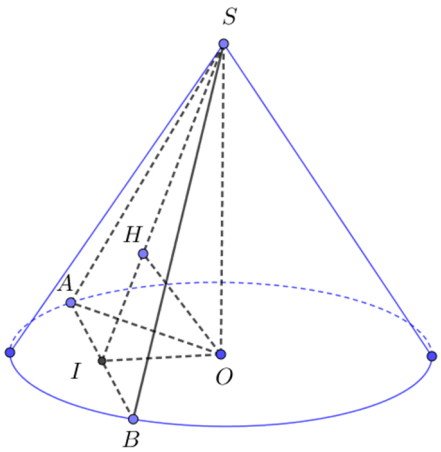
Xét tam giác vuông IOA: $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=2$.

Trong tam giác vuông OIS: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16}\Rightarrow OH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 27. Cho hình nón có chiều cao $h=6$ và thể tích khối nón bằng 50π. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Tính diện tích của thiết diện đó?

A. $24\sqrt{5}$. **B.** $12\sqrt{5}$. **C.** 9. **D.** $6\sqrt{5}$.

Lời giải



Gọi hình nón đã cho có đỉnh là S và tâm của đáy là O; thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB.

Ta có $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=50\pi \Rightarrow r^2=25\Rightarrow r=5$.

Dựng $OI\perp AB$,suy ra $AB\perp(SOI)$.

Trong tam giác SOI, dựng $OH\perp SI$.

Do $AB\perp(SOI)$, nên $AB\perp OH$, từ đó suy ra $OH\perp(SAB)$.

Vậy $d(O,(P))=d(O,(SAB))=OH$, suy ra $OH=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác vuông OIS: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OI^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow OI=3$.

Khi đó $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông IAO: $AI=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{25-9}=4\Rightarrow AB=8$.

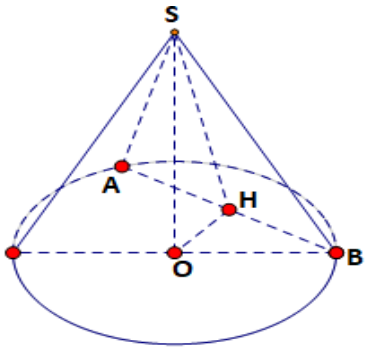
Vậy diện tích tam giác SAB là: $\frac{1}{2}.AB.SI=\frac{1}{2}.8.3\sqrt{5}=12\sqrt{5}$.

Câu 28. Hình nón (N) đỉnh S, có tâm của đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh 120^0. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N).

A. $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$ **B.** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$.

C. $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB$ tại H

Mà $OH \perp SO$ tại $O \Rightarrow OH$ là khoảng cách giữa AB và SO

Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông cân tại S và $OH = 3$; và $\widehat{BSO} = 60°$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60°} \Rightarrow l = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $BH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2} = \dfrac{1}{2}SB\sqrt{2} = \dfrac{r\sqrt{6}}{3}$.

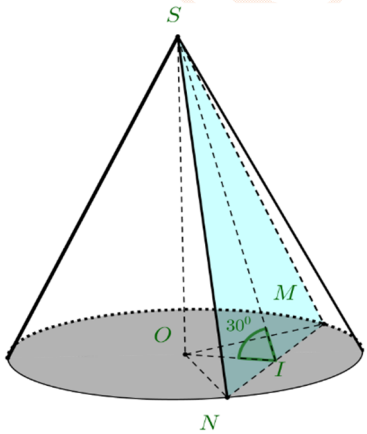
Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $OB^2 = BH^2 + OH^2 \Leftrightarrow 9 + \dfrac{6r^2}{9} = r^2 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là $S_{xq} = \pi.r.l = \pi.3\sqrt{3}.\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 18\pi\sqrt{3}$.

Câu 29. Cho khối nón (S). Cắt khối nón bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và tạo với đáy góc $30°$ thiết diện thu được là tam giác đều cạnh có độ dài là 1. Thể tích khối nón (S) là

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{192}$ **B.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{192}$. **C.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{64}$. **D.** $\dfrac{13\pi\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải



Khối nón có đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện là tam giác SMN đều cạnh có độ dài bằng 1. Từ O kẻ OI vuông góc với MN tại I ta có $\widehat{SIO} = 30°$.

Tam giác SMN đều cạnh có độ dài bằng 1, đường cao $SI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

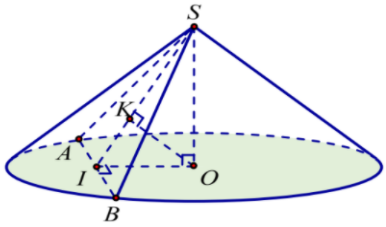
$OI = SI.\cos 30° = \frac{3}{4}$; $h = SO = SI.\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{13\pi\sqrt{3}}{192}$.

Câu 30. Cho hình nón có chiều cao $h = 20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12\,\text{cm}$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 500\,\text{cm}^2$. **B.** $S = 300\,\text{cm}^2$. **C.** $S = 406\,\text{cm}^2$. **D.** $S = 400\,\text{cm}^2$.

Lời giải



Gọi O, S lần lượt là tâm của mặt đáy và đỉnh của hình nón. A, B là giao điểm của thiết diện đi qua đỉnh và đường tròn đáy.

Kẻ $OI \perp AB$; $OK \perp SI$ khi đó ta có:

$SO = h = 20cm; OK = d = 12cm$.

Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có:

$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OI = 15cm \Rightarrow IB = 20cm \Rightarrow AB = 40cm$.

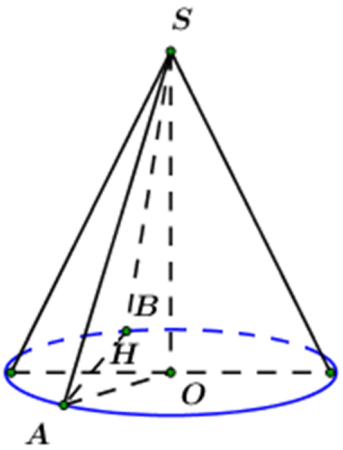
Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông cho tam giác $SOI \Rightarrow SI = 25\ cm$.

$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}.SI.AB = 500\,\text{cm}^2$.

Câu 31. Cho khối nón có đỉnh S, O là tâm đường tròn đáy, bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh là $6\sqrt{3}\pi$. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho ΔSAB có diện tích là 3 và AB không là đường kính. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải



Ta có $\pi Rl = 6\sqrt{3}\pi \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} l^2 \sin \widehat{ASB} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{ASB} = 120^0 \\ \widehat{ASB} = 60^0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB = \sqrt{2l^2 - 2l^2 \cos \widehat{ASB}} = 6 \\ AB = \sqrt{2l^2 - 2l^2 \cos \widehat{ASB}} = 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu của O lên đoạn AB ta có $OH = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{6}$

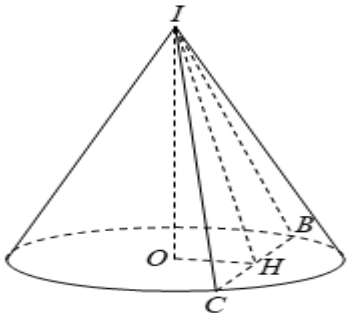
Ta có $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{3}$

Ta có $\frac{1}{\left[d\left(O;(SAB)\right)\right]^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow d\left(O;(SAB)\right) = \sqrt{2}$.

Câu 32. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **B.** $S = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $S = \frac{a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Lời giải



Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}a$ nên bán kính của hình nón là $r=OB=OC=a\sqrt{2}$, đường sinh $l=IB=IC=2a$ và đường cao $h=IO=\sqrt{IB^2-OB^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=a\sqrt{2}$.

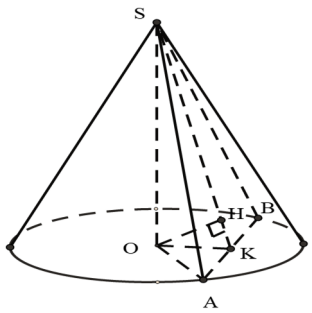
Gọi H là trung điểm BC, khi đó góc hợp bởi mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng chứa đường tròn đáy là $\widehat{IHO}=60°$. Suy ra $IH=\dfrac{IO}{\sin 60°}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $BC=2CH=2\sqrt{IC^2-IH^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$.

Diện tích tam giác IBC là: $S_{IBC}=\dfrac{1}{2}IH.BC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 33. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng **cách** từ O đến (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30°,\widehat{SAB}=60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin\widehat{SAO}=\dfrac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin\widehat{SAB}=\dfrac{SK}{SA}\Rightarrow SK=\dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

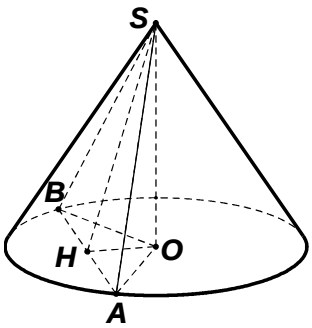
Xét tam giác SOK ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OK^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{SK^2-SO^2}+\dfrac{1}{SO^2}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{\frac{SA^2}{4}}+\dfrac{1}{\frac{3SA^2}{4}-\frac{SA^2}{4}}=\dfrac{4}{SA^2}+\dfrac{2}{SA^2}\Rightarrow\dfrac{6}{SA^2}=\dfrac{3}{a^2}\Rightarrow SA=2a^2\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$

Câu 34. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều sao cho góc hợp bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón có số đo bằng $60°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. 104π. **B.** $\dfrac{4\sqrt{39}\pi}{3}$. **C.** $104\sqrt{3}\pi$. **D.** $\dfrac{104\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải



Mặt phẳng qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB.

Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH \perp AB$ và $OH \perp AB$. Do đó góc hợp bởi bởi mặt phẳng thiết diện và mặt đáy của hình nón là góc $\widehat{SHO} = 60°$

Theo đề bài ta có: $h = SO = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHO vuông tại O có $\cos\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{SH} \Rightarrow SH = \dfrac{SO}{\cos 60°} = 4\sqrt{3}$.

mà $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ (do tam giác SAB là tam giác đều) $\Rightarrow AB = \dfrac{2SH}{\sqrt{3}} = 8$

$\Rightarrow SA = SB = AB = 8$.

ΔSOA vuông tại O ta có: $SA^2 = OA^2 + SO^2 \Rightarrow OA^2 = SA^2 - SO^2 = 52$.

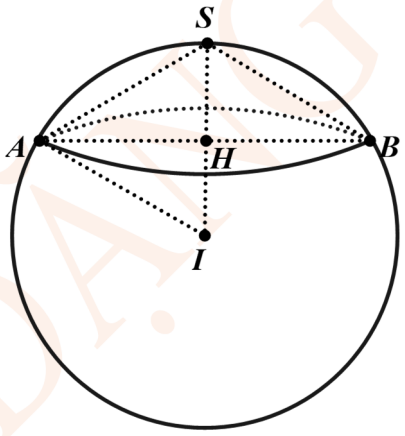
$\Rightarrow r^2 = OA^2 = 52$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.52.2\sqrt{3} = \dfrac{104\sqrt{3}\pi}{3}$ (đơn vị thể tích).

Câu 35. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ và chiều cao bằng 3. Gọi (S) là mặt cầu đi qua đỉnh và chứa đường tròn đáy của hình nón đã cho. Diện tích của (S) bằng:

A. 108π. **B.** 144π. **C.** 96π. **D.** 48π.

Lời giải



Gọi S là đỉnh hình nón và gọi I là tâm mặt cầu.

Gọi đường kính đường tròn đáy của hình nón là AB, H là trung điểm của AB.

Ta có: $\widehat{ASH} = \dfrac{1}{2}\widehat{ASB} = 60^0$, $AS = \dfrac{SH}{\cos 60^\circ} = 6 = 2SH$.

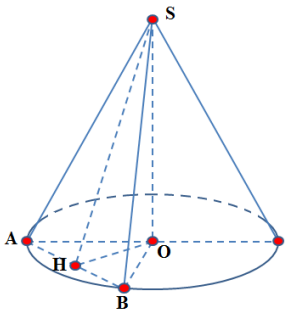
Vì $\begin{cases} AI = AS \\ \widehat{ASI} = 60^0 \end{cases}$ nên ΔAIS là tam giác đều. Suy ra $AI = R = 2SH = 6$.

Vậy $S_{(S)} = 4\pi R^2 = 4\pi.6^2 = 144\pi$.

Câu 36. Cho hình nón (N) có đỉnh là S, tâm đường tròn đáy là O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích của hình nón (N)?

A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 48\pi$. **C.** $V = 64\pi$. **D.** $V = 16\pi$.

Lời giải



Vì góc ở đỉnh bằng $120°$ nên ta có $\widehat{ASO} = 60°$.

Gọi H là trung điểm của AB, khi đó OH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SO và SO. Như vậy $d(SO, AB) = OH = 4$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SA = \dfrac{OA}{\sin 60°} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác OHB vuông tại H có $HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - 16}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S nên ta có

$$AB = l\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - 16} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\left(R^2 - 16\right) = 2R^2 \Leftrightarrow R^2 = 48 \Leftrightarrow R = 4\sqrt{3} \Rightarrow l = 8.$$

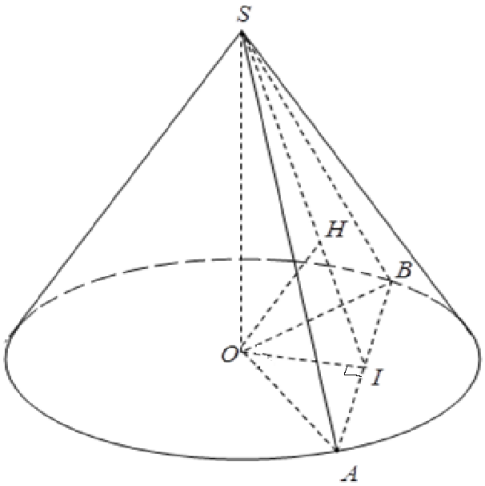
Suy ra $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{8^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4$.

Vậy thể tích của hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(4\sqrt{3}\right)^2.4 = 64\pi$.

Câu 37. Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 10, đáy là đường tròn tâm O. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho hình chóp $S.OAB$ có thể tích bằng 40. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{20\sqrt{29}}{29}$. Tính thể tích khối nón (N).

A. $\dfrac{250\pi}{3}$. **B.** 500π. **C.** 250π. **D.** $\dfrac{500\pi}{3}$.

Lời giải



Từ đề bài ta có: $SO=10$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$

Mà $SO \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (SOI)$

Trong mặt phẳng (SOI) dựng $OH \perp SI$

Do $AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

$\Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow$ khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là $OH = \dfrac{20\sqrt{29}}{29}$

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \dfrac{29}{400}=\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OI=4$

Thể tích của khối chóp $S.OAB$: $V_{S.OAB}=\dfrac{1}{3}SO.S_{OAB}=\dfrac{1}{6}.SO.OI.AB=\dfrac{1}{6}.10.4.AB=\dfrac{20}{3}AB$

Mà $V_{S.OAB}=40 \Rightarrow AB=6$

Bán kính của đường tròn đáy $R=OA=\sqrt{OI^2+\dfrac{AB^2}{4}}=\sqrt{4^2+\dfrac{6^2}{4}}=5$

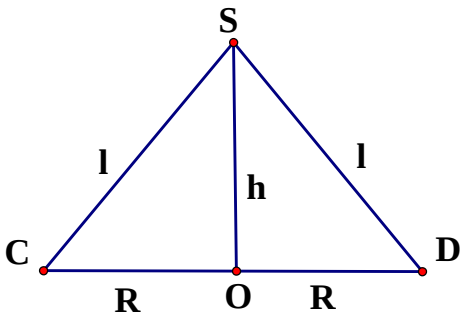
Thể tích của khối nón (N): $V=\dfrac{1}{3}SO.\pi.R^2=\dfrac{1}{3}.10.\pi.5^2=\dfrac{250\pi}{3}$.

Câu 38. Cho khối nón (N) có đỉnh S, chiều cao bằng 5, đáy là đường tròn tâm O. Thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho diện tích của tam giác OAB bằng 12. Biết độ dài đoạn $AB<7$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{12}{5}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{29}}{29}$. **D.** $\dfrac{15\sqrt{34}}{34}$.

Lời giải

Xét thiết diện chứa SO của khối nón (N) là tam giác vuông cân SCD như hình vẽ.



Ta có chiều cao $SO=5$, tam giác SCD vuông cân nên $\Rightarrow SO=\dfrac{CD}{2}\Rightarrow R=h=5$.

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại $O\Rightarrow OI\perp AB$

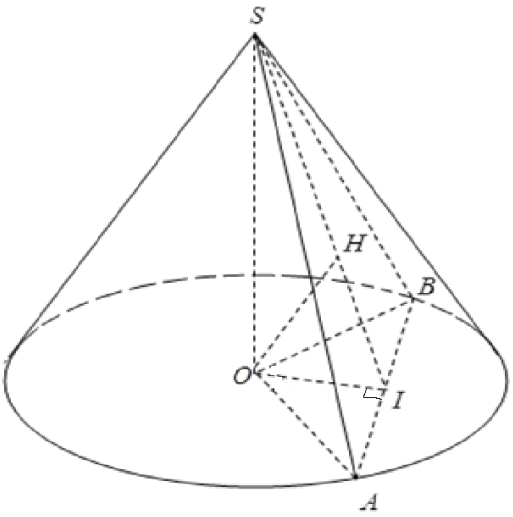
Xét tam giác OAB: Theo đề bài ta có $S_{OAB}=12\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}OI.AB=12\Leftrightarrow OI.AB=24(*)$

Do ΔIOA vuông tại I

$\Rightarrow OI^2+AI^2=OA^2\Leftrightarrow OI^2+\dfrac{AB^2}{4}=25(**)$

Từ $(*)$ và $(**)\Rightarrow\begin{cases}OI=4\\AB=6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}OI=3\\AB=8\end{cases}$. Do $AB<7\Rightarrow\begin{cases}OI=4\\AB=6\end{cases}$

Xét hình nón (N)



Ta có: $OI\perp AB$

Mà $SO\perp AB$

$\Rightarrow AB\perp(SOI)$

Trong mặt phẳng (SOI) dựng $OH\perp SI$

Do $AB\perp(SOI)\Rightarrow AB\perp OH$

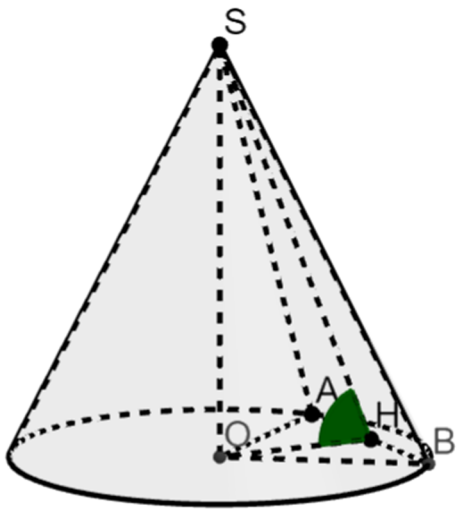
$\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là OH

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{41}{400}\Rightarrow OH=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}\Rightarrow d\left(O,(SAB)\right)=\dfrac{20\sqrt{41}}{41}$.

Câu 39. Cho khối nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng 7. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=10$. Mặt phẳng (SAB) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Thể tích của khối nón bằng

A. $98\sqrt{2}$. **B.** $98\pi\sqrt{2}$. **C.** $98\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $98a^3\sqrt{2}$.

Lời giải



Trong (OAB), kẻ $OH \perp AB \ (H \in AB)$

Ta có:

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp SH$$

$$\Rightarrow ((SAB),(OAB)) = (SH;OH) = \widehat{SHO} = 60^\circ$$

Ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$

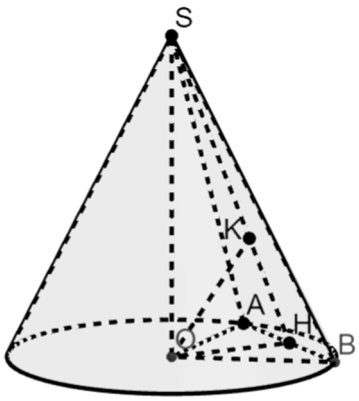
Ta có: $\tan\widehat{SHO} = \tan 60^\circ = \dfrac{SO}{OH} \Rightarrow SO = OH.\tan 60^\circ = 6\sqrt{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi (7)^2 \left(6\sqrt{2}\right) = 98\pi\sqrt{2}.$$

Câu 40. Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng a, độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (Q) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $a\left(2\sqrt{3}+1\right)$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải



Ta có:

$$SA + SB + AB = a\left(2\sqrt{3}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{3} + a\sqrt{3} + AB = a\left(2\sqrt{3}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a\sqrt{3} + AB = 2a\sqrt{3} + a$$

$$\Leftrightarrow AB = a$$

Trong (OAB), kẻ $OH \perp AB \ (H \in AB)$

Trong (SOH), kẻ $OK \perp SH \ (K \in SH)$

Ta có: $\begin{cases} OH \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK \Rightarrow OK \perp (SAB)$

$$\Rightarrow d\left(O;(Q)\right) = OK$$

Ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

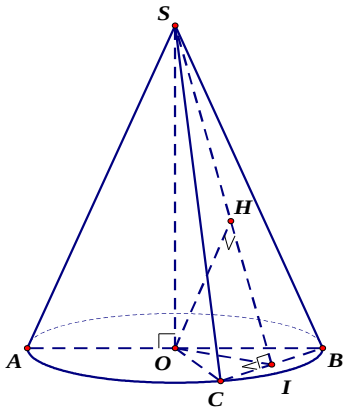
$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Ta có: $OK = \dfrac{SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = \dfrac{a\sqrt{66}}{11}$

Câu 41. Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $6a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng $3a$ ta được thiết diện có diện tích bằng $12\sqrt{11}a^2$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $36\sqrt{5}\pi\ a^3$. **B.** $270\pi\ a^3$. **C.** $90\pi\ a^3$. **D.** $12\sqrt{5}\pi\ a^3$.

Lời giải



Giả sử mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SBC.

Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$.

Kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$, mà $OH \perp BC$ (vì $BC \perp (SOI)$ và $OH \subset (SOI)$)

suy ra $OH \perp (SBC)$.

Theo giả thiết có: $SO = 6a$, $S_{SBC} = 12\sqrt{11}a^2$ và $d(O;(SBC)) = OH = 3a$.

Trong ΔSOI vuông tại O có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = 2\sqrt{3}a$

$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 4\sqrt{3}a$.

Ta có: $S_{SBC} = \frac{1}{2}SI.BC \Rightarrow BC = \frac{2S_{SBC}}{SI} = 2\sqrt{33}a \Rightarrow IC = \frac{BC}{2} = \sqrt{33}a$.

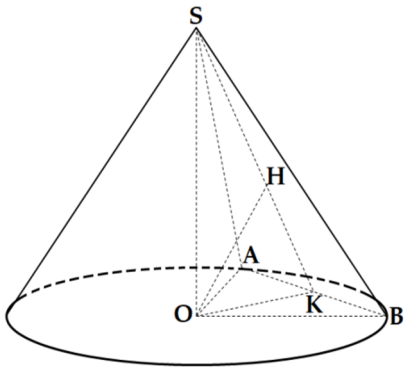
Trong ΔOIC vuông tại I có: $OC = \sqrt{OI^2 + IC^2} = 3\sqrt{5}a = R$.

Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi\ .SO.OC^2 = 90\pi\ a^3$.

Câu 42. Cho khối nón có đỉnh S, cắt khối nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh của khối nón tạo thành thiết diện là tam giác SAB. Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến thiết diện bằng 2, AB = 12, bán kính đường tròn đáy bằng 10. Chiều cao h của khối nón là:

A. $\frac{8\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{15}$. **C.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}$. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón, K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK. Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH

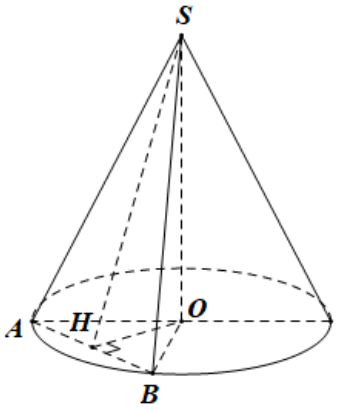
Ta có $OK=\sqrt{OB^2-KB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

Trong tam giác vuông SOK có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{8^2}\Rightarrow SO=\frac{8}{\sqrt{15}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$.

Câu 43. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=2a$. Trên đường tròn đáy lấy 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $4a^2\sqrt{2}$, thể tích khối nón đã cho bằng

A. $V=\frac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **C.** $V=\frac{2\pi a^3\sqrt{14}}{3}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{14}}{6}$.

Lời giải



Kẻ $OH\perp AB$, $(H\in AB)\Rightarrow H$ là trung điểm AB và $SH\perp AB$.

Do tam giác OAB vuông $\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2a\sqrt{2}\\OH=\frac{AB}{2}=a\sqrt{2}\end{cases}$

Ta có $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SH.AB\Rightarrow SH=\frac{2S_{\Delta SAB}}{AB}=\frac{2.4a^2\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}}=4a.$

Xét ΔSOH vuông tại O có: $SO=\sqrt{SH^2-OH^2}=\sqrt{16a^2-2a^2}=a\sqrt{14}$.

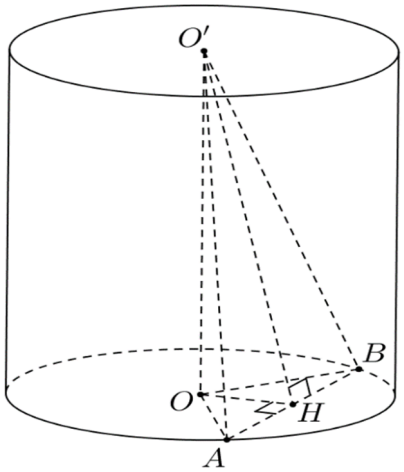
Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V=\frac{1}{3}\pi R^2.SO=\frac{1}{3}\pi(2a)^2.a\sqrt{14}=\frac{4\pi a^3\sqrt{14}}{3}$.

HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

Câu 44. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq}=\dfrac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow OH\perp AB\ (1)$.

Lại có: $OO'\perp(OAB)\Rightarrow OO'\perp AB\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(O'OH)\Rightarrow AB\perp O'H\Rightarrow \widehat{O'HO}=60°$

Đặt $OH=x$. Khi đó: $0<x<3$ và $OO'=x\tan 60^0=x\sqrt{3}$.

Xét ΔOAH, ta có: $AH^2=9-x^2$.

Vì $\Delta O'AB$ đều nên: $O'A=AB=2AH=2\sqrt{9-x^2}\ (3)$.

Mặt khác $\Delta AOO'$ vuông tại O nên $AO'^2=OO'^2+3^2=3x^2+9\ (4)$.

Từ $(3),(4)$ ta có: $4(9-x^2)=3x^2+9\Leftrightarrow x^2=\dfrac{27}{7}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\Rightarrow h=OO'=x\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$.

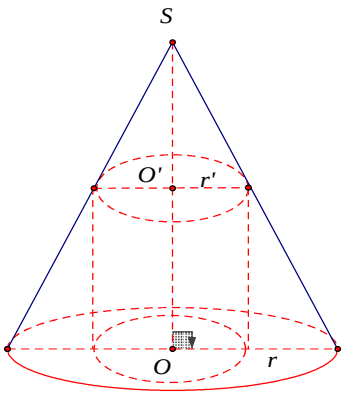
Độ dài đường sinh hình nón là $l=O'A=\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$.

Vậy: $S_{xq}=\pi Rl=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 45. Cho hình nón có thể tích là V, khối trụ nội tiếp trong hình nón có diện tích đáy bằng một nửa diện tích đáy của khối nón. Tính thể tích V' của khối trụ theo V.

A. $V'=\dfrac{V}{2}$. **B.** $V'=\dfrac{3V}{2}$. **C.** $V'=\dfrac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.V$. **D.** $V'=\dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}.V$.

Lời giải



Gọi chiều cao của khối trụ cần tìm là x, bán kính kính đáy là r',
h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình nón, ta có hình vẽ như trên.

Theo giả thiết : $\pi r'^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Theo định lí Ta-Let ta có:

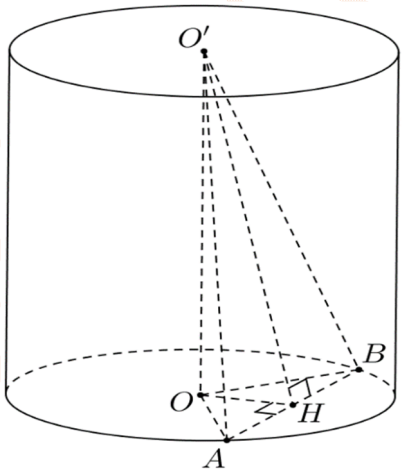
$\frac{SO'}{SO} = \frac{r'}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(h-x) = h \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h,\ (0 < x < h)$.

Thể tích hình trụ là: $V' = \pi r'^2 x = \pi \frac{r^2}{2}.\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.\pi r^2 h = \frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}}.V$.

Câu 46. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq} = \frac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq} = \frac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq} = \frac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq} = \frac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB\ (1)$.

Lại có: $OO' \perp (OAB) \Rightarrow OO' \perp AB\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (O'OH) \Rightarrow AB \perp O'H \Rightarrow \widehat{O'HO} = 60°$

Đặt $OH = x$. Khi đó: $0 < x < 3$ và $OO' = x\tan 60^0 = x\sqrt{3}$.

Xét ΔOAH, ta có: $AH^2 = 9 - x^2$.

Vì $\Delta O'AB$ đều nên: $O'A = AB = 2AH = 2\sqrt{9-x^2}$ (3).

Mặt khác $\Delta AOO'$ vuông tại O nên $AO'^2 = OO'^2 + 3^2 = 3x^2 + 9$ (4).

Từ $(3),(4)$ ta có: $4\left(9-x^2\right) = 3x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{7} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{21}}{7} \Rightarrow h = OO' = x\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{7}}{7}$.

Độ dài đường sinh hình nón là $l = O'A = \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

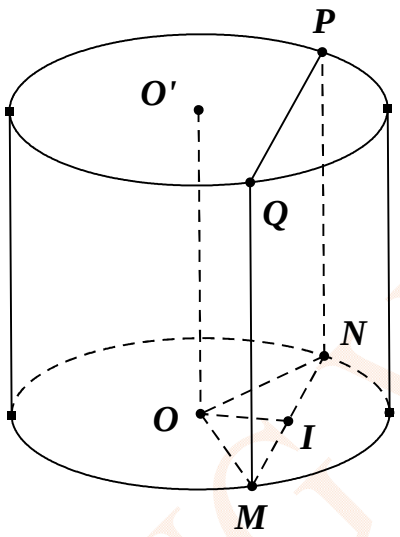
Vậy: $S_{xq} = \pi Rl = \frac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 47. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



.

Thiết diện $MNPQ$ là hình vuông nên $MI = \frac{MN}{2} = 3a$

Mặt phẳng $(MNPQ)$ cách trục một khoảng bằng $3a$ nên $OI = 3a$

Suy ra tam giác OIM vuông cân tại I. Khi đó $OM = 3\sqrt{2}a$

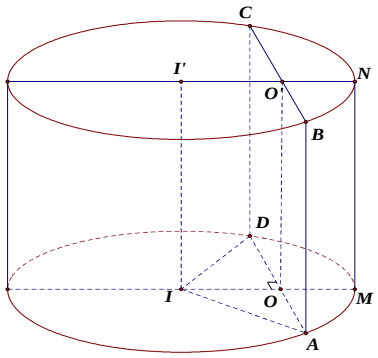
Vậy $V = \pi R^2 h = \pi\left(3\sqrt{2}a\right)^2 .6a = 108\pi a^3$.

Câu 48. Cắt một hình trụ bằng mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 16. Biết khoảng cách từ tâm đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng 3. Tính thể tích khối trụ.

A. $2\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{52\pi}{3}$. **C.** 52π. **D.** 13π.

Lời giải

Chọn C



Dựng các dữ kiện bài toán theo hình vẽ trên.

Mặt phẳng (α) vuông góc mặt đáy, ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 16 $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng 4.

Khoảng cách từ tâm I đáy hình trụ đến mặt phẳng (α) bằng $3 \Rightarrow IO = 3$.

Ta có $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

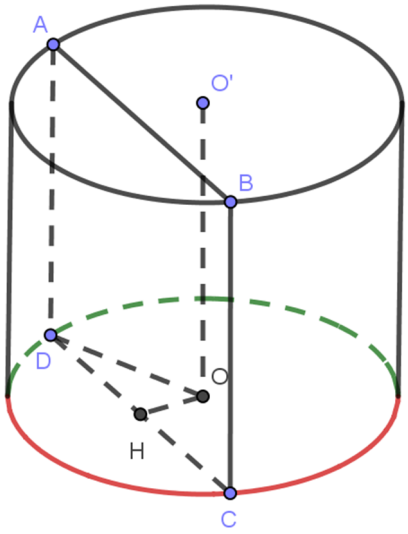
Vậy thể tích khối trụ trên là: $V = \pi.\left(\sqrt{13}\right)^2.4 = 52\pi\,(dvtt)$.

Câu 49. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V = 7\sqrt{7}\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$. **D.** $V = 8\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình vuông $ABCD$. $S_{ABCD} = 4a^2 \Rightarrow AD = CD = 2a$

Gọi H là trung điểm CD $\Rightarrow OH \perp CD \Rightarrow OH \perp (ABCD) \Rightarrow OH = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow OD = \sqrt{DH^2 + OH^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

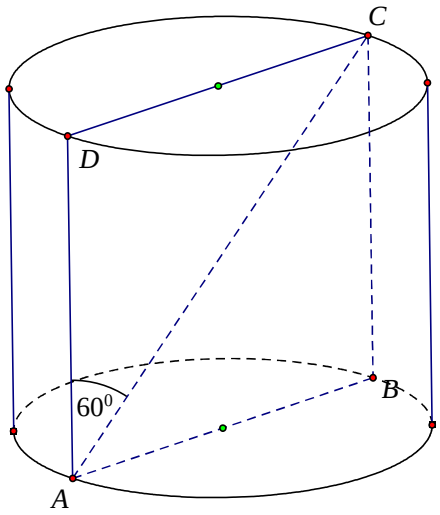
$h = AD = 2a, r = OD = 2a \Rightarrow V = \pi r^2 h = 8\pi a^3$.

