

BÀI 5. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa lũy thừa với số mũ tự nhiên.
- + Nắm được các quy tắc phép tính (công thức) lũy thừa.
- + Mở rộng định nghĩa với lũy thừa nguyên âm và một số tính chất được thừa nhận.

❖ Kỹ năng

- + Tính được lũy thừa với các số hữu tỉ cụ thể với số mũ tự nhiên.
- + Vận dụng công thức các phép tính về lũy thừa để thực hiện phép tính và rút gọn biểu thức.
- + Vận dụng định nghĩa và công thức lũy thừa của lũy thừa để đưa các lũy thừa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ, so sánh lũy thừa và các bài toán liên quan khác.
- + Vận dụng một số tính chất của lũy thừa để tìm số mũ hoặc cơ số của một lũy thừa.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Lũy thừa với số mũ tự nhiên

Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x , kí hiệu x^n , là tích của n thừa số x (n là số tự nhiên lớn hơn 1).

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Quy ước: } x^1 &= x \\ x^0 &= 1 \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

Các phép toán về lũy thừa

a) Tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số

Với $x \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}$ ta có:

- Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng hai số mũ.
- Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số khác 0, ta giữ nguyên cơ số và lấy số mũ của lũy thừa bị chia trừ đi số mũ của lũy thừa chia.

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \neq 0, m \geq n)$$

b) Lũy thừa của lũy thừa

Khi tính lũy thừa của lũy thừa, ta giữ nguyên cơ số và nhân hai số mũ với nhau.

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

c) Lũy thừa của một tích, một thương

Với $x, y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$ ta có:

- Lũy thừa của một tích bằng tích các lũy thừa.
- Lũy thừa của một thương bằng thương các lũy thừa.

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

Lũy thừa với số mũ nguyên âm

Lũy thừa với số mũ nguyên âm của 10 thường được dùng để viết những số rất nhỏ cho thuận tiện.

Với $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$ ta có $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Khối lượng của nguyên tử hydro là:
 $\underbrace{0,00...0166g}_{23 \text{ chữ số } 0}$ được viết gọn là
 $1,66 \cdot 10^{-24} g$.

Một số tính chất khác

a) Lũy thừa bậc chẵn luôn không âm.

$$x^{2n} \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{Q};$$

Dấu của lũy thừa bậc lẻ phụ thuộc vào dấu cơ số.

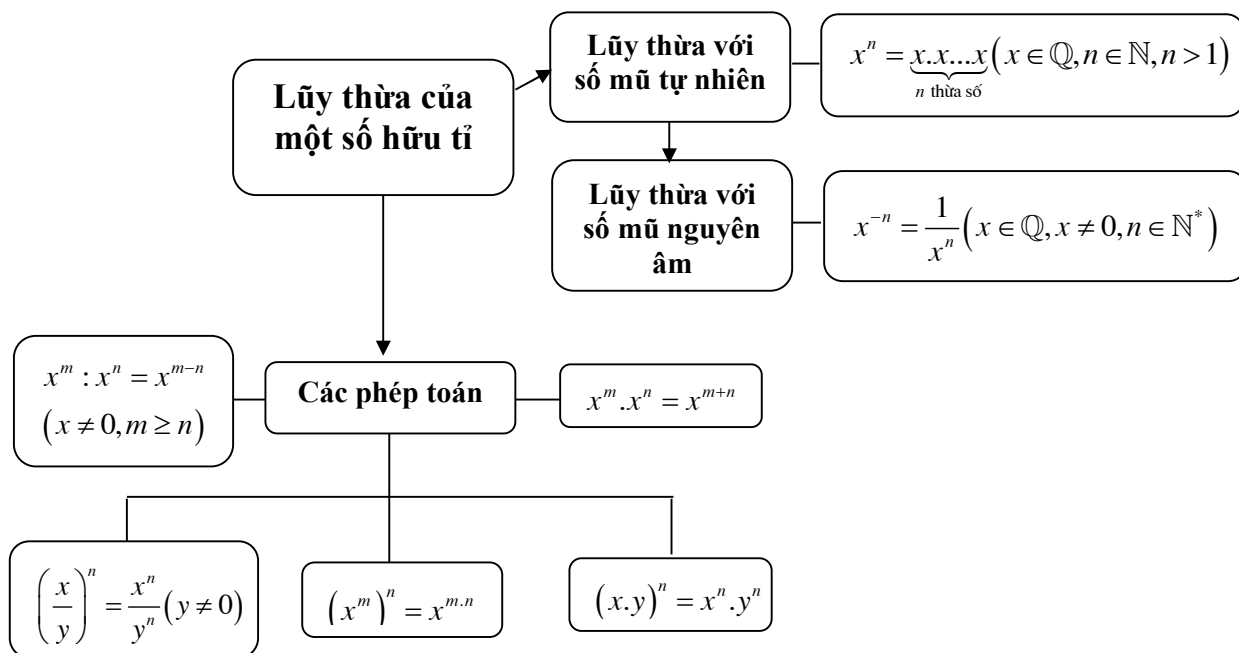
$$x^{2n+1} \text{ cùng dấu với dấu của } x.$$

