

CHUYÊN ĐỀ PHÂN SỐ

DẠNG 1: Tìm n để phân số tối giản:

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để các phân số tối giản:

$$\text{a, } A = \frac{n+7}{n-2} \quad \text{b, } B = \frac{n+13}{n-2} \quad \text{c, } C = \frac{2n+3}{4n+1} \quad \text{d, } A = \frac{3n+2}{7n+1}$$

HD:

$$\text{a, } A = \frac{n-2+9}{n-2} = 1 + \frac{9}{n-2}$$

Để A tối giản thì $\frac{9}{n-2}$ tối giản hay $n-2 \neq 3k \Rightarrow n \neq 3k+2 (k \in \mathbb{N})$

$$\text{b, } A = \frac{n-2+15}{n-2} = 1 + \frac{15}{n-2}$$

Để A tối giản thì $\frac{15}{n-2}$ tối giản hay $n-2 \neq 3k \Rightarrow n \neq 3k+2 (k \in \mathbb{N})$ và

$$n-2 \neq 5h \Rightarrow n \neq 5h+2 (h \in \mathbb{N})$$

c, Gọi $d = \text{UCLN}(2n+3; 4n+1) \Rightarrow 2(2n+3) - (4n+1) : d \Rightarrow 5 : d$,

Để C tối giản thì $d \nmid 5$ hay $2n+3 \nmid 5k \Rightarrow 2n+8 \nmid 5k \Rightarrow n \nmid 5k-4 (k \in \mathbb{N})$

d, Gọi $d = \text{UCLN}(3n+2; 7n+1) \Rightarrow 7(3n+2) - 3(7n+1) : d \Rightarrow 11 : d$,

Để A tối giản thì $d \nmid 11$ hay $3n+2 \nmid 11k \Rightarrow n \nmid 11k+3 (k \in \mathbb{N})$

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để các phân số tối giản:

$$\text{a, } A = \frac{2n+7}{5n+2} \quad \text{b, } C = \frac{8n+193}{4n+3} \quad \text{c, } A = \frac{18n+3}{21n+7} \quad \text{d, } A = \frac{21n+3}{6n+4}$$

HD:

a, Gọi $d = \text{UCLN}(2n+7; 5n+2) \Rightarrow 5(2n+7) - 2(5n+2) : d \Rightarrow 31 : d$

Để A tối giản thì $d \neq 31 \Rightarrow 2n+7 \nmid 31 \Rightarrow 2n+7+31 \nmid 31 \Rightarrow 2(n+19) \nmid 31 \Rightarrow n \nmid 31k-19 (k \in \mathbb{N})$

b, Gọi $d = \text{UCLN}(8n+193; 4n+3) \Rightarrow (8n+193) - 2(4n+3) : d \Rightarrow 187 : d$

Mà $187 = 11 \cdot 17$, Nên để C tối giản thì: $d \neq 11, d \neq 17$

TH1: $d \neq 11 \Rightarrow 4n+3 \nmid 11 \Rightarrow 4n+3-11 \nmid 11 \Rightarrow 4n-8 \nmid 11 \Rightarrow n-2 \nmid 11k \Rightarrow n \neq 11k+2 (k \in \mathbb{N})$

TH2: $d \neq 17 \Rightarrow 4n+3 \nmid 17 \Rightarrow 4n+3+17 \nmid 17 \Rightarrow 4(n+5) \nmid 17 \Rightarrow n \neq 17h-5 (h \in \mathbb{N}^*)$

c, Gọi $d = \text{UCLN}(18n+3; 21n+7) \Rightarrow 7(18n+3) - 6(21n+7) : d \Rightarrow 21 : d$

Mà $21 = 3 \cdot 7$, Nên để A tối giản thì $d \neq 3, 7$

Thấy hiển nhiên $d \neq 3, (21n+7 \nmid 3)$

Với $d \neq 7 \Rightarrow 18n+3 \nmid 7 \Rightarrow 18n+3=3(6n+1) \nmid 7 \Rightarrow 6n+1-7 \nmid 7 \Rightarrow n \neq 7k+1$

d, Gọi $d = \text{UCLN}(21n+3; 6n+4) \Rightarrow 2(21n+3) - 7(6n+4) : d \Rightarrow 22 : d$