Câu 50. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ADC vuông tại D và $BD = AC = a\sqrt{2}$.
Xét tam giác vuông ADC có

$\sin\widehat{DAC} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow DC = AC\sin\widehat{DAC} \Leftrightarrow DC = a\sqrt{2}.\sin 60° \Leftrightarrow DC = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$ bán kính mặt đáy của hình trụ là $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\cos\widehat{DAC} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC\cos\widehat{DAC} \Leftrightarrow AD = a\sqrt{2}\cos 60° \Leftrightarrow AD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ chiều cao của hình trụ là $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

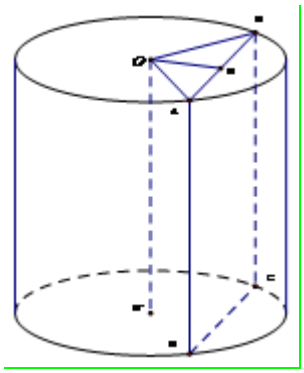
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 51. Cho hình trụ có đường cao bằng $8a$. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục hình trụ $3a$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ bằng

A. $S = 80\pi a^2, V = 200\pi a^3$. **B.** $S = 60\pi a^2, V = 200\pi a^3$.
C. $S = 80\pi a^2, V = 180\pi a^3$. **D.** $S = 60\pi a^2, V = 180\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện $ABCD$ là hình vuông có cạnh là $8a\ (h=8a)$.

Khoảng cách từ trục đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $d=3a$

Suy ra bán kính đường tròn đáy $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=5$

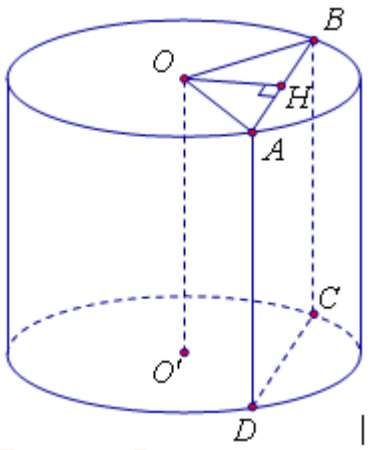
Vậy $S_{xq}=2\pi rh=80\pi a^2, V_{tr}=\pi r^2h=200\pi a^3$.

Câu 52. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h=7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S=56\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=55\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=53\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=46\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O,O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm.

Mp(P) cắt hai hình tròn đáy $(O),(O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB,CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD,BC. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH\perp AB; OH\perp AD\Rightarrow OH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow d\left(OO',(P)\right)=d\left(O,(ABCD)\right)=OH=3\text{cm}$.

Khi đó: $AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{5^2-3^2}=8$; $AD=OO'=h=7\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD}=AB.AD=56\left(cm^2\right)$.

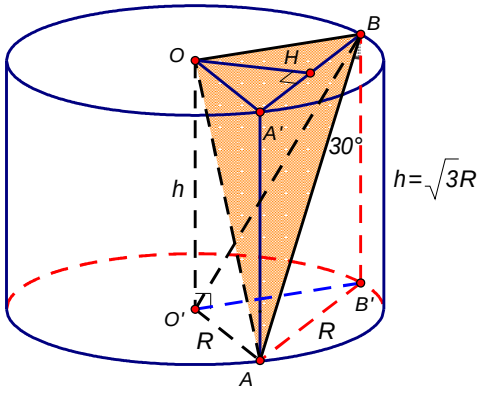
Câu 53. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy (O,R) và (O',R), chiều cao $h=\sqrt{3}R$. Đoạn thẳng AB có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy hình trụ sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là $\alpha=30^0$. Thể tích tứ diện $ABOO'$ là

A. $\frac{3R^3}{2}$. **B.** $\frac{3R^3}{4}$. **C.** $\frac{R^3}{4}$. **D.** $\frac{R^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình vẽ như sau:



Ta có: $O'O \parallel BB'$ nên $\left(\widehat{AB,O'O}\right)=\left(\widehat{AB,BB'}\right)=\widehat{ABB'}=30^0$.

Đặt $V=V_{OA'B.O'AB'}$

Ta có $V_{ABOO'}=V_{B.AOO'}=V_{B.A'AO}=V_{A.A'BO}=\frac{1}{3}V$ vì $S_{\Delta AOO'}=S_{\Delta A'AO}$

Ta có $OB=R$, $A'B=R\sqrt{3}\tan 30^0=R$ nên $\Delta OA'B$ đều, $S_{\Delta OA'B}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

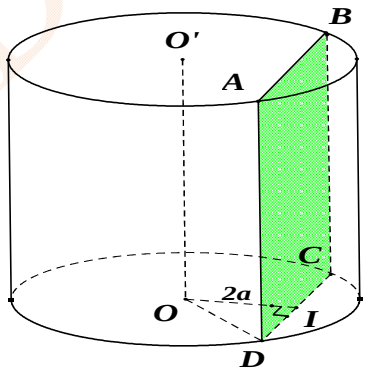
$V_{O'OAB}=\frac{1}{3}V=\frac{1}{3}\sqrt{3}R\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{R^3}{4}$.

Câu 54. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $4\sqrt{13}\pi a^2$. **B.** $12\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $6\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục OO' ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $36a^2$. Suy ra $S_{ABCD} = CD^2 = 36a^2 \Rightarrow CD = AD = 6a$.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có:

$\begin{cases} OI \perp CD \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI = d\left(O,(ABCD)\right) = d\left(OO',(ABCD)\right) = 2a$.

ΔOID vuông tại I có $ID = \dfrac{CD}{2} = 3a; OI = 2a \Rightarrow OD^2 = OI^2 + ID^2 = 13a^2 \Rightarrow OD = a\sqrt{13}$.

Suy ra $r = OD = a\sqrt{13}$.

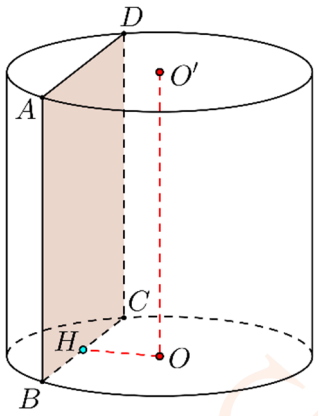
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.a\sqrt{13}.6a = 12\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 55. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\dfrac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình vuông $ABCD$ và $d\left(OO';(ABCD)\right) = OH$.

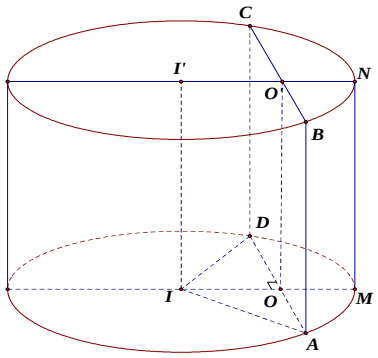
Ta có: $S_{ABCD} = 16a^2 \Rightarrow BC = h = 4a$ và $OH = 3a$, suy ra: $R = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{13}a$.

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh = 8\pi\sqrt{13}a^2$.

Câu 56. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $8\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. **D.** $16\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đường tròn đáy. Suy ra trục của (T) là II'.

Thiết diện là hình vuông $ABCD$. $S_{ABCD} = 16a^2 \Rightarrow l = AB = AD = 4a$.

Gọi O, O' lần lượt trung điểm của AD, BC $\Rightarrow OA = 2a$.

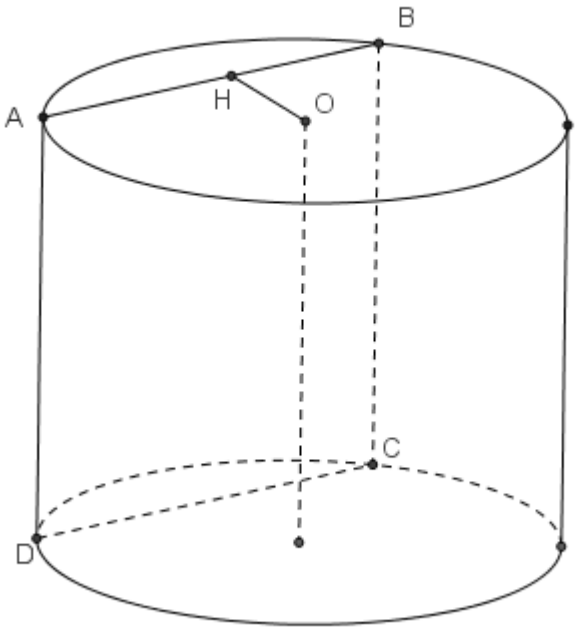
$d(II', (ABCD)) = d\left(I, (ABCD)\right) = IO = 2a \Rightarrow R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}a.$

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng: $S = 2\pi.R.l = 2\pi.2\sqrt{2}a.4a = 16\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 57. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $12\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $36\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $24\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $18\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải



Gọi thiết diện của hình trụ được cắt bởi mặt phẳng sog song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$ là hình vuông $ABCD$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Từ giả thiết suy ra $AB = 6a, OH = 3a \Rightarrow OA = 3a\sqrt{2} \Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rl = 36\sqrt{2}\pi a^2$.

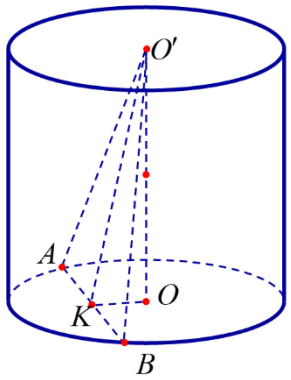
Câu 58. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O, R) và (O', R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O, R) sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng

$(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O,R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $4\pi R^2$ **B.** $2\sqrt{3}\pi R^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$ **D.** $\frac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB=2a$.

Ta có: $AB\perp OK$ và $AB\perp OO'$ nên $\widehat{OKO'}=60°\Rightarrow O'K=2OK\Rightarrow O'K^2=4OK^2$

$\Rightarrow 3a^2=4\left(R^2-a^2\right)\Rightarrow a^2=\frac{4R^2}{7}$

Mặt khác: $OO'^2=O'B^2-OB^2=4a^2-R^2=4.\frac{4R^2}{7}-R^2=\frac{9R^2}{7}\Rightarrow O'O=\frac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

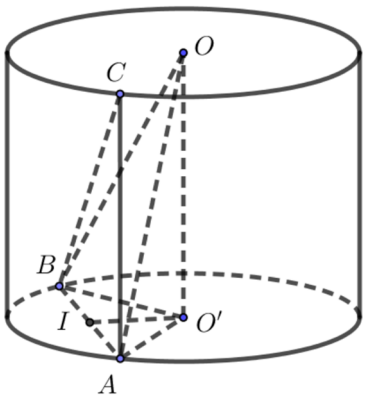
Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là: $S_{xq}=2\pi Rl=\frac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Câu 59. Một khối trụ có bán kính đáy $r=2a$. O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\frac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A,B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

A. a. **B.** $6a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ đường sinh AC, khi đó mặt phẳng (ABC) song song với OO' và cách OO' một khoảng $\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $d(OO',(ABC))=d(O',(ABC))=O'I=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Bán kính $O'A=2a$ suy ra $BA=2IA=2\sqrt{O'A^2-O'I^2}=2\sqrt{4a^2-\frac{15a^2}{4}}=a$.

Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta có :

$\frac{1}{6}.OO'.IO'.AB=\frac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{6}.OO'.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a=\frac{a^3\sqrt{15}}{4}\Leftrightarrow OO'=3a$.

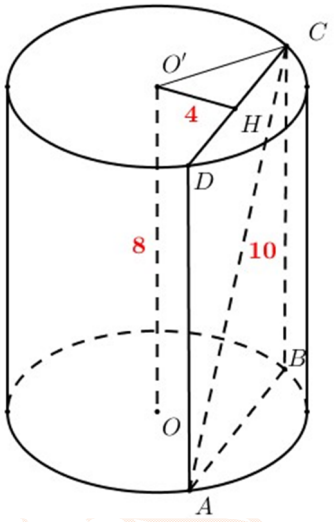
Vậy hình trụ có chiều cao $OO'=3a$.

Câu 60. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $128\pi a^3$. **B.** $320\pi a^3$. **C.** $80\pi a^3$. **D.** $200\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $(O),(O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A\in(O),C\in(O')$.

Dựng AD,CB lần lượt song song với OO' ($D\in(O'),B\in(O)$. Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC=10a,AD=8a\Rightarrow DC=6a$.

Gọi H là trung điểm của DC.

$\begin{cases}O'H\perp DC\\O'H\perp AD\end{cases}\Rightarrow O'H\perp(ABCD)$.

Ta có $OO'//(ABCD)\Rightarrow d(OO',AC)=d(OO',(ABCD))=O'H=4a$.

$O'H=4a,CH=3a\Rightarrow R=O'C=5a$.

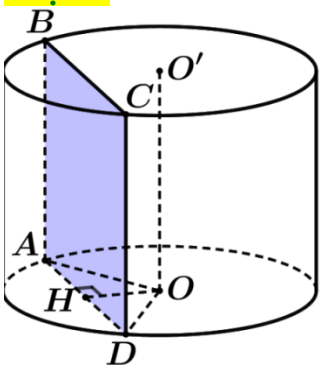
Vậy thể tích của khối trụ là $V=\pi R^2h=\pi(5a)^2\,8a=200\pi a^3$.

Câu 61. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi hình trụ có hai đáy là O, O' và bán kính R.

Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ với AB là chiều cao khi đó $AB = CD = 5\sqrt{3}$ suy ra $AD = BC = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AD ta có $OH = 1$ suy ra $R = \sqrt{OH^2 + \dfrac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 + \dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}} = 2$.

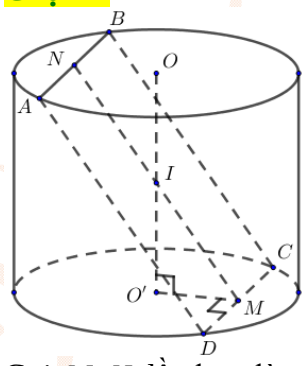
Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$.

Câu 62. Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc $60°$. Thể tích khối trụ bằng

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO'.

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'} = 60°$.

Ta có $IM = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}BC = a$.

Xét $\Delta IO'M$ vuông tại O, ta có $IO' = IM.\sin\widehat{IMO'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = OO' = 2IO' = a\sqrt{3}$;

$O'M = IM.\cos\widehat{IMO'} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta O'MD$ vuông tại M, có $O'M=\frac{a}{2}, MD=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow r=O'D=\sqrt{O'M^2+MD^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}\Rightarrow r=a.$

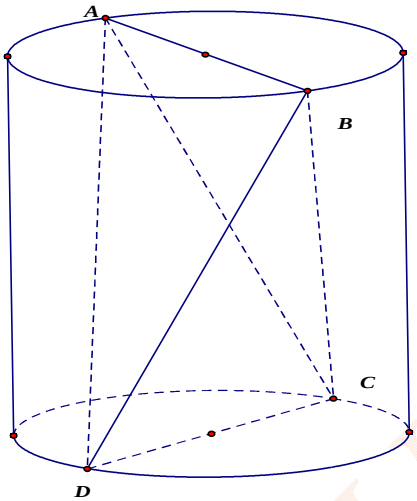
Vậy $V=\pi r^2h=\pi a^3\sqrt{3}.$

Câu 63. Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB=6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

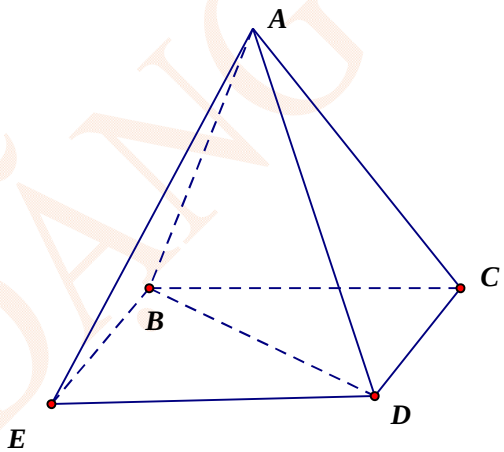
A. 180π. **B.** 90π. **C.** 30π. **D.** 45π.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right).$



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $\left(AB,CD\right)=\left(AB,BE\right)\Rightarrow\sin\left(AB,CD\right)=\sin\left(AB,BE\right).$

$d\left(D,\left(ABE\right)\right)=d\left(AB,CD\right).$

$V_{ABCD}=V_{ABDE}=\frac{1}{3}.d\left(D,\left(ABE\right)\right).S_{ABE}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=\frac{6V_{ABCD}}{AB.CD.\sin 30^\circ}=\frac{180}{6.6.\frac{1}{2}}=10$.

Chiều cao của lăng trụ bằng $h=d\left(AB,CD\right)=10$.

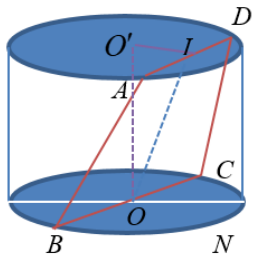
Thể tích lăng trụ: $V=S.h=\pi.3^2.10=90\pi$.

Câu 64. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30°, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC đáy lớn, AD đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases}BC=2r\\BC=2AD\end{cases}\Rightarrow AD=r$

Kẻ $O'I\perp AD\Rightarrow AD\perp\left(OO'I\right)\Rightarrow\left(ABCD\right)\perp\left(OO'J\right)$

Suy ra góc giữa OO' và $\left(ABCD\right)$ là góc $\widehat{O'OI}$. Theo đề $\widehat{O'OI}=30^\circ$

$\cos\widehat{O'OI}=\frac{OO'}{OI}\Leftrightarrow OI=\frac{OO'}{\cos 30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2a$

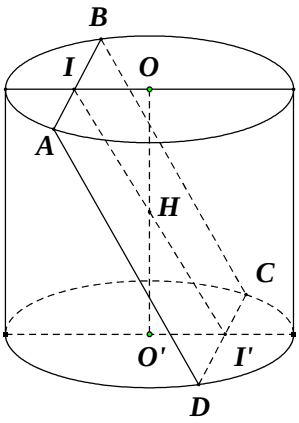
Ta có: $S_{ABCD}=\frac{\left(AD+BC\right).IO}{2}\Leftrightarrow 3a^2=\frac{\left(r+2r\right).2a}{2}\Leftrightarrow r=a$

Thể tích của khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi a^2.a\sqrt{3}=\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 65. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ tạo với đáy một góc 45°. Khi đó thể tích khối trụ là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ; H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \dfrac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

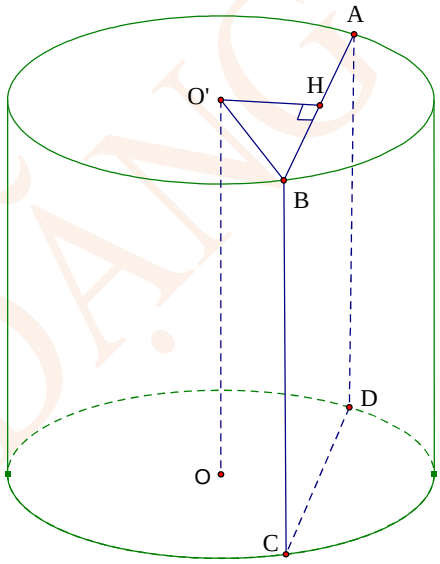
Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 66. Cho hình trụ có chiều cao bằng $18a$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục $6a$, ta được thiết diện có chu vi bằng $54a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng:

A. $\dfrac{2023\pi a^3}{2}$. **B.** $2025\pi a^3$. **C.** $1200\pi a^3$. **D.** $\dfrac{2025\pi a^3}{2}$.

Lời giải



Gọi O và O' là tâm hai đáy của hình trụ, có $OO' = 18a$.

Thiết diện là hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow BC = OO' = 18a$

Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow \begin{cases} O'H \perp AB \\ HA = HB \end{cases}$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ cách trục một khoảng $6a \Rightarrow O'H = 6a$.

Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là $2(AB+BC) = 54a \Rightarrow AB = 9a \Rightarrow HA = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{9a}{2}$.

Trong tam giác vuông $O'BH$ có $O'B = \sqrt{HB^2 + O'H^2} = \sqrt{\frac{81a^2}{4} + 36a^2} = \frac{15a}{2}$.

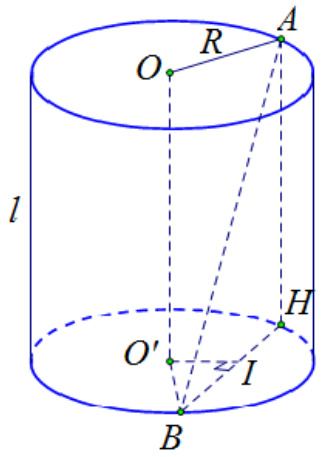
Vậy hình trụ có bán kính $r = O'B = \frac{15a}{2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.\left(\frac{15a}{2}\right)^2.18a = \frac{2025\pi a^3}{2}$.

Câu 67. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy của hình trụ bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải



Gọi R, l lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường sinh của hình trụ, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng chứa đường tròn (O') và I là trung điểm của HB.

Ta có $\left.\begin{matrix} O'I \perp BH \\ O'I \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'I \perp (ABH) \Rightarrow d(O',(ABH)) = O'I$.

Do $OO' \,//\, AH \Rightarrow OO' // (ABH)$

$\Rightarrow d(OO', AB) = d(OO',(ABH)) = d(O',(ABH)) = O'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên $l = 2R \Rightarrow AH = 2R$.

Xét tam giác $O'IB$ vuông tại I có: $IB=\sqrt{O'B^2-O'I^2}=\sqrt{R^2-\frac{3a^2}{4}}\Rightarrow BH=2\sqrt{R^2-\frac{3a^2}{4}}$.

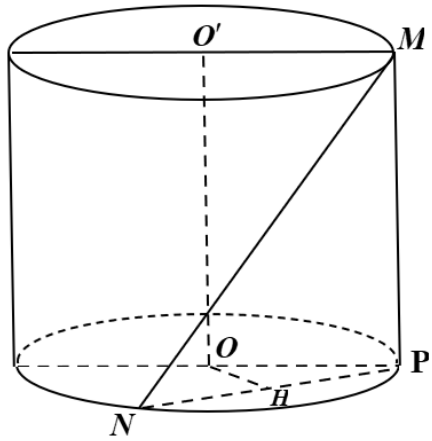
Xét tam giác ABH vuông tại H có:

$AB^2=AH^2+BH^2\Leftrightarrow 4a^2=4R^2+4\left(R^2-\frac{3a^2}{4}\right)\Leftrightarrow R=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 68. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O,R) và (O',R), chiều cao bằng $4a$ và thể tích bằng $4\pi a^3$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn (O',R) và (O,R) sao cho $MN=3a\sqrt{2}$, khoảng cách giữa OO' và MN bằng

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi P là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α) chứa hình tròn (O,R).

Khi đó: $OO'//MP$

$\Rightarrow OO'//(MNP)\Rightarrow d(OO',MN)=d(OO',(MNP))=d(O,(MNP))$.

Gọi H là trung điểm NP.

Khi đó ta có $OH\perp NP$ và $OH\perp MP$ (do $MP\perp(\alpha)$).

Nên $OH\perp(MNP)$ tại H và $d(O,(MNP))=OH$.

Ta có $V_{tru}=\pi R^2.h\Rightarrow R^2=\frac{V}{\pi.h}=\frac{4\pi a^3}{\pi.4a}=a^2\Rightarrow R=a$.

Mà ΔMNP vuông tại P

$NP=\sqrt{MN^2-MP^2}=\sqrt{18a^2-16a^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow HP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

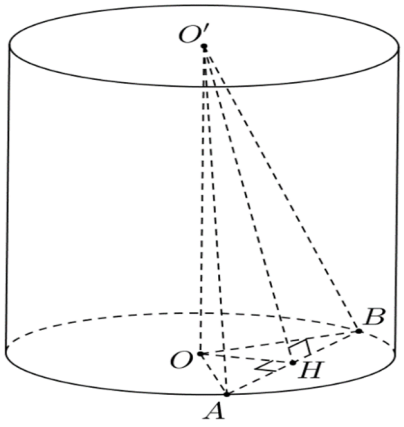
Mà ΔOHP vuông tại H.

Nên $OH=\sqrt{OP^2-HP^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=a\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow d(OO',MN)=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 69. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;3)$ và $(O';3)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với đáy chứa đường tròn (O) một góc 60^0. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đỉnh O', đáy là hình tròn $(O;3)$.

A. $S_{xq}=\dfrac{54\pi\sqrt{7}}{7}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{81\pi\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{27\pi\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB\ (1)$.

Lại có: $OO' \perp (OAB) \Rightarrow OO' \perp AB\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (O'OH) \Rightarrow AB \perp O'H \Rightarrow \widehat{O'HO}=60°$

Đặt $OH=x$, $(0<x<3)$ $\Rightarrow OO'=x\tan 60^0=x\sqrt{3}$.

Xét ΔOAH vuông tại $H \Rightarrow AH^2=OA^2-OH^2=9-x^2$.

Vì $\Delta O'AB$ đều nên: $O'A=AB=2AH=2\sqrt{9-x^2}$.

$O'H$ là đường cao của $\Delta O'AB$ đều nên $O'H=\sqrt{3}.\sqrt{9-x^2}$

Mặt khác $\Delta OO'H$ vuông tại O nên $O'O^2+OH^2=O'H^2 \Leftrightarrow 3x^2+x^2=3(9-x^2) \Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

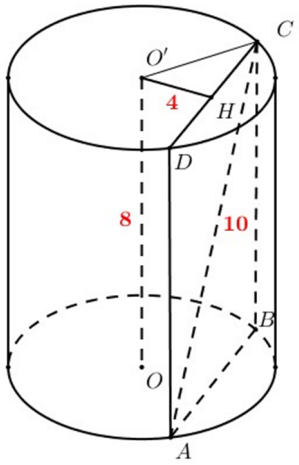
Độ dài đường sinh hình nón là $l=O'A=2\sqrt{9-x^2}=\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$.

Vậy: $S_{xq}=\pi Rl=\dfrac{36\pi\sqrt{7}}{7}$.

Câu 70. Một hình trụ có chiều cao bằng $8cm$. Biết hai điểm A,C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC=10cm$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4cm$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $128\pi cm^3$. **B.** $320\pi cm^3$. **C.** $80\pi cm^3$. **D.** $200\pi cm^3$.

Lời giải



Gọi $(O),(O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A\in(O),C\in(O')$.

Dựng AD,CB lần lượt song song với OO' ($D\in(O'),B\in(O)$. Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật. Do $AC=10\,cm,\ AD=8\,cm\Rightarrow DC=6\,cm$.

Gọi H là trung điểm của DC.

Do $\begin{cases}O'H\perp DC\\ O'H\perp AD\end{cases}\Rightarrow O'H\perp(ABCD)$.

Ta có $OO'//(ABCD)\Rightarrow d(OO',AC)=d(OO',(ABCD))=O'H=4\,cm$.

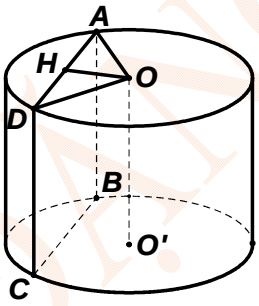
$O'H=4\,cm,\ CH=3\,cm\Rightarrow R=O'C=5\,cm$.

Vậy thể tích của khối trụ là $V=\pi R^2h=\pi.5^2.8=200\pi\ cm^3$.

Câu 71. Khi cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục của trụ (T) một khoảng bằng $a\sqrt{3}$ ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Tính thể tính V của khối trụ (T).

A. $V=\dfrac{7\sqrt{7}}{3}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{8}{3}\pi a^3$. **C.** $V=8\pi a^3$. **D.** $V=7\sqrt{7}\pi a^3$.

Lời giải



Giả sử hình vuông thiết diện là $ABCD$.

Diện tích của hình vuông $ABCD$ là $4a^2$ nên cạnh hình vuông là $2a$.

Hạ $OH\perp AD$, suy ra $OH=a\sqrt{3}$ và H là trung điểm của $AD\Rightarrow HA=HD=a$.

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông OHA ta có: $OA^2=OH^2+HA^2=\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2=4a^2\Rightarrow OA=2a$ hay bán kính đáy của khối trụ là: $R=2a$.

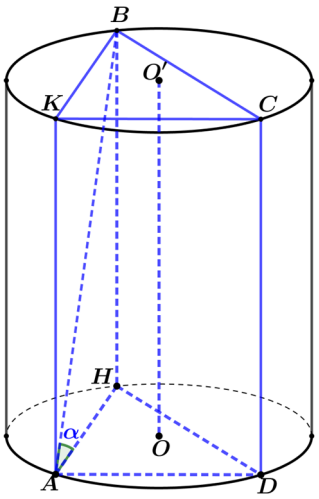
Chiều cao của khối trụ là $h=AB=2a$.

Thể tích của khối trụ (T) là: $V=\pi R^2h=\pi(2a)^2\,2a=8\pi a^3$.

Câu 72. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A,D sao cho $AD=a\sqrt{15}$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn (O') lấy điểm B (AB và CD chéo nhau). Đặt α là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



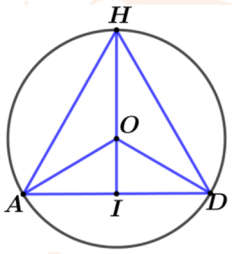
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm O'.

Ta có: hình lăng trụ đứng $ADH.KCB$

Do đó: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{ADH.KCB}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot S_{ADH}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot d(H,AD)$

$=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}a\cdot d(H,AD)=\frac{\sqrt{15}a^2}{3}\cdot d(H,AD)$



Khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách từ H đến AD lớn nhất nên H nằm chính giữa cung lớn chứa dây AD.

Ta có: $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\frac{1}{2}a$, $HI=OH+OI=\frac{5}{2}a$

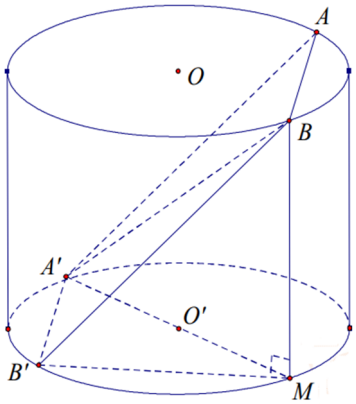
và $AH=\sqrt{HI^2+AI^2}=\sqrt{10}\,a$.

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ABH, ta có $\tan\alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{2a}{\sqrt{10}\,a} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 73. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8\sqrt{2}$. Một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt mặt đáy theo hai dây cung AB và $A'B'$. Biết $AB = A'B' = 4$. Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng $8\sqrt{37}$. Tính thể tích khối trụ đã cho.

A. $576\pi\sqrt{2}$. **B.** $\frac{288\pi\sqrt{2}}{3}$. **C.** $288\pi\sqrt{2}$. **D.** $72\pi\sqrt{2}$

Lời giải



Ta có $S_{ABB'A'} = AB.BB' \Rightarrow BB' = 2\sqrt{37}$.

$A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$.

Dựng đường sinh $BM = h = 8\sqrt{2}$. Ta có $\begin{cases} A'B' \perp BM \\ A'B' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp B'M$.

$\Rightarrow A'M$ là đường kính của đường tròn đáy tâm O'.

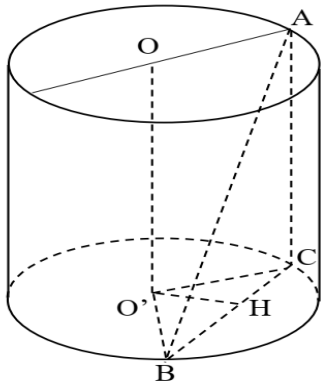
$A'M = \sqrt{A'B^2 - BM^2} = 6 \Rightarrow r = 3$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.9.8\sqrt{2} = 72\pi\sqrt{2}$.

Câu 74. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $3a$. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy của hình trụ, biết $AB = 5a$. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng AB đến trục của hình trụ.

A. $\sqrt{13}a$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{5}a$. **D.** 4.

Lời giải



Từ A kẻ đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn tâm O' tại C. Khi đó

$OO' // AC \Rightarrow OO' // (ABC) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABC)) = d(O', (ABC))$.

Gọi H trung điểm BC, ta có $O'H \perp BC \Rightarrow O'H \perp (ABC)$.

Suy ra $d(AB, OO') = O'H$.

Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4a$

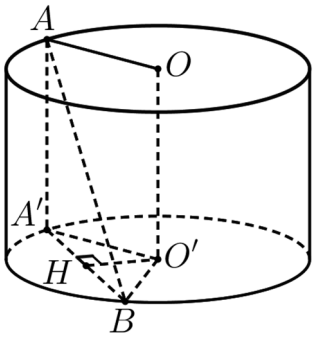
Xét tam giác $O'HC$ vuông tại H, ta có $O'H = \sqrt{O'C^2 - HC^2} = \sqrt{5}a$.