b) Hai lũy thừa bằng nhau.

$$\text{Ví dụ: } (-1)^{2n} = 1; (-1)^{2n+1} = -1$$

Nếu $x^m = x^n$ thì $m = n$ (với $x \neq 0; x \neq \pm 1$).

Nếu $x^n = y^n$ thì $x = y$ nếu n lẻ, $x = \pm y$ nếu n chẵn.



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính lũy thừa của một số hữu tỉ

Phương pháp giải

Áp dụng định nghĩa lũy thừa với số mũ tự nhiên:

$$x^n = \underbrace{x.x...x}_{n \text{ thừa số}} \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

Ngoài ra, lũy thừa với số mũ nguyên âm:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$$

Ví dụ:

$$4^2 = 4.4 = 16;$$

$$0,5^3 = 0,5.0,5.0,5 = 0,125;$$

$$(-10)^3 = (-10).(-10).(-10) = -1000;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

$$(0,7)^0 = 1$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính $(-3)^4$; $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$; 1^{100} ; $(-2)^0$.

Hướng dẫn giải

$$(-3)^4 = (-3).(-3).(-3).(-3) = 81;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25};$$

$$\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = \left(-\frac{5}{3}\right).\left(-\frac{5}{3}\right).\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5.5.5}{3.3.3} = -\frac{125}{27};$$

$$1^{100} = 1;$$

$$(-2)^0 = 1.$$

Ví dụ 2. Tính $(-1)^{20}; (-1)^{21}; 3^{-2}; \left(\frac{1}{3}\right)^2; (-2)^5; (-2)^6$.

Hướng dẫn giải

$$(-1)^{20} = 1; (-1)^{21} = -1;$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$(-2)^5 = -2^5 = -32; (-2)^6 = 2^6 = 64.$$

 Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Tính $\left(\frac{2}{3}\right)^3; (-1,5)^3; (-4)^3; \left(1\frac{1}{2}\right)^4; (-1)^{15}; (-1)^{1000}; (-2)^{10}; (2)^{10}$.

Câu 2: Tính $(-3)^{-5}; \left(\frac{-1}{3}\right)^5; (0,1)^3; 10^{-3}; \left(\frac{2}{5}\right)^2; (2,5)^{-2}$

Câu 3: Tính:

a) $2^3 + (-2)^3 + 8^{-1}$.

b) $(-1)^{2n+1} + (-1)^{2n}$.

Dạng 2: Viết số dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ

 Phương pháp giải

Bước 1. Phân tích các cơ số ra thừa số nguyên tố.

Ví dụ: $8 = 2.2.2 = 2^3$;

Bước 2. Áp dụng định nghĩa và các phép tính lũy thừa để viết số dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ.

$$\frac{4}{9} = \frac{2.2}{3.3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết $\frac{81}{16}$ dưới các dạng lũy thừa của một số hữu tỉ khác nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{81}{16} = \frac{3.3.3.3}{2.2.2.2}$. Do đó: $\frac{81}{16} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ hoặc $\frac{81}{16} = \frac{(3.3)^2}{(2.2)^2} = \frac{9^2}{4^2} = \left(\frac{9}{4}\right)^2$.