Mà $22 = 2 \cdot 11$, Nên để A tối giản thì: $d \neq 2, d \neq 11$

TH1: $d \neq 2 \Rightarrow 21n+3 \neq 2k \Rightarrow n$ là số chẵn

TH2: $d \neq 11 \Rightarrow 6n+4 \nmid 11 \Rightarrow 6n+4-22 \nmid 11 \Rightarrow n-3 \nmid 11 \Rightarrow n \neq 11k+3$

Bài 3: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để các phân số tối giản: $B = \frac{n+3}{n-12}$

Bài 4: Tìm n để $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được

HD:

Giả sử tử và mẫu cùng chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow 22 : d \Rightarrow d=2$ hoặc $d=11$

TH1: $d=1 \Rightarrow 6n+4 : 2$ với mọi n và $21n+3 : 2$ khi n lẻ

TH2: $d=11 \Rightarrow 21n+3 : 11 \Rightarrow n-3 : 11 \Rightarrow n = 11k+3 \Rightarrow$ Với $n = 11k+3 \Rightarrow 6n+4 : 11$

Bài 5: CMR nếu phân số : $\frac{7n^2+1}{6}$ là số tự nhiên với $n \in \mathbb{N}$ thì các phân số $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{3}$ là các phân số tối giản ?

HD :

Vì phân số $\frac{7n^2+1}{6}$ là số tự nhiên với mọi n nên $7n^2+1 : 6 \Rightarrow n$ lẻ và n không chia hết cho 3

Vậy $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản

Bài 6: Cho biểu thức $A = \frac{a^3+2a^2-1}{a^3+2a^2+2a+1}$

a/ Rút gọn biểu thức

b/ CMR nếu a là số nguyên thì giá trị của biểu thức tìm được của câu a là 1 phân số tối giản

Bài 7: Tìm tất cả các số tự nhiên n để $\frac{n+3}{n-12}$ là phân số tối giản

Bài 8: Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

HD:

$$M = \frac{3n-1}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n-1 : n-1 \Rightarrow 3(n-1) + 2 : n-2 \Rightarrow 2 : n-1$$

DẠNG 2: Chứng minh các phân số sau tối giản:

Bài 1: Chứng minh các phân số sau tối giản:

a, $\frac{n+1}{2n+3}$

b, $\frac{2n+3}{3n+5}$

c, $\frac{5n+3}{3n+2}$

d, $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2-1}$

HD:

a, Gọi $d = UCLN(n+1; 2n+3) \Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ 2n+3:d \end{cases} \Rightarrow 2(n+1) - (2n+3):d \Rightarrow -1:d \Rightarrow d = \pm 1$

b, Gọi $d = UCLN(2n+3; 3n+5) \Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 3n+5:d \end{cases} \Rightarrow 3(2n+3) - 2(3n+5):d \Rightarrow -1:d \Rightarrow d = \pm 1$

c, Gọi $d = UCLN(5n+3; 3n+2) \Rightarrow \begin{cases} 5n+3:d \\ 3n+2:d \end{cases} \Rightarrow 5(3n+2) - 3(5n+3):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

d, Gọi $d = UCLN(n^3+2n; n^4+3n^2-1) \Rightarrow n(n^3+2n) - (n^4+3n^2-1):d \Rightarrow \begin{cases} n^2+1:d \\ n^3+2n:d \end{cases}$

$\Rightarrow (n^3+2n) - n(n^2+1):d \Rightarrow \begin{cases} n:d \\ n^2+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2:d \\ n^2+1:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

Bài 2: Chứng minh các phân số sau tối giản:

a, $\frac{16n+5}{6n+2}$

b, $\frac{14n+3}{21n+4}$

c, $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$

d, $\frac{2n+3}{4n+8}$

HD:

a, Gọi $d = UCLN(16n+5; 6n+2) \Rightarrow 8(6n+2) - 3(16n+5):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

b, Gọi $d = UCLN(14n+3; 21n+4) \Rightarrow \begin{cases} 14n+3:d \\ 21n+4:d \end{cases} \Rightarrow 3(14n+3) - 2(21n+4):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

c, Gọi $d = UCLN(2n+1; 2n^2+2n) \Rightarrow \begin{cases} n(2n+1):d \\ 2n^2+2n:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2+n:d \\ 2n^2+2n:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n:d \\ 2n+1:d \end{cases}$