Vậy $d(AB, OO') = O'H = \sqrt{5}a$

Câu 75. Cho khối trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{3}$ và diện tích xung quanh bằng $32\pi\sqrt{3}$. Gọi A và B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của khối trụ sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0, khoảng cách AB và trục của hình trụ bằng

A. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Ta có $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow r = \frac{S_{xq}}{2\pi h} = \frac{32\pi\sqrt{3}}{2\pi.4\sqrt{3}} = 4.$

Kẻ đường sinh $AA' \Rightarrow AA' // OO' \Rightarrow OO' // (ABA')$

$\Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABA')) = d(O', (ABA')).$

Gọi H là trung điểm $A'B \Rightarrow \begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \Rightarrow d(O', (ABA')) = O'H.$

Lại có $\widehat{(OO', AB)} = \widehat{(AA', AB)} = \widehat{BAA'} = 30^0.$

Trong tam giác vuông ABA' có $BA' = AA'.\tan\widehat{BAA'} = 4\sqrt{3}.\tan 30^0 = 4.$

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều, có cạnh bằng 4 nên $d(OO', AB) = O'H = \frac{4\sqrt{3}}{2}.$

Câu 49. **(Đề TK BGD 2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;10), B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không có góc tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

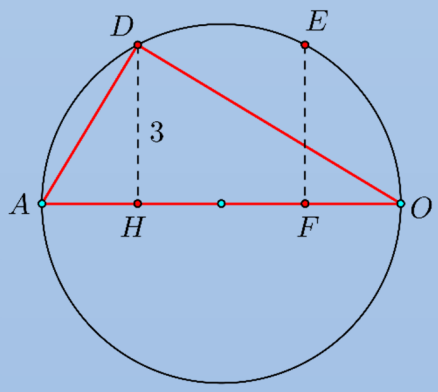
A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Chọn B

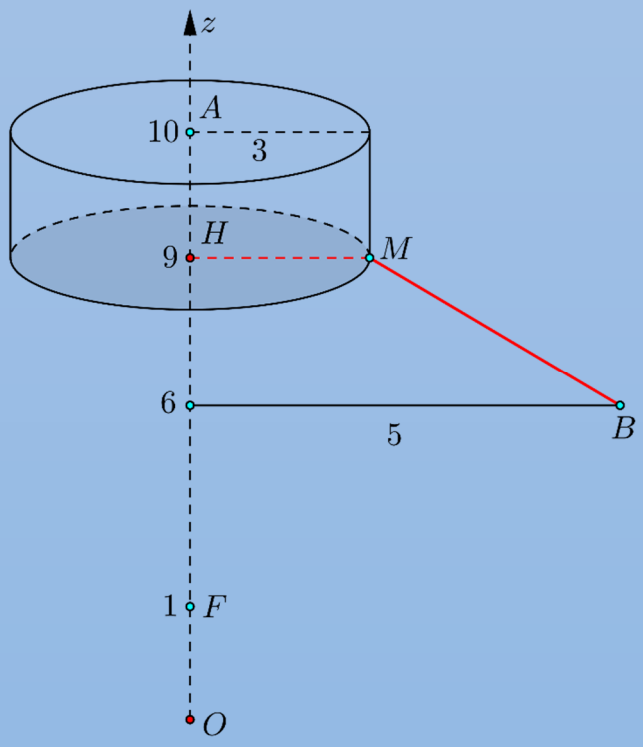
Ta có: $S_{OAM} = \frac{1}{2}OA.d(M;OA) = 15 \Rightarrow d(M;OA) = 3.$

Suy ra: M di động trên mặt trụ, bán kính bằng 3, trục là OA.



Xét điểm D như hình vẽ, $\begin{cases} HA.HO = HD^2 = 9 \\ HA + HO = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA = 1 \\ HO = 9 \end{cases}.$

Vì $\widehat{AMO} \le 90$ nên giới hạn của M là hai mặt trụ với trục AH và FO.



Vì hình chiếu của B cách H gần hơn nên $BM_{\min} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 49 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;8)$, $B(6;8;7)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM luôn vuông tại M và có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(14;15)$. **D.** $(15;16)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18$ và hai điểm $A(8;0;0), B(4;4;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ bất kì thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA+3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $2a+3b+c$

A. 22. **B.** 28. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 3. . Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$, $B(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi M là điểm di động trên mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết độ dài lớn nhất của OM^2 có dạng $\frac{a+24\sqrt{b}}{c},(a,b,c\in\mathbb{N}^*)$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 762. **B.** 763. **C.** 761. **D.** 760.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng

A. $3\sqrt{82}$. **B.** $2\sqrt{82}$. **C.** $3\sqrt{79}$. **D.** $5\sqrt{79}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=15$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(0;0;-4)$, song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=4+t\\y=2\\z=4+2t\end{cases}$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$. Khi đó $a+2b+c$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;-2;1)$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S). Giá trị lớn nhất của $|2MA-3MB|$ đạt được là

A. $\sqrt{65}$. **B.** $\sqrt{67}$. **C.** $\sqrt{69}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25$ tại hai điểm phân biệt M,N sao cho $MN=8$. Hai điểm P,Q di động trên mặt phẳng (P) sao cho $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}$ cùng phương với $\vec{u}(1;2;2)$. Tổng độ dài MP và NQ lớn nhất bằng $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z},c>0)$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$.

A. 860. **B.** 700. **C.** 934. **D.** 210.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); mặt phẳng (P) qua I và tạo với AB một góc 60^0. Hai điểm M,N

thay đổi trên (P) sao cho $MN=\frac{R}{2}$. Biết rằng biểu thức $T=3AM^2+4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{159}{28}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và các điểm $A(3;2;4),B(5;3;7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A,B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r=2\sqrt{2}$. Biết tâm của đường tròn (C) luôn nằm trên một đường tròn cố định (C_1). Bán kính của (C_1) là

A. 6. **B.** $2\sqrt{14}$. **C.** $\sqrt{14}$. **D.** 12.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $ABCD$ có phương trình $2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** −3. **D.** −5.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=-1-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất cắt mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{64}{3}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thỏa $d=3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T=4x_0-3y_0-2z_0$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Mặt phẳng (P) qua điểm A và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(P):3x-z-1=0$. **B.** $(P):3y-z+1=0$.

C. $(P):2x+y-z-1=0$. **D.** $(P):3y-z-1=0$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=9$ và hai điểm $A(-2;3;2),B(-1;0;3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{31}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;4;1), B(3;-2;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+m^2}{1}$, với m là tham số. Gọi $M(a;b;c)$, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên Δ sao cho thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm M trong không gian sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$ (A, B, C là các tiếp điểm). Khi đó đoạn thẳng OM có độ nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{14}-3\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{14}+6\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}-6$. **D.** $6-\sqrt{14}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-3)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T=m+n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{7}{2}\right)$.

Câu 19. Cho điểm $A(2;3;5)$, hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=9$, $(S_2):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$ và điểm M di động thuộc cả hai mặt cầu. Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của AM. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. $\dfrac{341}{4}$. **B.** $\dfrac{151}{2}$ **C.** $\dfrac{1028}{7}$ **D.** $\dfrac{2411}{28}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 40 và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 15, góc $AMB\geq 90^0$ và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(13;15)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(10;12)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+7=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-6z+7=0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. $\sqrt{18+2\sqrt{13}}$. **B.** $\sqrt{18-2\sqrt{13}}$. **C.** $18-2\sqrt{13}$. **D.** $18+2\sqrt{13}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+z+7=0$, đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=5$. Gọi A, B là hai điểm trên mặt cầu (S) và $AB=4$; A', B' là hai điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với đường thẳng d. Giá trị lớn nhất của tổng $AA'+BB'$ gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục$Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ và hai điểm $A(3;0;0); B(-1;1;0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$.

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{26}$ **C.** 6 **D.** 5

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, $A(1;2;3), B(2;-1;1), C(4;-3;5), D(1;-2;3)$. Xét các điểm M thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(200;210)$. **B.** $(190;200)$. **C.** $(180;190)$. **D.** $(170;180)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1), B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính $T=a+b-c$ biết $a>2$.

A. $T=-1$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$.

Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Δ (I có hoành độ âm) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A. Điểm $N(a;b;c)$ là điểm thay đổi trên (S), khi khoảng cách ON lớn nhất thì giá trị của $T=a+b-c$ là bao nhiêu, biết rằng diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ (M là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)).

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** $-2-2\sqrt{3}$. **C.** $-2+2\sqrt{3}$. **D.** $-2+\sqrt{3}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;5;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn biểu thức $MA^2+MB^2=40$ và khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 25. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 5.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(4;-5;2)$ và $B(1;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (α) và

thõa mãn điều kiện sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(2;-2;-3)$. **B.** $N(6;-7;-1)$. **C.** $P(2;3;-5)$. **D.** $Q(6;-7;1)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;0;1), B(-2;0;0), C\left(-\frac{3}{2};1;1\right)$. Điểm M thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=AB$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{12}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 32. **Mức độ 4]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $B(2;5;0)$, $C(4;7;0)$ và $E(1;1;3)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua E và vuông góc với mặt phẳng (Oxy), Δ là giao tuyến của (Q) và (Oxy), $T=2d(B,(Q))+d(C,(Q))$. Khi T đạt giá trị lớn nhất, Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $M(-12;6;0)$. **B.** $P(12;-4;0)$. **C.** $Q(15;4;0)$. **D.** $N(15;-4;0)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+4=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

A. $x+10y-22z=0$. **B.** $x+10y-22z-12=0$.

C. $x-10y-22z-21=0$. **D.** $x+10y+22z+12=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(1;1;10)$ và $C(4;5;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác ABM có $\widehat{AMB}\geq 90^\circ$ và có diện tích bằng 15. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MC thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(10;11)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1); B(-1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P), sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=2-26t\\y=1+7t\\z=1+20t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-8t\\y=1+16t\\z=1+29t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-26t\\y=1-7t\\z=1+20t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=1+t\\z=1+4t\end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z+4=0$. Gọi $(Q):x+by+cz+d=0$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) góc với số đo nhỏ nhất. Khi đó $T=b+c+d$ bằng:

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có $\widehat{OMA}$ tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có $\widehat{OMA}$ không nhọn và có diện tích bằng 15. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(6;7)$. **B.** $(7;8)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(9;10)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $10,5$. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng CB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(3,5;4,5)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;2)$ và $B(1;1;0)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC không có góc tù và có diện tích bằng 6. Giá trị nhỏ nhất của $CA+CB$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(8;9)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(7;8)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(2;-1;3)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC không có góc tù và có diện tích bằng 6. Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác ABC thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(9;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(11;13)$.

Câu 42. Cho $A(1;1;-3), B(6;2;2), C(-1;0;-2)$. Tọa độ điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(\frac{5}{3};\frac{5}{6};0\right)$. **B.** $M\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{6};0\right)$. **C.** $M\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{6};0\right)$. **D.** $M\left(-\frac{5}{3};\frac{5}{6};0\right)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{41}}{6}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0;0;4)$, $M(-1;-1;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm C và tạo với trục Oz một góc φ thỏa mãn $\tan\varphi=\frac{5\sqrt{2}}{4}$. Giả sử $\vec{n}(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Khi khoảng cách từ M đến (α) lớn nhất, giá trị biểu thức $\frac{ac}{b^2}$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** -10.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;5), B(4;-3;7)$. Xét điểm M thay đổi sao cho tam giác OMA không có góc tù và có diện tích bằng 10. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MB là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90^o. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $K(3;0;15)$. **B.** $J(-3;2;7)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c=?$

A. $a+b+c=16$ **B.** $a+b+c=15$ **C.** $a+b+c=17$ **D.** $a+b+c=14$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;1)$, $B(0;0;4)$, $C(2;2;1)$, $E(4;0;0)$, $F(3;1;\sqrt{6})$. Xét điểm M thay đổi sao cho $MA=\frac{1}{2}MB$ và $MA=MC$. Giá trị lớn nhất của $ME+MF$ bằng

A. $4\sqrt{3+\sqrt{3}}$. **B.** $4\sqrt{3+\sqrt{6}}$. **C.** $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **D.** $4\sqrt{6+\sqrt{6}}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (ABC), có $A(4;-3;7);B(-1;3;-12);C(-10;3;0)$. Lấy Δ là một đường thẳng bất kì vuông góc với (ABC) gọi $I=\Delta\cap(ABC)$ thỏa mãn I thuộc miền trong ΔABC. Lấy $M\in\Delta;M\ne I$, gọi E,F,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC,CA,AB. Hệ thức nào của điểm M là đúng để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right)$.

C. $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó $S(2;1;-20)A(1;3;1)$; $B(a;-1;b);C(0;-3;3)$; $D(c,d,e)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD,CB. Gọi I là giao điểm giữa AM và DN. Biết tứ giác $ABCD$ thỏa mãn hệ thức $IA=4IM$ và $\frac{DI}{IN}=\frac{2}{3}$. Biểu thức liên hệ giữa $a;b;c;d;e$ nào sau đây là đúng.

A. $a=-2c+1$. **B.** $d=-7+2a$. **C.** $e=2+b$. **D.** $a=4-c$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;1)$. Với M là điểm trên đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$, xét N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AM+BN$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;9)$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;2),B(-1;2;-1)$. Xét các điểm M,N di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN=2$. Giá trị nhỏ nhất của $3MA^2+2NB^2$ bằng

A. $\frac{124}{5}$. **B.** $\frac{54}{5}$. **C.** 14. **D.** 5.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;\frac{5}{2}\right)$ và $B\left(4;2;\frac{5}{2}\right)$. Tìm hoành độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{ABM}=45°$ và tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 55. Cho các điểm $A(3;2;1)$, $B(0;1;1)$. Đặt $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó M là một điểm chạy trên mặt phẳng (Oxy). Tìm tung độ của M khi P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. -6. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm $M(a;b;c)$ di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$ và $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn. Tính giá trị biểu thức $a+2b-5c$

A. 11 **B.** -11 **C.** 12 **D.** -6

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{3};5\right)$. **B.** $\left(4;\frac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **D.** $(5;7)$.

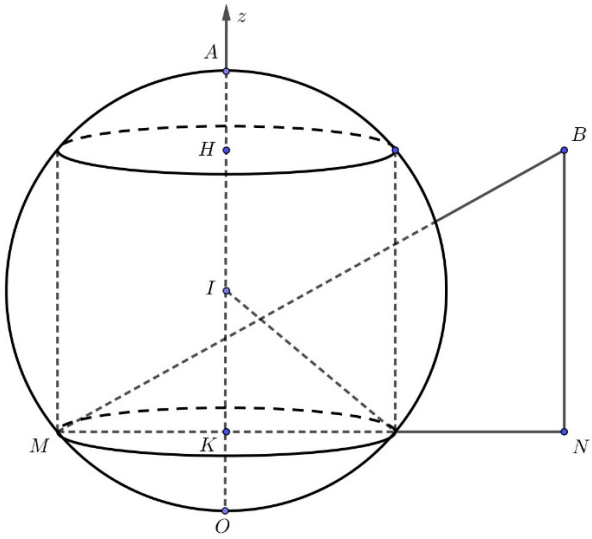
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;8)$, $B(6;8;7)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM luôn vuông tại M và có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(13;14)$. **C.** $(14;15)$. **D.** $(15;16)$.

Lời giải



Tam giác OAM luôn vuông tại M nên M thuộc mặt cầu đường kính OA, bán kính $R=4$.

Tam giác OAM có diện tích bằng $8\sqrt{3} \Rightarrow 8\sqrt{3}=\frac{1}{2}d_{(M;OA)}.OA \Leftrightarrow d_{(M;OA)}=2\sqrt{3} \Rightarrow M$ thuộc mặt trụ bán kính $r=2\sqrt{3}$ và trục là OA.

Từ hai giả thiết trên ta thấy M thuộc hai đường tròn đáy là giao tuyến của mặt trụ và mặt cầu.

Gọi I là tâm mặt cầu, H,K lần lượt là hai tâm của đáy hình trụ như hình vẽ.

Ta có: $IK=\sqrt{R^2-r^2}=2 \Rightarrow OK=2$.

Xét mặt phẳng (P) đi qua đường tròn $(K;r)$ khi đó phương trình $(P): z-2=0$.

Gọi N là hình chiếu của B lên $(P) \Rightarrow N(6;8;2)$.

Ta có: $BN=5$, $NK=10$.

Lại có: $BM=\sqrt{BN^2+MN^2} \le \sqrt{BN^2+(NK+r)^2}$

$\Rightarrow BM_{\max}=\sqrt{5^2+\left(10+2\sqrt{3}\right)^2} \approx 14,36$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18$ và hai điểm $A(8;0;0), B(4;4;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ bất kì thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA+3MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $2a+3b+c$

A. 22. **B.** 28. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;9;0)$ và bán kính $R=3\sqrt{2}$

Ta có: $IA=9\sqrt{2}>R$; $IB=5\sqrt{2}>R$ nên A,B nằm ngoài mặt cầu (S) và $IA=3R$

Trên đoạn IA lấy điểm C sao cho $IC=\dfrac{R}{3}$. Xét hai tam giác ΔICM và ΔIMA có: $\hat{I}$ chung; $\dfrac{IC}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{3}$ nên ΔICM đồng dạng với ΔIMA. Suy ra $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MA=3MC$

$MA+3MB=3MC+3MB=3(MC+MB)\geq 3BC$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S).

Gọi $C(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{IA}=9\overrightarrow{IC}\Rightarrow\begin{cases}9=9(x+1)\\-9=9(y-9)\\0=9(z-0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=8;\\z=0\end{cases}$

$\overrightarrow{BC}=(-4;4;0)$. Phương trình đường thẳng $BC:\begin{cases}x=4+t\\y=4-t\\z=0\end{cases}$

Tọa độ giao điểm của M là nghiệm hệ phương trình:

$\begin{cases}x=4+t;\ y=4-t;\ z=0\\(x+1)^2+(y-9)^2+z^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+t;y=4-t;z=0\\t=-2\vee t=-8\end{cases}$.

Suy ra $M(2;6;0)$ hoặc $M(-4;12;0)$

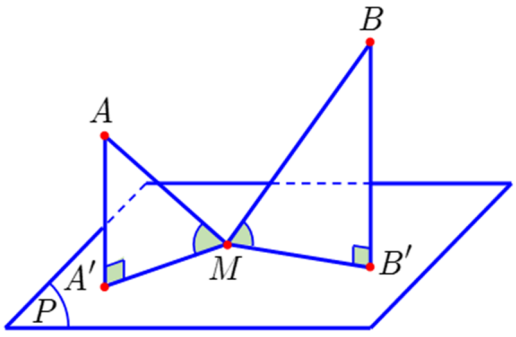
Vì M thuộc đoạn BC nên $M(2;6;0)$.

Câu 3. . Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$, $B(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi M là điểm di động trên mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết độ dài lớn nhất của OM^2 có dạng $\dfrac{a+24\sqrt{b}}{c},(a,b,c\in\mathbb{N}^*)$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 762. **B.** 763. **C.** 761. **D.** 760.

Lời giải

Chọn D



Nhận thấy đường thẳng AB không vuông góc với mp(P).

Gọi $M(x;y;z)$ và A',B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên mp(P).

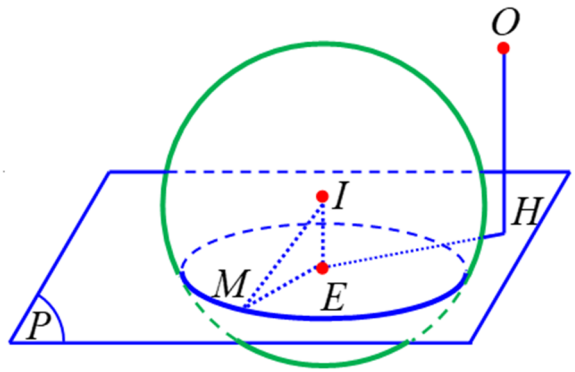
Vì các đường thẳng MA,MB cùng tạo với mp(P) các góc bằng nhau nên $\widehat{AMA'}=\widehat{BMB'}$

$\Rightarrow \Delta AMA' \sim \Delta BMB' \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)} = \dfrac{|-1+2|}{|1-1+2|} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow MB = 2MA \Leftrightarrow MB^2 = 4MA^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4\left[(x+1)^2 + y^2 + z^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 10x + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{10}{3}x + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{2}{3} = 0.$

Suy ra M nằm trên mặt cầu (S) tâm $I\left(-\dfrac{5}{3};0;-\dfrac{1}{3}\right)$, bán kính $R = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.



Vì $\begin{cases} M \in (P) \\ M \in (S) \end{cases} \Rightarrow M \in (C)$, với $(C) = (P) \cap (S)$.

Ta có $d\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|-\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3} + 2\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Gọi E là hình chiếu của I lên (P).

Đường tròn (C) có tâm là E và bán kính bằng $r = \sqrt{R^2 - d^2\left(I,(P)\right)} = \sqrt{\dfrac{20}{9} - \dfrac{4}{27}} = \dfrac{2\sqrt{42}}{9}$.

Đường thẳng IE đi qua điểm I nhận vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $IE: \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} + t \\ y = t \\ z = -\dfrac{1}{3} - t \end{cases} \Rightarrow E\left(-\dfrac{5}{3} + t; t; -\dfrac{1}{3} - t\right)$.

$E \in (P) \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} + t + t + \dfrac{1}{3} + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{2}{9} \Leftrightarrow E\left(-\dfrac{17}{9}; -\dfrac{2}{9}; -\dfrac{1}{9}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp(P).

Phương trình đường thẳng $OH:\begin{cases}x=t'\\y=t'\\z=-t'\end{cases}\Rightarrow H(t';t';-t')$.

$H(t';t';-t')\in(P)\Leftrightarrow t'+t'+t'+2=0\Leftrightarrow t'=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow H\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{HE}=\left(-\frac{11}{9};\frac{4}{9};-\frac{7}{9}\right)\Rightarrow HE=\sqrt{\frac{121}{81}+\frac{16}{81}+\frac{49}{81}}=\frac{\sqrt{186}}{9}$.

Vì $OM^2=OH^2+HM^2$ nên $OM^2_{\max}\Leftrightarrow HM^2_{\max}$

Mà $HM_{\max}=HE+r=\frac{\sqrt{186}+2\sqrt{42}}{9}$.

Suy ra $OM^2_{\max}=\frac{4}{3}+\left(\frac{\sqrt{186}+2\sqrt{42}}{9}\right)^2=\frac{4}{3}+\frac{354+24\sqrt{217}}{81}=\frac{462+24\sqrt{217}}{81}$.

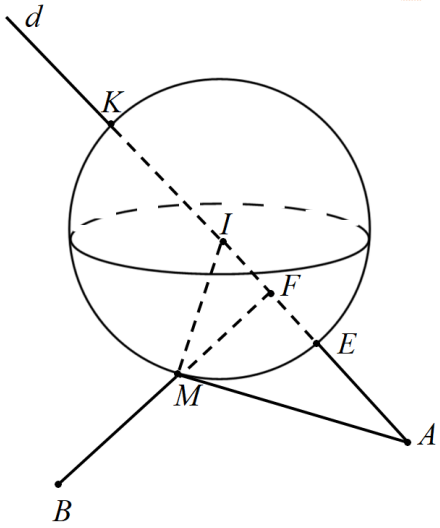
Do đó $a=462, b=217, c=81$.

Vậy $a+b+c=760$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên (S). Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng

A. $3\sqrt{82}$. **B.** $2\sqrt{82}$. **C.** $3\sqrt{79}$. **D.** $5\sqrt{79}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(0;2;-6)$, $\overrightarrow{IB}=(0;2;12)\Rightarrow\begin{cases}IA=2\sqrt{10}>R\\IB=2\sqrt{37}>R\end{cases}$

$\Rightarrow$ hai điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S).

Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm I,A có dạng: $\begin{cases}x=1\\y=t\\z=2-3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ giao điểm của d và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2-3t \\ (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2-3t \\ t^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ x=1;y=1;z=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-1 \\ x=1;y=-1;z=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra đường thẳng d và mặt cầu (S) cắt nhau tại hai điểm $E(1;1;-1), K(1;-1;5)$.

Ta thấy E là trung điểm của IA. Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Xét ΔIFM và ΔIAM có $\widehat{AIM}$ chung; $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta IFM \sim \Delta IMA$.

Từ đó suy ra $\frac{MA}{FM}=\frac{AI}{MI}=2 \Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB) \geq 2FB=3\sqrt{82}$.

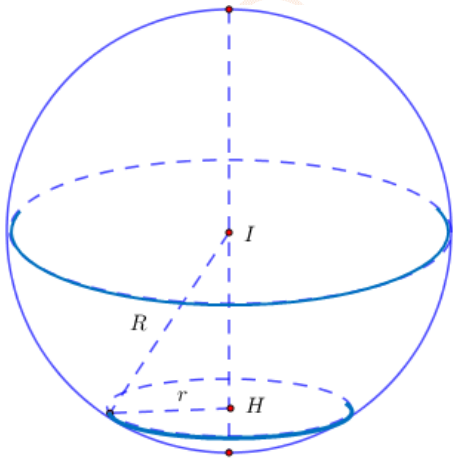
Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M=BF \cap (S)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng $3\sqrt{82}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=15$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(0;0;-4)$, song song với đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=4+t \\ y=2 \\ z=4+2t \end{cases}$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$. Khi đó $a+2b+c$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Vì $(\alpha):ax+by-z+c=0$ đi qua điểm $A(0;0;-4)$ nên $c=-4$ và song song với $\Delta:\begin{cases} x=2+t \\ y=2 \\ z=3+2t \end{cases}$

nên $a=2$. Suy ra $(\alpha):2x+by-z-4=0$.

Gọi H là tâm của đường tròn (C).

Đặt $IH=x$, với $0<x<\sqrt{15}$, ta có $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{15-x^2}$.

Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2.IH=\frac{1}{3}\pi\left(15-x^2\right)x=\frac{1}{3\sqrt{2}}\pi\sqrt{\left(15-x^2\right).\left(15-x^2\right).2x^2}$.

Ta có: $V^2=\frac{1}{18}\pi^2.\left(15-x^2\right).\left(15-x^2\right).2x^2\le\frac{1}{18}\pi^2.\left(\frac{2\left(15-x^2\right)+2x^2}{3}\right)^3=\frac{10^3}{18}\pi^2\Rightarrow V\le\frac{10}{3}\sqrt{5}\pi$

$V_{\max}=\frac{10}{3}\sqrt{5}\pi$ khi $15-x^2=2x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{5}$.

Khi đó, $d\left(I,(\alpha)\right)=\frac{|b+5|}{\sqrt{b^2+5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 4b^2-10b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=\frac{5}{2}\end{array}\right.$.

Với $b=0\Rightarrow(\alpha):2x-z-4=0$, khi đó $\Delta\subset(\alpha)$ (loại).

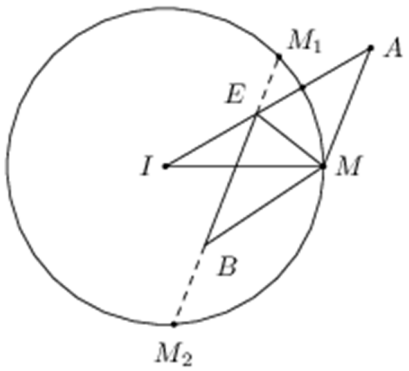
Với $b=\frac{5}{2}\Rightarrow(\alpha):2x+\frac{5}{2}y-z-4=0$, khi đó $\Delta//(\alpha)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $a+2b+c=6$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;-2;1)$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S). Giá trị lớn nhất của $|2MA-3MB|$ đạt được là

A. $\sqrt{65}$. **B.** $\sqrt{67}$. **C.** $\sqrt{69}$. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$, bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-2;2;1)\Rightarrow IA=3>R$, suy ra A nằm ngoài (S) và $\frac{IA}{R}=\frac{3}{2}$.

Lại có $\overrightarrow{IB}=(1;-1;1)\Rightarrow IB=\sqrt{3}<R$, suy ra B nằm trong (S).

Lấy điểm $E\in IA$ sao cho $IE=\frac{2}{3}\cdot R=\frac{4}{3}$.

Xét hai tam giác IEM và tam giác IMA, ta có $\hat{I}$ chung và $\frac{IE}{IM}=\frac{IM}{IA}=\frac{2}{3}$. Do đó, hai tam giác IEM và tam giác IMA đồng dạng. Suy ra, $\frac{EM}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow AM=\frac{3}{2}EM$. Khi đó,

$P=\left|3EM-3MB\right|=3\left|EM-MB\right|\le 3EB$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv M_1$ hoặc $M\equiv M_2$, tức là M, E, B thẳng hàng, suy ra $\max P=3EB$.

Gọi $E(a;b;c)$. Ta có

$$IE=\frac{2}{3}R=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot IA=\frac{4}{9}\cdot IA\Rightarrow\overrightarrow{IE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{IA}=\left(-\frac{8}{9};\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{9}\\b=-\frac{1}{9}\\c=\frac{4}{9}.\end{cases}$$

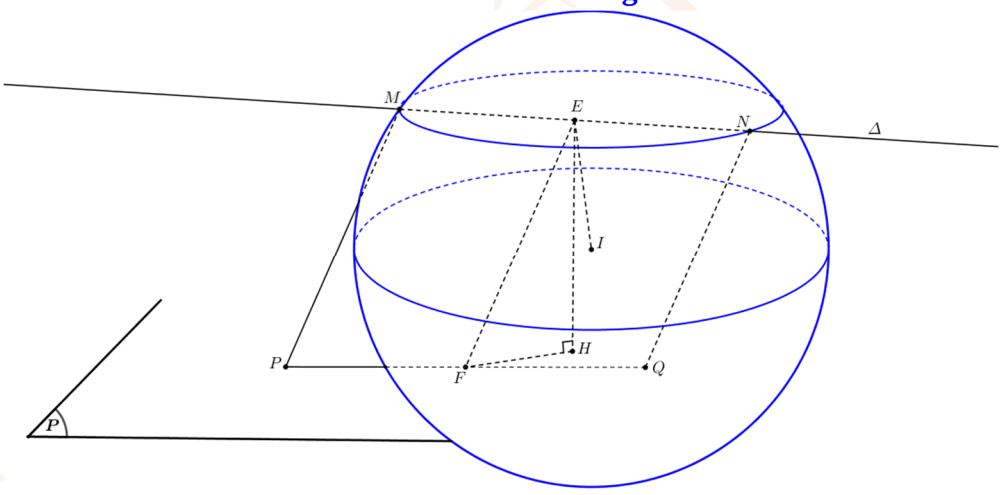
Suy ra $E\left(\frac{1}{9};-\frac{1}{9};\frac{4}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{EB}=\left(\frac{17}{9};-\frac{17}{9};\frac{5}{9}\right)\Rightarrow EB=\frac{\sqrt{67}}{3}$.

Vậy $\max P=3EB=\sqrt{67}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25$ tại hai điểm phân biệt M,N sao cho $MN=8$. Hai điểm P,Q di động trên mặt phẳng (P) sao cho $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}$ cùng phương với $\vec{u}(1;2;2)$. Tổng độ dài MP và NQ lớn nhất bằng $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z},c>0)$. Tính $S=a^2+b^2+c^2+d^2$.

A. 860. **B.** 700. **C.** 934. **D.** 210.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$, $R=5$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d(I,(P))=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Ta có $d(I,(\Delta))=\sqrt{R^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Ta có $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}$ cùng phương với $\vec{u}$ do đó $MNQP$ là hình thang.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của MN,PQ do đó EF là đường trung bình của hình thang $MNQP$.

Suy ra $MP+NQ=2EF$ và $IE=d(I,\Delta)=3$.

Gọi H là hình chiếu của E lên mặt phẳng (P)

Ta có $\cos\widehat{HEF}=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\left|\dfrac{1.1+2.1+2.1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$ (với $\vec{n}=(1;1;1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)).

Xét ΔHEF vuông tại H, ta có $EF=\dfrac{EH}{\cos\widehat{HEF}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}EH\le\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\left(IE+d\left(I,(P)\right)\right)$.

Suy ra $EF\le\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\left(3+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\max EF=\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$

Do đó $\max\left(MP+NQ\right)=2\left(\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}\right)=\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IE+d\left(I,(P)\right)=EH$ hay I nằm giữa EH.

Suy ra $a=24,b=18,c=3,d=5$ (thỏa mãn).

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2=934$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); mặt phẳng (P) qua I và tạo với AB một góc 60^0. Hai điểm M,N thay đổi trên (P) sao cho $MN=\dfrac{R}{2}$. Biết rằng biểu thức $T=3AM^2+4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

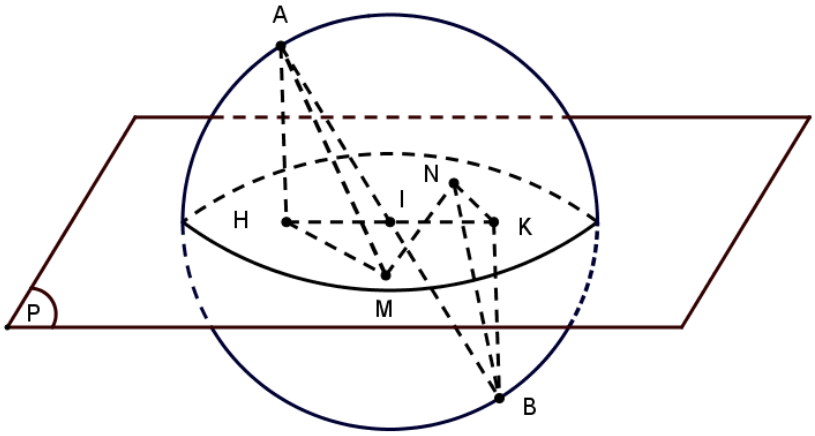
A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.

B. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{159}{28}$.

Lời giải



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B xuống mặt phẳng (IMN).

Góc giữa AB với (IMN) là $\widehat{AIH}=\widehat{BIK}=60^0$, khi đó $AH=BK=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$;

$IH=IK=\dfrac{R}{2}\Rightarrow HK=R$.

$T=3AM^2+4BN^2=3\left(AH^2+HM^2\right)+4\left(BK^2+KN^2\right)=3AH^2+4BK^2+3HM^2+4KN^2$

$=\dfrac{21R^2}{4}+3HM^2+4KN^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\left(3HM^2+4KN^2\right)\geq\left(HM+KN\right)^2=\left(HM+MN+KN-MN\right)^2\geq\left(HK-MN\right)^2=\dfrac{R^2}{4}$

$\Rightarrow\left(3HM^2+4KN^2\right)\geq\dfrac{3R^2}{7}$, dấu "=" xảy ra khi H,M,N,K theo thứ tự đó cùng nằm trên cùng một đường thẳng.