Chú ý: Khi thực hiện phép nâng lên lũy thừa $(x^a)^b$ nhiều học sinh hay nhầm lẫn $(x^a)^b = x^{a+b}$.

Công thức đúng phải là $(x^a)^b = x^{a.b}$.

Ví dụ 2. Viết 0,1; 0,01 và 1000 dưới dạng lũy thừa của cơ số 10.

Hướng dẫn giải

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}; 0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; 1000 = 10.10.10 = 10^3$$

Chú ý: Lũy thừa với số mũ nguyên âm: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, x \neq 0$.

Ví dụ 3. Viết 3^9 và 2^{12} dưới dạng lũy thừa có số mũ là 3.

Hướng dẫn giải

$$3^9 = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = 27^3;$$
$$2^{12} = 2^{4 \cdot 3} = (2^4)^3 = 16^3.$$

Chú ý: Tách số mũ thành một số nhân với 3 rồi áp dụng công thức lũy thừa của lũy thừa.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ: 16; 25; 32; 81; 128; 125.

Câu 2: Viết số $\frac{256}{625}$ dưới dạng lũy thừa của các số hữu tỉ khác nhau.

Câu 3: Viết các số sau dưới dạng lũy thừa cơ số 5: $\frac{1}{25}$; 0,008; 125

Câu 4: Viết các số sau dưới dạng lũy thừa có cùng số mũ là 5: 32 ; 3^{15} ; 4^{10} .

Dạng 3: Thực hiện phép tính

Bài toán 1. Thực hiện phép tính bằng cách đưa về cùng cơ số

Phương pháp giải

Bước 1. Đưa các lũy thừa về dạng lũy thừa của các **Ví dụ:**

cơ số giống nhau (thường chọn ước chung nhỏ nhất khác 1 của các cơ số). a) $2^8 \cdot 4^2 = 2^8 \cdot (2^2)^2 = 2^8 \cdot 2^4 = 2^{12}$.

Bước 2. Áp dụng các quy tắc lũy thừa của một tích hoặc một thương để tính toán kết quả. b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $8^2 \cdot 2^4$ b) $2^{23} : 4^3$ c) $125^3 : 25$

Hướng dẫn giải

a) $8^2 \cdot 2^4 = (2^3)^2 \cdot 2^4 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$

b) $2^{23} : 4^3 = 2^{23} : (2^2)^3 = 2^{23} : 2^6 = 2^{17}$

c) $125^3 : 25 = (5^3)^3 : 5^2 = 5^9 : 5^2 = 5^7$

Chú ý: Chuyển các lũy thừa về lũy thừa dưới cơ số chung là ước chung nhỏ nhất khác 1 của các cơ số.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ:

a) $\frac{27^4 \cdot 3^2}{9^3}$ b) $\frac{125^2 \cdot 25^3}{5^4}$ c) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 64^4}{4^3}$

Hướng dẫn giải

$$a) \frac{27^4 \cdot 3^2}{9^3} = \frac{(3^3)^4 \cdot 3^2}{(3^2)^3} = \frac{3^{12} \cdot 3^2}{3^6} = \frac{3^{14}}{3^6} = 3^8$$

$$b) \frac{125^2 \cdot 25^3}{5^4} = \frac{(5^3)^2 \cdot (5^2)^3}{5^4} = \frac{5^6 \cdot 5^6}{5^4} = \frac{5^{12}}{5^4} = 5^8$$

$$c) \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 64^4}{4^3} = \frac{\frac{1^3}{8^3} \cdot (2^6)^4}{(2^2)^3} = \frac{2^{24}}{(2^3)^3 \cdot 2^6} = \frac{2^{24}}{2^{15}} = 2^9$$

Bài toán 2: Thực hiện phép tính bằng cách đưa về cùng số mũ

Phương pháp giải

Bước 1.

Phân tích tìm ra số mũ chung của các thừa số.