$\Rightarrow (2n+1) - 2n:d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

d, Gọi

$d = UCLN(2n+3; 4n+8) \Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+8:d \end{cases} \Rightarrow (4n+8) - 2(2n+3):d \Rightarrow 2:d \Rightarrow d = \pm 1, d = \pm 2$

Vì $2n+3:d$ mà $2n+3$ là số lẻ nên d lẻ, vậy $d = \pm 2$ loại

Bài 3: Chứng minh các phân số sau tối giản:

a, $\frac{3n+2}{5n+3}$

b, $\frac{n}{n+1}$

c, $\frac{12n+1}{30n+2}$

HD:

a, Gọi $d = UCLN(3n+2; 5n+3) \Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases} \Rightarrow 5(3n+2) - 3(5n+3):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

b, Gọi $d = UCLN(n; n+1) \Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ n:d \end{cases} \Rightarrow (n+1) - n:d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1$

c, Gọi

$d = UCLN(12n+1; 30n+2) \Rightarrow \begin{cases} 12n+1:d \\ 30n+2:d \end{cases} \Rightarrow 5(12n+1) - 2(30n+2):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = \pm 1,$

Bài 4: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau là số nguyên:

a, $\frac{6}{n-3}$

b, $\frac{n}{n-4}$

c, $\frac{2n+7}{n+3}$

d, $\frac{12}{3n-1}$

HD:

a, Để $A = \frac{6}{n-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\} \Rightarrow n = \{\dots\}$

b, Để $B = \frac{n}{n-4} = \frac{n-4+4}{n-4} = 1 + \frac{4}{n-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-4 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

c, Để $C = \frac{2n+7}{n+3} = \frac{2n+6+1}{n+3} = 2 + \frac{1}{n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+3 \in U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow n \in \{\dots\}$

d, Để $D = \frac{12}{3n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n-1 \in U(12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$, Vì $3n-1 \not\equiv 3$

Bài 5: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau là số nguyên:

a, $\frac{3n+2}{n-1}$

b, $\frac{6n-4}{2n+3}$

c, $\frac{3n+4}{n-1}$

d, $\frac{6n-3}{3n+1}$

HD:

a, Để $A = \frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

b, Để $B = \frac{6n-4}{2n+3} = \frac{6n+9-13}{2n+3} = 3 - \frac{13}{2n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+3 \in U(13) = \{\pm 1; \pm 13\}$

c, Để $C = \frac{3n+4}{n-1} = \frac{3n-3+7}{n-1} = 3 + \frac{7}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-1 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$

d, Để $D = \frac{6n-3}{3n+1} = \frac{6n+2-5}{3n+1} = 2 - \frac{5}{3n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n+1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Bài 6: Cho phân số $A = \frac{63}{3n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$, tìm n để A là số tự nhiên

Bài 7: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau là số nguyên:

a, $\frac{n+10}{2n-8}$

b, $\frac{n+3}{2n-2}$

c, $\frac{2n+3}{7}$

d, $\frac{n^2+3}{n+2}$

HD:

a, Ta có: $2n-8 = 2(n-4) \Rightarrow n+10 : 2$ và $n+10 : n-4$ hay n là số chẵn và $n+10 : n-4$

b, Ta có: $2n-2 = 2(n-1) \Rightarrow n+3 : 2$ và $n+3 : n-1$ hay n là số lẻ và $n+3 : n-1$

c, Ta có: $2n+3 : 7 \Rightarrow 2n+10 : 7 \Rightarrow n+5 : 7 \Rightarrow n = 7k-5 (k \in \mathbb{N})$

d, Ta có: $n^2+3n-2n+3 : n+2 \Rightarrow n(n+2)-2n-4+7 : n+2 \Rightarrow n(n+2)-2(n+2)+7 : n+2 \Rightarrow 7 : n+2$

