

CHUYÊN ĐỀ: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

DẠNG 1: PHÂN TÍCH ĐA THỨC BẬC BA VÀ BẬC 4

Phương pháp:

Dùng máy tính nhằm nghiệm

hoặc tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có 1 nghiệm $x = 1$

Tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là $x = -1$

1 số HĐT đáng nhớ:

$$1, (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a-b)^2 + 4ab$$

$$2, (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 4ab$$

$$3, a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$4, a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$5, a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$6, 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$7, (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$8, a^4 + b^4 = (a+b)(a-b)\left[(a+b)^2 - 2ab\right]$$

$$9, a^4 + b^4 = \left[(a+b)^2 - 2ab\right]^2 - 2(ab)^2$$

$$10, a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$11, a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$12, a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$

HD:

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1, 3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử $(a - 1)$, $(a - 3)$ và $(a + 8)$,

$$\text{Ta có: } a^3 + 4a^2 - 29a + 24 = (a^3 - a^2) + (5a^2 - 5a) + (-24a + 24)$$

$$a^2(a-1) + 5a(a-1) - 24(a-1) = (a-1)(a^2 + 5a - 24) = (a-1)(a-3)(a+8)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

HD:

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

Và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{-6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

$$\text{Đa thức trở thành: } x^2(t^2 + 2 + 6t + 7) = x^2(t^2 + 6t + 9) = x^2(t+3)^2$$

$$\text{Thay } t \text{ trở lại ta được: } x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 3 \right)^2 = x^2 \left(\frac{x^2 - 1 + 3x}{x} \right)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

HD :

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

HD :

Với dạng này, ta chỉ việc lấy số nhỏ nhất nhân với số lớn nhất, để tạo ra những số hạng giống nhau :

$$(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15 = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$

$$\text{Đặt } x^2+8x=t \Rightarrow (t+7)(t+15)+15 = t^2+22t+105+15 = t^2+22t+120$$

$$= (t+10)(t+12) = (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) = (x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2x^2 + 1$

HD :

Nhận thấy ngay đa thức trên là hằng đẳng thức nên ta có :

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : $(3x - 1)$

$$\text{nên ta có : } 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$$

$$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2 - 2x + 5)$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : $(2x - 1)$

$$\text{Nên ta có : } 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3$$

$$= x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3$

HD :

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = -\frac{1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : $(3x + 1)$

$$\text{Ta có : } 3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 3x^3 + x^2 - 15x^2 - 5x + 9x + 3$$

$$= x^2(3x+1) - 5x(3x+1) + 3(3x+1) = (3x+1)(x^2 - 5x + 3)$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

HD :

bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x = -1$ và $x = -2$

$$\text{Như vậy ta có : } x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

HD:

Ta có:

$$(x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$$

Bài 11: Phân tích thành nhân tử: $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$

HD:

$$\begin{aligned} &= x^4 + 2004x^2 + 2004x - x + 2004 = (x^4 - x) + 2004(x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1) + 2004(x^2 + x + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2004(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2004) \end{aligned}$$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x - 2001.2002$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^2 - x - 2001(2001+1) &= x^2 - x + 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) \\ &= (x - 2001)(x + 2001) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002) \end{aligned}$$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

HD :

$$\begin{aligned} x(x+10)(x+4)(x+6)+128 &= (x^2+10x)(x^2+10x+24)+128 \\ \text{Đặt : } x^2+10x &= t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } t(t+24)+128 = t^2+24t+128 = (t+8)(t+16) \\ \text{Thay } t \text{ trở lại đa thức ta được : } &(x^2+10x+8)(x^2+10x+16) = (x^2+10x+8)(x+2)(x+8) \end{aligned}$$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1
Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:
nên ta làm như sau:

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{-6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 7 \right) \\ \text{Đặt } x - \frac{1}{x} &= t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2 \text{ Đa thức trở thành : } x^2 (t^2 + 2 + 6t + 7) = x^2 (t^2 + 6t + 9) = x^2 (t + 3)^2 \\ \text{Thay } t \text{ trở lại ta được :} \\ x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 3 \right)^2 &= x^2 \left(\frac{x^2 - 1 + 3x}{x} \right)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2 \\ \text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 &= (x^2 + 3x - 1)^2 \end{aligned}$$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x^2 + x &= t \text{ khi đó đa thức trở thành : } (t+1)(t+2) - 12 = t^2 + 3t - 10 = (t-2)(t+5) \\ \text{Thay } t \text{ trở lại đa thức ta được : } &(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) = (x-1)(x+2)(x^2 + x + 5) \end{aligned}$$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 4)(x^2 - 10) - 72$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x^2 - 4 &= t \text{ khi đó đa thức trở thành :} \\ t(t-6) - 72 &= t^2 - 6t - 72 = (t-12)(t+6) = (x^2 - 16)(x^2 + 2) = (x-4)(x+4)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 6x + 1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1
Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:
nên ta làm như sau:

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = x^2 \left(x^2 + 6x + 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 7 \right)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Đa thức trở thành :

$$x^2 (t^2 - 2 + 6t + 7) = x^2 (t^2 + 6t + 5) = x^2 (t+1)(t+5)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 5 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 1 + x}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 1 + 5x}{x} \right) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)+1$

HD :

$$\text{Ta có : } (a+1)(a+4)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+5a+4)(a^2+5a+6)+1$$

$$\text{Đặt } a^2+5a+5=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } (t-1)(t+1)+1=t^2=(a^2+5a+5)^2$$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

HD :

$$\text{Ta có : } (x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-24 = (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$

Đặt : $x^2+7x+11=t$, Khi đó đa thức trở thành

$$(t-1)(t+1)-24=t^2-25=(t-5)(t+5)=(x^2+7x+6)(x^2+7x+16)=(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

HD :

$$(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4 = (12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)-4$$

$$\text{Đặt } 12x^2+11x=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } (t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$$

$$(12x^2+11x-2)(12x^2+11x+3)$$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

HD :

$$\text{Ta có : } 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2 = 4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$$

$$x^2 \left[4 \left(x+17+\frac{60}{x} \right) \left(x+16+\frac{60}{x} \right) - 3 \right], \text{ Đặt : } x+\frac{60}{x}=t, \text{ Khi đó đa thức trở thành :}$$

$$x^2 [4(t+17)(t+16)-3] = x^2 (4t^2+132t+1085) = x^2 (2t+31)(2t+35)$$

$$= x^2 \left(2x+\frac{120}{x}+31 \right) \left(2x+\frac{120}{x}+35 \right) = (2x^2+31x+120)(2x^2+35x+120)$$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)-5$

HD :

Đặt : $x^2+3x=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$$(t+1)(t-3)-5=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)$$

$$(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+x^3+2x^2+x+1$

HD :

$$(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2+1)$$

Bài 24: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12$

HD :

Nhầm thấy đa thức có nghiệm là $x=2$, hay có 1 nhân tử là $x - 2$

Ta có :

$$\begin{aligned} 6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12 &= (6a^4 - 12a^3) + (19a^3 - 38a^2) + (a^2 - 2a) - (6a - 12) \\ 6a^3(a - 2) + 19a^2(a - 2) + a(a - 2) - 6(a - 2) &= (a - 2)(6a^3 + 19a^2 + a - 6) \\ &= (a - 2)(a + 3)(2a - 1)(3a + 2) \end{aligned}$$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

HD :

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 &= (x^4 + x^3) + (5x^3 + 5x^2) + (8x^2 + 8x) + (4x + 4) \\ &= x^3(x + 1) + 5x^2(x + 1) + 8x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) \\ &= (x + 1)^2(x + 2)^2 \end{aligned}$$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x$

HD :

$$\begin{aligned} &(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2, \\ \text{Đặt: } (x^2 + 4x + 8) &= y \Rightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 \Rightarrow (y + x)(y + 2x) \end{aligned}$$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

HD :