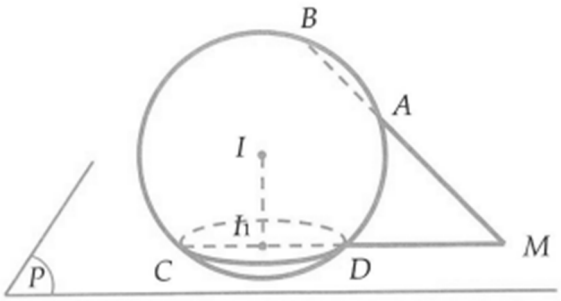
Suy ra $T\geq\dfrac{21R^2}{4}+\dfrac{3R^2}{7}=\dfrac{159R^2}{28}$ như vậy $T_{\min}=\dfrac{159R^2}{28}=\dfrac{159}{7}\Leftrightarrow R^2=4$.

Phương trình mặt cầu là: $\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-3\right)^2=4$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-3=0$ và các điểm $A\left(3;2;4\right),B\left(5;3;7\right)$. Mặt cầu $\left(S\right)$ thay đổi đi qua A,B và cắt mặt phẳng $\left(P\right)$ theo giao tuyến là đường tròn $\left(C\right)$ có bán kính $r=2\sqrt{2}$. Biết tâm của đường tròn $\left(C\right)$ luôn nằm trên một đường tròn cố định $\left(C_1\right)$. Bán kính của $\left(C_1\right)$ là

A. 6. **B.** $2\sqrt{14}$. **C.** $\sqrt{14}$. **D.** 12.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(2;1;3\right)$ nên phương trình tham số đường thẳng AB là $\begin{cases}x=3+2t\\y=2+t\\z=4+3t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Gọi $M=AB\cap\left(P\right)$ suy ra $M\left(3+2t;2+t;4+3t\right)$.

Do $M\in\left(P\right)$ nên $\left(3+2t\right)+\left(2+t\right)+\left(4+3t\right)-3=0$

$\Leftrightarrow 6t+6=0\Leftrightarrow t=-1\rightarrow M\left(1;1;1\right)$.

Ta có $MA=\sqrt{\left(3-1\right)^2+\left(2-1\right)^2+\left(4-1\right)^2}=\sqrt{14}$, $MB=\sqrt{\left(5-1\right)^2+\left(3-1\right)^2+\left(7-1\right)^2}=2\sqrt{14}$.

Gọi I_1 là tâm của đường tròn $\left(C\right)$, MI_1 cắt đường tròn $\left(C\right)$ tại 2 điểm C và D.

Ta có $MC.MD=MA.MB=\sqrt{14}.2\sqrt{14}=28$

$\Leftrightarrow\left(MI_1+r\right)\left(MI_1-r\right)=28$

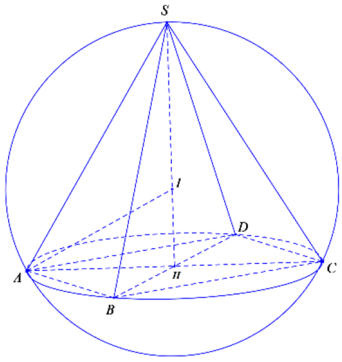
$\Leftrightarrow MI_1^2 - r^2 = 28 \Leftrightarrow MI_1 = \sqrt{28 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 6$.

Do $M(1;1;1)$ nên điểm M cố định. Khi đó tâm I_1 của đường tròn (C) luôn nằm trên đường tròn cố định có tâm M, bán kính $r' = MI_1 = 6$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $S(7;8;6)$ và $P(-5;-4;0)$. Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP. Khi khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng $ABCD$ có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b + c + d$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** -5.

Lời giải



Mặt cầu đường kính SP có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 9$.

Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm H, cạnh a $\left(0 < a \le 9\sqrt{2}\right)$.

Ta chỉ cần xét trường hợp $SH > SI$.

Ta có

$$HA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$$

Mặt khác ta lại có $SH = SI + IH = 9 + \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}a^2\left(9 + \sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}\right) = 3a^2 + \frac{1}{3}a^2\sqrt{81 - \frac{a^2}{2}}$.

Đặt $a^2 = t$, do $0 < a \le 9\sqrt{2}$ nên $0 < t \le 162$.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{1}{3}t\left(\sqrt{81 - \frac{t}{2}}\right)$, với $0 < t \le 162$.

Ta có $f'(t) = 3 + \frac{324 - 3t}{12\sqrt{81 - \frac{t}{2}}}$.

Suy ra

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 3+\frac{324-3t}{12\sqrt{81-\frac{t}{2}}}=0 \Leftrightarrow 36\sqrt{81-\frac{t}{2}}=3t-324$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{81-\frac{t}{2}}=\frac{t}{12}-9 \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 108 \\ 81-\frac{t}{2}=\left(\frac{t}{12}-9\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 108 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=144 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=144.$$

Ta có bảng biến thiên

t	0		144		162
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	576	↘	

Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max}=576$ khi $t=144$ hay $a=12$.

Khi đó $HI=\sqrt{81-\frac{a^2}{2}}=3$.

Suy ra $\overrightarrow{SH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{SI}$.

Do $S(7;8;6)$ và $I(1;2;3)$ nên $\overrightarrow{SI}=(-6;-6;-3)$ suy ra $H(-1;0;2)$.

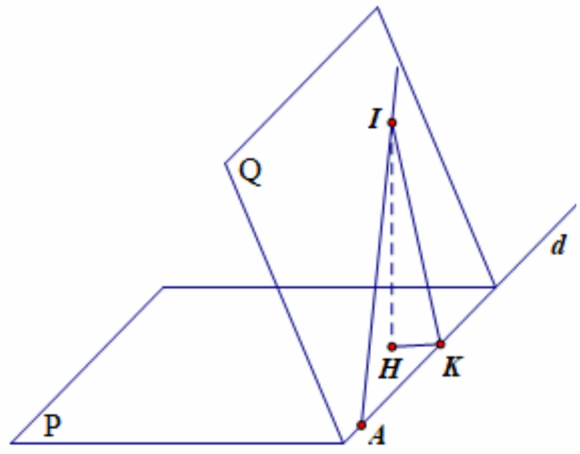
Mặt phẳng $(ABCD)$ qua $H(-1;0;2)$ và nhận $\vec{n}=(2;2;1)$ là véctơ pháp tuyến nên có phương trình: $2x+2y+z=0$

Vậy $b+c+d=3$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-1-t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất cắt mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{64}{3}$.

Lời giải



Gọi $A=\Delta\cap(P);d=(P)\cap(Q)$

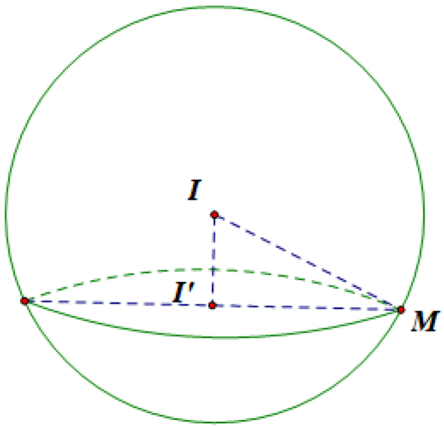
Lấy $I\in\Delta\Rightarrow A;I$ cố định, kẻ $IH\perp(P);HK\perp d\Rightarrow\widehat{((P);(P))}=\widehat{IKH}$.

Do $IA\geq IK\Rightarrow\sin\widehat{IKH}=\dfrac{IH}{IK}\geq\dfrac{IH}{IA}\Rightarrow\widehat{IKH}_{\min}$ khi $K\equiv A$ tức là $IA\perp d\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]$

Trong đó $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;-1);\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;0;3)=3(1;0;1)$

Suy ra $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]=-2(1;1;-1)$, mặt khác (Q) chứa đường thẳng Δ nên (Q) đi qua điểm $(1;2;-1)$.

Do đó $(Q):x+y-z-4=0$.



Mặt cầu $(S):\begin{cases}I(1;1;2)\\R=2\sqrt{3}\end{cases}$.

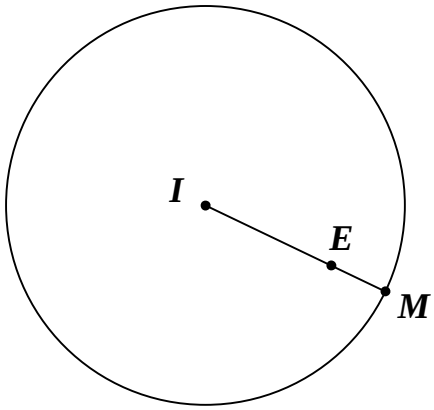
$d(I,(Q))=\dfrac{|1+1-2-4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{IM^2-d^2(I,(Q))}=\sqrt{12-\dfrac{16}{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thỏa $d=3MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T=4x_0-3y_0-2z_0$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi điểm E thỏa mãn $3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Khi đó $E\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

Ta có $d=3MA^2+2MB^2-MC^2=3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2$

$=3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2$

$=4ME^2+2\overrightarrow{ME}\left(3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}\right)+3EA^2+2EB^2-EC^2=4ME^2+3EA^2+2EB^2-EC^2$.

d đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $IE=\frac{\sqrt{209}}{4}<R$. Do đó điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Khi đó $ME_{\min}=R-IE=\frac{20-\sqrt{209}}{4}$.

M là giao điểm của đường thẳng IE và mặt cầu (S).

Phương trình đường thẳng $IE:\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+6t\\z=3-13t\end{cases}$. Gọi $M(1-2t;-2+6t;3-13t)$.

Vì $M\in(S)$ nên ta có $(1-2t-1)^2+(-2+6t+2)^2+(3-13t-3)^2=25\Leftrightarrow t=\pm\frac{5}{\sqrt{209}}$.

Suy ra $M_1\left(1-\frac{10}{\sqrt{209}};-2+\frac{30}{\sqrt{209}};3-\frac{65}{\sqrt{209}}\right), M_2\left(1+\frac{10}{\sqrt{209}};-2-\frac{30}{\sqrt{209}};3+\frac{65}{\sqrt{209}}\right)$.

Mà $ME_{\min}=\frac{20-\sqrt{209}}{4}$ do đó nhận $M\left(1-\frac{10}{\sqrt{209}};-2+\frac{30}{\sqrt{209}};3-\frac{65}{\sqrt{209}}\right)$.

Khi đó $T=4x_0-3y_0-2z_0=4$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Mặt phẳng (P) qua điểm A và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(P): 3x-z-1=0$. **B.** $(P): 3y-z+1=0$.

C. $(P): 2x+y-z-1=0$. **D.** $(P): 3y-z-1=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(0;3;-1) \Rightarrow IA=\sqrt{10}<R$ suy ra A nằm trong mặt cầu (S)

.Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P), khi đó bán kính của đường tròn (C) là: $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{R^2-IH^2}$.

Diện tích đường tròn (C) nhỏ nhất khi IH lớn nhất. Mà $IH \le IA$ nên IH lớn nhất khi $H \equiv A$.

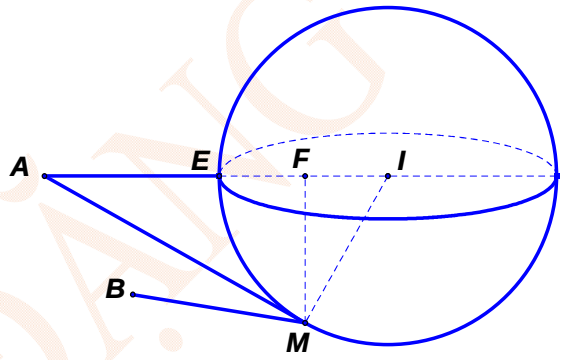
Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}=(0;3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

$(P): 0(x-1)+3(y-1)-1(z-2)=0 \Leftrightarrow 3y-z-1=0$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=9$ và hai điểm $A(-2;3;2), B(-1;0;3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{31}$.

Lời giải



Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=9$ có tâm $I(2;-1;0)$, bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=6=2R$.

Gọi $E(0;1;1)$ là trung điểm của $IA \Rightarrow E \in (S)$. Gọi $F\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của IE.

Xét tam giác IMF và IAM có $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA}$ và $\widehat{MIA}$ chung nên $\Delta IMF \sim \Delta IAM$.

Do đó $\frac{MF}{AM}=\frac{1}{2} \Rightarrow AM=2MF$.

Ta có $MA+2MB=2MF+2MB\geq 2BF=\sqrt{41}$.

Dấu bằng xảy ra khi $M=BF\cap(S)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $\sqrt{41}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;4;1), B(3;-2;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+m^2}{1}$, với m là tham số. Gọi $M(a;b;c)$, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên Δ sao cho thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(-3;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-4;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) qua điểm A vuông góc Δ là $x-2y+z+8=0$.

Mặt phẳng (Q) qua B vuông góc với Δ là $x-2y+z-7=0$.

Do đó $MN=d((P),(Q))=\dfrac{|8-(-7)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{6}}$.

Đường thẳng Δ qua điểm $I(m;-1;-m^2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng AB qua điểm $A(-1;4;1)$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(4;-6;-1)$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ và AB là $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|.|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{15}{\sqrt{6}\sqrt{53}}=\dfrac{15}{\sqrt{318}}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{31}{106}}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và MN là $d=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AI}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\right|}=\dfrac{|2m^2-8m+19|}{\sqrt{93}}=\dfrac{\left|2(m-2)^2+11\right|}{\sqrt{93}}\geq\dfrac{11}{\sqrt{93}}$.

Do đó $V_{ABMN}=\dfrac{1}{6}AB.MN.d.\sin\alpha\geq\dfrac{1}{6}.\dfrac{15}{\sqrt{6}}.\sqrt{53}.\dfrac{11}{\sqrt{93}}.\sqrt{\dfrac{31}{106}}=\dfrac{55}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m=2$.

Khi đó phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$.

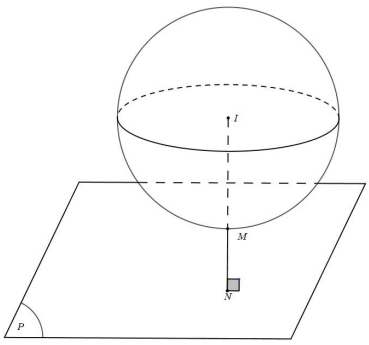
Đường thẳng Δ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;1)$. Vì M là hình chiếu của A lên Δ nên $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Rightarrow M(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{16}{3})$.

Suy ra $T=a+b+c=-3$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

Lời giải



Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2\Leftrightarrow \left(x+6\right)^2+\left(y-6\right)^2+\left(z+6\right)^2=108$. Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I\left(-6;6;-6\right)$ bán kính $R=6\sqrt{3}$.

Vậy MN nhỏ nhất khi M,N thuộc đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$.

Gọi $\left(d\right)$ là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$.

Khi đó $\left(d\right):\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\end{cases}$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình

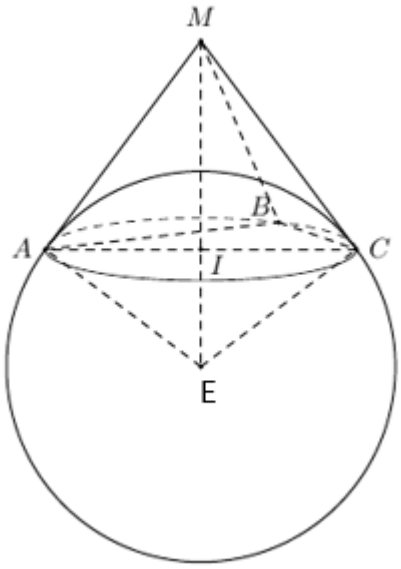
$$\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\-x+2y-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\6+t+12+4t+12+4t+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\\z=2\\t=-4\end{cases}.$$

$\Rightarrow N\left(-2;-2;2\right)$. Do đó $T=-2-2+2=-2$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$. Lấy điểm M trong không gian sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu $\left(S\right)$ thỏa mãn $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$ (A, B, C là các tiếp điểm). Khi đó đoạn thẳng OM có độ nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{14}-3\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{14}+6\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{14}-6$. **D.** $6-\sqrt{14}$.

Lời giải



Vì MA, MB, MC là 3 tiếp tuyến nên ta đặt $MA = MB = MC = x$.

$\triangle MAB$ có $MA = MB$, $\widehat{AMB} = 60°$ nên ΔMAB là tam giác đều, suy ra $AB = MA = MB = x$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho $\triangle MBC$ ta có $BC = \sqrt{MB^2 + MC^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí hàm số cos cho $\triangle MCA$: $CA = \sqrt{MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos 120°} = x\sqrt{3}$.

Nhận thấy $AB^2 + BC^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 = AC^2$, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow I$ là trung điểm của AC.

Vì $MA = MB = MC$ nên MI là trục đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$.

Do đó M; I; E thẳng hàng.

Mặt cầu (S) có tâm $E(1;2;-3)$ bán kính $R = 3\sqrt{3} = EC$

Suy ra $ME = \dfrac{EC}{\sin 60^0} = 6$. Vậy M thuộc mặt cầu (S') có tâm $E(1;2;-3)$ bán kính $R' = 6$.

Ta có $OE = \sqrt{14}$

Vậy $Min\,OM = |OE - R'| = 6 - \sqrt{14}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T = m + n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{7}{2}\right)$.

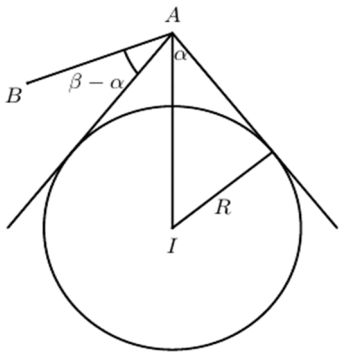
Lời giải

◆ Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;0)$, $R = 2$.

◆Ta có $AI=5,\ AB=\sqrt{17}$.

◆Có thể coi như tập hợp tất cả các đường thẳng AM với M là tiếp điểm của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) là một mặt nón tròn xoay (N) có đỉnh nón là điểm A và trục nón là đường thẳng AI

◆Góc ở đỉnh nón là 2α, có $\sin\alpha=\dfrac{R}{AI}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.



◆Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) cũng chính là khoảng cách từ B đến các đường sinh của nón (N).

◆Ta đi tính góc $\cos\widehat{BAI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}}{AB.AI}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}\Rightarrow\widehat{BAI}>\alpha$.

◆Suy ra khoảng cách nhỏ nhất từ B đến (P) là $n=d\left(B,(P)\right)_{\min}=0$. Khi đó $B\in(P)$.

◆Gọi β là góc tạo bởi AB và AI. Khoảng cách lớn nhất từ B đến (P) là

$m=d\left(B,(P)\right)_{\max}=AB.\sin(\alpha+\beta)$

$=\sqrt{17}\left(\sin\alpha.\cos\beta+\cos\beta.\sin\alpha\right)=\sqrt{17}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{5}.\dfrac{\sqrt{21}}{5}+\dfrac{\sqrt{17}}{5}.\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt{714}+34}{25}\approx3,5$

◆Vậy $m+n=3,5$.

Câu 19. Cho điểm $A(2;3;5)$, hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=9,\ (S_2):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$ và điểm M di động thuộc cả hai mặt cầu. Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của AM. Tính giá trị của biểu thức $T=m^2+n^2$.

A. $\dfrac{341}{4}$. **B.** $\dfrac{151}{2}$ **C.** $\dfrac{1028}{7}$ **D.** $\dfrac{2411}{28}$.

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm O, bán kính $R_1=3$; mặt cầu (S_2) có tâm $I(1;2;-3)$, bán kính $R_2=4$.

Ta có $|R_1-R_2|<OI=\sqrt{14}<R_1+R_2\Rightarrow$ hai mặt cầu cắt nhau theo một đường tròn, kí hiệu là đường tròn (C) có tâm H, bán kính r.

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn (C) là: $(P): 2x+4y-6z-7=0$

Bán kính đường tròn (C) bằng $r=\sqrt{R_1^2-d^2\left(O,(P)\right)}=\dfrac{\sqrt{130}}{4}$

Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).

Ta có HA' là hình chiếu của OA trên mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-3)$, $\overrightarrow{OA}=(2;3;5)$

$$\sin\left(OA,(P)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{OA},\vec{n}\right)\right|=\frac{\sqrt{133}}{38}\Rightarrow\cos\left(OA,(P)\right)=\sqrt{\frac{69}{76}}$$

$$\Rightarrow HA'=OA.\cos\left(OA,(P)\right)=\frac{\sqrt{138}}{2}>r$$

Suy ra A' nằm ngoài đường tròn (C).

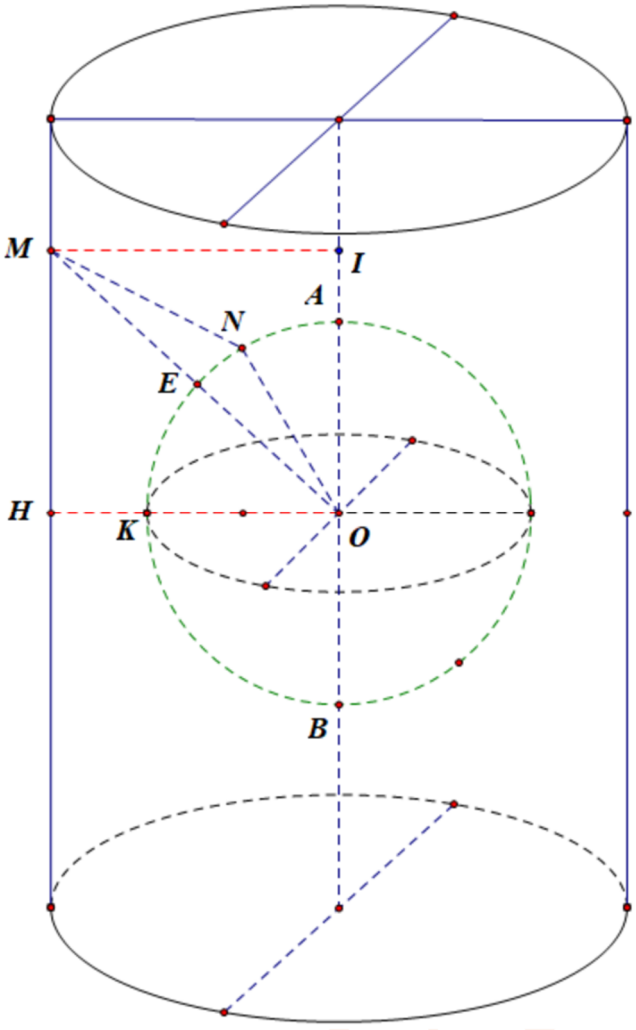
Khi đó giá trị lớn nhất của AM bằng $m=HA'+r=\dfrac{\sqrt{138}}{2}+\dfrac{\sqrt{130}}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của AM bằng $m=HA'-r=\dfrac{\sqrt{138}}{2}-\dfrac{\sqrt{130}}{4}$. $T=m^2+n^2=\dfrac{341}{4}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 40 và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;0;6)\Rightarrow AB=10$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng AB, suy ra $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}MI.AB=40$

$\Leftrightarrow MI=\frac{80}{AB}\Leftrightarrow MI=8$ nên M thuộc mặt trụ (D) có trục AB và bán kính $R=8$.

Do tam giác ABN vuông tại N nên N thuộc mặt cầu (S) đường kính AB, tâm O, bán kính $R'=5$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với AB.

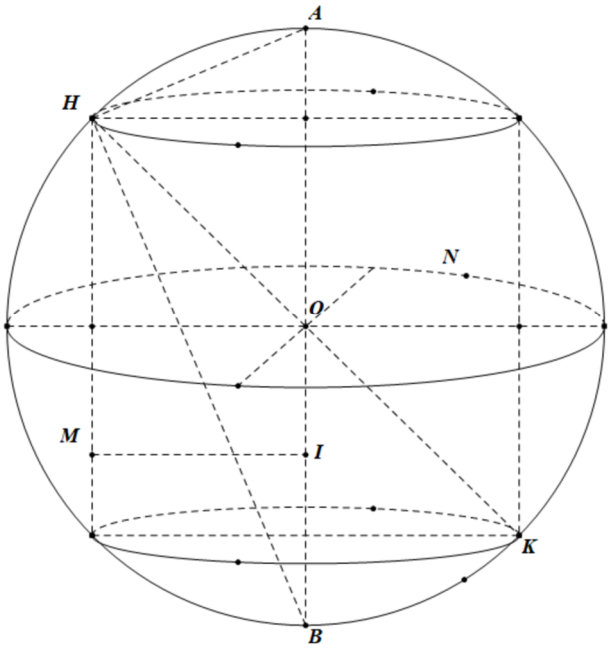
Ta có $MN+NO\geq MO\geq HO=HK+KO\Rightarrow MN\geq HK=HO-KO=3$.

Suy ra MN nhỏ nhất bằng 3 khi M thuộc giao của mặt trụ (D) với mặt phẳng (P), N thuộc giao của mặt cầu (S) với mặt phẳng (P) sao cho M,N,O thẳng hàng và N nằm giữa M,O.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-5;4;-1)$ và $B(3;4;5)$. Xét các điểm M và N thay đổi sao cho tam giác ABM có diện tích bằng 15, góc $AMB\geq 90^0$ và tam giác ABN vuông tại N. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(13;15)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(10;12)$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;0;6)\Rightarrow AB=10$.

Do tam giác ABN vuông tại N nên N thuộc mặt cầu (S) đường kính AB, tâm O, bán kính $R=5$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng AB, suy ra $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}MI.AB=15$

$\Leftrightarrow MI=\frac{30}{AB}\Leftrightarrow MI=3$ nên M thuộc mặt trụ (D) có trục AB và bán kính $R'=3$.

Do góc $AMB\geq 90^0$ nên M thuộc phần mặt trụ (D) giao với mặt cầu (S) hoặc phần mặt trụ (D) nằm trong mặt cầu (S).

Ta có $MN\leq 2R=10$.

Suy ra MN lớn nhất bằng 10 khi M thuộc giao của mặt trụ (D) với mặt phẳng (P), N thuộc mặt cầu (S) sao cho M,N,O thẳng hàng và O nằm giữa M,N.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+7=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-6z+7=0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

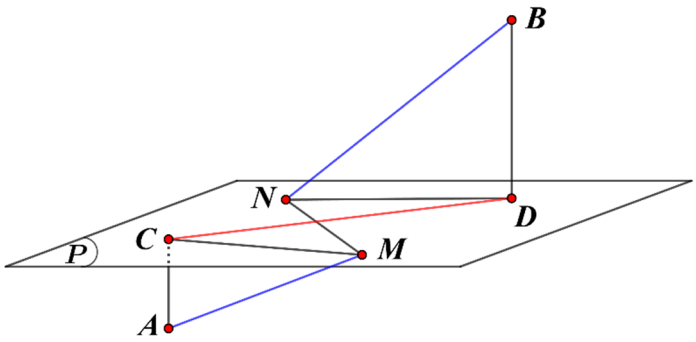
A. $\sqrt{18+2\sqrt{13}}$. **B.** $\sqrt{18-2\sqrt{13}}$. **C.** $18-2\sqrt{13}$. **D.** $18+2\sqrt{13}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên ta có hệ:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+7=0 \\ x^2+y^2+z^2+2y-6z+7=0 \end{cases} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow (P)\equiv(Oyz).$

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;2;3)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (Oyz). Khi đó $AC=1$, $BD=1$, $CD=\sqrt{13}$.



Ta có: $AM+BN=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}\geq\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}$

Mặt khác: $CM+DN+MN\geq CD\Rightarrow CM+DN\geq CD-MN=\sqrt{13}-1$.

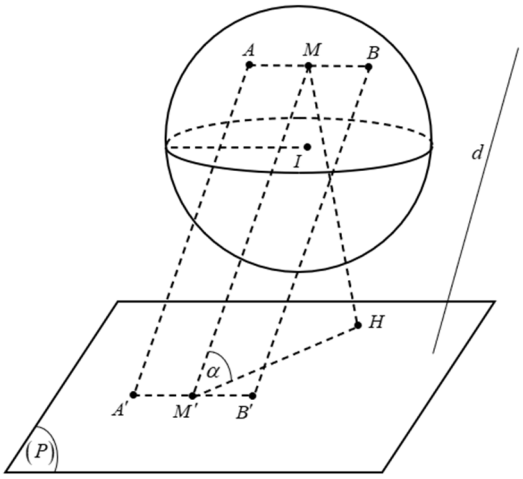
Suy ra $AM+BN\geq\sqrt{4+(CM+DN)^2}\geq\sqrt{4+\left(\sqrt{13}-1\right)^2}=\sqrt{18-2\sqrt{13}}$

Vậy $AM+BN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{18-2\sqrt{13}}$, dấu "=" xảy ra khi C,M,N,D thẳng hàng.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+z+7=0$, đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=5$. Gọi A, B là hai điểm trên mặt cầu (S) và $AB=4$; A', B' là hai điểm nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với đường thẳng d. Giá trị lớn nhất của tổng $AA'+BB'$ gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Khi đó khoảng cách: $d\left(I;(P)\right)=\frac{10\sqrt{3}}{3}>R$ nên (P) và mặt cầu (S) không giao nhau.

Gọi M là trung điểm của AB, M' là trung điểm của $A'B'$ thì:

$AA'+BB'=2MM'=2.\frac{MH}{\sin\left(MM';(P)\right)}$.

Khi đó $MH_{\max}=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}+d\left(I;(P)\right)=\sqrt{5-4}+\frac{10\sqrt{3}}{3}=\frac{3+10\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\sin\left(MM';(P)\right)=\sin\left(d;(P)\right)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Vậy $\left(AA'+BB'\right)_{\max}=2.\frac{\frac{3+10\sqrt{3}}{3}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{60+6\sqrt{3}}{5}\approx 14,08$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục$Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ và hai điểm $A(3;0;0);B(-1;1;0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$.

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{26}$ **C.** 6 **D.** 5

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có : $M\in(S)\Rightarrow x^2+y^2+z^2-1=0$.

$MA=\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2};MB=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}$.

Suy ra: $MA+3MB=\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}+3\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}$

$=\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2+8\left(x^2+y^2+z^2\right)-8}+3\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}$

$=3\sqrt{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2+z^2}+3\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}=3(MC+MB)\geq 3BC$ với

$C\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. (*Dễ thấy điểm B nằm ngoài mặt cầu, còn điểm C nằm trong mặt cầu*).

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$ bằng 5 khi $\begin{cases}M=BC\cap(S)\\ \overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CB}\ (k>0)\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{3-8\sqrt{6}}{25};\frac{4+6\sqrt{6}}{25};0\right)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, $A(1;2;3),B(2;-1;1),C(4;-3;5),D(1;-2;3)$. Xét các điểm M thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(200;210)$. **B.** $(190;200)$. **C.** $(180;190)$. **D.** $(170;180)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

Gọi I là trọng tâm tứ diện $ABCD$, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ suy ra $I(2;-1;3)$

$T=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$

$=4MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ đạt GTLN khi độ dài đoạn thẳng IM lớn nhất

$\max IM=OI+R=\sqrt{14}+3$

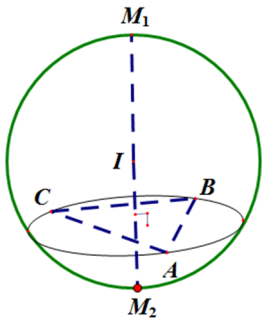
Vậy $\max T=4(OI+R)^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2=120+24\sqrt{14}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Ta có $(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-4)\\ \overrightarrow{AC}=(1;-1;-4)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;4).$

Gọi $D(x;y;z)\in(S)\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ \overrightarrow{AD}=(x;y-1;z-1)\end{cases}$.

Ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|8x-8y+4z+4\right|=\frac{2}{3}\left|2x-2y+z+1\right|$.

Ta có:

$(2x-2y+z-1)^2=\left[2.(x-1)-2.y+1.(z+1)\right]^2\le\left(2^2+2^2+1^2\right)\left[(x-1)^2+y^2+(z+1)^2\right]=36$

$\Rightarrow-6\le2x-2y+z-1\le6\Leftrightarrow-4\le2x-2y+z+1\le8$

$\Rightarrow |2x-2y+z+1| \le 8 \Rightarrow V_{ABCD} \le \dfrac{16}{3}$

Suy ra: Giá trị lớn nhất của V_{ABCD} bằng $\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{1} > 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Cách 2:

Mặt cầu (S): $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ có tâm $I(1;0-1)$,bán kính $R=2$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1;-3;-4) \\ \overrightarrow{AC} = (1;-1;-4) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;-8;4) \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2+4^2} = 6.$

Mặt phẳng $(ABC): 2x-2y+z+1=0$.

Ta có: $d\left(I;(ABC)\right) = \dfrac{|2.1-2.0-1+1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{2}{3} < R = 2 \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (ABC) theo thiết diện là một đường tròn.

Ta lại có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.d\left(D;(ABC)\right) = 2.d\left(D;(ABC)\right)$.

Do đó: V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow d\left(D;(ABC)\right)$ lớn nhất.

Mà $d\left(D;(ABC)\right)_{\max} = R + d\left(I;(ABC)\right) = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

Do đó: $\max V_{ABCD} = \dfrac{16}{3}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1), B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính $T = a+b-c$ biết $a>2$.

A. $T=-1$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Nhận thấy đường thẳng AB song song với (P).

Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB, I là trung điểm của AB,

suy ra $I(5;0-1)$; $IA = \sqrt{24}$.

Phương trình mặt cầu $(S): (x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 24$.

Vì AB có độ dài không đổi và song song với (P) nên điểm M cần tìm nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}(4;-8-4); \overrightarrow{n_P}(1;1-1)$, suy ra VTPT của (Q) là $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AB}\right] = (12;0;12)$. Phương trình mặt phẳng $(Q): x+z-4=0$.

Điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là điểm đồng thời thuộc $(P), (Q)$ và (S).