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ sao cho:

a, Có giá trị là số tự nhiên

b, Là phân số tối giản

c, Với n từ 150-170 thì A rút gọn được

HD:

a, $A = 2 + \frac{187}{4n+3}$ để A là số tự nhiên thì $4n+3 \in U(187) = \{\pm 1; \pm 11; \pm 17; \pm 187\}$

b, Để A tối giản thì $\frac{187}{4n+3}$ tối giản hay 187 không chia hết cho $4n+3$ hay $4n+3 \nmid 187$ và $4n+3 \nmid 11k$ và $4n+3 \nmid 17k$

17

$$c, \text{ Để } A \text{ rút gọn được thì } n = 11k + 2 \text{ hoặc } n = 17h - 5 \Rightarrow \begin{cases} 100 \leq 11k + 2 \leq 170 \\ 100 \leq 17h - 5 \leq 170 \end{cases}$$

Bài 9: CMR nếu $(a - 1; b+1)$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản

HD:

Gọi $d = \text{UCLN}(3a+5b+2; 5a+8b+3) \Rightarrow 5(3a+5b+2) - 3(5a+8b+3) : d \Rightarrow b+1 : d$

Và $8(3a+5b+2) - 5(5a+8b+3) : d \Rightarrow a-1 : d \Rightarrow d \in \text{UC}(a-1; b+1)$

Mà $\text{UCLN}(a-1; b+1) = 1 \Rightarrow d = 1; -1$

Bài 10: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho cả $A = \frac{2}{n-1}$ và $B = \frac{n+4}{n+1}$ là các số nguyên

Bài 11: Cho phân số $A = \frac{n+9}{n-6}$ ($n \in \mathbb{Z}, n > 6$), Tìm n để phân số có giá trị nguyên dương

Bài 12: Cho phân số $A = \frac{75}{5n-2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Tìm n để

a, Phân số A là số tự nhiên b, A rút gọn được

Bài 13: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $\frac{2n+7}{n+1}$ là số nguyên

Bài 14: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản:
 $\frac{1}{n+3}; \frac{2}{n+4}; \frac{3}{n+5}; \dots; \frac{2001}{n+2003}; \frac{2002}{n+2004}$

HD:

Các phân số đã cho có dạng: $\frac{a}{n+2+a}$ với $a=1; 2; 3; \dots; 2001; 2002$

Để $\frac{a}{n+2+a}$ tối giản thì $\text{UCLN}(n+2+a; a) = 1, \Rightarrow \text{UCLN}(n+2; a) = 1 \Rightarrow n+2$ và a là nguyên tố cùng nhau

Với mỗi số $1, 2, 3, \dots, 2002$ và $n+2$ nhỏ nhất thì $n+2=2003$ (Vì 2003 là số nguyên tố)

Bài 15: Tìm n để tích hai phân số $\frac{19}{n-1}$ và $\frac{n}{9}$ có giá trị nguyên

Bài 16: Tìm x để giá trị của biểu thức: $P = \frac{3x^2-2}{3x^2+1}$ là số nguyên

Bài 17: Cho $T = \frac{2017-x}{10-x}$, tìm các giá trị nguyên của x để: T có giá trị nguyên, T có giá trị lớn nhất

Bài 19: Cho $M = \frac{x+2}{x-1}$, biết x là số hữu tỉ âm, và M là số nguyên, Tìm x

DẠNG 3: Tìm n để phân số có GTLN hoặc GTNN

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN:

$$\text{a, } A = \frac{6n-4}{2n+3} \quad \text{b, } B = \frac{6n-1}{3n+2} \quad \text{c, } A = \frac{x-13}{x+3} \quad \text{d, } B = \frac{2x+4}{x+1}$$

HD:

a, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $2n+3 \in \mathbb{Z}$, Để $A = 3 - \frac{13}{2n+3}$ nhỏ nhất thì $\frac{13}{2n+3}$ số dương lớn nhất khi $2n+3$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 2n+3=1 \Rightarrow n=-1$

b, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $3n+2 \in \mathbb{Z}$, Để $B = 2 - \frac{5}{3n+2}$ nhỏ nhất thì $\frac{5}{3n+2}$ là số dương lớn nhất hay $3n+2$ là số nguyên dương bé nhất $\Rightarrow 3n+2=1 \Rightarrow n=-1/3$ (loại) nên $3n+2=2 \Rightarrow n=0$

c, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x+3 \in \mathbb{Z}$ Để $A = 1 - \frac{16}{x+3}$ nhỏ nhất thì $\frac{16}{x+3}$ là số dương lớn nhất hay $x+3$ là số nguyên dương nhỏ nhất hay $x+3=1 \Rightarrow x=-2$

d, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x+1 \in \mathbb{Z}$ để $B = 2 + \frac{2}{x+1}$ nhỏ nhất thì $\frac{2}{x+1}$ là số âm nhỏ nhất hay $x+1$ là số nguyên âm lớn nhất hay $x+1=-1 \Rightarrow x=-2$