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 + 2009x^2 + 2009x + 2009 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2009(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) - 24 &= (x - 1)(x + 4)(x - 2)(x + 3) - 24 \\ (x - 2)(x + 4)(x - 1)(x + 3) - 24 &= (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 3) - 24 \\ \text{Đặt : } x^2 + 2x &= t, \text{ khi đó đa thức trở thành : } (t - 8)(t - 3) - 24 = t^2 - 11t = t(t - 11) \\ \text{Thay } t \text{ trở lại ta được : } (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) &= x(x + 2)(x^2 + 2x - 11) \end{aligned}$$

Bài 29: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + 2x + 7) - (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3)$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Đặt : } x^2 + 2x &= t, \text{ khi đó đa thức trở thành :} \\ (t + 7) - (t + 4)(t + 3) &= t + 7 - t^2 - 7t - 12 = -t^2 - 6t - 5 = -(t + 1)(t + 5), \text{ Thay } t \text{ trở lại ta được :} \\ -(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 5) &= -(x + 1)^2(x^2 + 2x + 5) \end{aligned}$$

Bài 30: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1$

HD :

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 10 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 26 \right) \\ \text{Đặt } x + \frac{1}{x} &= t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ Đa thức trở thành :} \\ x^2(t^2 - 2 + 10t + 26) &= x^2(t^2 + 10t + 24) = x^2(t + 4)(t + 6) \end{aligned}$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 4 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 6x + 1}{x} \right) = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

Bài 31: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) - 1680$

HD :

$$(x-4)(x-7)(x-5)(x-6) - 1689 = (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) - 1680$$

$$\text{Đặt } x^2 - 11x + 29 = t, \text{ Khi đó đa thức trở thành : } (t-1)(t+1) - 1680 = t^2 - 1681 = (t-41)(t+41)$$

$$\text{Thay t trở lại đa thức ta được : } (x^2 - 11x - 12)(x^2 - 11x + 70) = (x-12)(x+1)(x^2 - 11x + 70)$$

Bài 32: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

HD :

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = x^2 \left(x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ Đa thức trở thành :}$$

$$x^2 (t^2 - 2 + t - 4) = x^2 (t^2 + t - 6) = x^2 (t-2)(t+3)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 3x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x-1)^2 (x^2 + 3x + 1)$$

Bài 33: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$

HD :

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = x^2 \left(x^2 - 7x + 14 + \frac{-7}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14 \right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ Đa thức trở thành :}$$

$$x^2 (t^2 - 2 - 7t + 14) = x^2 (t^2 - 7t + 12) = x^2 (t-3)(t-4)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) = x^2 \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x} \right) = (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 1)$$

$$\text{Vậy } x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1)$$

Bài 34: Cho biểu thức: $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a, Phân tích A thành nhân tử

b, Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì $A < 0$

HD:

$$\text{a) Ta có: } A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a)$$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$$b + c - a > 0, b + c + a > 0, b - c - a < 0, b - c + a > 0 \Rightarrow A < 0$$

DẠNG 2: THÊM BỐT HẠNG TỬ

Phương pháp :

Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sử dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,

Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng thức số 3 : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $4x^4 + 81$

b, $64x^4 + y^4$

HD :

a, Ta có : $4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2 + 2.2x^2.9 - 2.2x^2.9 = (2x^2 + 9)^2 - 36x^2$

$$= (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$$

b, Ta có : $64x^4 + y^4 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 2.8x^2.y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - 16x^2y^2$

$$= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + 4xy + y^2)(8x^2 - 4xy + y^2)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $4x^4 + y^4$

b, $4x^8 + 1$

c, $x^4y^4 + 4$

HD :

a, Ta có : $4x^4 + y^4 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.2x^2.y^2 - 4x^2y^2$

$$= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy)$$

b, Ta có : $4x^8 + 1 = (2x^4)^2 + 1^2 + 2.2x^4.1 - 4x^4$

$$= (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 = (2x^4 + 2x^2 + 1)(2x^4 - 2x^2 + 1)$$

c, Ta có : $x^4y^4 + 4 = (x^2y^2)^2 + 2^2 = (x^2y^2)^2 + 2^2 + 2.x^2.y^2.2 - 4x^2y^2$