Do đó tọa độ điểm M là nghiệm hệ $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+z-4=0 \\ (x-5)^2+y^2+(z+1)^2=24 \\ x>2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=1 \end{cases}$.

Nên $M(3;-4;1)$. Vậy $T=a+b-c=3-4-1=-2$.

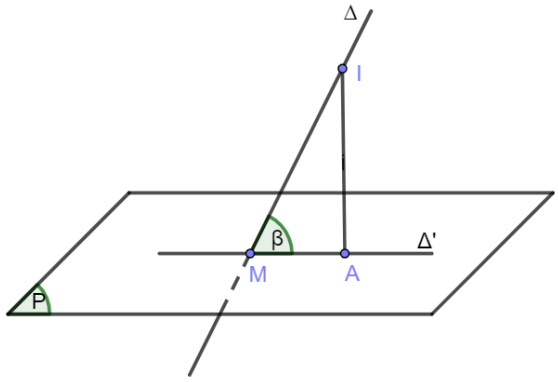
Câu 28. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$.

Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Δ (I có hoành độ âm) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A. Điểm $N(a;b;c)$ là điểm thay đổi trên (S), khi khoảng cách ON lớn nhất thì giá trị của $T=a+b-c$ là bao nhiêu, biết rằng diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ (M là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)).

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** $-2-2\sqrt{3}$. **C.** $-2+2\sqrt{3}$. **D.** $-2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Áp dụng công thức tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) ta có:

$\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|2.1+1.2+(-1).1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra góc $\widehat{IMA}=30^\circ$.

Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có: $IA=R$. Tam giác IAM vuông tại A có:

$\widehat{IMA}=30^\circ \Rightarrow AM=R\sqrt{3}$.

$S_{IAM}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3} \Leftrightarrow R=\sqrt{6}$.

$I\in\Delta \Rightarrow$ Giả sử $I(2t+1;1+t;-t)$, $t<\dfrac{-1}{2}$.

$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|3t-3|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow I(-1;0;1)$.

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Khoảng cách ON lớn nhất $\Rightarrow N\in OI\cap(S)$.

Đường thẳng OI có phương trình: $\begin{cases}x=-t\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Tham số t ứng với giao điểm của OI và (S) là nghiệm của phương trình:

$(-t+1)^2+0^2+(t-1)^2=6\Leftrightarrow(t-1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{3}\\t=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Suy ra đường thẳng OI cắt (S) tại hai điểm $X\left(-1-\sqrt{3};0;1+\sqrt{3}\right);Y\left(-1+\sqrt{3};0;1-\sqrt{3}\right)$

$OX=\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2\left(4+2\sqrt{3}\right)}$

$OY=\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2\left(4-2\sqrt{3}\right)}$

Do $OX>OY$ nên điểm N thỏa mãn bài toán khi N trùng điểm X.

$\Rightarrow N\left(-1-\sqrt{3};0;1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=-1-\sqrt{3}\\b=0\\c=1+\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow a+b-c=-2-2\sqrt{3}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;5;4)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn biểu thức $MA^2+MB^2=40$ và khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất. Khi đó $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 25. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(1;2;3)$, $AB=2\sqrt{11}$

$MA^2+MB^2=40\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=40$

$\Leftrightarrow 2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}=40\Leftrightarrow MI=3$

Do đó M thuộc mặt cầu (S) cầu có tâm $I(1;2;3),R=3$.

$d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2.1-2.2+3+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{4}{3}<R$ suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) nhỏ nhất.

Khi đó, M thuộc đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P)

Ta có phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\\(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\end{cases}$

$\Rightarrow (2t)^2+(-2t)^2+(t)^2=9\Rightarrow 9t^2=9\Rightarrow t=\pm 1$

Với $t=1\Rightarrow M(3;0;4)\Rightarrow d(M;(P))=\dfrac{|2.3-2.0+4+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{10}{3}$.(loại)

Với $t=-1\Rightarrow M(-1;4;2)\Rightarrow d(M;(P))=\dfrac{|2.(-1)-2.4+2+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $M(-1;4;2)\Rightarrow T=a^2+b^2+c^2=21$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(4;-5;2)$ và $B(1;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (α) và thỏa mãn điều kiện sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(2;-2;-3)$. **B.** $N(6;-7;-1)$. **C.** $P(2;3;-5)$. **D.** $Q(6;-7;1)$.

Lời giải

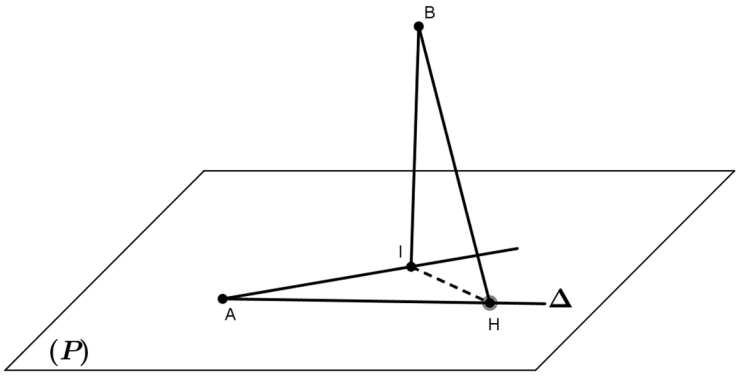
Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Phương trình của $(P):x-2y+2z-18=0$

Suy ra Δ nằm trong mặt phẳng (P)

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và Δ



Tam giác BIH vuông tại $I\Rightarrow BH\geq BI\Rightarrow d(B,\Delta)\geq d(B,(P))$

Suy ra $d(B,\Delta)_{\min}=d(B,(P))$ hay Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A và I (điểm H trùng với điểm I).

BI vuông góc với (P) nên đường thẳng BI nhận $\overrightarrow{n_p}=(1;-2;2)$ là một VTCP.

Phương trình tham số của đường thẳng BI là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases} \left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Điểm I là giao điểm của đường thẳng BI và mặt phẳng (P) nên tọa độ I thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \\ x-2y+2z-18=0 \end{cases} \Rightarrow I(2;-3;5) \Rightarrow \overrightarrow{AI}=(-2;2;3)$.

Ta có đường thẳng Δ có một VTCP là $\vec{u}=(2;-2;-3)$ và đi qua điểm $I(2;-3;5)$

Phương trình chính tắc của Δ là $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{-3}$.

Thay tọa độ các điểm M,N,P,Q vào phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta thấy tọa độ điểm N thỏa mãn. Vậy đường thẳng Δ đi qua điểm N.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;0;1), B(-2;0;0), C\left(-\frac{3}{2};1;1\right)$. Điểm M thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=AB$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{12}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(a;b;c)$. Ta có:

$\frac{MA}{MB}=AB \Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=\sqrt{2} \Leftrightarrow MA^2=2.MB^2 \Leftrightarrow (a+3)^2+(b)^2+(c-1)^2=2\left[(a+2)^2+(b)^2+(c)^2\right]$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a+2c-2=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+b^2+(c+1)^2=4$

Vậy M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;-1)$ và bán kính $R=2$.

Mặt phẳng $(\alpha)\equiv(OAC)$ đi qua các điểm $O(0;0;0), A(-3;0;1), C\left(-\frac{3}{2};1;1\right)$ nên có phương trình là $(\alpha): -2x+3y-6z=0$.

Vì $d(I;(OAC))=\frac{8}{7}<R=2$ nên (OAC) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn.

Ta có: $V_{O.MAC}=V_{M.OAC}=\frac{1}{3}.d(M;(OAC)).S_{\Delta OAC}=\frac{7}{12}.d(M;(OAC))$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.MAC$ đạt được khi $d(M;(OAC))=d(M;(\alpha))=\frac{|-2a+3b-6c|}{7}$ lớn nhất.

Đặt $P=|-2a+3b-6c|$. Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối $|x+y|\le|x|+|y|$ và Bunhiacopxki:

$P=|-2a+3b-6c|=\left|\left[-2(a+1)+3b-6(c+1)\right]+8\right|\le\left|-2(a+1)+3b-6(c+1)\right|+8$

$\le \sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2}.\sqrt{(a+1)^2+b^2+(c+1)^2}+8=7.4+8=22$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}(a+1)^2+b^2+(c+1)^2=4\\ \dfrac{a+1}{-2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c+1}{-6}\\ 8.\left[-2(a+1)+3b-6(c+1)\right]\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{-11}{7}\\ b=\dfrac{6}{7}\\ c=\dfrac{-19}{7}\end{cases}$

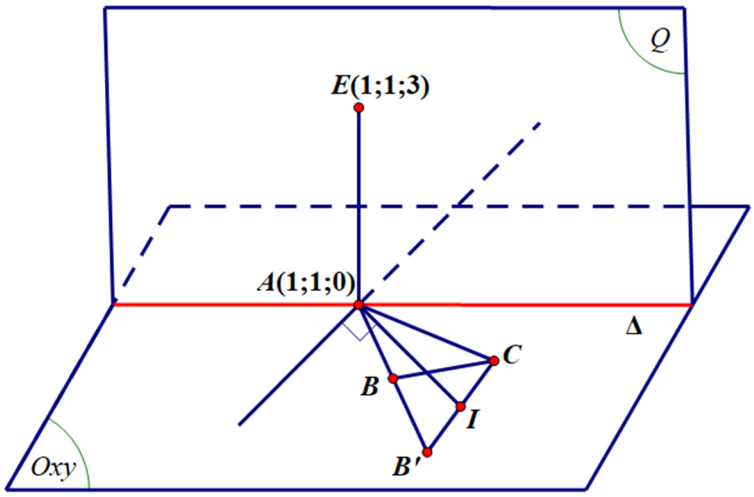
Vậy: $V_{O.MAC}=\dfrac{11}{6}$.

Câu 32. **Mức độ 4]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $B(2;5;0)$, $C(4;7;0)$ và $E(1;1;3)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua E và vuông góc với mặt phẳng (Oxy), Δ là giao tuyến của (Q) và (Oxy), $T=2d(B,(Q))+d(C,(Q))$. Khi T đạt giá trị lớn nhất, Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $M(-12;6;0)$. **B.** $P(12;-4;0)$. **C.** $Q(15;4;0)$. **D.** $N(15;-4;0)$.

Lời giải

Chọn D



Ta thấy B, C cùng thuộc mặt phẳng (Oxy). Gọi A là hình chiếu vuông góc của E trên $(Oxy) \Rightarrow A(1;1;0)$.

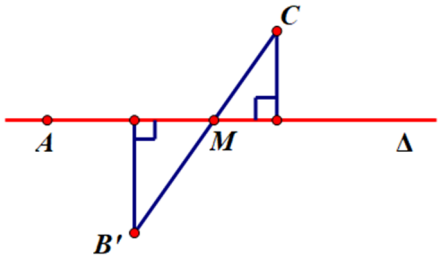
Vì $(Q)\perp(Oxy)$ nên $A\in\Delta$ và $T=2d(B,(Q))+d(C,(Q))=2d(B,\Delta)+d(C,\Delta)$.

Trên tia AB lấy điểm B' đối xứng với A qua B, suy ra $B'(3;9;0)$ và $d(B',\Delta)=2d(B,\Delta)$.

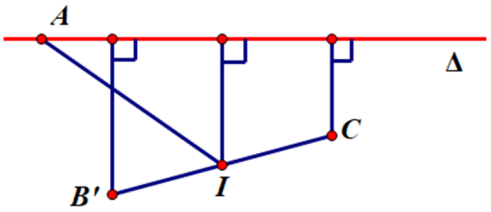
Do đó: $T=2d(B,(Q))+d(C,(Q))=d(B',\Delta)+d(C,\Delta)$.

Nhận xét:

+) Nếu Δ đi qua A và cắt đoạn $B'C$ tại M thì $d(B',\Delta)+d(C,\Delta)\le B'M+CM=B'C$, dấu "=" xảy ra khi $\Delta\perp B'C$ (1).



+) Nếu Δ không cắt đoạn $B'C$ thì $d\left(B',\Delta\right)+d\left(C,\Delta\right)=2d\left(I,\Delta\right)\le 2IA$, với $I\left(\frac{7}{2};8;0\right)$ là trung điểm đoạn $B'C$, dấu "=" xảy ra khi $\Delta\perp IA$ (2).



Mặt khác: xét tam giác $AB'C$ có $\cos\widehat{B'AC}=\frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}}{AB'.AC}=\frac{54}{\sqrt{68}.\sqrt{45}}>0$. Suy ra $\widehat{B'AC}$ nhọn nên $2IA>B'C$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $MaxT=2IA=2\frac{\sqrt{221}}{2}=\sqrt{221}$, khi Δ đi qua $A\left(1;1;0\right)$ và vuông góc với đường thẳng IA. Khi đó Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right]=\left(7;-\frac{5}{2};0\right)$.

$$\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1+7t\\y=1-\frac{5}{2}t\\z=0\end{cases}.$$

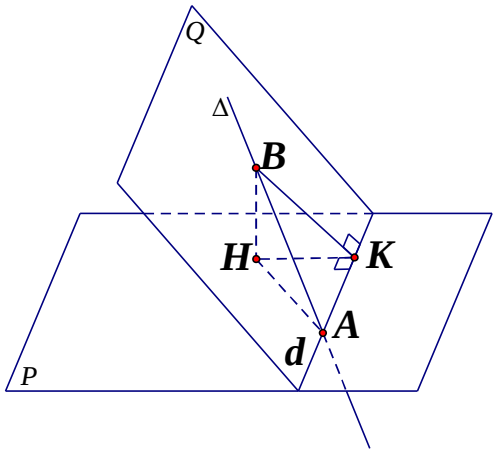
Với $t=2\Rightarrow\begin{cases}x=15\\y=-4\\z=0\end{cases}\Rightarrow N\left(15;-4;0\right)\in\Delta$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $\left(P\right):x+2y-2z+4=0$. Gọi $\left(Q\right)$ là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$ là nhỏ nhất. Phương trình của mặt phẳng $\left(Q\right)$ là

A. $x+10y-22z=0$. **B.** $x+10y-22z-12=0$.

C. $x-10y-22z-21=0$. **D.** $x+10y+22z+12=0$.

Lời giải



+) Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+2t\\z=t\\x+2y-2z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\x=-2\\y=-3\\z=-2\end{cases}$. Do đó Δ cắt (P) tại điểm $A(-2;-3;-2)$.

Lại có Δ và (P) không vuông góc nhau nên ta đi chứng minh góc nhỏ nhất giữa (P) và (Q) là góc giữa Δ và (P). Thật vậy trên Δ lấy B khác A, kẻ BH vuông góc với (P) tại H và BK vuông góc d tại K (d là giao tuyến của (P) và (Q)). Khi đó góc giữa (Q) và (P) là góc $\widehat{BKH}$.

$HA\geq HK\Rightarrow\tan\widehat{BKH}=\dfrac{BH}{HK}\geq\dfrac{BH}{HA}=\tan\widehat{BAH}$.

$\begin{cases}\widehat{BKH},\ \widehat{BAH}<90^\circ\\\tan\widehat{BKH}\geq\tan\widehat{BAH}\end{cases}\Rightarrow\widehat{BKH}\geq\widehat{BAH}=\left(\widehat{\Delta,(P)}\right)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow K\equiv A\Leftrightarrow\Delta\perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa Δ và cắt (P) theo một giao tuyến vuông góc Δ.

+) Viết phương trình của (Q).

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-2)$ nên d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{n_1}\right]=(-6;5;2)$.

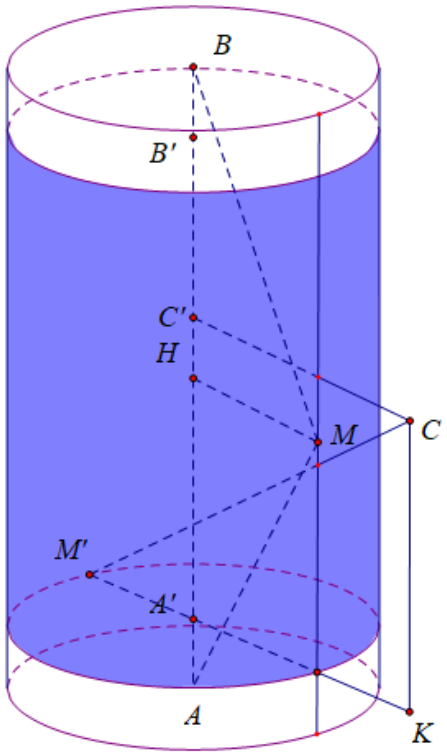
(Q) chứa Δ và d nên nhận $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_1}\right]=(1;10;-22)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(-2;-3;-2)$ và nhận $\overrightarrow{n_2}=(1;10;-22)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: $x+2+10(y+3)-22(z+2)=0\Leftrightarrow x+10y-22z-12=0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(1;1;10)$ và $C(4;5;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác ABM có $\widehat{AMB}\geq 90^\circ$ và có diện tích bằng 15. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MC thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(7;8)$. **B.** $(8;9)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(10;11)$.

Lời giải



Ta có $S_{\Delta ABM}=15\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.d\left(M,AB\right)=15\Leftrightarrow d\left(M,AB\right)=\frac{30}{AB}=3$. Do đó điểm M thuộc mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính $r=3$ (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB, ta có $MH=d\left(M,AB\right)=3$. Dễ thấy nếu H không thuộc đoạn AB thì $\widehat{AMB}<90°$ (không thỏa mãn giả thiết). Do đó H thuộc đoạn AB. Đặt $AH=x$, ta có $BH=10-x$;

$MA^2+MB^2=\left(x^2+9\right)+\left[\left(10-x\right)^2+9\right]=x^2+\left(10-x\right)^2+18$.

Hơn nữa, ta có $\widehat{AMB}\geq 90°$ nên $\cos\widehat{AMB}\leq 0$, suy ra $MA^2+MB^2-AB^2\leq 0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(10-x\right)^2+18-100\leq 0\Leftrightarrow 2x^2-20x+18\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm M thuộc hình trụ có trục là đoạn $A'B'$, bán kính $r=3$ (như hình vẽ) với $A'\left(1;1;1\right)\in AB$; $B'\left(1;1;9\right)\in AB$.

Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C lên AB, ta có $C'\left(1;1;6\right)\Rightarrow d\left(C,AB\right)=CC'=5$. Do đó C nằm ngoài hình trụ.

Ta có khoảng cách từ C đến mặt phẳng chứa hình tròn đáy $\left(A',3\right)$ lớn hơn khoảng cách từ C đến mặt phẳng chứa hình tròn đáy $\left(B',3\right)$ nên ta tìm điểm M thuộc hình tròn đáy $\left(B',3\right)$ sao cho $MC_{\max}$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng chứa hình tròn đáy $\left(A',3\right)$ của hình trụ. Kẻ $A'K$ cắt $\left(A',3\right)$ tại M', với M' nằm ngoài đoạn $A'K$ (như hình vẽ). Ta có $CK=5$, $M'K=M'A'+A'K=M'A'+CC'=8$.

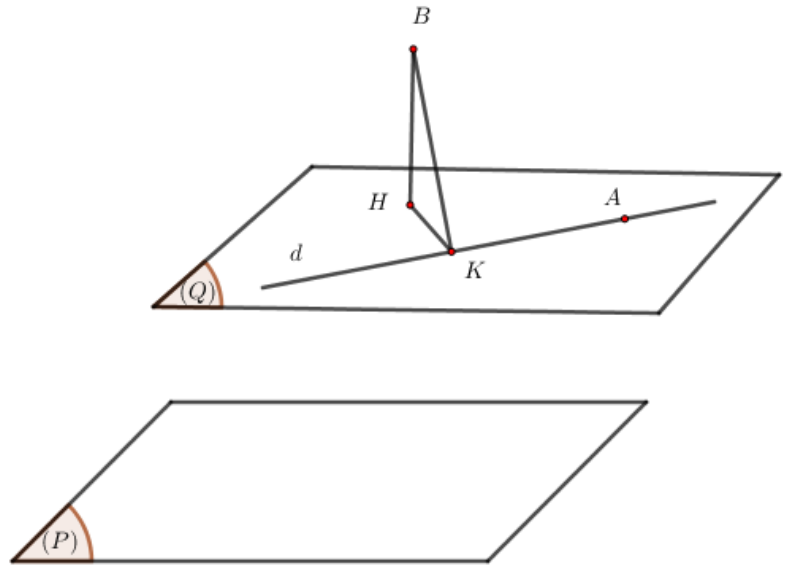
Dễ thấy $M'C=\sqrt{M'K^2+CK^2}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$ là khoảng cách lớn nhất từ một điểm thuộc hình trụ đến điểm C.

Do đó $MC_{\max}=\sqrt{89}\in\left(9;10\right)$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1); B(-1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P), sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x=2-26t \\ y=1+7t \\ z=1+20t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-8t \\ y=1+16t \\ z=1+29t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2-26t \\ y=1-7t \\ z=1+20t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=1+4t \end{cases}$.

Lời giải



Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $A(2;1;1)$ và song song với mặt phẳng (P). Ta có (Q) cố định và $d \subset (Q)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (Q), K là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng d. Khi đó $d(B;d) = BK \geq BH$. Do đó khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất bằng BH xảy ra khi $K \equiv H$ hay khi đường thẳng d đi qua điểm H. Khi đó đường thẳng d nhận $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right], \vec{n}\right]$ làm vectơ chỉ phương, với $\overrightarrow{AB} = (-3;1;2)$ và $\vec{n} = (1;-2;2)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

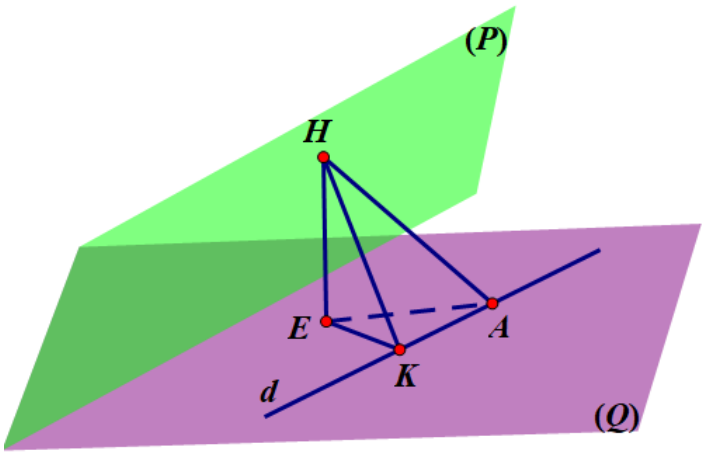
Ta có $\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right] = (-6;-8;-5)$, $\vec{u} = \left[\left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right], \vec{n}\right] = (-26;7;20)$.

Vậy đường thẳng d thỏa mãn đầu bài có phương trình : $\begin{cases} x=2-26t \\ y=1+7t \\ z=1+20t \end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+4=0$. Gọi $(Q): x+by+cz+d=0$ là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) góc với số đo nhỏ nhất. Khi đó $T = b+c+d$ bằng:

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải



Lấy điểm $A(0;-1;2)$ thuộc đường thẳng d.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Gọi E,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (Q) và đường thẳng d.

Ta có: $AH\perp(P), HE\perp(Q)\Rightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\widehat{AHE}=\alpha$. Xét $\cos\alpha=\dfrac{HE}{HA}\le\dfrac{HK}{HA}$

Để α có số đo nhỏ nhất thì $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow E\equiv K$. Lúc đó mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (AHK).

Mặt phẳng (AHK) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông với mặt phẳng (P)

Mà (d) có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$, (P) có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-1;-2)$

$\Rightarrow\vec{n}_{(AHK)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(-3;0;-3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AHK)

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là: $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(AHK)}\right]=(-6;-6;6)$ hay $\vec{n}'_{(Q)}=(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(0;-1;2)$ nên có phương trình là (Q): $x+y-z+3=0$.

Do đó $T=1-1+3=3$.

Cách khác

Mp (P) có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-1;-2)$; Mp (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;\,b;\,c)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $\cos\alpha=\dfrac{|2-b-2c|}{3.\sqrt{1+b^2+c^2}}$ $(*)$

Đường thẳng (d) $\begin{cases}Đi\ qua\ M(0;-1;\,2)\\ Có\ VTCP\ \overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)\end{cases}$

Do mp(Q) chứa (d) nên $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_Q}=0$ và $M\in(Q)$. Suy ra $\begin{cases}2b+c-1=0\\-b+2c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1-2b\\d=b-2c\end{cases}(**)$

Thay $c=1-2b$ vào $(*)$ ta được $\cos\alpha=\dfrac{|3b|}{3.\sqrt{1+b^2+(1-2b)^2}}$

TH1: $b=0\Rightarrow\alpha=90^0$

TH2: $b\neq 0$ ta có $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5-\dfrac{4}{b}+\dfrac{2}{b^2}}}$.

Mà $5-\dfrac{4}{b}+\dfrac{2}{b^2}=2\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1\right)+3=2\left(\dfrac{1}{b}-1\right)^2+3$ nên $\cos\alpha\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \forall b\in\mathbb{R}^*$.

Vậy góc α bé nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất hay $\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow b=1$.

Kết hợp $(**)$ ta được $c=-1;d=3$. Suy ra $T=b+c+d=3$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có $\widehat{OMA}$ tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$, suy ra $\overrightarrow{OA}=(0;0;10)$ và $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$, dẫn đến $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right]=(-10y;10x;0)$.

Suy ra, $S_{OAM}=15\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\sqrt{100(x^2+y^2)}=15\Leftrightarrow x^2+y^2=9.$

Do tam giác OAM tù tại M nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}>0\\\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}>0\\\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z>0\\z<10\\x^2+y^2-z(10-z)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<z<10\\z^2-10z+9<0\end{cases}\Leftrightarrow 1<z<9.$$

Khi đó,

$$MB^2=(x-3)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=-(6x+8y)+z^2-12z+70$$
$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\ge}-\sqrt{(6^2+8^2)(x^2+y^2)}+z^2-12z+70$$
$$=z^2-12z+40=(z-6)^2+4\ge 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+y^2=9\\\dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}\\z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{25x^2}{9}=9\\y=\dfrac{4}{3}x\\z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{5}\\y=\dfrac{12}{5}\\z=6.\end{cases}$

Suy ra, $\min MB = 2$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM có $\widehat{OMA}$ không nhọn và có diện tích bằng 15. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(6;7)$. **B.** $(7;8)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(9;10)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$, suy ra $\overrightarrow{OA} = (0;0;10)$ và $\overrightarrow{OM} = (x;y;z)$, dẫn đến $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right] = (-10y;10x;0)$.

Suy ra, $S_{OAM} = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)} = 15 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9$.

Do tam giác OAM tù tại M nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} > 0 \\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM} > 0 \\ \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z > 0 \\ z < 10 \\ x^2+y^2-z(10-z) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < 10 \\ z^2-10z+9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le z \le 9.$$

Khi đó,

$$MB^2 = (x-3)^2+(y-4)^2+(z-6)^2 = -(6x+8y)+z^2-12z+70$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left(x^2+y^2\right)}+z^2-12z+70$$

$$= z^2-12z+100$$

Xét hàm số $f(z) = z^2-12z+100$ trên $[1;9]$. Ta có, $f'(z) = 2z-12$, $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 6$.

Ta có bảng biến thiên

z	1		6		9
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	89	↘	6	↗	73

Suy ra, $\max MB = \sqrt{89}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = -\frac{12}{5} \\ z = 1 \end{cases}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $10,5$. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng CB thuộc khoảng nào dưới đây?

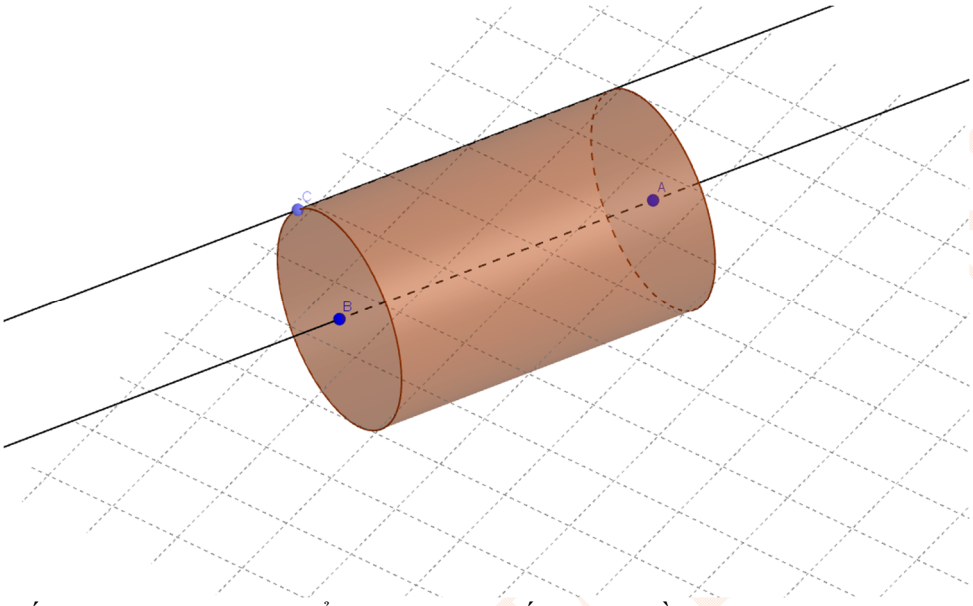
A. $(1;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(3,5;4,5)$.

Lời giải

Độ dài $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-2))^2+(5-3)^2}=6$.

$S_{\Delta ABC}=10,5\Rightarrow$ Chiều cao hạ từ C xuống AB có độ dài là $h=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\dfrac{2.10,5}{6}=3,5$.

Vì diện tích của ΔABC không đổi với cạnh AB cố định nên quỹ tích điểm C thu được là mặt xung quanh của **mặt** trụ có trục là đường thẳng AB và bán kính $R=h=3,5$



Kết luận: Độ dài đoạn thẳng CB nhỏ nhất khi C nằm trên đường tròn tâm B, bán kính $R=3,5$ hay độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng CB là: $CB=R=3,5$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;2)$ và $B(1;1;0)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC không có góc tù và có diện tích bằng 6. Giá trị nhỏ nhất của $CA+CB$ thuộc khoảng nào dưới đây?

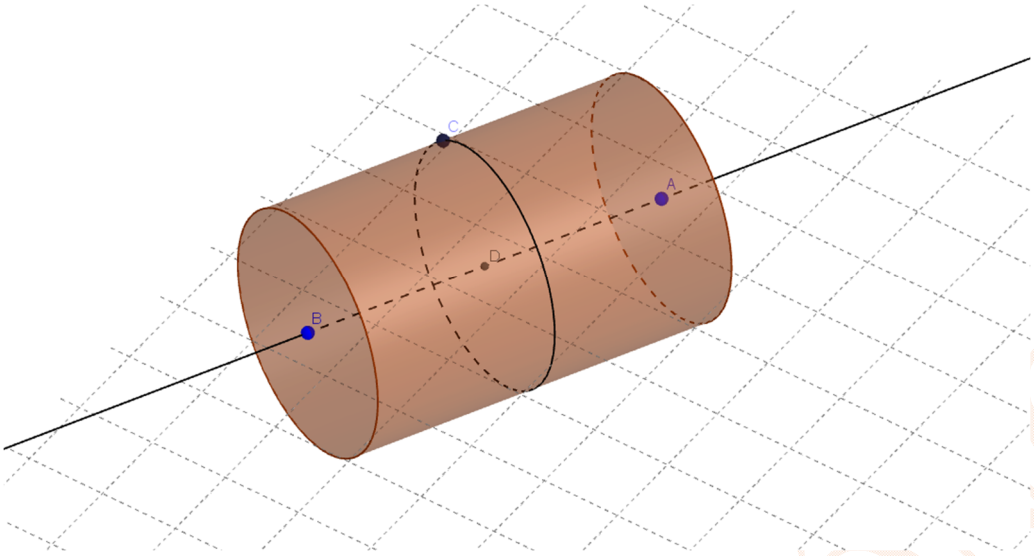
A. $(8;9)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(7;8)$.

Lời giải

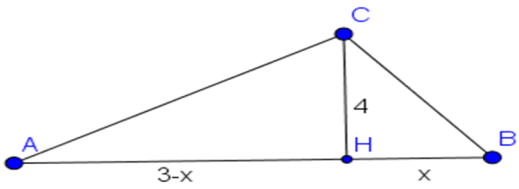
Độ dài $AB=\sqrt{(1-0)^2+(1-3)^2+(0-2)^2}=3$.

$S_{\Delta ABC}=6\Rightarrow$ Chiều cao hạ từ C xuống AB có độ dài là $h=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\dfrac{2.6}{3}=4$.

Vì diện tích của ΔABC không đổi với cạnh AB cố định, ΔABC **không chứa góc tù** nên quỹ tích điểm C thu được là mặt xung quanh của **hình** trụ có trục là đường thẳng AB và bán kính $R=h=4$.



Đặt $HB = x, x \in [0;3]$, ta có:



$CA + CB = \sqrt{CH^2 + AH^2} + \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + (3-x)^2} + \sqrt{4^2 + x^2}$ với $x \in [0;3]$.

Xét: $f(x) = \sqrt{4^2 + (3-x)^2} + \sqrt{4^2 + x^2}$ với $x \in [0;3]$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-(3-x)}{\sqrt{4^2 + (3-x)^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(3-x)}{\sqrt{4^2 + (3-x)^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}} = \dfrac{(3-x)}{\sqrt{4^2 + (3-x)^2}}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{4^2 + x^2}}\right)^2 = \left(\dfrac{(3-x)}{\sqrt{4^2 + (3-x)^2}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2.\left(4^2 + (3-x)^2\right) = (3-x)^2.\left(4^2 + x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 25x^2 = x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 96x + 144 \Leftrightarrow 96x - 144 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

x	0		$1,5$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	↘	$\sqrt{73}$	↗	9

□Vậy $CA+CB$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{73}\approx 8,544$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(2;-1;3)$. Xét các điểm C thay đổi sao cho tam giác ABC không có góc tù và có diện tích bằng 6. Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác ABC thuộc khoảng nào dưới đây?