Bài 2: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN:

$$\text{a, } E = \frac{10x+25}{2x+4} \quad \text{b, } A = \frac{3x+7}{x-1} \quad \text{c, } B = \frac{20a+13}{4a+3} \quad \text{d, } D = \frac{-3}{2x-5}$$

HD:

a, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $2x+4 \in \mathbb{Z}$ Để $E = 5 + \frac{5}{2x+4}$ nhỏ nhất thì $\frac{5}{2x+4}$ là số âm nhỏ nhất hay $2x+4$ là số nguyên âm lớn nhất hay $2x+4=-1 \Rightarrow x=-5/2$ (loại) khi đó $2x+4=-2 \Rightarrow x=-3$

b, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x-1 \in \mathbb{Z}$ Để $A = 3 + \frac{10}{x-1}$ nhỏ nhất thì $\frac{10}{x-1}$ là số âm nhỏ nhất hay $x-1$ là số nguyên âm lớn nhất hay $x-1=-1 \Rightarrow x=0$

c, Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $4a+3 \in \mathbb{Z}$ Để $B = 5 - \frac{2}{4a+3}$ nhỏ nhất thì $\frac{2}{4a+3}$ là số dương lớn nhất hay $4a+3$ là số nguyên dương nhỏ nhất hay $4a+3=1 \Rightarrow a=-1/2$ (loại) hay $4a+3=2 \Rightarrow a=-1/4$ (loại) hay $4a+3=3 \Rightarrow a=0$

d, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $2x-5 \in \mathbb{Z}$, Để $D = \frac{-3}{2x-5}$ nhỏ nhất thì $2x-5$ là số nguyên dương bé nhất hay $2x-5=1 \Rightarrow x=3$

Bài 3: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN:

$$\text{a, } A = \frac{4n+1}{2n+3} \quad \text{b, } B = \frac{2n-3}{n+2} \quad \text{c, } C = \frac{8-x}{x-3} \quad \text{d, } E = \frac{-3}{2n-5}$$

HD:

a, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $2n+3 \in \mathbb{Z}$, Để $A = 2 - \frac{5}{2n+3}$ nhỏ nhất thì $\frac{5}{2n+3}$ là số dương lớn nhất $\Rightarrow 2n+3$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 2n+3=1 \Rightarrow n=-1$

b, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2 \in \mathbb{Z}$, Để $B = 2 - \frac{7}{n+2}$ nhỏ nhất thì $\frac{7}{n+2}$ là số dương lớn nhất $\Rightarrow n+2$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow n+2=1 \Rightarrow n=-1$

c, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x-3 \in \mathbb{Z}$, Để $C = -1 + \frac{5}{x-5}$ nhỏ nhất thì $\frac{5}{x-5}$ là số âm nhỏ nhất

$\Rightarrow x-5$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow x-5 = -1 \Rightarrow x = 4$

d, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $2n-5 \in \mathbb{Z}$, Để $E = \frac{-3}{2n-5}$ nhỏ nhất thì $\frac{3}{2n-5}$ là số dương lớn nhất

$\Rightarrow 2n-5$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 2n-5 = 1 \Rightarrow n = 3$

Bài 4: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN: $A = \frac{x}{5x-2}$

HD:

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $5x-2 \in \mathbb{Z}$, Để $A = \frac{1}{5} \left(\frac{5x}{5x-2} \right) = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{5x-2} \right)$ nhỏ nhất thì $\frac{2}{5x-2}$ là số âm nhỏ nhất

$\Rightarrow 5x-2$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow 5x-2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ (loại) khi đó $5x-2 = -2 \Rightarrow x = 0$

Bài 5: Tìm $n, x \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTLN

a, $C = \frac{n+1}{n-2}$ b, $D = \frac{14-n}{4-n}$ c, $E = \frac{7-x}{x-5}$ d, $C = \frac{1}{4+x}$

HD:

a, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $n-2 \in \mathbb{Z}$, Để $C = 1 + \frac{3}{n-2}$ lớn nhất thì $\frac{3}{n-2}$ là số dương lớn nhất

khi đó $n-2$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow n-2 = 1 \Rightarrow n = 3$

b, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $4-n \in \mathbb{Z}$, Để $D = 1 + \frac{10}{4-n}$ lớn nhất thì $\frac{10}{4-n}$ là số dương lớn nhất

hay $4-n$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-n = 1 \Rightarrow n = 3$

c, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x-5 \in \mathbb{Z}$, Để $E = -1 + \frac{2}{x-5}$ lớn nhất thì $\frac{2}{x-5}$ là số dương lớn nhất

hay $x-5$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow x-5 = 1 \Rightarrow x = 6$

d, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $4+x \in \mathbb{Z}$, Để $C = \frac{1}{4+x}$ lớn nhất thì $\frac{1}{4+x}$ là số dương lớn nhất

hay $4+x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4+x = 1 \Rightarrow x = -3$

Bài 6: Tìm $n, x \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTLN

a, $D = \frac{5x-19}{x-9}$ b, $D = \frac{-3}{2x-5}$ c, $C = \frac{3n-1}{-2n+3}$

HD:

a, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x-9 \in \mathbb{Z}$, Để $D = 5 + \frac{26}{x-9}$ lớn nhất thì $\frac{26}{x-9}$ là số dương lớn nhất

hay $x-9$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow x-9 = 1 \Rightarrow x = 10$

b, Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $2x-5 \in \mathbb{Z}$, Để $D = \frac{-3}{2x-5}$ lớn nhất thì $\frac{3}{2x-5}$ là số âm nhỏ nhất

hay $2x-5$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow 2x-5 = -1 \Rightarrow x = 2$

c, Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $-2n+3 \in \mathbb{Z}$, Để $C = \frac{1}{2} \left(\frac{6n-2}{-2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(-3 + \frac{7}{-2n+3} \right)$ lớn nhất

hay $\frac{7}{-2n+3}$ là số dương lớn nhất, hay $-2n+3$ là số nguyên dương bé nhất $\Rightarrow -2n+3 = 1 \Rightarrow n = 1$

Bài 7: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN:

$$a, A = \frac{7n-8}{2n-3} \quad b, B = \frac{2n-3}{n-2} \quad c, D = \frac{1}{n+3} \quad d, A = \frac{8-x}{x-3}$$

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTNN:

$$a, B = \frac{x-3}{x+2} \quad b, C = \frac{14-x}{4-x} \quad c, D = \frac{1}{x+5}$$

Bài 9: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTLN

$$a, C = \frac{1}{x+5} \quad b, E = \frac{n+1}{n-5} \quad c, D = \frac{6n-3}{3n+1} \quad d, E = \frac{2n-3}{n-2}$$

Bài 10: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTLN

$$a, A = \frac{n+1}{n-5} \quad b, B = \frac{4n+1}{2n+3} \quad c, C = \frac{2n-3}{n+2} \quad d, E = \frac{6n-3}{3n+1}$$

Bài 11: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các phân số sau có GTLN

$$a, F = \frac{7n-8}{2n-3} \quad b, G = \frac{2n-3}{n-2} \quad c, I = \frac{3n-1}{-2n+3} \quad d, K = \frac{6n-3}{3n+1}$$

Bài 12: Tìm số tự nhiên n để $B = \frac{10n-3}{4n-10}$ Đạt giá trị lớn nhất, Tìm GTLN đó

HD :

$$B = \frac{5(2n-5)+22}{2(2n-5)} = \frac{5}{2} + \frac{11}{2n-5}$$

Bài 13: Tìm số nguyên n sao cho $A = \frac{1-6n}{3n-2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 14: Tìm các giá trị nguyên của x để:

$$a, A = \frac{2}{6-x} \text{ có giá trị lớn nhất} \quad b, B = \frac{8-x}{x-3} \text{ có GTNN}$$

Bài 15: Tìm GTNN của phân số : $A = \frac{ab}{a+b}$

Bài 16: Tìm GTNN của mỗi biểu thức: $A = \frac{5x-19}{x-4}$, $C = x^2 + y^2$ nếu $x+y=1$

Bài 17: Tìm các số tự nhiên a, b nhỏ nhất sao cho $a^7 = b^8$ (1)

HD:

$$\text{Từ } a^7 = b^8 \Rightarrow b = \left(\frac{a}{b}\right)^7 \text{ vì } b \in \mathbb{N} \text{ nên } a : b \Rightarrow a = b.k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{Và vì } a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow k \geq 2, \text{ thay } a = b.k \text{ vào (1) ta được } b^7.k^7 = b^8 \Rightarrow k^7 = b$$

$$\text{Mà } k \geq 2 \Rightarrow k^7 \geq 2^7 \Rightarrow b \geq 2^7 \text{ mà } b \text{ nhỏ nhất nên } b = 2^7, \text{ khi đó } k = 2 \Rightarrow a = 2^7.2 = 2^8$$

Bài 18: Cho số tự nhiên n có hai chữ số, chữ số hàng chục là x , hàng đơn vị là y , Gọi $M = \frac{n}{x+y}$

a, Tìm n để $M=2$ b, Tìm n để M nhỏ nhất

HD:

$$a, \text{ Ta có: } \frac{10x+y}{x+y} = 2 \Rightarrow y = 8x, \text{ Mà } x, y \text{ là các chữ số nên } x=1 \text{ và } y=8$$

$$\text{b, } M = \frac{x+y+9x}{x+y} = 1 + \frac{9x}{x+y} = 1 + \frac{9}{1+\frac{y}{x}} \text{ để } M \text{ nhỏ nhất thì } 1+\frac{y}{x} \text{ lớn nhất hay } y \text{ lớn nhất và } x$$

nhỏ nhất

DẠNG 4: Các bài toán liên qua đến phân số

Bài 1: Tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, biết :
$$\frac{30}{43} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}}$$

Bài 2: Cộng cả tử và mẫu của phân số $\frac{17}{21}$ với cùng 1 số nguyên rồi rút gọn ta được phân số $\frac{11}{13}$.

Hãy tìm số nguyên đó ?

Bài 3: Khi cộng cả tử và mẫu của phân số $\frac{3}{7}$ với cùng 1 số nguyên x thì được 1 phân số có giá trị bằng $\frac{1}{3}$. Tìm số nguyên x ?

Bài 4: Tìm 1 phân số tối giản, Biết rằng khi cộng cả tử và mẫu của phân số ấy với mẫu của số đó thì được 1 số mới lớn gấp hai lần phân số ban đầu ?

HD:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$, nếu chỉ cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số :

$$\frac{a}{b+b} = \frac{a}{2b} \text{ phân số này nhỏ hơn phân số } \frac{a}{b} \text{ là 2 lần,}$$

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp hai lần phân số ban đầu thì $a+b$ gấp 4 lần a

$\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a , phân số tối giản thỏa mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất khác 0 sao cho khi chia $\frac{a}{b}$ cho mỗi phân số $\frac{9}{14}$ và $\frac{21}{35}$ ta được kết quả là 1 số tự nhiên

Bài 6: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản:

$$\frac{1}{n+3}; \frac{2}{n+4}; \frac{3}{n+5}; \dots; \frac{2001}{n+2003}; \frac{2002}{n+2004}$$

HD :

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{n+2+a}, \forall a=1, 2, 3, \dots, 2002$, để $\frac{a}{n+2+a}$ tối giản thì :

$$UCLN(a; n+a+2)=1 \Rightarrow UCLN(n+2; a)=1 \Rightarrow n+2 \text{ và } a \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau}$$

Với mỗi số : $1, 2, 3, \dots, 2002$ và $n+2$ nhỏ nhất $\Rightarrow n+2=2003$ là số nguyên tố $\Rightarrow n=2001$

Bài 7: Cho 50 số tự nhiên: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$, t/ m : $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{50}} = \frac{51}{2}$, Chứng minh rằng trong

50 số đó có ít nhất hai số bằng nhau