$$(x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 - 2xy + 2)(x^2y^2 + 2xy + 2)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^8 + x^4 + 1$

b, $x^7 + x^5 + 1$

HD :

a, Ta có : $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + x^4 + x^4 + 1 - x^4 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4$

$$(x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

b, Ta có : $x^7 + x^5 + 1 = x^7 + x^5 + (x^2 + x) + 1 - x^2 - x = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^6 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + x^3 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^7 + x^2 + 1$

b, $x^5 + x - 1$

c, $x^8 + x + 1$

HD:

a, Ta có : $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 - x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

$$\text{b, Ta có: } x^5 + x - 1 = (x^5 + x^2) + (-x^2 + x - 1) = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$$

$$= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$$

$$\text{c, Ta có: } x^8 + x + 1 = (x^8 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } 64x^4 + y^4$$

$$\text{b, } 4x^4 + y^4$$

$$\text{c, } x^4 + 324$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } 64x^4 + y^4 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 16x^2.y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$$

$$= (8x^2 + y^2 - 4xy)(8x^2 + y^2 + 4xy)$$

$$\text{b, Ta có: } 4x^4 + y^4 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 = (2x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.2x^2.y^2 - 4x^2.y^2$$

$$(2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy)$$

$$\text{c, Ta có: } x^4 + 324 = (x^2)^2 + (18)^2 = (x^2)^2 + (18)^2 + 2.x^2.18 - 36x^2$$

$$= (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 18 + 6x)(x^2 + 18 - 6x)$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^4 + 64$$

$$\text{b, } 81x^4 + 4y^4$$

$$\text{c, } x^4 + 4y^4$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } x^4 + 64 = (x^2)^2 + 8^2 = (x^2)^2 + 8^2 + 2.x^2.8 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$

$$\text{b, Ta có: } 81x^4 + 4y^4 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.9x^2.2y^2 - 36x^2.y^2$$

$$(9x^2 + 2y^2)^2 - (6xy)^2 = (9x^2 + 2y^2 - 6xy)(9x^2 + 2y^2 + 6xy)$$

$$\text{c, Ta có: } x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2.x^2.2y^2 - 4x^2.y^2$$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } x^4y^4 + 4$$

$$\text{b, } 4x^4y^4 + 1$$

$$\text{c, } 4x^4 + 81$$

HD:

$$\text{a, Ta có: } x^4y^4 + 4 = (x^2y^2)^2 + 2^2 = (x^2y^2)^2 + 2^2 + 2.x^2y^2.2 - 4x^2.y^2$$

$$(x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 - 2xy + 2)(x^2y^2 + 2xy + 2)$$

$$\text{b, Ta có: } 4x^4y^4 + 1 = (2x^2y^2)^2 + 1 = (2x^2y^2)^2 + 1 + 2.2x^2y^2 - 4x^2y^2$$

$$(2x^2y^2 + 1)^2 - (2xy)^2 = (2x^2y^2 + 1 + 2xy)(2x^2y^2 + 1 - 2xy)$$

$$\text{c, Ta có: } 4x^4 + 81 = (2x^2)^2 + 9^2 = (2x^2)^2 + 9^2 + 2.2x^2.9 - 36x^2$$

$$(2x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$\text{a, } 64x^4 + y^4$$

$$\text{b, } a^4 + 64$$

$$\text{c, } a^4 + 4b^2$$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{a, Ta có: } 64x^4 + y^4 &= (8x^2)^2 + (y^2)^2 = (8x^2)^2 + (y^2)^2 + 2.8x^2.y^2 - 16x^2.y^2 \\
&= (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2 = (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy) \\
\text{b, Ta có: } a^4 + 64 &= (a^2)^2 + 8^2 = (a^2)^2 + 8^2 + 2.a^2.8 - 16a^2 \\
&= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a) \\
\text{c, Ta có: } a^4 + 4b^4 &= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2.a^2.2b^2 - 4a^2.b^2 \\
&= (a^2 - 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2b^2 + 2ab)(a^2 - 2b^2 - 2ab)
\end{aligned}$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^4 + 4$

b, $4x^8 + 1$

d, $x^4 + 4$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{a, Ta có: } x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 + 2.x^2.2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
&= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \\
\text{b, Ta có: } 4x^8 + 1 &= (2x^4)^2 + 1^2 + 2.2x^4.1 - 4x^4 = (2x^4 + 1)^2 - (2x^2)^2 \\
&= (2x^4 + 1 - 2x^2)(2x^4 + 1 + 2x^2) \\
\text{c, Ta có: } x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2^2 + 2.x^2.2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
&= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)
\end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^{64} + x^{32} + 1$

b, $a^{10} + a^5 + 1$

d, $x^5 - x^4 - 1$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{a, Ta có: } x^{64} + x^{32} + 1 &= x^{64} + 2.x^{32} + 1 - x^{32} = (x^{32} + 1)^2 - x^{32} \\
&= (x^{32} + 1 + x^{16})(x^{32} + 1 - x^{16}) \\
\text{b, Ta có: } a^{10} + a^5 + 1 &= (a^{10} - a) + (a^5 - a^2) + (a^2 + a + 1) = a(a^9 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) \\
&= a((a^3)^3 - 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = a(a^3 - 1)(a^6 + 2a^3 + 1) + a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) \\
&= (a^7 + 2a^4 + a)(a - 1)(a^2 + a + 1) + a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) \\
&= (a^2 + a + 1)[(a^7 + 2a^4 + a)(a - 1) + (a^3 - a^2) + 1] \\
\text{c, Ta có: } x^5 - x^4 - 1 &= (x^5 - x^4 + x^3) - (x^3 + 1) = x^3(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) \\
&= (x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)
\end{aligned}$$

DẠNG 3: ĐA THỨC BẬC CAO

Phương pháp:

Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1} + x^{3m+2} + 1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm xuất hiện bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & (x^7 + x^5 + x^3) + (x^4 + x^2 + 1) = x^3(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) \\ & = (x^4 + x^2 + 1)(x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \\ & = (x^2 - x + 1)^2 (x + 1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & x^{11} + x^{10} + x^9 + \dots + x^2 + x + 1 = (x^{11} + x^{10} + x^9) + (x^8 + x^7 + x^6) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = x^9(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) + \dots + (x^2 + x + 1) \\ & = (x^2 + x + 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 14x^4 + 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & x^8 + 2x^4 + 1 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 12x^4 = (x^4 + 1)^2 + 2.(x^4 + 1).2x^2 + 4x^4 - 4x^2(x^4 + 1) + 8x^4 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2)^2 - (2x^3 - 2x)^2 \\ & = (x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^3 + 2x)(x^4 + 1 + 2x^2 + 2x^3 - 2x)\end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^8 + 98x^4 + 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & (x^4 + 1)^2 + 2(x^4 + 1)^2 .8x^2 + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4 \\ & = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2\end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3 = 2x^5 - 2x^4 - x^4 + x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 3 \\ & = 2x^4(x - 1) - x^3(x - 1) + 5x^2(x - 1) - 3(x^2 - 1) \\ & = (x - 1)^2(x^2 + 3)(2x + 1)\end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

DẠNG 4: ĐA THỨC ĐA ÂN

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (z^2 + 2z + 1) = (x + y)^2 - (z + 1)^2 \\ &= (x + y + z + 1)(x + y - z - 1)\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1 &= (x^2 - 2xz + z^2) - (y^2 - 2y + 1) = (x - z)^2 - (y - 1)^2 \\ &= (x - z + y - 1)(x - z - y + 1)\end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3 &= x(x^5 - 2x^3 - x^2y^3 + 2y^3) \\ &= x[x^3(x^2 - 2) - y^3(x^2 - 2)] = x(x^3 - y^3)(x^2 - 2) = x(x - y)(x^2 - 2)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 &= x^2(x^4 - x^2 - 9x + 9) \\ &= x^2[x^2(x^2 - 1) - 9(x - 1)] = x^2[x^2(x - 1)(x + 1) - 9(x - 1)] = x^2(x - 1)(x^3 + x^2 - 9)\end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) &+ (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac) - 4b^2 \\ &= (2a^2 + 2c^2 - 2b^2 + 4ac) = 2(a^2 + 2ac + c^2 - b^2) = 2[(a + c)^2 - b^2] \\ &= 2(a + c + b)(a + c - b)\end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } ab^2 - ac^2 - bc^2 + a^2b + a^2c - b^2c &= a^2(b + c) + b^2(a - c) - c^2(a + b) \\ &= a^2(b + c) + b^2[(a + b) - (b + c)] - c^2(a + b) \\ &= a^2(b + c) + b^2(a + b) - b^2(b + c) - c^2(a + b) \\ &= (b + c)(a^2 - b^2) + (a + b)(b^2 - c^2) = (b + c)(a - b)(a + b) + (a + b)(b - c)(b + c) \\ &= (a + b)(b + c)(a - b + b - c) = (a + b)(b + c)(a - c)\end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(x + z) + 3xyz$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } &= [xy(x + y) + xyz] + [yz(y + z) + xyz] + [zx(x + z) + xyz] \\ &= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + zx(x + y + z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)\end{aligned}$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z - x)$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } &= xy(x + y) - yz(y + z) - zx[(y + z) - (x + y)] \\ &= xy(x + y) - yz(y + z) - zx(y + z) + zx(x + y)\end{aligned}$$

$$= x(x+y)(y+z) - z(y+z)(x+y) = (x+y)(y+z)(x-z)$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^4(y-z) + y^4[-(y-z) - (x-y)] + z^4(x-y) \\ &= x^4(y-z) - y^4(y-z) - y^4(x-y) + z^4(x-y) \\ &= (y-z)(x^4 - y^4) - (x-y)(y^4 - z^4) \\ &= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) - (x-y)(y-z)(y+z)(y^2 + z^2) \\ &= (x-y)(y-z)[(x+y)(x^2 + y^2) - (y+z)(y^2 + z^2)] \\ &= (x-y)(y-z)(x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 - y^3 - yz^2 - y^2z - z^3) \\ &= (x-y)(y-z)(x^3 - z^3 + y^2(x-z) + y(x^2 - z^2)) \\ &= (x-y)(y-z)[(x-z)(x^2 + xz + z^2) + y^2(x-z) + y(x-z)(x+z)] \\ &= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2 + xz + z^2 + y^2 + xy + yz) \end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 - abc \\ &= (a^2b + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + abc) + a^2c + ca^2 \\ &= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac(a+c) \\ &= b(a+b+c)(a+c) + ac(a+c) \\ &= (a+c)(ab+b^2+bc+ac) = (a+c)(b+c)(a+b) \end{aligned}$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (a+b+c)^3 - [(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3] \\ & \begin{cases} x = a+b-c \\ y = b+c-a \Rightarrow x+y+z = a+b+c \\ z = c+a-b \end{cases} \\ &= (x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3 \\ &= 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2a.2b.2c = 24abc \end{aligned}$$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & a^2(b-c) + b^2[-(b-c) - (a-b)] + c^2(a-b) \\ &= a^2(b-c) - b^2(b-c) - b^2(a-b) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)(a-b)(a+b) - (a-b)(b-c)(b+c) \\ &= (b-c)(a-b)(a+b-b-c) = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)$

HD:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & xy^3 - xz^3 + yz^3 - x^3y + x^3z - y^3z \\ &= x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^3(z-y) + y^3[-(z-y) - (y-x)] + z^3(y-x) \\
&= x^3(z-y) - y^3(z-y) - y^3(y-x) + z^3(y-x) \\
&= (z-y)(x^3 - y^3) + (y-x)(z^3 - y^3) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2) + (y-x)(z-y)(z^2 + yz + y^2) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - z^2 - yz - y^2) \\
&= (z-y)(x-y)(x^2 - z^2 + xy - yz) = (z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)
\end{aligned}$$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

HD:

Ta có: $(x^2 + y^2 + z^2)[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)] + (xy + yz + zx)^2$

Đặt: $x^2 + y^2 + z^2 = a, xy + yz + zx = b$ khi đó đa thức:

$$\begin{aligned}
&a(a+2b) + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2
\end{aligned}$$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (x+y+z)^4$$

HD:

Đặt: $x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x+y+z = c,$

Khi đó ta có:

$$2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2,$$

Lại có :

$$a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \text{ và } b - c^2 = -2(xy + yz + zx),$$

Thay vào ta được : $-4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2 = 8xyz(x+y+z)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $-c^2(a-b) + b^2(a-c) - a^2(b-c)$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } -c^2(a-b) + b^2[(a-b) + (b-c)] - a^2(b-c) \\
&= -c^2(a-b) + b^2(a-b) + b^2(b-c) - a^2(b-c) \\
&= (a-b)(b-c)(b+c) + (b-c)(b-a)(b+a) \\
&= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)z^3 + (y-z)x^3 + (z-x)y^3$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } z^3(x-y) + x^3[-(x-y) - (z-x)] + y^3(z-x) \\
&= z^3(x-y) - x^3(x-y) + y^3(z-x) - x^3(z-x) \\
&= (x-y)(z^3 - x^3) + (z-x)(y^3 - x^3) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2) + (z-x)(y-x)(y^2 + xy + x^2) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2 - y^2 - xy - x^2) = (x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)
\end{aligned}$$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $ab(a+b) - bc(b+c) - ac(c-a)$

HD :

Ta có : $ab(a+b) - bc[(a+b) + (c-a)] - ac(c-a)$

$$\begin{aligned}
&= ab(a+b) - bc(a+b) - bc(c-a) - ac(c-a) \\
&= b(a+b)(a-c) - c(c-a)(b+a) = (a+b)(b+c)(a-c)
\end{aligned}$$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y) - x^3(1-y) + y^3(1-x)$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } (x-y) - x^3[(x-y) + (1-x)] + y^3(1-x) \\
&= (x-y) - x^3(x-y) - x^3(1-x) + y^3(1-x) \\
&= (x-y)(1-x^3) - (1-x)(x^3 - y^3) \\
&= (x-y)(1-x)(1+x+x^2) - (1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2) \\
&= (x-y)(1-x)(1+x+x^2 - x^2 - xy - y^2) = (x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)
\end{aligned}$$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2(c-b) - 4c^2a^2(2a+c)$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } 4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2[(2a+c) - (2a+b)] - 4c^2a^2(2a+c) \\
&= 4a^2b^2(2a+b) + b^2c^2(2a+c) - b^2c^2(2a+b) - 4c^2a^2(2a+c) \\
&= b^2(2a+b)(4a^2 - c^2) + c^2(2a+c)(b^2 - 4a^2) \\
&= b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c) - c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b) \\
&= (2a+c)(2a+b)(2ab^2 - b^2c - 2ac^2 + bc^2) \\
&= (2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)
\end{aligned}$$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } z^3(x-y) + x^3[-(x-y) - (z-x)] + y^3(z-x) \\
&= z^3(x-y) - x^3(x-y) + y^3(z-x) - x^3(z-x) \\
&= (x-y)(z^3 - x^3) + (z-x)(y^3 - x^3) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2) + (z-x)(y-x)(y^2 + xy + x^2) \\
&= (x-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2 - y^2 - xy - x^2) = (x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)
\end{aligned}$$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } bc(ab - ac + bd - dc) - ac(ab - bc + ad - dc) + ab(ac - bc + ad - bd) \\
&= bc(ab - ac + bd - dc) - ac[(ab - ac + bd - dc) + (ac - bc + ad - bd)] + ab(ac - bc + ad - bd) \\
&= (ab - ac + bd - dc)(bc - ac) - (ac - bc + ad - bd)(ac - ab) \\
&= (a+d)(b-c)c(b-a) - (c+d)(a-b)a(c-b) \\
&= (b-c)(b-a)(ac + dc - ca - ad) = (b-c)(b-a)(c-a).d
\end{aligned}$$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$