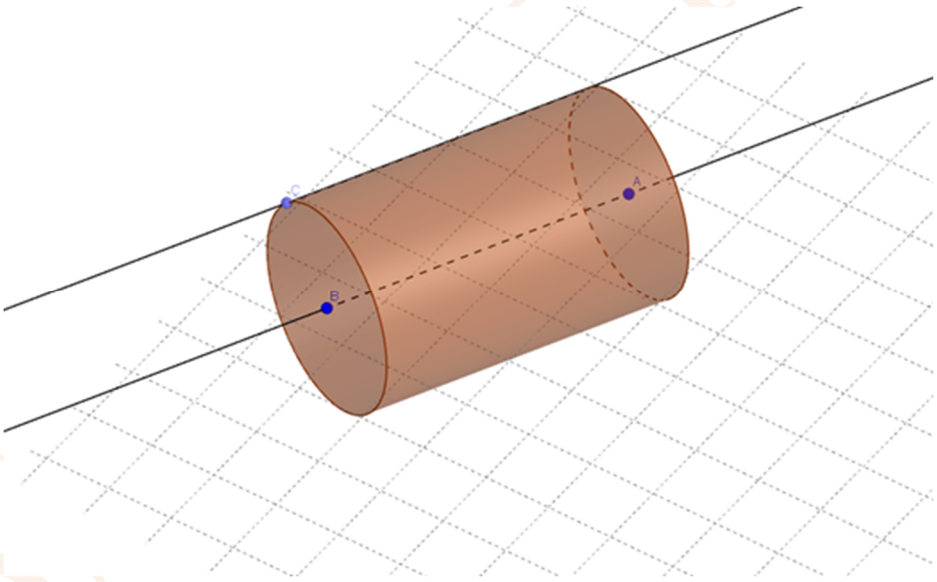
A. $(9;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(11;13)$.

Lời giải

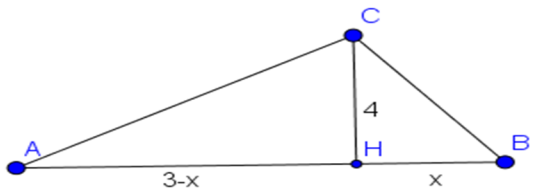
□Độ dài $AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=3$.

□ $S_{\Delta ABC}=6\Rightarrow$Chiều cao hạ từ C xuống AB có độ dài là $h=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\dfrac{2.6}{3}=4$.

□Vì diện tích của ΔABC không đổi, cạnh AB cố định, ΔABC **không chứa góc tù** nên quỹ tích điểm C thu được là mặt xung quanh của **hình** trụ có trục là đường thẳng AB và bán kính $R=h=4$.



□Đ ặt $HB=x, x\in[0;3]$, ta có:



$AB+CA+CB=AB+\sqrt{CH^2+AH^2}+\sqrt{CH^2+BH^2}=3+\sqrt{4^2+(3-x)^2}+\sqrt{4^2+x^2}$ với $x\in[0;3]$.

Xét: $f(x)=3+\sqrt{4^2+(3-x)^2}+\sqrt{4^2+x^2}$ với $x\in[0;3]$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-(3-x)}{\sqrt{4^2+(3-x)^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{4^2+x^2}}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{-(3-x)}{\sqrt{4^2+(3-x)^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{4^2+x^2}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{4^2+x^2}}=\dfrac{(3-x)}{\sqrt{4^2+(3-x)^2}}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{\sqrt{4^2+x^2}}\right)^2=\left(\dfrac{(3-x)}{\sqrt{4^2+(3-x)^2}}\right)^2\Leftrightarrow x^2.\left(4^2+(3-x)^2\right)=(3-x)^2.\left(4^2+x^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4-6x^3+25x^2=x^4-6x^3+25x^2-96x+144\Leftrightarrow 96x-144=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

x	0		1,5		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↘	$\sqrt{73}+3$	↗	12

Vậy chu vi tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất là 12.

Câu 42. Cho $A(1;1;-3), B(6;2;2), C(-1;0;-2)$. Tọa độ điểm $M\in(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{6};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{6};0\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$.

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ suy ra $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+2x_B+3x_C}{1+2+3}=\dfrac{5}{3} \\ y_I=\dfrac{y_A+2y_B+3y_C}{1+2+3}=\dfrac{5}{6} \\ z_I=\dfrac{z_A+2z_B+3z_C}{1+2+3}=-\dfrac{5}{6}\end{cases}$ nên $I\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};-\dfrac{5}{6}\right)$.

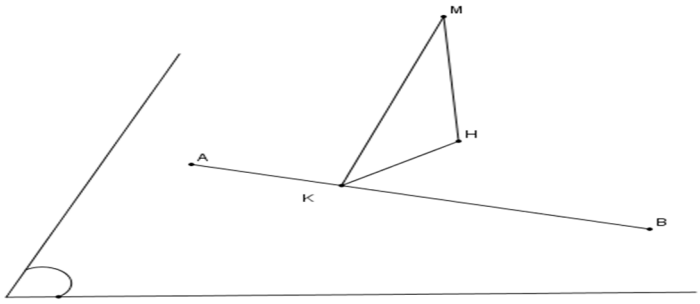
Ta có $P=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|=\left|6\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|6\overrightarrow{MI}\right|=6MI$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì MI min, suy ra M là hình chiếu của I trên (Oxy). Do đó tọa độ điểm cần tìm là $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{6};0\right)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng AB, nhận VTCP là $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-7+2t \\ z=-8-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

$K\in AB\Rightarrow K(1+t;-7+2t;-8-t)\Rightarrow \overrightarrow{MK}(t-6;-6+2t;-6-t)$

Do $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow t-6+2(-6+2t)+t+6=0\Leftrightarrow t=2$

Ta có: $K(3;-3;-10)$ và $d(M,(P))=MH\le MK$.

Dấu bằng xảy ra khi $H\equiv K$, khi đó $\overrightarrow{MH}=(-4;-2;-8)=-2(2;1;4)$, mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(2;1;4)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy $a+b=3$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{41}}{6}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=-3-4t\end{cases}$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=-3-4t\\2x+y-2z+5=0\end{cases}\Rightarrow 2(1+3t)+(2+4t)-2(-3-4t)+5=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}\Rightarrow B\left(-\frac{3}{2};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Do M nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$ nên M thuộc mặt cầu (S) có đường kính $AB=\frac{5\sqrt{41}}{6}$. Lại do $M\in(P)$ nên M thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Do MB là một dây cung của đường tròn này nên MB lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Gọi $I\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$ là trung điểm AB thì I là tâm mặt cầu (S) và $d(I;(P))=\frac{5}{2}$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là:

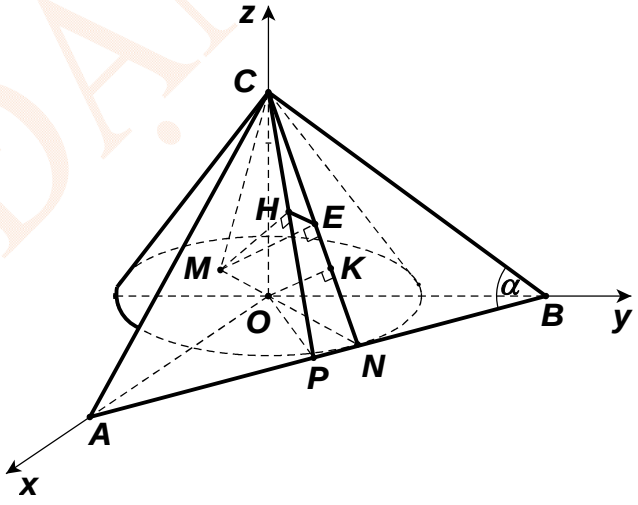
$$r=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{41}}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{12}$$

Vậy $MB_{\max}=2r=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0;0;4)$, $M(-1;-1;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm C và tạo với trục Oz một góc φ thỏa mãn $\tan\varphi=\frac{5\sqrt{2}}{4}$. Giả sử $\vec{n}(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Khi khoảng cách từ M đến (α) lớn nhất, giá trị biểu thức $\frac{ac}{b^2}$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** -10.

Lời giải



Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên (α), $N=(Oxy)\cap CK$.

Ta có $ON=5\sqrt{2}$, suy ra N thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính $r=5\sqrt{2}$ nằm trong $mp(Oxy)$. ((α) chứa một đường sinh duy nhất của hình nón đỉnh C, trục CO và góc ở đỉnh là 2φ)

Gọi H,E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (α) và CN.

Suy ra: $d\left(M,(\alpha)\right)=MH\le ME=CM.\sin\widehat{MCN}$.

Do đó $d\left(M,(\alpha)\right)$ lớn nhất khi $\sin\widehat{MCN}$ lớn nhất.

Vì M nằm trên $mp(Oxy)$ và nằm bên trong đường tròn (T) nên số đo góc $\widehat{MCN}$ lớn nhất khi M,O,N thẳng hàng và O nằm giữa M,N. Khi đó $\widehat{MCN}=\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}+\arctan\frac{5\sqrt{2}}{4}<\frac{\pi}{2}$, nên $\sin\widehat{MCN}$ lớn nhất khi M,O,N thẳng hàng và O nằm giữa M,N.

Mặt khác trong $mp(Oxy)$ thì M nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{x'Oy'}$, suy ra $N(5;5;0)$.

Cũng trong $mp(Oxy)$ gọi d là đường phân giác của góc $\widehat{xOy'}\Rightarrow\vec{u}_d=(1;-1;0)$ là vectơ chỉ phương của d và $d\perp(MCN)$. Dễ thấy $\vec{u}_d\perp\overrightarrow{OK}$ và $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{OK}$, do đó $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}_d$ và $\overrightarrow{CN}$, từ đó ta có $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{CN}\right]=(4;4;10)\Rightarrow\frac{ac}{b^2}=\frac{5}{2}$. Chọn đáp án **B.**

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;5),B(4;-3;7)$. Xét điểm M thay đổi sao cho tam giác OMA không có góc tù và có diện tích bằng 10. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MB là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$

Ta có $S_{OMA}=10\Rightarrow d(M,OA)=4\Rightarrow x^2+y^2=16$

$OA^2=25;OM^2=x^2+y^2+z^2=16+z^2;MA^2=x^2+y^2+(z-5)^2$

Do cho tam giác OMA không có góc tù nên

$$\begin{cases}OA^2+OM^2\ge MA^2\\OA^2+MA^2\ge OM^2\\MA^2+OM^2\ge OA^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}25+16+z^2\ge16+(z-5)^2\\25+16+(z-5)^2\ge16+z^2\\16+(z-5)^2+16+z^2\ge25\end{cases}\Leftrightarrow0\le z\le5$$

Ta có $MB^2=(x-4)^2+(y+3)^2+(z-7)^2$

Do $x^2+y^2=16\Rightarrow(x-4)^2+(y+3)^2\ge1$

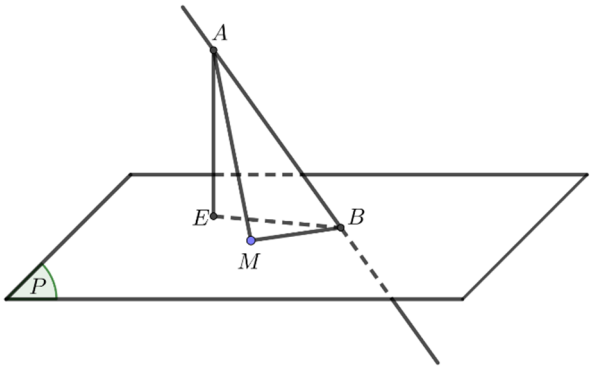
$0\le z\le5\Rightarrow-7\le z-7\le-2\Rightarrow(z-7)^2\ge4$

Nên $MB^2\ge1+4=5\Rightarrow\min MB=\sqrt{5}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90^o. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $K(3;0;15)$. **B.** $J(-3;2;7)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Lời giải



+ Đường thẳng d đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ có phương trình là

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}.$$

+ Ta có: $MB^2=AB^2-MA^2$. Do đó $(MB)_{\max}$ khi và chỉ khi $(MA)_{\min}$.

+ Gọi E là hình chiếu của A lên (P). Ta có: $AM \geq AE$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv E$.

Khi đó $(AM)_{\min}=AE$ và MB qua B nhận $\overrightarrow{BE}$ làm vectơ chỉ phương.

+ Ta có: $B \in d$ nên $B(1+3t;2+4t;-3-4t)$ mà $B \in (P)$ suy ra

$2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

+ Đường thẳng AE qua $A(1;2;-3)$, nhận $\vec{n}_P=(2;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=-3-t \end{cases}$.

Suy ra $E(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Mặt khác, $E \in (P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow E(-3;-2;-1)$.

+ Do đó đường thẳng MB. qua $B(-2;-2;1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BE}=(-1;0;-2)$ nên có phương trình là $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2 \\ z=1-2t \end{cases}$.

Thử các đáp án thấy điểm $I(-1;-2;3)$ thỏa

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a\ge 4, b\ge 5, c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c=?$

A. $a+b+c=16$ **B.** $a+b+c=15$ **C.** $a+b+c=17$ **D.** $a+b+c=14$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2=90$ và $a\ge 4, b\ge 5, c\ge 6$. Khi đó: $4\le a\le\sqrt{29}; 5\le b\le\sqrt{38}$.

Ta có: $OA+OB+OC=a+b+c=a+b+\sqrt{90-a^2-b^2}=f(a,b)$.

Xét $f'(a)=1-\frac{a}{\sqrt{90-a^2-b^2}}=0\Leftrightarrow a=\sqrt{45-\frac{b^2}{2}}$. Lập bảng biến thiên ta được:

$\min f(a,b)=\min\left\{f(4); f\left(\sqrt{29}\right)\right\}=\min\left\{b+4+\sqrt{74-b^2}; b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\right\}$

Dễ có:

$b+4+\sqrt{74-b^2}<b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\ \ \forall b\in\left[5;\sqrt{38}\right]\Rightarrow \min f(a,b)=b+4+\sqrt{74-b^2}=f(b)$.

Do $f'(b)=1-\frac{b}{\sqrt{74-b^2}}=0\Leftrightarrow b=\sqrt{37}$ nên lập bảng biến thiên ta được $\min f(a,b)=f(5)=16$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là 16 khi $a=4, b=5, c=7$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;1)$, $B(0;0;4)$, $C(2;2;1)$, $E(4;0;0)$, $F\left(3;1;\sqrt{6}\right)$. Xét điểm M thay đổi sao cho $MA=\frac{1}{2}MB$ và $MA=MC$. Giá trị lớn nhất của $ME+MF$ bằng

A. $4\sqrt{3+\sqrt{3}}$. **B.** $4\sqrt{3+\sqrt{6}}$. **C.** $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **D.** $4\sqrt{6+\sqrt{6}}$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Khi đó giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases}MA=2MA\\MA=MC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+(z-4)^2=4\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)\\x^2+y^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\x^2+(2-x)^2+z^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\z=\pm\sqrt{4x-2x^2}\end{cases}.$$

Suy ra:

$$ME+MF=\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+\left(z-\sqrt{6}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2-8x+16}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y-2\sqrt{6}z+16}$$

$$=\sqrt{20-8x}+\sqrt{20-6x-2y-2\sqrt{6}z}==\sqrt{20-8x}+\sqrt{20-6x-2(2-x)-2\sqrt{6}z}$$

$$=\sqrt{20-8x}+\sqrt{16-6x-2\sqrt{6}z}$$

$$\le g(x)=\sqrt{20-8x}+\sqrt{16-4x+2\sqrt{6(4x-2x^2)}}\le \max_{[0;2]} g(x)=g\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3+\sqrt{3}}.$$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (ABC), có $A(4;-3;7);B(-1;3;-12);C(-10;3;0)$. Lấy Δ là một đường thẳng bất kì vuông góc với (ABC) gọi $I=\Delta\cap(ABC)$ thỏa mãn I thuộc miền trong ΔABC. Lấy $M\in\Delta;M\neq I$, gọi E,F,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC,CA,AB. Hệ thức nào của điểm M là đúng để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

B. $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}\right)$.

C. $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

D. $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$.

Lời giải

Ta có:

$2V_{MABC}=2\left(V_{MIBC}+V_{MICA}+V_{MIAB}\right)\Leftrightarrow 2S_{ABC}=2\left(S_{IBC}+S_{ICA}+S_{IAB}\right)=BC.IE+AC.IF+AB.I$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si

với bộ 3 số $BC.IE,AC.IF,AB.IK$. Ta có: $BC.AC.AB.IE.IF.IK=\left(BC.IE\right).\left(AC.IF\right).\left(AB.IK\right)\le$

$$\le\frac{1}{27}\left(BC.IE+AC.IF+AB.IK\right)^3=8S_{ABC}^3\Rightarrow IE.IF.IK\le\frac{8S_{ABC}^3}{BC.AC.AB}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BC.IE=AC.IF=AB.IK\Leftrightarrow S_{IBC}=S_{ICA}=S_{IAB}$

Khi đó I là trọng tâm tam giác ABC.

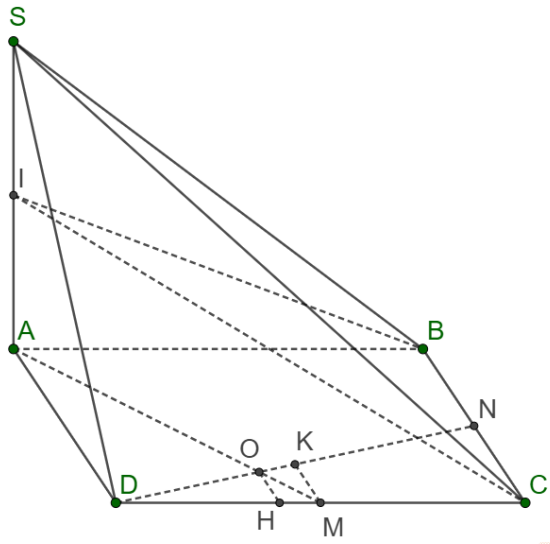
Vậy $\left(P=\left|\overrightarrow{IE}\right|.\left|\overrightarrow{IF}\right|.\left|\overrightarrow{IK}\right|\right)_{\max}$ khi I là trọng tâm tam giác ABC.

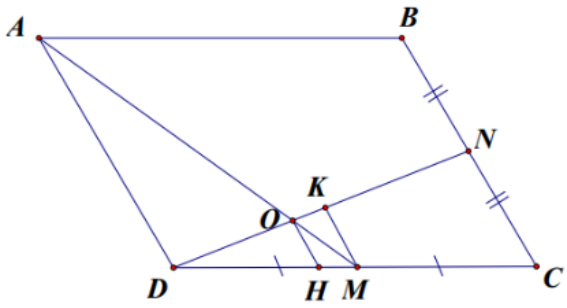
Câu 51. Trong không gian $Oxyz$. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó $S(2;1;-20)A(1;3;1)$; $B(a;-1;b);C(0;-3;3)$; $D(c,d,e)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, Gọi M,N lần lượt là trung điểm

của CD,CB. Gọi I là giao điểm giữa AM và DN. Biết tứ giác $ABCD$ thỏa mãn hệ thức $IA=4IM$ và $\frac{DI}{IN}=\frac{2}{3}$. Biểu thức liên hệ giữa $a;b;c;d;e$ nào sau đây là đúng.

A. $a=-2c+1$. **B.** $d=-7+2a$. **C.** $e=2+b$. **D.** $a=4-c$.

Lời giải





Trong mặt phẳng $(ABCD)$,

Ta vẽ đường thẳng đi qua O và song song AD cắt DC tại H.

Ta vẽ đường thẳng đi qua M và song song BC cắt DN tại K.

Vì M là trung điểm của DC và KM song song với BC nên KN là đường trung bình trong tam giác DKN. Suy ra K là trung điểm của DN.

Trong tam giác ΔMAD ta có $OH//DC \Leftrightarrow \frac{OM}{AM}=\frac{MH}{MD}=\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{DH}{MD}=\frac{4}{5}$ (1)

Vì $\frac{OA}{OM}=4\Rightarrow \frac{OA}{OM}+1=5\Rightarrow \frac{OA+OM}{OM}=5\Rightarrow \frac{AM}{OM}=5\Rightarrow \frac{OM}{AM}=\frac{1}{5}$.

Trong tam giác ΔDNC ta có $KM//NC$, mà $\frac{OD}{ON}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{OD}{DN}=\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{OD}{DK}=\frac{OD}{\frac{1}{2}DN}=\frac{4}{5}$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\frac{DH}{MD}=\frac{OD}{DK}=\frac{4}{5}\Rightarrow OH//KM\Rightarrow AD//BC$.

Tương tự ta có: $AB//CD$.

Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Với

$A(1;3;1); B(a;-1;b); C(1;-3;3); D(c;d;e)$

$\overrightarrow{AB} = (a-1;-4;b-1)$

$\overrightarrow{DC} = (c-1;d+3;e-3)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=c-1 \\ d+3=-4 \\ e-3=b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ d=-7 \\ e=2+b \end{cases}$.

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$ và $B(-2;1;1)$. Với M là điểm trên đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$, xét N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AM + BN$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;9)$

Lời giải

Với mỗi điểm M di động trên đường thẳng d, do N là một điểm di động trên mặt cầu có tâm M với bán kính bằng 2 nên BN nhỏ nhất khi $BN = |BM - R| = |BM - 2|$.

Do đó, bài toán đưa về việc tìm M sao cho $P = AM + |BM - 2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Do $M \in d$ nên $M(1+t;2t;-1-t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $AM = \sqrt{t^2 + (2t+3)^2 + (3-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 18}$,

$BM = \sqrt{(t+3)^2 + (2t-1)^2 + (-2-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 6t + 14}$.

Khi đó $P = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \left|\sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2\right| = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2$ (vì $\forall t \in \mathbb{R}$, thì $6t^2 + 6t + 14 > 4$ nên $\sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2 > 0$, do đó $\left|\sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2\right| = \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2$).

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{6t^2 + 6t + 18} + \sqrt{6t^2 + 6t + 14} - 2$, với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{6t+3}{\sqrt{6t^2 + 6t + 18}} + \frac{6t+3}{\sqrt{6t^2 + 6t + 14}} = 0 \Leftrightarrow 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

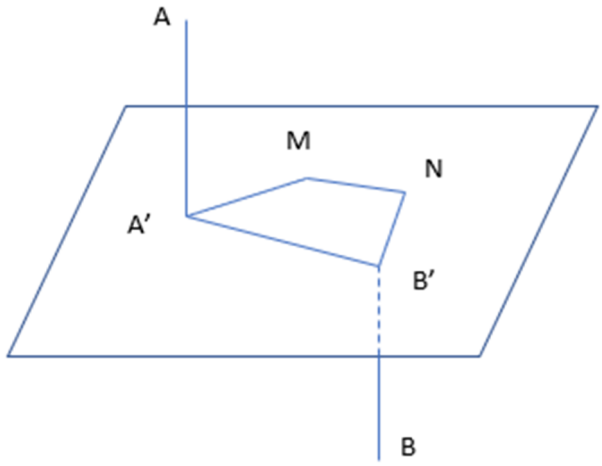
Qua đó, ta thấy ngay $t = -\frac{1}{2}$ là điểm cực trị duy nhất của hàm số và đó là điểm cực tiểu nên hàm số $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{66} + 5\sqrt{2} - 4}{2}$ tại $t = -\frac{1}{2}$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;2), B(-1;2;-1)$. Xét các điểm M, N di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $3MA^2 + 2NB^2$ bằng

A. $\frac{124}{5}$. **B.** $\frac{54}{5}$. **C.** 14. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên mặt phẳng (Oxy). Khi đó $A'(2;-2;0), B'(-1;2;0)$ và $AA'=2; BB'=1; A'B'=5$.

Ta có: $3MA^2+2NB^2=\left(MA^2+AA^2\right)+\left(NB^2+BB^2\right)=MA^2+NB^2+14$.

Mà $A'M+MN+NB'\geq A'B'$ hay $MA'+NB'\geq 3$.

Do đó $9\leq\left(MA'+NB'\right)^2\leq\left(3MA'^2+2NB'^2\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

Hay $3MA'^2+2NB'^2\geq\frac{54}{5}$.

(Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M,N thuộc đoạn thẳng $A'B'$ sao cho $3MA'=2NB'$. Khi đó: $MA'=\frac{6}{5}, NB'=\frac{9}{5}$).

Vậy: $3MA^2+2NB^2\geq\frac{124}{5}$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;\frac{5}{2}\right)$ và $B\left(4;2;\frac{5}{2}\right)$. Tìm hoành độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{ABM}=45°$ và tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy đường thẳng AB song song với mặt phẳng (Oxy).

Do hai điểm A,B cố định nên ΔMAB có diện tích nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ M đến đường thẳng AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng Δ là hình chiếu của đường thẳng AB trên mặt phẳng (Oxy).

Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(1;-2;0)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm A' và song song với đường thẳng AB nên có phương trình là:

$\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2+4t \\ z = 0 \end{cases}$; do $M \in \Delta$ nên gọi $M(1+3t;-2+4t;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(3t-3;4t-4;-\frac{5}{2}\right)$; $\overrightarrow{BA} = (-3;-4;0)$.

Ta có: $\cos\widehat{ABM} = \cos\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right) = \frac{-3(3t-3)-4(4t-4)}{5.\sqrt{(3t-3)^2+(4t-4)^2+\frac{25}{4}}} = \frac{-25(t-1)}{5.\sqrt{25(t-1)^2+\frac{25}{4}}}$

Nên $\widehat{ABM} = 45°$ khi và chỉ khi

$$\frac{-25(t-1)}{5.\sqrt{25(t-1)^2+\frac{25}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 50(t-1)^2 = 25(t-1)^2 + \frac{25}{4} \quad (t \le 1)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy hoành độ của điểm M bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 55. Cho các điểm $A(3;2;1)$, $B(0;1;1)$. Đặt $P = \left|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó M là một điểm chạy trên mặt phẳng (Oxy). Tìm tung độ của M khi P đạt giá trị nhỏ nhất?

A. -6. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x_I;y_I;z_I)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Khi đó, $2\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3-x_I) = 3(0-x_I) \\ 2(2-y_I) = 3(1-y_I) \\ 2(1-z_I) = 3(1-z_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -6 \\ y_I = -1 \\ z_I = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(-6;-1;1)$.

Ta có, $P = \left|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right| = \left|2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) - 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right| = MI$.

Do đó, P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxy). Vậy $M(-6;-1;0)$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm $M(a;b;c)$ di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 34$ và $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn. Tính giá trị biểu thức $a+2b-5c$

A. 11 **B.** -11 **C.** 12 **D.** -6

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$, $\overrightarrow{MA} = (-8-a;1-b;1-c), \overrightarrow{BC} = (2;3;-3)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=34\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=34$

$\Leftrightarrow 4(-8-a)+3(1-b)-3(1-c)=34\Leftrightarrow -4a-3b+3c-66=0$

Suy ra $M\in(P):-4x-3y+3z-66=0$

Ta thấy điểm A,B nằm về cùng phía đối với mặt phẳng (P)

Ta có: $|MA-MB|\le AB$ suy ra $|MA-MB|$ đạt gí trị lớn nhất bằng AB khi M,A,B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=2+5t\\y=1\\z=3+t\end{cases}$

Tọa độ điểm M là nghiệm hệ phương trình:

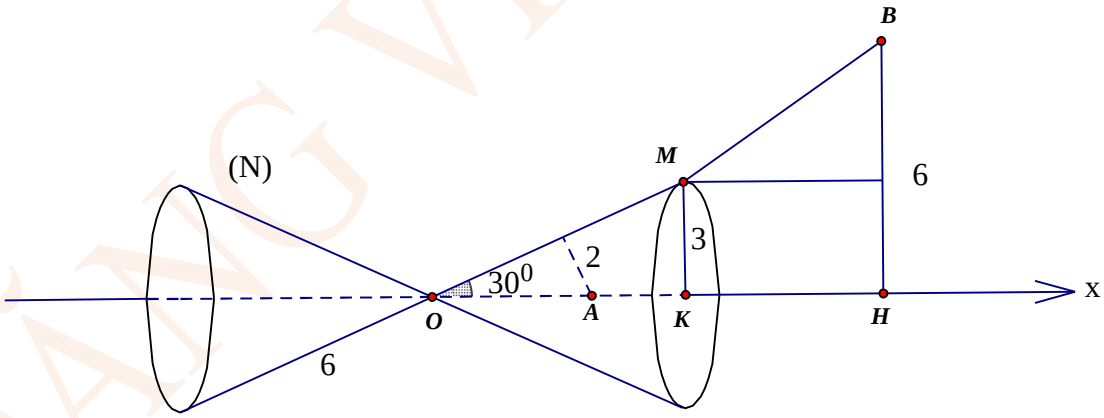
$$\begin{cases}x=2+5t\\y=1\\z=3+t\\-4x-3y+3z-66=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+5t\\y=1\\z=3+t\\-4(2+5t)-3.1+3(3+t)-66=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-18\\y=1\\z=-1\\t=-4\end{cases}$$

Vậy $M(-18;1;-1)$

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{3};5\right)$. **B.** $\left(4;\frac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải



Ta có $\sin\widehat{MOA}=\frac{d(A,OM)}{OA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MOA}=30^{\circ}$.

Lại có $S_{MOA}=\frac{1}{2}.OM.d(A,OM)\le 6\Rightarrow OM\le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm M là mặt xung quanh của hai hình nón có đỉnh O, trục OA, góc ở đỉnh hình nón là $2.30^{\circ}=60^{\circ}$ và đường sinh bằng 6.

Để MB nhỏ nhất thì điểm M phải nằm vị trí như trên hình vẽ.

Gọi hình chiếu của B,M trên trục Ox lần lượt là H,K.

Ta có $OK = OM.\cos 30^o = 6.\cos 30^o = 3\sqrt{3}$, $MK = OM.\sin 30^o = 6.\sin 30^o = 3$

Mặt khác $H(8;0;0)$ nên $OH = 8, BH = 6$. Suy ra $MB_{\min} = \sqrt{\left(8-3\sqrt{3}\right)^2 + (6-3)^2} \approx 4,1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 50. **(Đề TK BGD 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-10;+\infty)$ để hàm số $y=\left|x^3+(a+2)x+9-a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^3+(a+2)x+9-a^2$

$f'(x)=3x^2+a+2$

Để $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

TH1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;1) \\ f(0)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+a+2\ge 0,\forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge \underset{(0;1)}{Max}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge -2 \\ -3\le a\le 3 \end{cases}\Rightarrow a\in[-2;3]$

$a=\{-2;-1;0;1;2;3;\}\rightarrow$ 6 giá trị

TH2: $\begin{cases} f'(x)\le,\forall x\in(0;1) \\ f(0)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+a+2\le 0,\forall x\in(0;1) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\le \underset{(0;1)}{Min}\left(-3x^2-2\right) \\ 9-a^2\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\le -5 \\ \left[\begin{array}{l} a\ge 3 \\ a\le -3 \end{array}\right. \end{cases}\Rightarrow a\le -5$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a=\{-9;-8;-7;-6;-5\}\rightarrow$ 5 giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

BÀI TẬP PHÁT TRIỂN CÂU 50 ĐỀ THAM KHẢO BGD NĂM 2023

Câu 1. Cho hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng

biến trên $[1;+\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-\infty;30)$ để hàm số $y=\left|2x^3-(m-3)x+16-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|x^3-x^2-mx+8\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 11.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-15;15)$ để hàm số $y=\left|x^3+(m-2)x+70-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$? Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -15. **B.** 15. **C.** -25. **D.** 25.

Câu 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=\left|x^3-(3m-6)x^2+(3m^2-12m)x+m-3\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$? Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -12. **B.** 15. **C.** -18. **D.** 27.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 7. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+3(m^2+5)x+(m^2-4)\cos 3x\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2023;\,2023)$ để hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$.

A. 4044. **B.** 4042. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023;2023]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 4044. **B.** 4045. **C.** 4046. **D.** 4047.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|4x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 11. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^3-3mx+2m^3\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 37. **B.** 32. **C.** 35. **D.** 3.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;\,20)$ để hàm số: $y=\left|x^3-2mx+2m^2-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(4m+5)x^2-(3m^2+5m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$thuộc $[-10;10]$để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2023;2023)$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+(m+1)x+7-m^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2023;2023)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+1-m^2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\frac{2}{3}x^3-3x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|4x^3-mx^2+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023,2023]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0,1)$.

A. 2021. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2020.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m\in[0;2023]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+3)x-m+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+5)x^2-\left(m^2+5m\right)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;+\infty)$ để hàm số $y=\left|x^3+(5-m)x+m^2-7\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;+\infty)$ để hàm số $y=\left|(m-1)x^3-x^2+27-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 16. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 20.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $f(x)=\left|x^3-(m-5)x+2023\right|$ đồng biến trên đoạn $(1;2)$?

A. 2024. **B.** 2033. **C.** 2032. **D.** 2023.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m\ (m+2)x+m^2(m+3)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2. **D.** 2022.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023;2023]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(\mathrm{m}-3)x^2+3m(m-6)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$?

A. 4037. **B.** 2024. **C.** 4039. **D.** 2013.

Câu 27. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m\in[-2022;2023]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. $S=2025$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2026$. **D.** 6.

Câu 28. Tìm số nguyên m sao cho hàm số $y=\left|x^3+(2m-2)x+16-m^2\right|$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 29. Cho hàm số $y=|x|^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)|x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2mx+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(|4-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 1. **B.** 2032. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-25;25)$ để hàm số $y=\left|x^4-8x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

A. 4. **B.** 30. **C.** 9. **D.** 14.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^4-4x^3+4mx+m+2023\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2022;2023)$ để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 2023. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 4043.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|x^4-2x^3+mx^2-6m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4047. **D.** 4048.

