

CHUYÊN ĐỀ
BÀI 6. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nắm vững định nghĩa nghiệm của đa thức một biến.
- + Nhận biết được số nghiệm của đa thức một biến không vượt quá số bậc của đa thức.

❖ **Kĩ năng**

- + Kiểm tra được một số có là nghiệm của đa thức một biến hay không.
- + Tìm được nghiệm của một số đa thức một biến dạng đơn giản.
- + Biết cách chứng minh đa thức vô nghiệm.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Nghiệm của đa thức một biến

Giá trị $x = a$ được gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$

nếu $P(a) = 0$

Chú ý

- Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ... hoặc không có nghiệm.
- Số nghiệm của một đa thức không vượt quá bậc của nó

Nếu $P(a) = 0$ thì $x = a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Đa thức bậc nhất chỉ có một nghiệm;

Đa thức bậc hai có không quá hai nghiệm;

Đa thức bậc ba có không quá ba nghiệm;...

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Kiểm tra nghiệm của đa thức

Phương pháp giải

Cho đa thức $F(x)$. Kiểm tra xem $x = a$ có là nghiệm của $F(x)$ hay không?

Bước 1. Thay $x = a$ vào đa thức $F(x)$ rồi tính ra kết quả.

Bước 2. Nếu kết quả $F(a) = 0$ thì $x = a$ (hoặc a) là nghiệm của đa thức $F(x)$.

Nếu kết quả $F(a) \neq 0$ thì $x = a$ (hoặc a) không là nghiệm của đa thức $F(x)$.

Ví dụ: Kiểm tra xem $x = 1; x = -2$ có phải là nghiệm của đa thức $F(x) = x^2 - 3x + 2$ không?

Hướng dẫn giải

+) Thay $x = 1$ vào $F(x)$, ta có:

$$F(1) = (1)^2 - 3 \cdot (1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

+) Thay $x = -2$ vào $F(x)$, ta có:

$$F(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12 \neq 0.$$

Vậy $x = -2$ không là nghiệm của đa thức.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Xét xem $x = 1; x = 0; x = 2$ có phải là nghiệm của đa thức $F(x) = 3x^3 - 12x$ hay không?

Hướng dẫn giải

- Thay $x = 1$ vào $F(x)$ ta có: $F(1) = 3 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 = 3 - 12 = -9 \neq 0$.

Vậy $x = 1$ không là nghiệm của đa thức.

- Thay $x = 0$ vào $F(x)$, ta có: $F(0) = 3 \cdot (0)^3 - 12 \cdot (0) = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của đa thức.

- Thay $x = 2$ vào $F(x)$, ta có: $F(2) = 3 \cdot (2)^3 - 12 \cdot (2) = 3 \cdot 8 - 12 \cdot 2 = 24 - 24 = 0$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của đa thức

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Kiểm tra xem:

a) $x = -\frac{1}{2}$ có phải là nghiệm của đa thức $P(x) = 4x + 2$ hay không?

b) Mỗi số $x = 1; x = 2$ có phải là một nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ không?

Câu 2: Trong tập hợp số $\{1; -1; 5; -5\}$, số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của đa thức:

$$F(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5?$$

Dạng 2: Tìm nghiệm của đa thức

Bài toán 1. Tìm nghiệm của đa thức

Phương pháp giải

Tìm nghiệm của đa thức $F(x)$:

Ví dụ: Tìm nghiệm của đa thức: $F(x) = 3x - 9$

Bước 1. Cho đa thức $F(x) = 0$.

$$F(x) = 0$$

$$3x - 9 = 0$$

Bước 2. Tìm nghiệm x và kết luận.

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của đa thức.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của các đa thức:

a) $f(x) = 3x + 8$.

b) $f(x) = (x - 3)(2x + 5)$.

c) $f(x) = x^2 + 2x$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = 0$ hay $3x + 8 = 0 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$.

Vậy nghiệm của đa thức là $x = -\frac{8}{3}$.

b) $f(x) = 0$ hay $(x - 3)(2x + 5) = 0$

$$\Rightarrow x - 3 = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } 2x = -5$$

Chú ý: Với đa thức

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy các nghiệm của đa thức là $x = 3$ và $x = -\frac{5}{2}$.

c) Ta có $x^2 + 2x = x(x + 2)$

$$f(x) = 0 \text{ hay } x(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy các nghiệm của đa thức là $x = 0$ và $x = -2$.

$$F(x) = g(x).h(x).$$

Nếu $F(x) = 0$ thì

$$g(x) = 0 \text{ hoặc } h(x) = 0.$$

Bài toán 2. Chứng minh đa thức không có nghiệm

Phương pháp giải

• Đa thức $P(x)$ không có nghiệm khi $P(x) \neq 0$ với mọi x .

Áp dụng tính chất để chứng minh đa thức không có nghiệm:

- $A^2 \geq 0, |A| \geq 0$.

• Khi nhân hai vế với một số âm thì đổi chiều dấu so sánh. Khi nhân hai vế với một số dương thì giữ nguyên dấu so sánh.

• Khi cộng trừ hai vế cho một số thì giữ nguyên dấu so sánh.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Chứng minh các đa thức sau không có nghiệm:

a) $f(x) = 6x^2 + 9$.

b) $f(x) = -x^4 - 1$

c) $f(x) = -|2x + 1| - 3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x^2 \geq 0$ (với mọi x)

$$\Rightarrow 6x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 9 \geq 9 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ với mọi } x.$$

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

b) Ta có $x^4 \geq 0$ với mọi x nên $-x^4 \leq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow -x^4 - 1 \leq -1 < 0$$

Ví dụ: Chứng minh đa thức sau không có nghiệm:

$$f(x) = 8x^2 + 100.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $x^2 \geq 0$ (với mọi x)

$$\Rightarrow 8x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 100 \geq 100 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ với mọi } x.$$

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

c) Ta có $|2x+1| \geq 0$ với mọi x .

$$\Rightarrow -|2x+1| \leq 0$$

$$\Rightarrow -|2x+1| - 3 \leq -3 < 0$$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tìm nghiệm của đa thức.

a) $P(x) = 15x - 5$.

b) $P(x) = 23 - x$.

Câu 2: Tìm nghiệm của các đa thức:

a) $(x-5)(2x+6)$;

b) $2x(x-2)$;

c) $-x^2 + 5x - 4$.

Câu 3: Chứng minh rằng các đa thức sau không có nghiệm.

a) $F(x) = x^2 + 1$.

b) $F(x) = x^4 + x^2 + 6$.

Câu 4: Chứng minh rằng đa thức sau luôn không có nghiệm.

a) $-x^2 - 5$.

b) $-x^4 - x^2 - 1$.

Câu 5: Tìm nghiệm của đa thức sau: $R(x) = x^2 - 3x + 5$.

Dạng 3. Tìm đa thức một biến có nghiệm cho trước

Phương pháp giải

Để tìm đa thức $F(x)$, ta căn cứ vào giả thiết:

Nếu $F(x_0) = k$ (k là số bất kỳ) thì $F(x) = k$ tại

$$x = x_0$$

Ví dụ: Biết $F(x) = ax + b$, $F(0) = 0$, $F(-1) = 2$.

Tìm $F(x)$

Hướng dẫn giải

Thay $x = 0$ vào $F(x)$, ta có: $F(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Do $F(0) = 0$ nên $b = 0$ (1)

Thay $x = -1$ vào $F(x)$ ta có:

$$F(-1) = a \cdot (-1) + b = -a + b.$$

Do $F(-1) = 2$ nên $-a + b = 2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $-a + 0 = 2 \Rightarrow a = -2$

$$\text{Vậy } F(x) = -2x.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Biết $F(x) = ax + b$, $F(-2) = 1$, $F(1) = 2$. Tìm $F(x)$.

Hướng dẫn giải

Thay $x = -2$ vào $F(x)$ ta có: $F(-2) = -2a + b$. Do đó

$$F(-2) = 1 \Rightarrow -2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 + 2a. \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào $F(x)$ ta có: $F(1) = a.1 + b = a + b$. Do đó

$$F(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $a + 1 + 2a = 2 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

$$\text{Khi đó: } b = 1 + 2a = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 2. Biết $F(x) = ax^2 + bx$, $F(-1) = 1$, $F(1) = -1$. Tìm $F(x)$.

Hướng dẫn giải

Thay $x = -1$ vào $F(x)$ ta có: $F(-1) = a.(-1)^2 + b.(-1) = a - b$.

$$\text{Khi đó } F(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b. \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào $F(x)$ ta có: $F(1) = a.(1)^2 + b.1 = a + b$.

$$\text{Khi đó } F(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $1 + b + b = -1 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$.

$$\text{Suy ra } a = b + 1 = -1 + 1 = 0.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -x.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Cho $P(x) = ax + b$, biết $P(0) = 5$; $P(2) = 0$. Tìm $P(x)$.

Câu 2. Cho đa thức: $F(x) = x^2 + mx + 2$.

a) Xác định m để $F(x)$ nhận $x = 2$ làm một nghiệm.

b) Tìm tập hợp các nghiệm của $F(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của m .

Câu 3. Cho biết $(2x - 4).F(x) = (x - 1).F(x + 1)$ với mọi x . Chứng minh rằng $F(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Kiểm tra nghiệm của đa thức

Câu 1.

a) Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào $P(x) = 4x + 2$, ta có $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -2 + 2 = 0$.

Vậy $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

b) - Thay $x = 1$ vào $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ ta có $Q(1) = (1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của đa thức $Q(x)$.

- Thay $x = 2$ vào $Q(x)$, ta có $Q(2) = (2)^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của đa thức $Q(x)$.

Câu 2.

1. Thay $x = 1$ vào $F(x)$, ta có $F(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

2. Thay $x = -1$ vào $F(x)$, ta có

$$F(-1) = (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \Rightarrow F(-1) \neq 0.$$

Vậy $x = -1$ không là nghiệm của đa thức.

3. Thay $x = 5$ vào $F(x)$, ta có $F(5) = 5^4 + 2 \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 625 + 2 \cdot 125 - 2 \cdot 25 - 30 + 5 = 800 \neq 0$.

Vậy $x = 5$ không là nghiệm của đa thức.

4. Thay $x = -5$ vào $F(x)$, ta có

$$F(-5) = (-5)^4 + 2 \cdot (-5)^3 - 2 \cdot (-5)^2 - 6 \cdot (-5) + 5 = 625 + 2 \cdot (-125) - 2 \cdot 25 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Vậy $x = -5$ không là nghiệm của đa thức.

Dạng 2. Tìm nghiệm của đa thức

Câu 1.

a) Ta có $P(x) = 0 \Rightarrow 15x - 5 = 0 \Rightarrow 15x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Vậy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức $P(x)$

b) Ta có $P(x) = 0 \Rightarrow 23 - x = 0 \Rightarrow x = 23$.

Vậy $x = 23$ là nghiệm của đa thức $P(x)$

Câu 2.

a) $(x-5)(2x+6)=0$.

$$\Rightarrow x-5=0 \text{ hoặc } 2x+6=0$$

$$x=5 \text{ hoặc } 2x=-6$$

$$x=5 \text{ hoặc } x=-3$$

Vậy $x=5$ và $x=-3$ là các nghiệm của đa thức.

b) $2x(x-2)=0$

$$\Rightarrow 2x=0 \text{ hoặc } x-2=0$$

$$x=0 \text{ hoặc } x=2$$

Vậy $x=0$ và $x=2$ là các nghiệm của đa thức.

c) $-x^2+5x-4=0$

$$-x^2+x+4x-4=0$$

$$(-x^2+x)-(4-4x)=0$$

$$-x(x-1)+4(x-1)=0$$

$$(x-1)(-x+4)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ hoặc } -x+4=0.$$

$$x=1 \text{ hoặc } x=4.$$

Vậy $x=1$ và $x=4$ là các nghiệm của đa thức

Câu 3.

a) $F(x)=x^2+1$.

Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0$

$$\Rightarrow F(x)=x^2+1 \text{ không có nghiệm}$$

b) $F(x)=x^4+x^2+6$.

Ta có $x^4 \geq 0$ và $x^2 \geq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow x^4+x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^4+x^2+6 \geq 6 > 0 \text{ với mọi } x$$

Vậy $F(x)$ không có nghiệm

Câu 4.

a) $F(x)=-x^2-5$.

Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow x^2+5 \geq 5 > 0 \Rightarrow -x^2-5 < 0$.

$$\Rightarrow F(x)=-x^2-5 \text{ không có nghiệm}$$

b) $F(x)=-x^4-x^2-1$.

Ta có $x^4 \geq 0$ và $x^2 \geq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow x^4 + x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^4 - x^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -x^4 - x^2 - 1 \leq -1 < 0 \text{ với mọi } x$$

Vậy $F(x)$ không có nghiệm

Câu 5.

$$R(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$= x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{11}{4}$$

$$= x\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{11}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{11}{4}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

Suy ra $R(x) > 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $R(x)$ không có nghiệm.

Dạng 3. Tìm đa thức một biến có nghiệm cho trước

Câu 1. Ta có

$$P(0) = 5 \Rightarrow a.0 + b = 5 \Rightarrow b = 5 \quad (1)$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow a.2 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $2a + 5 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$.

$$\text{Vậy } P(x) = -\frac{5}{2}x + 5.$$

Câu 2.

a) Để $F(x)$ nhận 2 làm nghiệm thì $F(2) = 0$

$$\Rightarrow 2^2 + m.2 + 2 = 0$$

$$6 + 2m = 0$$

$$m = -3.$$

Vậy với $m = -3$ thì $F(x)$ nhận 2 làm một nghiệm

b) Với $m = -3$ ta có $F(x) = x^2 - 3x + 2$.

$$F(x) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 - x) - (2x - 2) = 0$$

$$x(x - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = 2$$

Vậy các nghiệm của $F(x)$ là $x = 1; x = 2$.

Câu 3.

Vì $(2x - 4).F(x) = (x - 1).F(x + 1)$ với mọi x nên

$$+) \text{ Khi } x = 2 \text{ thì } 0.F(2) = 1.F(3) \Rightarrow F(3) = 0.$$

Vậy $x = 3$ là một nghiệm của $F(x)$.

$$+) \text{ Khi } x = 1 \text{ thì } -2F(1) = 0.F(2) \Rightarrow F(1) = 0.$$

Vậy $x = 1$ là một nghiệm của $F(x)$.

Do đó $F(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 3 và 1.