HD :

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có : } y^3(a-x) - x^3[(a-x) + (x-y)] + a^3(x-y) \\
&= y^3(a-x) - x^3(a-x) - x^3(x-y) + a^3(x-y) \\
&= (a-x)(y^3 - x^3) - (x-y)(x^3 - a^3) \\
&= (x-a)(x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x-y)(x-a)(x^2 + xa + a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2-x^2-xa-a^2) \\
&= (x-a)(x-y)(y-a)(y+a+x)
\end{aligned}$$

Bài 24: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 2abc$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c-1)$

Bài 28 : Phân tích thành nhân tử: $x^2y + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$

HD:

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } &= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + xz + yz) \\
&= (x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}$$

DẠNG 5: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

HD :

$$\text{Ta có : } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 3)$$

$$\text{Hoặc : } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 3)$$

Giả sử ở TH1 ta có :

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = x^4 + (a+b)x^3 + (4+ab)x^2 + (3a+b)x + 3$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} a+b = -6 \\ 4+ab = 12 \\ 3a+b = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}, \text{ Vậy } x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

HD:

$$\text{Ta có: } 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 2x^4 + 2x^3 - 5x^3 - 5x^2 - 2x^2 - 2x + 8x + 8$$

$$= 2x^3(x+1) - 5x^2(x+1) - 2x(x+1) + 8(x+1)$$

$$= (x+1)(2x^3 - 5x^2 - 2x + 8) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x - 4)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$

HD:

$$\text{Ta có: } 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$$

$$= 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 + (3c - a)x + (3d - b)y - 3$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} ac = 12 \\ ad + bc = -10 \\ bd = -12 \\ 3c - a = 5 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases}, \text{ Vậy } 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

HD:

$$(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2x^3y - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$$

$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2xy - z^2) = (x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2]$$

$$= (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z)$$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2$

HD:

$$\text{Ta có: } 81x^4(z^2 - y^2) - z^2 + y^2 = 81x^4(z^2 - y^2) - (z^2 - y^2)$$

$$= (z^2 - y^2)(81x^4 - 1) = (z - y)(z + y)(9x^2 - 1)(9x^2 + 1)$$

$$= (z - y)(z + y)(3x + 1)(3x - 1)(9x^2 + 1)$$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6 \\ &= x^6 - y^6 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^3)^2 - (y^3)^2 + (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 - y^2 + 1)\end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + 1)(cx^2 + dx + 1) \\ \text{Đồng nhất hết số ta có:} \\ & 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2\end{aligned}$$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 8x + 63$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & x^4 + 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ \text{Đồng nhất hệ số ta có:} \\ & x^4 + 8x + 63 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)\end{aligned}$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & (x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x+1)^4 + [x(x+1) + 1]^2 \\ &= (x+1)^4 + x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1 \\ &= (x+1)^2[(x+1)^2 + x^2] + (2x^2 + 2x + 1) \\ &= (2x^2 + 2x + 1)[(x+1)^2 + 1] \\ &= (x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1)\end{aligned}$$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+y)^5 - x^5 - y^5$

HD:

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5 \\ &= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\ &= 5xy[(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y)] \\ &= 5xy(x+y)(x^2 + y^2 + xy)\end{aligned}$$

Bài 11: Tìm tổng hệ số của đa thức sau khi khai triển:

$$\text{a, } (4x-3)^4 \quad \text{b, } (5x-2)^5 \quad \text{c, } (x^2 + x - 2)^{100} + (x^2 + 1 - x)^{2017}$$

HD :

Tổng hệ số của đa thức chính là giá trị của đa thức tại $x = 1$

Bài 12: Tìm hệ số của hạng tử bậc cao nhất và tổng các hệ số của đa thức:

$$(3 - 6x + 4x^2)^{2005} (1 - x^2)^{2004} \cdot (1 - 2x + 3x^2 - x^3)^{2003}$$

BGH DUYỆT

TỔ CHUYÊN MÔN DUYỆT

GIÁO VIÊN