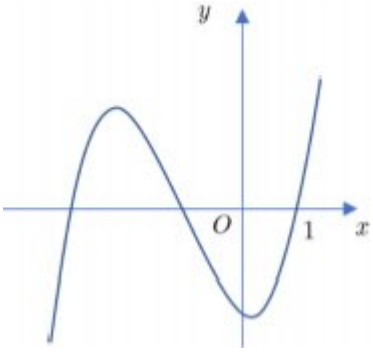
Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-10x^2+(m-1)x+2023\right|$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A. 1006. **B.** 39. **C.** 968. **D.** 2013.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=2\left(e^x-e^{-x}\right)+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+4x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)>0$ vô nghiệm trong đoạn $[0;2]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



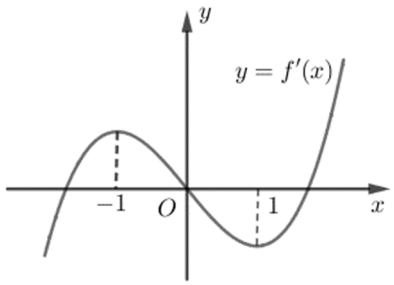
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2023;2023]$ để hàm số $g(x)=f\left(2023^x\right)-mx+2023$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=e^{x^2-4x}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f\left(|x-2m|+4\right)-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(2023;+\infty)$?

A. 1011. **B.** 2023. **C.** 1012. **D.** 2024.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;15)$ để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^2+3x-m\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 15. **B.** 12 **C.** 14. **D.** 13

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $y=\left|x+a\sqrt{x^2-2x+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2024.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. 2023. **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2026

Câu 43. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới. Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(|x+1|-m)$ nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt $-3;1$. Có bao giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-13;25]$ để hàm số $y=\left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 25. **B.** 26. **C.** 27 **D.** 24.

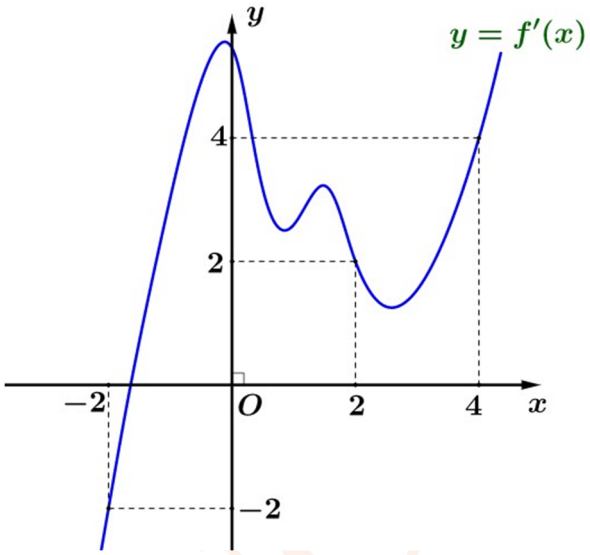
Câu 45. Gọi a,b lần lượt là giá trị dương nhỏ nhất và giá trị âm lớn nhất của m để hàm số $y=|mx-6\sqrt{x-1}+9|$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-\frac{9}{2}$.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-22;23)$ để hàm số hàm số $y=\left|\sin^3 x+(m+1)\sin x+23-m^2\right|$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 24. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(2)=4$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|f(2x-4)-2x^2+8x-10\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<2023$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2025.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)\left(x^2-8x+m^2\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $g(x)=f\left(|1-x|\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2010.

Câu 51. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023;2023)$ để hàm số $y=(m+2x^3)\sqrt{2-x^3}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. 2047240 **B.** 2047248 **C.** 2045225 **D.** 2046232

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=x^3-mx+1$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Do đó hàm số $y=\left|g(x)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g'(x)\ge 0,\forall x\in[1;+\infty) \\ g(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-m\ge 0,\forall x\in[1;+\infty) \\ 2-m\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3x^2,\forall x\in[1;+\infty) \\ m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \min\limits_{[1;+\infty)}\left(3x^2\right) \\ m\le 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3 \\ m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 2 \Rightarrow m\in\{0;1;2\}.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-\infty;30)$ để hàm số $y=\left|2x^3-(m-3)x+16-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Xét $f(x)=2x^3-(m-3)x+16-m^2;\ f'(x)=6x^2-m+3$

Để $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2) \\ f(0)\ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-m+3\ge 0,\forall x\in(0;2) \\ 16-m^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 6x^2+3,\forall x\in(0;2) \\ 16-m^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3 \\ -4\le m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -4\le m\le 3.$$

Vì m nguyên suy ra $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;\}$. Có 8 giá trị nguyên của m.

TH2: $\begin{cases} f'(x)\le 0,\forall x\in(0;2) \\ f(0)\le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-m+3\le 0,\forall x\in(0;2) \\ 16-m^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 6x^2+3,\forall x\in(0;2) \\ 16-m^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 27 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 27.$$

Vì m nguyên và $m\in(-\infty;30)$ suy ra $m\in\{27;28;29\}$. Có 3 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|x^3-x^2-mx+8\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2-mx+8;\ f'(x)=3x^2-2x-m$.

Hàm số $y=\left|x^3-x^2-mx+8\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ có hai trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2-2x\ge m,\forall x\in(1;+\infty) \\ 8-m\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 1 \\ m\le 8 \end{cases}\Leftrightarrow m\le 1$.

Kết hợp với Đk ta được $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1\}$. Có 11 giá trị của m.

TH2: $\begin{cases} f'(x)\le 0,\forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2-2x\le m,\forall x\in(1;+\infty)(*) \\ 8-m\le 0 \end{cases}$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-2x$ với $x\in(1;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=6x-2;g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
g'(x)	$-$	0	$+$	
g(x)	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			1	

Không có giá trị nào của m thỏa mãn $(*)$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in(-15;15)$ để hàm số $y=\left|x^3+(m-2)x+70-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$? Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -15. **B.** 15. **C.** -25. **D.** 25.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3+(m-2)x+70-m^2$

$f'(x)=3x^2+m-2$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} f'(x) \ge 0 \ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \right.$
$\left. \begin{cases} f'(x) \le 0 \ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \le 0 \end{cases} \right.$

TH1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0 \ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + m - 2 \ge 0 \ \forall x \in (0;2) \\ 70 - m^2 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 - 3x^2 \ \forall x \in (0;2) \\ -\sqrt{70} \le m \le \sqrt{70} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{(0;2)} (2 - 3x^2) \\ -\sqrt{70} \le m \le \sqrt{70} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ -\sqrt{70} \le m \le \sqrt{70} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le \sqrt{70}$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-15;15)$ nên $m \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$

TH2: $\begin{cases} f'(x) \le 0 \ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + m - 2 \le 0 \ \forall x \in (0;2) \\ 70 - m^2 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 - 3x^2 \ \forall x \in (0;2) \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{70} \\ m \ge \sqrt{70} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \min\limits_{(0;2)} (2 - 3x^2) \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{70} \\ m \ge \sqrt{70} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -10 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{70} \\ m \ge \sqrt{70} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le -10$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-15;15)$ nên $m \in \{-14;-13;-12;-11;-10\}$

Do đó $S = \{-14;-13;-12;-11;-10;2;3;4;5;6;7;8\}$

Tổng tất cả các phần tử của S bằng -25.

Vậy **chọn C**

Câu 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = \left| x^3 - (3m-6)x^2 + (3m^2 - 12m)x + m - 3 \right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$? Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -12. **B.** 15. **C.** -18. **D.** 27.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - (3m-6)x^2 + (3m^2 - 12m)x + m - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 2(3m-6)x + 3m^2 - 12m$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m - 4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$m-4$		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;3) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} f'(x)\geq 0\ \forall x\in(0;3) \\ f(0)\geq 0 \end{cases} \right.$
$\left. \begin{cases} f'(x)\leq 0\ \forall x\in(0;3) \\ f(0)\leq 0 \end{cases} \right.$

TH1: $\begin{cases} f'(x)\geq 0\ \forall x\in(0;3) \\ f(0)\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3\leq m-4 \\ 0\geq m \end{array}\right. \\ m-3\geq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\geq 7 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \\ m\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 7$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-10;10)$

Nên $m\in\{7;8;9\}$

TH2: $\begin{cases} f'(x)\leq 0\ \forall x\in(0;3) \\ f(0)\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4\leq 0<3\leq m \\ m\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\leq m\leq 4 \\ m\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3(N)$

Do đó $S=\{3;7;8;9\}$

Tổng tất cả các phần tử của S bằng 27.

Vậy **chọn** **D.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

A.3. **B.** 2. **C.**16. **D.**9.

Lời giải

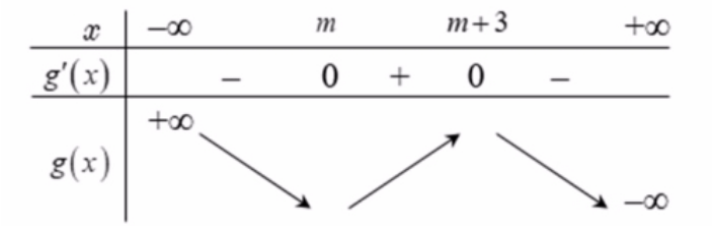
Chọn B

Xét hàm số $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+3)x^2-(m^2+3m)x+\frac{2}{3}$, $x\in(1;2)$.

$\Rightarrow g'(x)=-x^2+(2m+3)x-(m^2+3m)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Hàm số $|g(x)|$ nghịch biến trên khoảng $x\in(1;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g'(x)\ge 0\forall x\in(1;2)\\ g(x)\le 0\forall x\in(1;2)\end{cases}\\ \begin{cases}g'(x)\le 0\forall x\in(1;2)\\ g(x)\ge 0\forall x\in(1;2)\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1<2\le m+3\\ g(2)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m+3\le 1\\ g(2)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\le m\\ g(2)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le m\le 1\\ -2m^2-2m+4\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -2\\ -2m^2-2m+4\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ -2m^2-2m+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le m\le 1\\ m\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -2\\ m\in[-2;1]\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ m\in[-2;1]\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=1\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-2;1\}$

Câu 7. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+3\left(m^2+5\right)x+\left(m^2-4\right)\cos 3x\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2023;\,2023)$ để hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$.

A. 4044. **B.** 4042. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3\left(m^2+5\right)x+\left(m^2-4\right)\cos 3x$, $x\in(0;\pi)$.

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+3\left(m^2+5\right)-3\left(m^2-4\right)\sin 3x$

$=3x^2-6x+3m^2+15-3m^2\sin 3x+12\sin 3x$

$=3(x-1)^2+3m^2(1-\sin 3x)+12(1+\sin 3x)\ge 0$, $\forall x\in(0;\pi)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $(0;\pi)$.

Để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(0;\pi)$ thì $f(0)\ge 0\Leftrightarrow m^2-4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\ m\ge 2\end{array}\right.$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-2023;2023)$.

nên $m\in\{-2022;-2021;...;-2\}\cup\{2;...;2022\}$.

Vậy có 4042 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023;2023]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 4044. **B.** 4045. **C.** 4046. **D.** 4047.

Lời giải

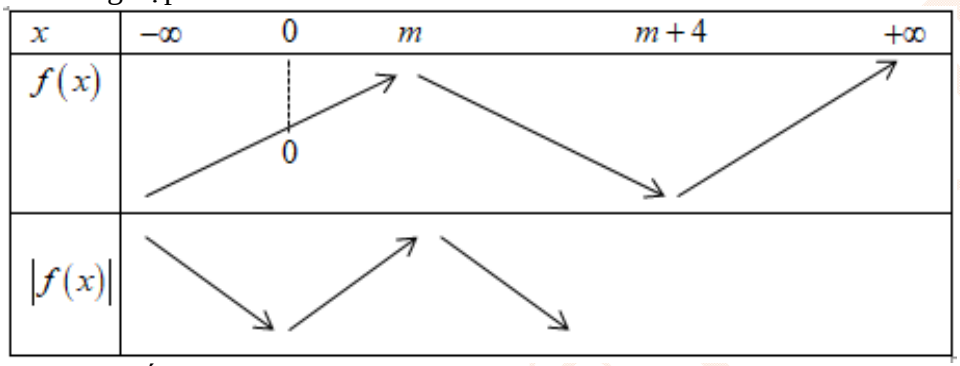
Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;2)$.

$f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4)=3\left[x^2-2(m+2)x+m(m+4)\right]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+4\end{array}\right.$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

* Trường hợp 1: Nếu $m>0$

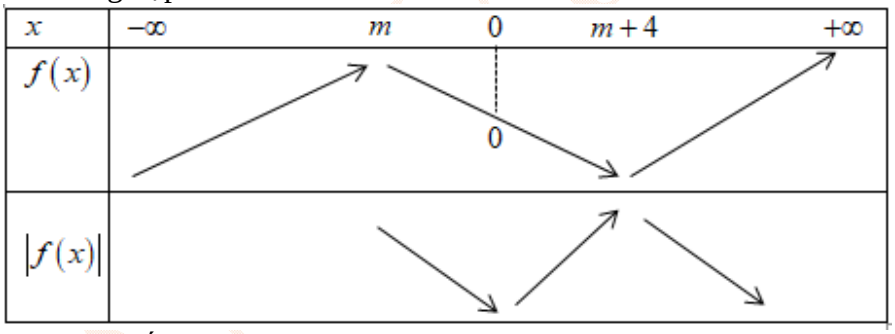


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow(0;2)\subset(0;m)\Leftrightarrow m\geq 2$.

Kết hợp với $m>0$, ta có $m\geq 2$.

* Trường hợp 2: Nếu $m\leq 0<m+4\Leftrightarrow -4<m\leq 0$

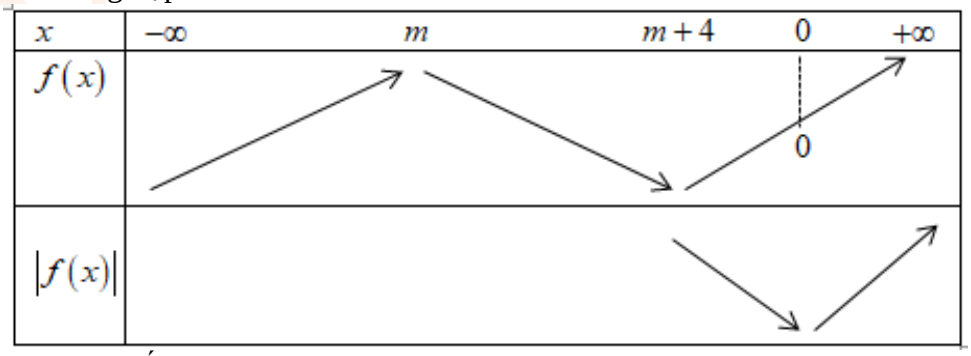


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow(0;2)\subset(0;m+4)\Leftrightarrow m+4\geq 2\Leftrightarrow m\geq -2$.

Kết hợp với $-4<m\leq 0$, ta có $-2\leq m\leq 0$.

* Trường hợp 3: Nếu $m+4\leq 0\Leftrightarrow m\leq -4$



Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ nên hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ với mọi $m\le -4$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ -2\le m\le 0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$. Mà m nguyên thuộc khoảng $\left[-2023;2023\right]$ nên có 4045 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|4x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$?

A. 11. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Ta có:

$$y=\begin{cases}4x^3-mx+1, & khi\ \ 4x^3-mx+1\ge 0\\ -4x^3+mx-1, & khi\ \ 4x^3-mx+1<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}12x^2-m, & khi\ \ 4x^3-mx+1>0\\ -12x^2+m, & khi\ \ 4x^3-mx+1<0\end{cases}$$

Hàm số $y=\left|4x^3-mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ có hai trường hợp xảy ra

TH1: $\begin{cases}12x^2-m\ge 0\\ 4x^3-mx+1\ge 0\end{cases},\forall x\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 12x^2\\ m\le 4x^2+\dfrac{1}{x}\end{cases},\forall x\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 12\\ m\le 5\end{cases}\Leftrightarrow m\le 5.$

TH2: $\begin{cases}-12x^2+m\ge 0\\ 4x^3-mx+1\le 0\end{cases},\forall x\ge 1$ (vô nghiệm)

Vậy $m\in\left\{1,2,3,4,5\right\}$ có tất cả 5 số nguyên dương thoả mãn.

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Đặt $g\left(x\right)=-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1$ và $g'\left(x\right)=-4x^3+3mx^2+4m^2x=-x\left(4x^2-3mx-4m^2\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)=\left|-x^4+mx^3+2m^2x^2+m-1\right|$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}g\left(1\right)\ge 0\\ g'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}g\left(1\right)\le 0\\ g'\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}$.

TH 1: $\begin{cases}g\left(1\right)\ge 0\\ g'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1\ge 0\\ 4x^2-3mx-4m^2\le 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}$.

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-3mx-4m^2\right)=+\infty$.

TH 2: $\begin{cases}g\left(1\right)\le 0\\ g'\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1\le 0\\ 4x^2-3mx-4m^2\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ 4x^2-3mx-4m^2\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\end{cases}.$$

Ta có $4x^2-3mx-4m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m\\x=\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m\end{array}\right.$.

+ Với $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m\le 0$ thì $4x^2-3mx-4m^2\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{73}}{8}m\le 1\Leftrightarrow m\ge\dfrac{8}{3-\sqrt{73}}$.

$\Rightarrow\dfrac{8}{3-\sqrt{73}}\le m\le 0, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0\}$.

+ Với $0<m\le\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $4x^2-3mx-4m^2\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\dfrac{3+\sqrt{73}}{8}m\le 1\Leftrightarrow m\le\dfrac{8}{3+\sqrt{73}}$.

$\Rightarrow 0<m\le\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\varnothing$.

Vậy: $S=\{-1;0\}$.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left|x^3-3mx+2m^3\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3mx+2m^3\Rightarrow f'(x)=3x^2-3m$

+) Với $m=0$ thì $f'(x)=3x^2\ge 0\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, mặt khác $f(1)=1>0$ nên suy ra $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Vậy chọn $m=0$.

+) Với $m<0$ thì $f'(x)=3x^2-3m>0\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Do đó để hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì điều kiện đủ là $f(1)=2m^3-3m+1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\m\ge 1\end{array}\right.$

Kết hợp ta có: $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\le m<0$. Do m là số nguyên nên chọn $m=-1$.

+) Với $m>0$ thì $f'(x)=3x^2-3m=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(\sqrt{m};+\infty\right)$.

Do đó $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{m}\le 1\\f(1)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}0\le m\le 1\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\m\ge 1\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le m\le\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\m=1\end{array}\right.$

Kết hợp ta có: $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m\le\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\m=1\end{array}\right.$.Vì m là số nguyên nên chọn $m=1$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên là $m=0;m=\pm 1$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 37. **B.** 32. **C.** 35. **D.** 3.

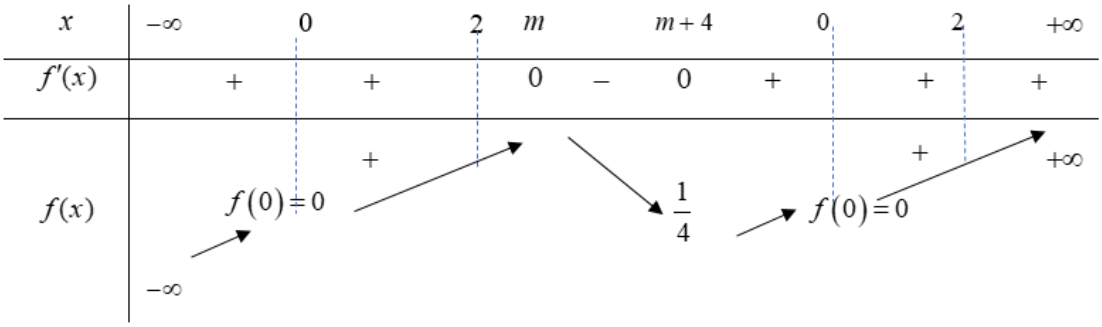
Lời giải

Xét hàm số $y=|f(x)|$ với $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$.

Khi đó $f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4)=3(x-m)(x-m-4)$.

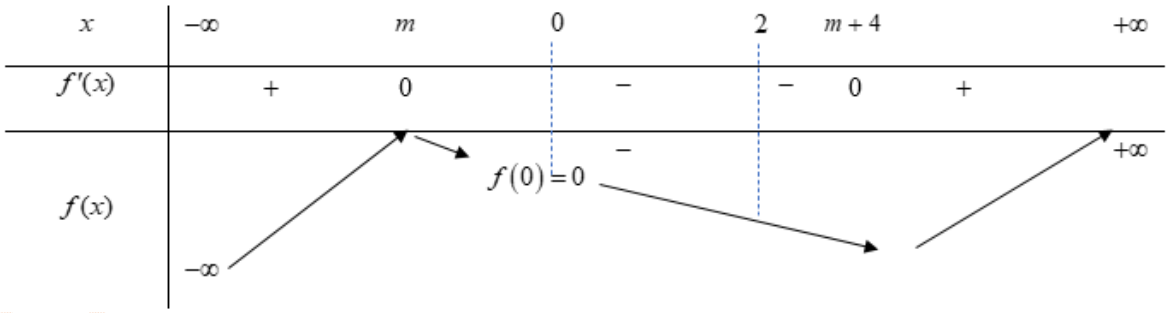
Do đó, hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(0)\ge 0\\ f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2)\end{cases}\\ \begin{cases}f(0)\le 0\\ f'(x)\le 0,\forall x\in(0;2)\end{cases}\end{array}\right.$.

TH1: $\begin{cases}f(0)\ge 0\\ f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2)\end{cases}$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\le m\\ m+4\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -4\end{array}\right.$.

TH2: $\begin{cases}f(0)\le 0\\ f'(x)\le 0,\forall x\in(0;2)\end{cases}$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên $\Rightarrow\begin{cases}m\le 0\\ 2\le m+4\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le 0$.

Vậy có 37 giá trị của tham số $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;\ 20)$ để hàm số: $y=\left|x^3-2mx+2m^2-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Đặt: $f(x)=x^3-2mx+2m^2-1$. Ta có: $f'(x)=3x^2-2m$.

Điều kiện để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$ có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in(1;5)$ và $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2m\geq 0,\forall x\in(1;5)\\ f(1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\min\limits_{(1;5)}\left(\frac{3}{2}x^2\right)\\ 2m^2-2m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\frac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\geq 1\\ m\leq 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\leq m\leq\frac{3}{2}\\ m\leq 0\end{array}\right.$$

Vì m nhận giá trị nguyên và $m\in(-20;20)$ nên $m=\{-19,-18,...,0,1\}$.

Vậy có 21 giá trị của m thoả mãn.

Trường hợp 2. $f(x)\leq 0$ với mọi $x\in(1;5)$ và $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $x\in(1;5)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2m\leq 0,\forall x\in(1;5)\\ f(1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\max\limits_{(1;5)}\left(\frac{3}{2}x^2\right)\\ 2m^2-2m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq\frac{75}{2}\\ 0\leq m\leq 1\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m thoả mãn.

Vậy có 21 giá trị của m thoả mãn.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(4m+5)x^2-(3m^2+5m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải:

Xét hàm số $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(4m+5)x^2-(3m^2+5m)x+\frac{2}{3}$

Ta có: $g'(x)=-x^2+(4m+5)x-(3m^2+5m)=-(x-m)(x-3m-5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}g(2)\leq 0\\ g'(x)\geq 0\end{cases},\forall x\in(1;2)$ hoặc $\begin{cases}g(2)\geq 0\\ g'(x)\leq 0\end{cases},\forall x\in(1;2)$

TH 1: $\begin{cases}g(2)\leq 0\\ g'(x)\geq 0\end{cases},\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-6m^2-2m+8\leq 0\\ -(x-m)(x-3m-5)\geq 0\end{cases},\forall x\in(1;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup[1;+\infty)\\ m\in[-1;1]\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

TH 2: $\begin{cases} g(2)\ge 0 \\ g'(x)\le 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2-2m+8\ge 0 \\ -(x-m)(x-3m-5)\le 0 \end{cases}, \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\in\left[-\frac{4}{3};1\right] \\ m\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup[2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}.$

Do m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m=1$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2023;2023)$ để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+(m+1)x+7-m^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(m+1)x+7-m^2$

$f'(x)=3x^2-6x+m+1$

Để $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

TH1: $\begin{cases} f'(x)\le 0, \forall x\in(0;1) \\ f(1)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+m+1\le 0, \forall x\in(0;1) \\ -m^2+m+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \min\limits_{(0;1)}(-3x^2+6x-1) \\ -2\le m\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -1 \\ -2\le m\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m\le 1$

$a\in\{-2;-1;0;1\} \rightarrow$ 4 giá trị

TH2: $\begin{cases} f'(x)\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ f(1)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+m+1\ge 0, \forall x\in(0;1) \\ -m^2+m+6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \max\limits_{(0;1)}(-3x^2+6x-1) \\ \left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$

$a\in\{3;\ldots;2022\} \rightarrow$ 2020 giá trị

Vậy có 2024 giá trị thoả mãn.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2023;2023)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+1-m^2\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=2x^3-2mx+1-m^2$ có $f'(x)=6x^2-2m$; $\Delta'=12m$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|=\left|2x^3-2mx+1-m^2\right|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)\,(C)$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.

- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

+ **Trường hợp 1:** $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$. Suy ra $f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

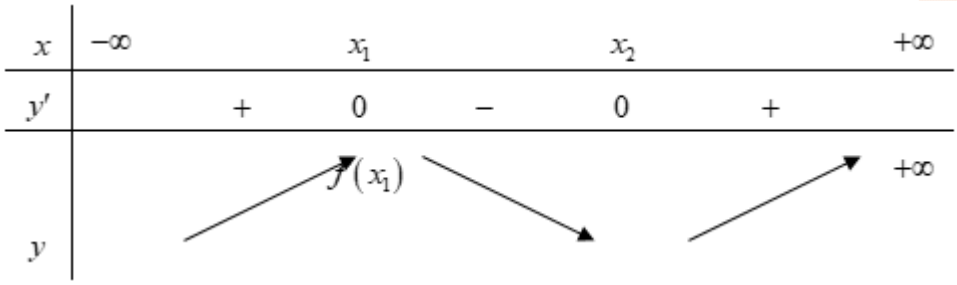
Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ -m^2 - 2m + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ -3 \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 0$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2023;2023)$ ta được $m \in \{-3;-2;-1;0\}$.

Ta có 4 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (1)

+ **Trường hợp 2:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

Ta có bảng biến thiên:



Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sqrt{\dfrac{m}{3}} \le 1 \\ -m^2 - 2m + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \le 3 \\ -3 \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 1$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2023;2023)$ ta được $m = 1$.

Ta có 1 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (2).

Từ (1) và (2) suy ra có tất cả có 5 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để hàm số $y = \left|\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + mx + 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Xét $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + mx + 1$

Ta có: $f'(x) = 2x^2 - 6x + m$

Để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$

TH1:

$$\begin{cases} f'(x)=2x^2-6x+m\ge 0,\ \ \forall x\in(1;3) \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \underset{(1;3)}{Max}\left(-2x^2+6x\right) \\ m-\dfrac{4}{3}\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{9}{2} \\ m\ge \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\ge \frac{9}{2} \Rightarrow m\in\{5;6;7;8;9;10\}$$

TH2:

$$\begin{cases} f'(x)=2x^2-6x+m\le 0,\ \ \forall x\in(1;3) \\ f(1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \underset{(1;3)}{Min}\left(-2x^2+6x\right) \\ m-\dfrac{4}{3}\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ m\le \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0 \Rightarrow m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$$

Vậy có 17 số phần tử của giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\left|\frac{2}{3}x^3-3x^2+mx+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|4x^3-mx^2+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $f(x)=4x^3-mx^2+2m$; $f'(x)=12x^2-2mx$

Hàm số $y=\left|4x^3-mx^2+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases} \forall x\in(1;+\infty) \text{ hoặc } \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases} \forall x\in(1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=4+m\ge 0 \\ 12x^2-2mx\ge 0\ \forall x\in(1;+\infty) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(1)=4+m\le 0 \\ 12x^2-2mx\le 0\ \forall x\in(1;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -4 \\ m\le 6x\ \forall x\in(1;+\infty) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m\le -4 \\ m\ge 6x\ \forall x\in(1;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -4 \\ m\le 6 \end{cases} \text{ hoặc } m\in\varnothing \Leftrightarrow -4\le m\le 6.7$$

Do $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. Vì vậy có 6 số nguyên dương m thỏa mãn đề bài.

Câu 19. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023,2023]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0,1)$.

A. 2021. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2020.

Lời giải

Xét $f(x)=-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)$

$f'(x)=-3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+2\end{array}\right.$.

Hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m(m+2)x+m^2(m+3)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0,1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f(x)\ \text{db}\ \ \forall x\in(0,1)\\f(0)\ge 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}f(x)\ \text{nb}\ \ \forall x\in(0,1)\\f(0)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f'(x)\ge 0\ \ \forall x\in(0,1)\quad (I)\\f(0)\ge 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}f'(x)\le 0\ \ \forall x\in(0,1)\quad (II)\\f(0)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Giải $(I)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)\ge 0\ \ \forall x\in(0,1)\\f(0)\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m\le 0<1\le m+2\\m^2(m+3)\ge 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-1\le m\le 0\\m\ge -3\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le m\le 0$.

Giải $(II)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-3x^2+6(m+1)x-3m(m+2)\le 0\ \ \forall x\in(0,1)\\f(0)\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m+2\le 0\\m\ge 1\end{array}\right.\\m^2(m+3)\le 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 1\end{array}\right.\\m\le -3\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le -3$.

Kết hợp (I) và (II) suy ra $\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 0\\m\le -3\end{array}\right.\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2023,2023]}m\in\{-2023,-2022,....-3,-1,0\}$.

Vậy có 2023 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m\in[0;2023]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+3)x-m+5\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3mx^2-3(m+3)x-m+5$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+3)=3(x^2-2mx-m-3)$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ thì $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f(0)\ge 0\\f'(x)=3(x^2-2mx-m-3)\ge 0,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}f(0)\le 0\\f'(x)=3(x^2-2mx-m-3)\le 0,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m+5\ge 0\\ m\le \dfrac{x^2-3}{2x+1},\forall x\in(0;2)\end{cases}\\ \begin{cases}-m+5\le 0\\ m\ge \dfrac{x^2-3}{2x+1},\forall x\in(0;2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 5\\ m\le -3\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 5\\ m\ge \dfrac{1}{5}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 5\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\in[0;2023]} m\in\{5,6,...,2023\}$$

Vậy có tất cả 2019. giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+5)x^2-(m^2+5m)x+\frac{2}{3}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Xét $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2m+5)x^2-(m^2+5m)x+\frac{2}{3}$.

$g'(x)=-x^2+(2m+5)x-(m^2+5m)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=m+5\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+5$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$

Hàm số $|g(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;2)\\ g(x)\le 0,\forall x\in(1;2)\end{cases}\\ \begin{cases}g'(x)\le 0,\forall x\in(1;2)\\ g(x)\ge 0,\forall x\in(1;2)\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 1<2\le m+5\\ g(2)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m+5\le 1\\ g(2)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2\le m\\ g(2)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3\le m\le 1\\ -2m^2-6m+8\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -4\\ -2m^2-6m+8\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ -2m^2-6m+8\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3\le m\le 1\\ m\in(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)\end{cases}\\ \begin{cases}m\le -4\\ m\in[-4;1]\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge 2\\ m\in[-4;1]\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-4\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;+\infty)$ để hàm

số $y=\left|x^3+(5-m)x+m^2-7\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+(5-m)x+m^2-7$.

Ta có $f'(x)=3x^2+5-m$.

Ta thấy $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2) \\ f(0)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5-m\ge 0,\forall x\in(0;2) \\ m^2-7\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3x^2+5,\forall x\in(0;2) \\ \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{7} \\ m\le-\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 5 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{7} \\ m\le-\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7}\le m\le 5 \\ m\le-\sqrt{7} \end{array}\right.$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20;+\infty)$, suy ra $m\in\{-19;-18;\ldots;-3;3;4;5\}$.

TH2: $\begin{cases} f'(x)\le 0,\forall x\in(0;2) \\ f(0)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5-m\le 0,\forall x\in(0;2) \\ m^2-7\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 3x^2+5,\forall x\in(0;2) \\ -\sqrt{7}\le m\le\sqrt{7} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 17 \\ -\sqrt{7}\le m\le\sqrt{7} \end{cases}$.

Trường hợp này không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;+\infty)$ để hàm số $y=\left|(m-1)x^3-x^2+27-m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 16. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=(m-1)x^3-x^2+27-m^2$.

Ta có $f'(x)=3(m-1)x^2-2x$.

Ta thấy $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;2) \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \ge 0, \forall x \in (1;2) \\ -m^2 + m + 25 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \ge \dfrac{2}{x}, \forall x \in (1;2) \\ \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \ge 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{101}}{2}$.

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20;+\infty)$, suy ra $m \in \{2;3;4;5\}$.

TH2: $\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in (1;2) \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \le 0, \forall x \in (1;2) \\ -m^2 + m + 25 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \le \dfrac{2}{x}, \forall x \in (1;2) \\ \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \ge \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \ge \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m \le \dfrac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \ge \dfrac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le \dfrac{1-\sqrt{101}}{2}$.

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20;+\infty)$, suy ra $m \in \{-19;-18;\ldots;-5\}$.

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $f(x) = \left|x^3 - (m-5)x + 2023\right|$ đồng biến trên đoạn $(1;2)$?

A. 2024. **B.** 2033. **C.** 2032. **D.** 2023.

Lời giải

Đặt $g(x) = x^3 - (m-5)x + 2023 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - (m-5)$.