Ví dụ:

$$a) 8^6 \cdot 27^2 = 8^6 \cdot (3^3)^2 = 8^6 \cdot 3^6 = (8 \cdot 3)^6 = 24^6.$$

Bước 2. Biến đổi các thừa số để đưa về số mũ giống nhau rồi áp dụng công thức lũy thừa của một tích hoặc một thương.

$$b) \frac{15^8}{9^4} = \frac{15^8}{(3^2)^4} = \frac{15^8}{3^8} = \left(\frac{15}{3}\right)^8 = 5^8.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ:

$$a) 7^{12} \cdot 27^4.$$

$$b) 15^9 : 125^3.$$

$$c) (0,125)^8 \cdot 64^4.$$

Hướng dẫn giải

$$a) 7^{12} \cdot 27^4 = 7^{12} \cdot (3^3)^4 = 7^{12} \cdot 3^{12} = (7 \cdot 3)^{12} = 21^{12}$$

$$b) 15^9 : 125^3 = 15^9 : (5^3)^3 = 15^9 : 5^9 = (15 : 5)^9 = 3^9$$

$$c) (0,125)^8 \cdot 64^4 = (0,125)^8 \cdot (8^2)^4 = (0,125)^8 \cdot 8^8 = 1^8 = 1$$

Chú ý: Chuyển các lũy thừa về lũy thừa với số mũ chung là BCNN của các số mũ.

$$BCNN(12;4) = 12.$$

$$BCNN(9;3) = 9.$$

$$BCNN(8;4) = 8.$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ:

$$a) 4^9 \cdot 5^{27}$$

$$b) 3^{12} \cdot 2^{16}$$

Hướng dẫn giải

$$a) 4^9 \cdot 5^{27} = 4^9 \cdot (5^3)^9 = 4^9 \cdot 125^9 = (4 \cdot 125)^9 = 500^9$$

$$b) 3^{12} \cdot 2^{16} = (3^3)^4 \cdot (2^4)^4 = 27^4 \cdot 16^4 = (27 \cdot 16)^4 = 432^4$$

Chú ý: Chuyển các lũy thừa về lũy thừa với số mũ chung là ƯCLN của các số mũ.

$$ƯCLN(9;27) = 9.$$

$$ƯCLN(12;16) = 4.$$

Bài toán 3: Thực hiện các phép tính phức tạp

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức:

$$a) \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$b) \frac{6^6 + 6^3 \cdot 3^3 + 3^6}{-73}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = -\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{2^2} \cdot \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2} = -\frac{2^3 \cdot 3^4}{3^3 \cdot 2^2} = -6.$$

$$b) \frac{6^6 + 6^3 \cdot 3^3 + 3^6}{-73} = \frac{2^6 \cdot 3^6 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 + 3^6}{-73} = \frac{3^6 (2^6 + 2^3 + 1)}{-73} = \frac{3^6 \cdot 73}{-73} = -3^6$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$b) \left(-\frac{20}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{18}{5}\right)^2$$

Hướng dẫn giải

$$a) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{6}{15} + \frac{5}{15}\right)^2 = \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{11^2}{15^2} = \frac{121}{225}$$

$$b) \left(-\frac{20}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{18}{5}\right)^2 = -\frac{(2^2 \cdot 5)^3}{3^3} \cdot \frac{(2 \cdot 3^2)^2}{5^2} = -\frac{2^6 \cdot 5^3}{3^3} \cdot \frac{2^2 \cdot 3^4}{5^2} = -\frac{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{3^3 \cdot 5^2} = -2^8 \cdot 3 \cdot 5 = -3840$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Chọn đáp án đúng nhất trong các câu từ 1 đến 6.

Câu 1: Giá trị của biểu thức $2^5 \cdot 2^6$ bằng:

A. 2^{10}

B. 2^1

C. 2^{11}

D. 2^7

Câu 2: Giá trị của biểu thức $\frac{3^{15}}{3^6}$ bằng:

A. 3^9

B. 3^{-9}

C. 3^{10}

D. 3^{21}

Câu 3: Rút gọn biểu thức $3^8 \cdot 9^2$ dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ được kết quả là:

A. 3^{10}

B. 9^4

C. 3^{12}

D. 3^{16}

Câu 4: Biểu thức nào dưới đây là đúng (với $n \in \mathbb{N}^*$)?

A. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^{n+1}$

B. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^{n+1}}{y^n}$

C. $\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

D. $(x \cdot y)^{n-1} = x^{n-1} \cdot y^{n-1}$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $\frac{0,8^5}{0,4^6}$ bằng với giá trị nào dưới đây?

A. 20.

B. 40.

C. 60.

D. 80.

Câu 6: Viết biểu thức $6^8 \cdot 12^5$ dưới dạng $2^a \cdot 3^b$ thì giá trị của $a + b$ là:

A. 13.

B. 31.

C. 25.

D. 19.

Câu 7: Tìm giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{3^3 \cdot 3^4}{3^{10}}$

b) $\frac{(0,8)^2}{(0,4)^2}$

c) $\frac{2^3 \cdot 4^2}{8^3}$

d) $\frac{27^2 \cdot 9}{81}$

Câu 8: Tính:

a) $27^4 : 9^3$

b) $\frac{6^2 \cdot 3^3}{12^2}$

c) $\frac{12^3 \cdot 18^2}{24^2}$

d) $\frac{6^3 + 2 \cdot 6^2 + 2^3}{37}$

Câu 9: Thực hiện phép tính:

a) $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 6^2 + \frac{(0,6)^5}{(0,2)^6}$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^3$

d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{5}\right)^2$

Câu 10: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ:

a) $2^6 \cdot 3^3$

b) $6^4 \cdot 8^2$

c) 16.81

d) $25^4 \cdot 2^8$

Dạng 4: So sánh các lũy thừa

 Phương pháp giải

Để so sánh các lũy thừa, ta làm như sau:

Ví dụ: So sánh 9^6 và 8^4 .

Hướng dẫn giải

Bước 1. Đưa các lũy thừa về cùng cơ số mũ hoặc cùng cơ số.

Ta có $9^6 = (3^2)^6 = 3^{12}$; $8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$

Bước 2. So sánh cơ số khi chung số mũ hoặc so sánh số mũ khi chung cơ số.

Do $3^{12} > 2^{12}$ nên $9^6 > 8^4$

Vậy $9^6 > 8^4$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. So sánh:

a) 8^3 và 16^2 .

b) 3^{100} và 27^{30} .

Hướng dẫn giải

a) Ta có $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$; $16^2 = (2^4)^2 = 2^8$. Do $2^9 > 2^8$ nên $8^3 > 16^2$.

b) Ta có $27^{30} = (3^3)^{30} = 3^{90}$. Do $3^{100} > 3^{90}$ nên $3^{100} > 27^{30}$.

Chú ý: Với $a > 1$ và $m > n$ thì $a^m > a^n$.

Ví dụ 2. Số nào lớn hơn trong hai số: 27^{25} và 32^{15} .

Hướng dẫn giải

Ta có: $27^{25} = (3^3)^{25} = 3^{75}$; $32^{15} = (2^5)^{15} = 2^{75}$

Do $3^{75} > 2^{75}$ nên $27^{25} > 32^{15}$.

Chú ý: Nếu $a^m > b^m, m \in \mathbb{N}^*$ thì $a > b$.

 Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: So sánh các cặp số sau:

a) 2^{27} và 3^{18} .

b) 2^{150} và 3^{100} .

c) 2^{375} và 3^{250} .

Câu 2: So sánh các cặp số sau:

a) $(0,2)^{10}$ và $\left(\frac{1}{25}\right)^6$.

b) 4^{333} và 3^{444} .

c) 2^{500} và 5^{200} .

Dạng 5: Tìm số mũ, cơ số của lũy thừa**Bài toán 1. Tìm số mũ của lũy thừa** **Phương pháp giải****Bước 1.** Đưa các lũy thừa ở cả hai vế về cùng cơ số.**Bước 2.** Rút gọn hai vế về dạng $a^n = a^m$ **Bước 3.** Cho hai số mũ bằng nhau rồi giải ra kết quả.**Ví dụ:** Tìm số tự nhiên n biết $8 = 2^{n+1}$.

Ta có: $8 = 2^{n+1}$

$$\Rightarrow 2^3 = 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1=3 \Rightarrow n=2$$

 Ví dụ mẫu**Ví dụ 1.** Tìm số tự nhiên n biết:

a) $\frac{625}{5^n} = 5$

b) $\frac{(-3)^n}{27} = -9$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{625}{5^n} = 5$

$$\frac{5^4}{5^n} = 5$$

$$5^{4-n} = 5$$

$$\Rightarrow 4-n=1$$

$$n=3$$

Vậy $n=3$

b) $\frac{(-3)^n}{27} = -9$

$$(-3)^n = -3^3 \cdot 3^2$$

$$(-3)^n = -3^5$$

$$(-3)^n = (-3)^5$$

$$\Rightarrow n=5$$

Vậy $n=5$ **Ví dụ 2.** Tìm số tự nhiên n biết:

a) $3^n \cdot 2^n = 36$

b) $25^{2n} : 5^n = 125^2$

Hướng dẫn giải

a) $3^n \cdot 2^n = 36$

$$(3 \cdot 2)^n = 6^2$$

$$6^n = 6^2$$

$$\Rightarrow n=2$$

Vậy $n=2$

b) $25^{2n} : 5^n = 125^2$

$$(5^2)^{2n} : 5^n = (5^3)^2$$

$$5^{4n} : 5^n = 5^6$$

$$5^{3n} = 5^6$$

$$\Rightarrow 3n=6$$

$$n=2$$

Vậy $n=2$ **Bài toán 2. Tìm cơ số của lũy thừa** **Phương pháp giải****Bước 1.** Đưa các lũy thừa ở cả hai vế về cùng số mũ.**Ví dụ:** Tìm x biết $x^3 = 8$

Ta có $8 = 2^3$ nên $x^3 = 2^3$.

Bước 2. Cho phân cơ số bằng nhau rồi giải ra kết quả.

$$\Rightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm x biết:

a) $x^2 = 1$;

b) $x^4 = 16$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1 = 1^2 = (-1)^2$ nên $x^2 = 1^2 = (-1)^2$.

Suy ra $x = 1$ hoặc $x = -1$.

b) Ta có $16 = 2^4 = (-2)^4$ nên $x^4 = 2^4 = (-2)^4$.

Suy ra $x = 2$ hoặc $x = -2$.

Ví dụ 2. Tìm x biết:

a) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$;

b) $(2x - 1)^3 = -8$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ nên $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Vậy $x = \frac{2}{3}$.

b) Ta có $-8 = (-2)^3$ nên $(2x - 1)^3 = (-2)^3 \Rightarrow 2x - 1 = -2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy $x = -\frac{1}{2}$.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Tìm x biết:

a) $x^5 = 1$;

b) $x^5 = -1$;

c) $x^2 = 9$;

d) $4x^2 = 16$.

Câu 2: Tìm x biết:

a) $(x - 1)^2 = 4$;

b) $(2 - x)^3 = 27$.

Câu 3: Tìm số tự nhiên n biết:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$;

b) $\frac{6^n}{3^3 \cdot 4} = 2$.

Câu 4: Tìm số tự nhiên n biết:

a) $\frac{(-2)^n}{16} = -8$;

b) $16^n : 2^n = 64$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tính lũy thừa của một số hữu tỉ

Câu 1:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

$$(-1,5)^3 = -3,375;$$

$$(-4)^3 = -64;$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16};$$

$$(-1)^{15} = -1;$$

$$(-1)^{1000} = 1;$$

$$(-2)^{10} = 1024;$$

$$2^{10} = 1024.$$

Câu 2:

$$(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-243};$$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^5 = \frac{-1}{243};$$

$$(0,1)^3 = 0,001;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25};$$

$$(2,5)^{-2} = \frac{1}{2,5^2} = \frac{1}{6,25} = 0,16$$

Câu 3:

$$a) 2^3 + (-2)^3 + 8^{-1} = 8 - 8 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$b) (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n} = -1 + 1 = 0$$

Dạng 2. Viết số dưới dạng lũy thừa của một số hữu tỉ

Câu 1:

$$16 = 4^2 = 2^4;$$

$$25 = 5^2;$$

$$32 = 2^5;$$

$$81 = 3^4;$$

$$128 = 2^7;$$

$$125 = 5^3.$$

Câu 2:

$$\frac{256}{625} = \frac{2^8}{5^4} = \frac{(2^2)^4}{5^4} = \frac{4^4}{5^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

$$\frac{256}{625} = \frac{2^8}{5^4} = \frac{(2^4)^2}{(5^2)^2} = \frac{16^2}{25^2} = \left(\frac{16}{25}\right)^2$$

Câu 3:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}; 0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}; 125 = 5^3.$$

Câu 4:

$$32 = 2^5; 3^{15} = 3^{3 \cdot 5} = (3^3)^5 = 27^5; 4^{10} = 4^{2 \cdot 5} = (4^2)^5 = 16^5.$$

Dạng 3. Thực hiện phép tính

Câu 1: Chọn C.

$$2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}.$$

Câu 2: Chọn A.

$$\frac{3^{15}}{3^6} = 3^{15-6} = 3^9.$$

Câu 3: Chọn C.

$$3^8 \cdot 9^2 = 3^8 \cdot (3^2)^2 = 3^8 \cdot 3^4 = 3^{12}.$$

Câu 4: Chọn D.

Vì lũy thừa của một tích bằng tích các lũy thừa nên $(x.y)^{n-1} = x^{n-1} \cdot y^{n-1}$.

Câu 5: Chọn D.

$$\frac{0,8^5}{0,4^6} = \frac{0,8^5}{0,4^5 \cdot 0,4} = \left(\frac{0,8}{0,4}\right)^5 \cdot \frac{1}{0,4} = \frac{2^5}{0,4} = \frac{32}{0,4} = 80.$$

Câu 6: Chọn B.

$$6^8 \cdot 12^5 = (2 \cdot 3)^8 \cdot (3 \cdot 2^2)^5 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 3^5 \cdot 2^{10} = 2^{18} \cdot 3^{13} \Rightarrow a = 18; b = 13 \Rightarrow a + b = 18 + 13 = 31.$$

Câu 7:

$$a) \frac{3^3 \cdot 3^4}{3^{10}} = \frac{3^7}{3^{10}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

$$b) \frac{(0,8)^2}{(0,4)^2} = \left(\frac{0,8}{0,4}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

$$c) \frac{2^3 \cdot 4^2}{8^3} = \frac{2^3 \cdot (2^2)^2}{(2^3)^3} = \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^9} = \frac{2^7}{2^9} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$d) \frac{27^2 \cdot 9}{81} = \frac{(3^3)^2 \cdot 3^2}{3^4} = \frac{3^6 \cdot 3^2}{3^4} = 3^4 = 81.$$

Câu 8:

$$a) 27^4 : 9^3 = (3^3)^4 : (3^2)^3 = 3^{12} : 3^6 = 3^6 = 729$$

$$b) \frac{6^2 \cdot 3^3}{12^2} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3^2} = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4}$$

$$c) \frac{12^3 \cdot 18^2}{24^2} = \frac{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 3^2} = \frac{2^8 \cdot 3^7}{2^6 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3^5 = 972$$

$$d) \frac{6^3 + 2 \cdot 6^2 + 2^3}{37} = \frac{2^3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2^3}{37} = \frac{2^3 (3^3 + 3^2 + 1)}{37} = \frac{2^3 \cdot 37}{37} = 2^3$$

Câu 9:

$$a) 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$b) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 6^2 + \frac{(0,6)^5}{(0,2)^6} = \frac{1}{6^2} \cdot 6^2 + \frac{3^5 \cdot (0,2)^5}{(0,2)^6} = 1 + \frac{3^5}{0,2} = 1216.$$

$$c) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$d) \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2^2 \cdot 5}\right) \cdot \frac{2^2}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{-1}{3 \cdot 5^3} = \frac{-1}{375}.$$

Câu 10:

$$a) 2^6 \cdot 3^3 = (2^2)^3 \cdot 3^3 = 4^3 \cdot 3^3 = (4 \cdot 3)^3 = 12^3.$$

$$b) 6^4 \cdot 8^2 = 36^2 \cdot 8^2 = (36 \cdot 8)^2 = 288^2.$$

$$c) 16 \cdot 81 = 2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4.$$

$$d) 25^4 \cdot 2^8 = 25^4 \cdot (2^2)^4 = 25^4 \cdot 4^4 = (25 \cdot 4)^4 = 100^4.$$



Dạng 4. So sánh các lũy thừa

Câu 1:

$$a) 2^{27} = (2^3)^9 = 8^9; 3^{18} = (3^2)^9 = 9^9$$

Vì $8^9 < 9^9$ nên $2^{27} < 3^{18}$.

$$b) 2^{150} = (2^3)^{50} = 8^{50}; 3^{100} = (3^2)^{50} = 9^{50}$$

Do $8^{50} < 9^{50}$ nên $2^{150} < 3^{100}$

$$c) 2^{375} = (2^3)^{125} = 8^{125}; 3^{250} = (3^2)^{125} = 9^{125}$$

Do $8^{125} < 9^{125}$ nên $2^{375} < 3^{250}$.

Câu 2:

$$a) (0,2)^{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}; \left(\frac{1}{25}\right)^6 = \left(\frac{1}{5^2}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^{12}$$

Do $0 < \frac{1}{5} < 1$ và $10 < 12$ nên $\left(\frac{1}{5}\right)^{10} > \left(\frac{1}{5}\right)^{12}$ hay $(0,2)^{10} > \left(\frac{1}{25}\right)^6$,

$$b) 4^{333} = (4^3)^{111} = 64^{111}; 3^{444} = (3^4)^{111} = 81^{111}$$

Do $64^{111} < 81^{111}$ nên $4^{333} < 3^{444}$.

$$c) 2^{500} = (2^5)^{100} = 32^{100}; 5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$$

Do $32^{100} > 25^{100}$ nên $2^{500} > 5^{200}$.



Dạng 5. Tìm số mũ, cơ số của lũy thừa

Câu 1:

$$a) x^5 = 1$$

$$x^5 = 1^5$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Vậy $x = 1$.

$$c) x^2 = 9$$

$$x^2 = 3^2 = (-3)^2$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = -3$.

$$b) x^5 = -1$$

$$x^5 = (-1)^5$$

$$\Rightarrow x = -1$$

Vậy $x = -1$.

$$d) 4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{Ta có } x^2 = 2^2 = (-2)^2$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = -2$.

Câu 2:

$$a) (x-1)^2 = 4$$

Vì $4 = 2^2 = (-2)^2$ nên $x-1 = 2$ hoặc $x-1 = -2$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = -1.$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = -1$.

$$b) (2-x)^3 = 27$$

$$(2-x)^3 = 3^3$$

$$\Rightarrow 2-x = 3 \Rightarrow x = 2-3 = -1$$

Vậy $x = -1$.

Câu 3:

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow n = 4$$

Vậy $n = 4$.

b) $\frac{6^n}{3^3 \cdot 4} = 2 \Rightarrow 6^n = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 2 \Rightarrow 6^n = 3^3 \cdot 2^3 \Rightarrow 6^n = 6^3 \Rightarrow n = 3$.

Vậy $n = 3$.

Câu 4:

a) $\frac{(-2)^n}{16} = -8 \Rightarrow \frac{(-2)^n}{(-2)^4} = (-2)^3 \Rightarrow (-2)^{n-4} = (-2)^3 \Rightarrow n-4=3 \Rightarrow n=7$

Vậy $n = 7$.

b) $16^n : 2^n = 64 \Rightarrow (16 : 2)^n = 64 \Rightarrow 8^n = 8^2 \Rightarrow n = 2$

Vậy $n = 2$.