Để hàm số $f(x) = \left|x^3 - (m-5)x + 2023\right|$ đồng biến trên đoạn $(1;2)$ thì ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàm số $g(x) = x^3 - (m-5)x + 2023$ đồng biến trên đoạn $(1;2)$ và không âm trên đoạn $(1;2)$, tức là:

$$\begin{cases} g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;2) \\ g(1)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+5\ge m,\forall x\in(1;2) \\ 2029-m\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 8 \\ m\le 2029 \end{cases}\Leftrightarrow m\le 8.$$

Trường hợp 2: Hàm số $g(x)=x^3-(m-5)x+2023$ nghịch biến trên đoạn $(1;2)$ và không dương trên đoạn $(1;2)$, tức là:

$$\begin{cases} g'(x)\le 0,\forall x\in(1;2) \\ g(1)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+5\le m,\forall x\in(1;2) \\ 2029-m\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 17 \\ m\ge 2029 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 2029.$$

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có $m\in[-2023;8]$. Vậy có 2032 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $y=\left|-x^3+3(m+1)x^2-3m\ (m+2)x+m^2(m+3)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 2. **D.** 2022.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3(m+1)x^2-3m\ (m+2)x+m^2(m+3)$ trên khoảng $(1;2)$

$$f'(x)=-3x^2+6\ (m+1)x-3m\ (m+2)=-3\left[x^2-2(m+1)x+m(m+2)\right]\quad f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$	m		$m+2$		$m+3$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	-
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	0	↘	$-\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} (1;2)\subset(m+2;m+3) \\ (1;2)\subset(-\infty;\mathrm{m}) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m+2\le 1<2\le m+3 \\ 2\le m \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 2\le m \end{array}\right.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[0;2023]$ nên có 2022 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023;2023]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(\mathrm{m}-3)x^2+3m(m-6)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$?

A. 4037. **B.** 2024. **C.** 4039. **D.** 2013.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m-3)x^2+3m(m-6)x$ trên khoảng $(0;5)$

$f'(x)=3x^2-6(m-3)x+3m(m-6)=3[x^2-2(m-3)x+m(m-6)]$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m-6\end{array}\right.\quad(m-6<m)$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

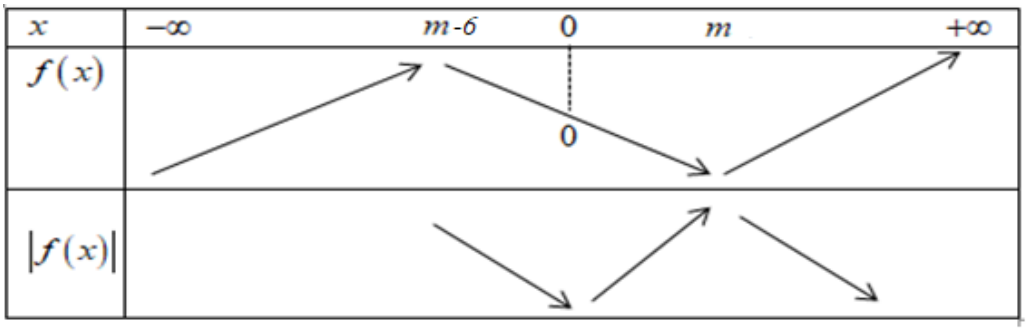
Trường hợp 1: Nếu $m-6>0\Leftrightarrow m>6$

x	$-\infty$	0	$m-6$	m	$+\infty$
$f(x)$		0			
$\lvert f(x)\rvert$					

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$ $\Leftrightarrow(0;5)\subset(0;m-6)\Leftrightarrow m\geq 11$

Kết hợp với $m>6$, ta có $m\geq 11$.

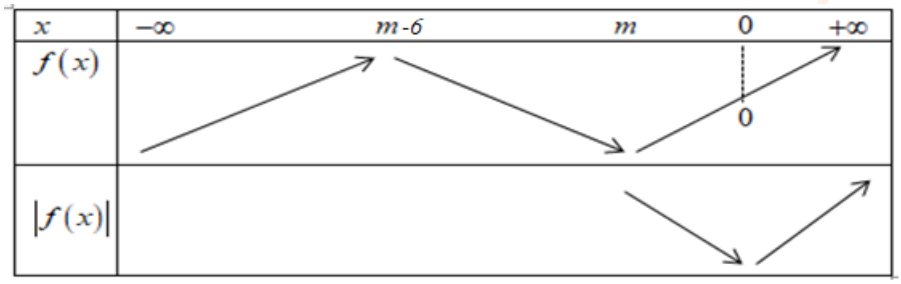
Trường hợp 2: Nếu $m-6\leq 0<m\Leftrightarrow 0<m\leq 6$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$ $\Leftrightarrow (0;5)\subset(0;m)\Leftrightarrow 5\le m$

Kết hợp với $0<m\le 6$, ta có $m\in\{5;6\}$.

Trường hợp 3: Nếu $m\le 0$



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $|f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;5)$ với mọi $m\le 0$

. Vậy $\left[\begin{array}{l} m\ge 11 \\ m\in\{5;6\} \\ m\le 0 \end{array}\right.$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2023;2023]$ nên có 4039 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m\in[-2022;2023]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. $S=2025$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2026$. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+(2m+3)x-1$.

Ta có: $f'(x)=x^2-(m+3)x+2m+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\left\{\begin{array}{l} f'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty) \\ f(3)\ge 0 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} f'(x)\le 0,\forall x\in(3;+\infty) \\ f(3)\le 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty) \\ f(3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(m+3)x+(2m+3)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty) \\ 9-\frac{9}{2}(m+3)+3(2m+3)-1\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{x^2-3x+3}{x-2},\forall x\in(3;+\infty) \\ m\ge -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \min\limits_{(3;+\infty)} \frac{x^2-3x+3}{x-2} \\ m\ge -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 3 \\ m\ge -\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3}\le m\le 3$

Trường hợp 2: $\begin{cases} f'(x)\le 0,\forall x\in(3;+\infty) \\ f(3)\le 0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-(m+3)x+(2m+3)\right)=+\infty$.

Vậy $-\frac{7}{3}\le m\le 3$ mà m nguyên và $m\in[-2022;2023]$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Suy ra số phần tử của S bằng 6.

Câu 28. Tìm số nguyên m sao cho hàm số $y=\left|x^3+(2m-2)x+16-m^2\right|$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $f(x)=x^3+(2m-2)x+16-m^2$ ta có $f'(x)=3x^2+2m-2\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{2-2m}{3}$.

Nếu $2-2m>0\Rightarrow m<1$ suy ra phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<0<x_2$.

Khi đó luôn tồn tại $(a;b)\subset(0;+\infty)$ sao cho hàm số $y=\left|f(x)\right|$ nghịch biến trên $(a;b)$. Suy ra $m<1$ không thỏa mãn.

Nếu $2-2m\le 0\Rightarrow m\ge 1$ phương trình $f'(x)=0$ vô nghiệm. Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $\begin{cases} m\ge 1 \\ f(0)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 1 \\ 16-m^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le 4$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1,2,3,4\}$.

Cách 2 :

Đặt $f(x)=x^3+(2m-2)x+16-m^2$ ta có $f'(x)=3x^2+2m-2$.

+ Trường hợp 1:

$\begin{cases} f(0)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 16-m^2\ge 0 \\ 3x^2\ge 2-2m,\forall x\in(0;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -4\le m\le 4 \\ 2-2m\le \underset{x\in(0;+\infty)}{Min}\, 3x^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} -4\le m\le 4 \\ m\ge 1 \end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le 4$

+ Trường hợp 2:

$\begin{cases} f(0)\le 0 \\ f'(x)\le 0,\forall x\in(0;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 16-m^2\le 0 \\ 3x^2\le 2-2m,\forall x\in(0;+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -4 \end{array}\right. \\ 2-2m\ge \underset{x\in(0;+\infty)}{Max}\, 3x^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m\le -4 \end{array}\right. \\ m\in\varnothing \end{cases}$

không tồn tại m.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1,2,3,4\}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=|x|^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)|x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$

$f'(x)=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)$

Hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)|x|$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ khi và chỉ khi $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\begin{cases} f'(0)\le 0 \\ f'(1)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3m(m+2)\le 0 \\ 3m^2-3\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\in[-2;0] \\ m\in[-1;1] \end{cases}\Leftrightarrow m\in[-1;0]$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2mx+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(|4-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 1. **B.** 2032. **C.** 2023. **D.** 2024.

Lời giải

Ta có: $y=f(|4-x|)=f(|x-4|)$. Đặt $t=x-4$, với $x\in(0;3)\Rightarrow t=x-4\in(-4;-1)$.

Do đó, hàm số $y=f(|x-4|)$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$ khi và chỉ khi hàm số $y=f(|t|)$ nghịch biến trên khoảng $(-4;-1)$.

Mặt khác, $y=f(|t|)$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Suy ra hàm số $y=f(|t|)$ nghịch biến trên khoảng $(-4;-1)$ khi hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(1;4)$ tương ứng với hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $[1;4]$

$\Leftrightarrow f'(t)=t^2-2t+2m\ge 0,\forall t\in[1;4]\Leftrightarrow 2m\ge -t^2+2t,\forall t\in[1;4]$

$\Leftrightarrow 2m\ge\max\limits_{[1;4]}(-t^2+2t)\Leftrightarrow 2m\ge 1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2023;2023]$ nên có 2023 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-25;25)$ để hàm số $y=|x^4-8x^2+m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

A. 4. **B.** 30. **C.** 9. **D.** 14.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-8x^2+m$

Ta có $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$	-2
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	$m-16$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ $\Leftrightarrow m-16\ge 0\Leftrightarrow m\ge 16$.

Vì m nguyên và $m\in(-25;25)$ suy ra $m\in\{16;17;18;19;20;21;22;23;24\}$.

Vậy có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)=|x^4-4x^3+4mx+m+2023|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2023]$ để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^4-4x^3+4mx+m+2023\Rightarrow y=f(x)=|g(x)|$.

Ta có $g'(x)=4x^3-12x^2+4m$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ tương đương hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Bài toán chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} g'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;3] \\ g(0)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4x^3-12x^2+4m\ge 0,\ \forall x\in[0;3] \\ m+2023\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge -x^3+3x^2,\ \forall x\in[0;3] \\ m\ge -2023 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge \max\limits_{[0;3]}\left(-x^3+3x^2\right) \\ m\ge -2023 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 4 \\ m\ge -2023 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 4$.

TH2: $\begin{cases} g'(x)\le 0,\ \forall x\in[0;3] \\ g(0)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4x^3-12x^2+4m\le 0,\ \forall x\in[0;3] \\ m+2023\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le -x^3+3x^2,\ \forall x\in[0;3] \\ m\le -2023 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m\le \min\limits_{[0;3]}\left(-x^3+3x^2\right) \\ m\le -2023 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 0 \\ m\le -2023 \end{cases}\Leftrightarrow m\le -2023$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2023;2023]$ nên $m\in\{-2023;4;5;6;7;\ldots;2023\}$.

Vậy có 2021 giá trị m nguyên thoả mãn bài toán.

Câu 33. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2022;2023)$ để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 2023. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 4043.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$

Ta có $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \\ x=2 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$m-5$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ bảng biến thiên

ta thấy hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Vì m nguyên và $m \in (-2022;2023)$ suy ra $m \in \{5;6;\ldots;17;18;2022\}$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|x^4-2x^3+mx^2-6m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 4045. **B.** 4046. **C.** 4047. **D.** 4048.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^4-2x^3+mx^2-6m$; $f'(x)=4x^3-6x^2+2mx$

Hàm số $y=\left|x^4-2x^3+mx^2-6m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)\leq 0 \\ f'(x)\geq 0 \end{array}\right. \forall x\in(1;2) \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} f(x)\geq 0 \\ f'(x)\leq 0 \end{array}\right. \forall x\in(1;2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(2)=-m\leq 0 \\ 4x^3-6x^2+2mx\geq 0 \ \forall x\in(1;2) \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} f(2)=-m\geq 0 \\ 4x^3-6x^2+2mx\leq 0 \ \forall x\in(1;2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m\geq g(1) \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\leq g(2) \end{array}\right. \quad (\text{Đặt } g(x)=-2x^2+3x, \text{ xét được } g(x) \text{ giảm trên (1;2)})$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m\geq 1 \end{array}\right. \text{ hoặc } \left\{\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\leq -2 \vee m\geq 1.$$

Do m nguyên và $m \in [-2023;2023]$ nên có $4046 + 1 - 2 = 4045$ số (Lấy tất cả các số nguyên trên đoạn $[-2023;2023]$ và bỏ đi hai số -1 và 0).

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-10x^2+(m-1)x+2023\right|$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A. 1006. **B.** 39. **C.** 968. **D.** 2013.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^5-10x^2+(m-1)x+2023$, khi đó

+ $f(0)=2023$ và $f(2)=2m+2013$

+ $f'(x)=5x^4-20x+m-1$ và $f''(x)=20x^3-20$.

x	0		1		2
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-1+m$	$\searrow$	$-16+m$	$\nearrow$	$39+m$

Để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(0;2\right)$ thì

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} f\left(2\right)\ge 0 \\ f'\left(x\right)\le 0,\forall x\in\left(0;2\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge -\dfrac{2013}{2} \\ m\le -39 \end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{2013}{2}\le m\le -39$.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} f\left(2\right)\le 0 \\ f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(0;2\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le -\dfrac{2013}{2} \\ m\ge 16 \end{cases}$, không tồn tại m.

Vậy $m\in\left\{-1006,...,-39\right\}$, suy ra có 968 giá trị nguyên của m.

Câu 36. Cho hàm số $f\left(x\right)=2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+4x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)>0$ vô nghiệm trong đoạn $\left[0;2\right]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $f\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, ta có:

$f\left(-x\right)=2\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)+3\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-4x$

$=-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)+3\ln\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-4x=-\left[2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+4x\right]=-f\left(x\right)$.

Suy ra $-f\left(x^3-12\right)=f\left(12-x^3\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'\left(x\right)=2\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)+3.\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+4=2\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)+3.\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+4>0$.

Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)>0$ vô nghiệm trong đoạn $\left[0;2\right]$

$\Leftrightarrow f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)\le 0,\forall x\in\left[0;2\right]$

$\Leftrightarrow f\left(\left|3x^2+m\right|\right)\le -f\left(x^3-12\right),\forall x\in\left[0;2\right]$

$\Leftrightarrow f\left(\left|3x^2+m\right|\right)\le f\left(12-x^3\right),\forall x\in\left[0;2\right]$

$\Leftrightarrow \left|3x^2+m\right|\le 12-x^3$, $\forall x\in\left[0;2\right]$

$\Leftrightarrow x^3-12\le 3x^2+m\le -x^3+12$, $\forall x\in\left[0;2\right]$

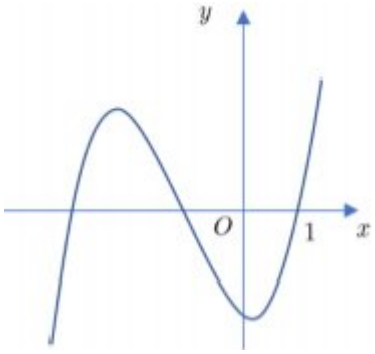
$\Leftrightarrow x^3-3x^2-12\le m\le -x^3-3x^2+12,\ \forall x\in[0;2]$

$\Leftrightarrow \max\limits_{[0;2]}\left(x^3-3x^2-12\right)\le m\le \min\limits_{[0;2]}\left(-x^3-3x^2+12\right)$

$\Leftrightarrow -12\le m\le -8.$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2023;2023]$ để hàm số $g(x)=f\left(2023^x\right)-mx+2023$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

+ Ta có: $g'(x)=2023^x.\ln 2023.f'\left(2023^x\right)-m.$

+ Hàm số $g(x)=f\left(2023^x\right)-mx+2023$ đồng biến trên $(0;1)$ tương đương với $g(x)=f\left(2023^x\right)-mx+2023$ đồng biến trên $[0;1]\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 2023^x.\ln 2023.f'\left(2023^x\right)-m\ge 0,\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\le 2023^x.\ln 2023.f'\left(2023^x\right),\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[0;1]}h(x)$, với $h(x)=2023^x.\ln 2023.f'\left(2023^x\right).$

+ Ta có: $0\le x\le 1\Rightarrow 2023^x\in[1;2023].$

+ Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên $[1,+\infty)$, nên hàm số $y=f'(t)$ đồng biến trên $[1;2023]$ với $t=2023^x$.

Do đó $\forall t\in[1;2023],\ f'(t)\ge f'(1)=0$ hay $f'\left(2023^x\right)\ge 0,\ \forall x\in[0;1].$

+ Suy ra $h(x)\ge 1.\ln 2023.0=0,\forall x\in[0;1]$, dấu bằng xảy ra khi $x=0$.

Hay $\min\limits_{[0;1]}h(x)=0$ khi $x=0$.

+ Do đó $m\le 0$, với m nguyên thuộc $[-2023;2023]$ nên $m\in\{-2023;-2022;...;-1;0\}$.

Vậy có 2024 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=e^{x^2-4x}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f\left(|x-2m|+4\right)-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(2023;+\infty)$?

A. 1011. **B.** 2023. **C.** 1012. **D.** 2024.

Lời giải

Ta có: $f(x)=e^{x^2-4x}\Rightarrow f'(x)=(2x-4)e^{x^2-4x}.$

Thấy rằng $f(x)\ge 1,\forall x\ge 4\Rightarrow f\left(|x-2m|+4\right)-1\ge 0,\forall x,m\Rightarrow g(x)=f\left(|x-2m|+4\right)-1$.

Mặt khác $f'(x)>0,\forall x>2$.

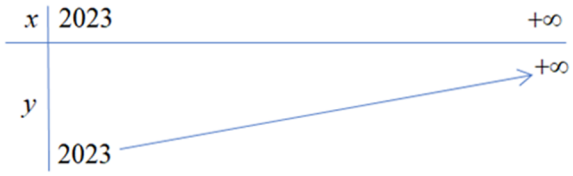
Xét $g(x)=f\left(|x-2m|+4\right)-1\Rightarrow g'(x)=\dfrac{(x-2m)\,f'\left(|x-2m|+4\right)}{|x-2m|}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2023;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$g'(x)\ge 0,\ \forall x>2023\Leftrightarrow \dfrac{(x-2m)\,f'\left(|x-2m|+2\right)}{|x-2m|}\ge 0,\ \forall x>2023$

$\Leftrightarrow x>2m,\ \forall x>2023\quad (*)$.

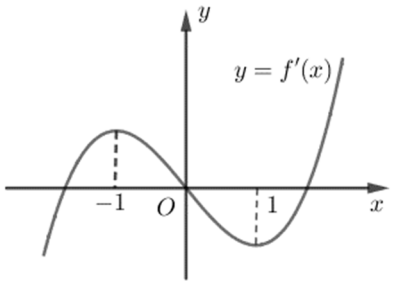
Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x, x\in(2023;+\infty)$.



Từ bảng biến thiên $(*)\Leftrightarrow 2m\le 2023\Leftrightarrow m\le \dfrac{2023}{2}$.

Vậy có 1011 giá trị nguyên dương của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|\Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}$.

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0,\sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\ge 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x\ge a,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2\ge a,\forall t\in(0;1)$ (*).

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2\Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow a\le h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;15)$ để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^2+3x-m\right|\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 15. **B.** 12 **C.** 14. **D.** 13

Lời giải

Ta có: $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le -3\end{array}\right.$ yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$g'(x)=\dfrac{2x+3}{\left|x^2+3x-m\right|}f'\left(\left|x^2+3x-m\right|\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)$,

$\Leftrightarrow f'\left(\left|x^2+3x-m\right|\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^2+3x-m\right|\ge 1\\\left|x^2+3x-m\right|\le -3\end{array}\right.\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow\left|x^2+3x-m\right|\ge 1,\ \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\ge 1\\x^2+3x-m\le -1\end{array}\right.\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-1\ge m\\x^2+3x+1\le m\end{array}\right.\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 11\end{array}\right.$

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $y=\left|x+a\sqrt{x^2-2x+3}\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2025. **D.** 2024.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x+a\sqrt{x^2-2x+3}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x+a\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$. Khi đó $y=\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\\f(1)\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}f'(x)\le 0,\forall x\in(1;+\infty)\\f(1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Ta có $f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow 1+a\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}+a(x-1)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

Đặt $t=x-1,t>0\Rightarrow\sqrt{t^2+2}+at\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow a\ge-\dfrac{\sqrt{t^2+2}}{t},\forall t>0$.

Xét $f(t)=-\dfrac{\sqrt{t^2+2}}{t}$, có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2\sqrt{t^2+2}},\forall t>0$.

Do đó $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty) \\ f(1)\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge -1 \\ 1+a\sqrt{2}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge -1 \\ a\ge -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\Leftrightarrow a\ge -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Trường hợp 2: Ta có $f'(x)\le 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow 1+a\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\le 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}+a(x-1)\le 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

Đặt $t=x-1,t>0\Rightarrow\sqrt{t^2+2}+at\le 0,\forall t>0$. Mà $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t^2+2}+at\right)=2>0$.

Do đó không có giá trị nào của a để trường hợp 2 thỏa mãn.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của a thỏa mãn $\{0;1;2;3\ldots,2023\}$.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

A. 2023. **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2026

Lời giải

Để hàm số $y=\left|\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì hàm số phải xác định tại $x=1$

Với $x=1$ thì $y=\left|\log_3(3-m)\right|$ xác định khi $m<3$

Đặt $f(x)=\log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)$ nên $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x-m}{\left(x^3+x^2-mx+1\right).\ln 3}$.

Hàm số đồng biến trên $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases}\end{array}\right.,\forall x\in[1;+\infty)$.

Trường hợp 1:

$\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases} \log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\ge 0 \\ x^3+x^2-mx+1>0 \\ 3x^2+2x-m\ge 0 \end{cases},\forall x\in[1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases} x^3+x^2-mx+1\ge 1 \\ 3x^2+2x\ge m \end{cases},\forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases} m\le x^2+x \\ m\le 3x^2+2x \end{cases},\forall x\in[1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases} m\le \min\limits_{[1;+\infty)}\left(x^2+x\right) \\ m\le \min\limits_{[1;+\infty)}\left(3x^2+2x\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 2 \\ m\le 5 \end{cases}\Leftrightarrow m\le 2$.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases},\forall x\in[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x^3+x^2-mx+1\right)\le 0 \\ x^3+x^2-mx+1>0 \\ 3x^2+2x-m\le 0 \end{cases},\forall x\in[1;+\infty).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x^2-mx+1\le 1 \\ x^3+x^2-mx+1>0 \\ 3x^2+2x\le m \end{cases},\forall x\in[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x\le m \\ x^2+x+\dfrac{1}{x}>m \\ 3x^2+2x\le m \end{cases},\forall x\in[1;+\infty).$$

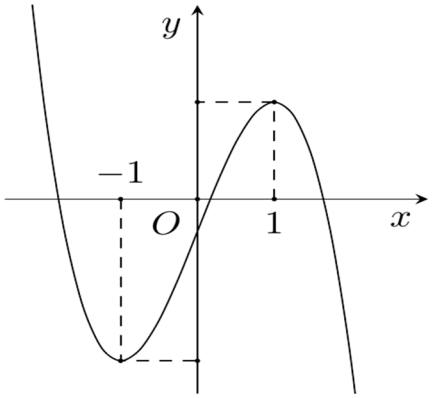
Ta có: $m\ge x^2+x,\forall x\in[1;+\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$ nên không tồn tại m thỏa mãn $(*)$. Do đó trường hợp 2 không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới. Số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f(|x+1|-m)$ nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải



Ta có: $y=f(|x+1|-m) \Rightarrow y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}\cdot f'(|x+1|-m)$.

Để hàm số nghịch biến trên $(5;+\infty)$ thì $y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}\cdot f'(|x+1|-m)\le 0,\ \forall x\in(5;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(|x+1|-m)\le 0,\ \forall x\in(5;+\infty)$ $(*)$

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+1|-m\ge 1 \\ |x+1|-m\le -1 \end{array}\right.,\forall x\in(5;+\infty)\Leftrightarrow 1+m\le 6\Leftrightarrow m\le 5$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2,3,4,5\}$.

Vậy số giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là 5.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt $-3;1$. Có bao giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-13;25]$ để hàm số $y=\left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 25. **B.** 26. **C.** 27 **D.** 24.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right).\left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$ suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -3<x<1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\geq 0,\forall x\in(0;2)$.

$\Leftrightarrow y'=3(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right).\left[f\left(x^2+3x-m\right)\right]^2\geq 0,\forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$ và $\left[f'\left(x^2+3x-m\right)\right]^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó ta có:

$$y'\geq 0\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\leq -3\\x^2+3x-m\geq -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq x^2+3x+3\\m\leq x^2+3x-1\end{array}\right.$$

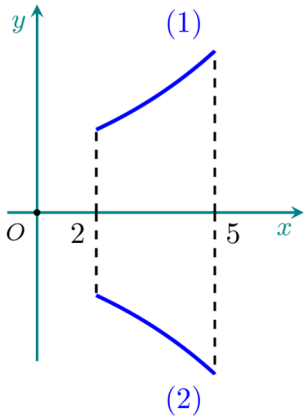
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq\max\limits_{(0;2)}\left(x^2+3x+3\right)\\m\leq\min\limits_{(0;2)}\left(x^2+3x-1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 13\\m\leq -1\end{array}\right.$$

Do $m\in[-13;25]$ nên có 26 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 45. Gọi a,b lần lượt là giá trị dương nhỏ nhất và giá trị âm lớn nhất của m để hàm số $y=|mx-6\sqrt{x-1}+9|$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-\dfrac{9}{2}$.

Lời giải



Đặt $f(x)=mx-6\sqrt{x-1}+9$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;5)$ thì ta xét 2 trường hợp.

TH1: $\begin{cases} f'(x)=m-\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}\ge 0,\forall x\in[2;5] \\ f(2)=2m+3\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}=g(x)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[2;5]} g(x) \\ m\ge -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Xét $g(x)$ trên đoạn $[2;5]$ ta có: $1\le\sqrt{x-1}\le 2\Rightarrow \dfrac{3}{2}\le g(x)\le 3$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} m\ge 3 \\ m\ge -\dfrac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 3.$

TH2: $\begin{cases} f'(x)=m-\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}\le 0,\forall x\in[2;5] \\ f(2)=2m+3\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{3}{2} \\ m\le -\dfrac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{2}.$

Từ TH1 suy ra $a=3$ và từ TH2 suy ra $b=-\dfrac{3}{2}$.

Khi đó $a+b=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-22;\ 23)$ để hàm số hàm số $y=\left|\sin^3 x+(m+1)\sin x+23-m^2\right|$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 24. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\sin^3 x+(m+1)\sin x+23-m^2$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. (*)

$\Rightarrow f'(x)=3\sin^2 x.\cos x+(m+1)\cos x$. Ta có $\cos x>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó, dấu của $f'(x)$ chỉ phụ thuộc vào dấu của biểu thức $T=3\sin^2 x+m+1$. (**)

Đặt $t=\sin x, t\in(0;1)$. Ta có (*) $\Leftrightarrow h(t)=t^3+(m+1)t+23-m^2$ và (**) $\Leftrightarrow g(t)=3t^2+m+1$ với $t\in(0;1)$.

Để hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} g(t)\ge 0,\forall t\in(0;1) \\ h(0)\ge 0 \end{cases}$. (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3t^2+m+1\ge 0,\forall t\in(0;1) \\ 23-m^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \max\limits_{[0;1]}\left(-3t^2-1\right) \\ -\sqrt{23}\le m\le\sqrt{23} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ -\sqrt{23}\le m\le\sqrt{23} \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le\sqrt{23}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-22;23)$ nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$. Suy ra có 6 giá trị m cần tìm trong TH1.

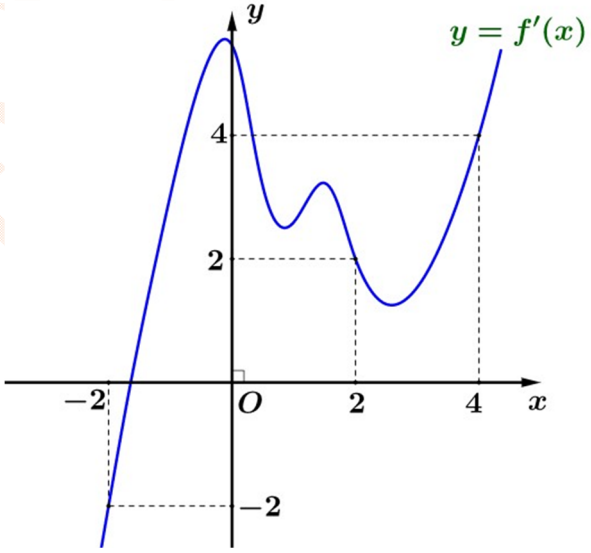
TH2: $\begin{cases} g(t)\le 0,\forall t\in(0;1) \\ h(0)\le 0 \end{cases}$. (2)

(2) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3t^2+m+1\le 0,\forall t\in(0;1) \\ 23-m^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \min\limits_{[0;1]}\left(-3t^2-1\right) \\ \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{23} \\ m\le-\sqrt{23} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -4 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{23} \\ m\le-\sqrt{23} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le-\sqrt{23}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-22;23)$ nên $m\in\{-21;-20;\cdots;-4\}$. Suy ra có 18 giá trị m cần tìm trong TH2.

Vậy có 24 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(2)=4$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=\left|f(2x-4)-2x^2+8x-10\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

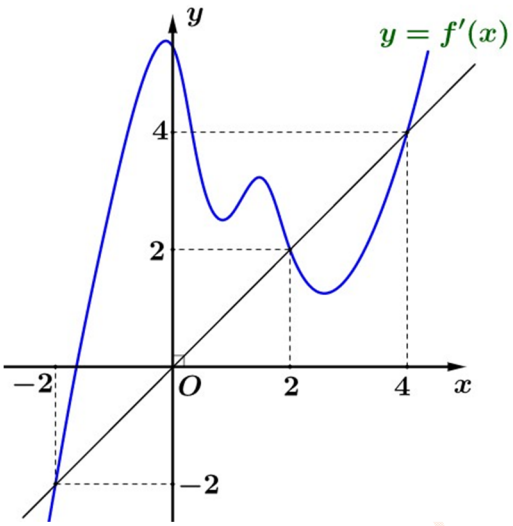
Chọn C

Xét hàm số $h(x)=f(2x-4)-2x^2+8x-10$

Ta có $h'(x)=2f'(2x-4)-4x+8=0=2\left(f'(2x-4)-(2x-4)\right)=0\ (3)$

Đặt $t=2x-4$

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f'(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=2\\t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=4\end{array}\right.$



Ta có bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	a	1		3		4		b	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(1)$	↗	0	↘	$h(4)$	↗	$+\infty$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\lvert h(1)\rvert$	↘	0	↗	$\lvert h(4)\rvert$	↘	$+\infty$	
		$g(a)$							$g(b)$	

Dễ thấy $h'(2)=2f'(0)>0$

$h(3)=f(2)-18+24-10=0$

Từ đó ta có hàm số đồng biến trên $(3;4)$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Ta có: $f'(t)=t^2+2t-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -3\\t\ge 1\end{array}\right.$.

$g'(x)=(2x+3)\,f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2)\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le -3,\forall x\in(0;2)\\x^2+3x-m\ge 1,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x\le m-3,\forall x\in(0;2)\\x^2+3x\ge m+1,\forall x\in(0;2)\end{array}\right.$ (**)

$h(x)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ (**) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3\ge 10\\m+1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.$.

Vì $\begin{cases}m\in[-10;20]\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<2023$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

A. 2022. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2025.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\ g'(x)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\ f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)\le 0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)(x-4)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\1\le x\le 4\end{array}\right.$.

Do đó: $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\dfrac{2-x}{1+x}-m\le -1;\forall x\in(2;+\infty) & (1)\\1\le\dfrac{2-x}{1+x}-m\le 4;\forall x\in(2;+\infty) & (2)\end{array}\right.$

Hàm số $h(x)=\dfrac{2-x}{1+x}-m$; $x\in(2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	
$h(x)$	|| $-m$	$\searrow$	$-m-1$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra:

Điều kiện $(1)\Leftrightarrow -m\le -1\Leftrightarrow m\ge 1$.

Điều kiện $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 4 \\ -m-1 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le -2$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m < 2023 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;1;2;3;...;2022\}$.

Vậy có 2025 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-8x+m^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0;2023]$ để hàm số $g(x) = f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2010.

Lời giải

Ta có $g(x) = f(|1-x|) = f(1-x), \forall x \in (-\infty;-1)$.

Suy ra $g'(x) = [f(1-x)]' = -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)\left[(1-x)^2 - 8(1-x) + m^2\right]$

$= (x-1)^2(x+1)(x^2+6x+m^2-7)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1) \Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x < -1$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $(x-1)^2(x+1) < 0,\ \forall x \in (-\infty;-1)$ nên $g'(x) \le 0, \forall x < -1$

$\Leftrightarrow x^2+6x+m^2-7 \ge 0, \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 \ge 16-m^2, \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 16-m^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right.$.

Do m nguyên, $m \in [0;2013]$ và $\left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right.$ nên suy ra $m \in \{4;5;6;...;2023\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 51. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023;2023)$ để hàm số $y = (m+2x^3)\sqrt{2-x^3}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. 2047240 **B.** 2047248 **C.** 2045225 **D.** 2046232

Lời giải

Xét hàm số $y = (m+2x^3)\sqrt{2-x^3}$ trên khoảng $(0;1)$.

$y' = 6x^2\sqrt{2-x^3} + (m+2x^3)\dfrac{(-3x^2)}{2\sqrt{2-x^3}} = \dfrac{12x^2(2-x^3) - 3x^2(m+2x^3)}{2\sqrt{2-x^3}}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0,\ \forall x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow x^2\left[12(2-x^3) - 3(m+2x^3)\right] \le 0$

$\Leftrightarrow -6x^3 + 8 \le m$ (vì $x^2 > 0, \forall x \in (0;1)$).

Đặt $g(x) = -6x^3+8$, $g'(x) = -18x^2 \le 0, \forall x \in (0;1)$.

Do đó hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Ta có $m \ge g(x),\ \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow m \ge g(0) \Leftrightarrow m \ge 8$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2023;2023) \end{cases}$ suy ra $m \in \{8;9;10;...;2022\}$.

Ta có $\sum_{9}^{2023} m = \frac{(8+2022).2015}{2} = 2045225.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG