CHUYÊN ĐỀ
LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN - PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Với $A \ge 0, B \ge 0$ thì: $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ và ngược lại $\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B}$

Đặc biệt, khi $A \ge 0$, ta có: $\left(\sqrt{A}\right)^2 = \sqrt{A^2} = A$.

II. Với $A \ge 0, B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ và ngược lại $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

III. Bổ sung

- Với $A_1, A_2, ..., A_n \ge 0$ thì: $\sqrt{A_1}.\sqrt{A_2}...\sqrt{A_n} = \sqrt{A_1.A_2...A_n}$
- Với $a \ge 0; b \ge 0$ thì: $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$).
- Với $a \ge b \ge 0$ thì: $\sqrt{a-b} \ge \sqrt{a} - \sqrt{b}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ hoặc $b = 0$).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

Ví dụ minh họa 1. Tính:

a) $\sqrt{810.40}$ b) $\sqrt{24}.\sqrt{12}.\sqrt{0,5}$ c) $\sqrt{\frac{12^5}{3^5.4^3}}$ d) $\frac{\sqrt{180}:\sqrt{5}}{\sqrt{200}:\sqrt{8}}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

$\sqrt{810.40} = \sqrt{81.100.4} = \sqrt{81}.\sqrt{100}.\sqrt{4}$

$= \sqrt{9^2}.\sqrt{10^2}.\sqrt{2^2} = 9.10.2 = 180$. Vậy biểu thức có giá trị là: 180

b) Ta có: $\sqrt{24}.\sqrt{12}.\sqrt{0,5} = \sqrt{24.12.0,5} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$.

c) Ta có: $\sqrt{\frac{12^5}{3^5.4^3}} = \sqrt{\frac{(3.4)^5}{3^5.4^3}} = \sqrt{\frac{3^5.4^5}{3^5.4^3}} = \sqrt{4^2} = 4$

Vậy biểu thức có giá trị là: 4

d) Ta có $\frac{\sqrt{180}:\sqrt{5}}{\sqrt{200}:\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{180:5}}{\sqrt{200:8}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$

Vậy biểu thức có giá trị là: 1,2

Ví dụ minh họa 2.

a) So sánh: $\sqrt{16+4}$ và $\sqrt{16}+\sqrt{4}$ b) Với $a > 0$; $b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có:

$$\sqrt{16}+\sqrt{4}=4+2=6=\sqrt{36} \qquad (1)$$

$$\sqrt{16+4}=\sqrt{20}<\sqrt{36} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sqrt{16+4}<\sqrt{16}+\sqrt{4}$

b) Với $a>0$; $b>0$, giả sử $a>b \Rightarrow a^2>b^2$

Để so sánh $\sqrt{a+b}$ với $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ta so sánh $\left(\sqrt{a+b}\right)^2$ với $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

Ta có:
$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2=a+b$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}$$

Vì $2\sqrt{ab}$ nên suy ra $\left(\sqrt{a+b}\right)^2<\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

Do đó $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Ví dụ minh họa 3. Thực hiện phép tính

a) $A=\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right).\sqrt{2}$ b) $B=\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{200}-\sqrt{162}$

Hướng dẫn giải:

a) Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép nhân các căn thức bậc hai của các số không âm, ta có:

$$A=\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right).\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{18}.\sqrt{2}+\sqrt{32}.\sqrt{2}-\sqrt{50}.\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{18.2}+\sqrt{32.2}-\sqrt{50.2}$$
$$=\sqrt{36}+\sqrt{64}-\sqrt{100}$$
$$=6+8-10$$
$$=4$$

b) Sử dụng phép khai phương một tích của các số không âm, ta có:

$$B=\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{200}-\sqrt{162}$$
$$=\sqrt{25.2}-\sqrt{9.2}+\sqrt{100.2}-\sqrt{81.2}$$
$$=\sqrt{25}.\sqrt{2}-\sqrt{9}.\sqrt{2}+\sqrt{100}.\sqrt{2}-\sqrt{81}.\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}.\left(\sqrt{25}-\sqrt{9}+\sqrt{100}-\sqrt{81}\right)$$
$$=\sqrt{2}.(5-3+10-9)$$
$$3\sqrt{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tính:

a) $\sqrt{49.36.100}$ b) $\sqrt{0,45.0,3.6}$ c) $\sqrt{147.75}$ d) $\sqrt{4,9.1200.0,3}$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$ b) $\sqrt{13}.\sqrt{52}$ c) $\sqrt{12,5}.\sqrt{0,2}.\sqrt{0,1}$ d) $\sqrt{48,4}.\sqrt{5}.\sqrt{0,5}$

Bài 3: Tính:

a) $\sqrt{45}:\sqrt{80}$ b) $\sqrt{13}:\sqrt{468}$ c) $\sqrt{\frac{3}{15}}:\sqrt{\frac{36}{45}}$ d) $\sqrt{\frac{288}{169}}:\sqrt{\frac{8}{225}}$

Bài 4: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{\frac{72}{9}}:\sqrt{8}$ b) $\left(7\sqrt{48}+3\sqrt{27}-2\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{125}+\sqrt{245}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}$ d) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{16}{7}}+\sqrt{7}\right):\sqrt{7}$

Bài 5: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$ b) $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{75}\right)\sqrt{3}$

c) $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}$ d) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)$

Bài 6: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

c) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$ d) $\sqrt{15-\sqrt{216}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{49.36.100}=\sqrt{49}.\sqrt{36}.\sqrt{100}$

$=\sqrt{7^2}.\sqrt{6^2}.\sqrt{10^2}=7.6.10=420$

b) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{0,45.0,3.6}=\sqrt{0,81}=\sqrt{0,9^2}=0,9$

c) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{147.75}=\sqrt{49.3.3.25}$

$=\sqrt{49.9.25}=\sqrt{49}.\sqrt{9}.\sqrt{25}=7.3.5=105$

d) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{4,9.1200.0,3}=\sqrt{49.0,1.12.100.3.0,1}$

$=\sqrt{49.36}=\sqrt{49}.\sqrt{36}=7.6=42$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{45}=\sqrt{5.45}=\sqrt{225}=\sqrt{15^2}=15$

b) $\sqrt{13}.\sqrt{52}=\sqrt{13.52}=\sqrt{676}=26$

c) $\sqrt{12,5}.\sqrt{0,2}.\sqrt{0,1}=\sqrt{12,5.0,2.0,1}=\sqrt{0,25}=0,5$

d) $\sqrt{48,4}.\sqrt{5}.\sqrt{0,5}=\sqrt{48,4.5.0,5}=\sqrt{122}=11$

Bài 3: Tính:

a) $\sqrt{45}:\sqrt{80}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}}=\sqrt{\frac{45}{80}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$

b) $\sqrt{13}:\sqrt{468}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{468}}=\sqrt{\frac{13}{468}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}$

c) $\sqrt{\frac{3}{15}}:\sqrt{\frac{36}{45}}=\sqrt{\frac{3}{15}:\frac{36}{45}}=\sqrt{\frac{3}{15}.\frac{45}{36}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{\frac{288}{169}}:\sqrt{\frac{8}{225}}=\sqrt{\frac{288}{169}:\frac{8}{225}}=\sqrt{\frac{288}{169}.\frac{225}{8}}$

$=\sqrt{\frac{36.225}{169}}=\frac{\sqrt{36}.\sqrt{225}}{\sqrt{169}}=\frac{6.15}{13}=\frac{90}{13}$

Bài 4: Thực hiện các phép tính sau:

a) Biến đổi biểu thức: $\sqrt{\frac{72}{9}}:\sqrt{8}=\sqrt{\frac{72}{9}:8}=\sqrt{\frac{72}{9}.\frac{1}{8}}=\sqrt{1}=1$

Vậy biểu thức có giá trị là: 1

b) Biến đổi biểu thức: $\left(7\sqrt{48}+3\sqrt{27}-2\sqrt{12}\right):\sqrt{3}$

$=\left(28\sqrt{3}+9\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right):\sqrt{3}=33\sqrt{3}:\sqrt{3}=33$

Vậy biểu thức có giá trị là: 33

c) Biến đổi biểu thức: $\left(\sqrt{125}+\sqrt{245}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}=\left(5\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}=11\sqrt{5}:\sqrt{5}=11$

Vậy biểu thức có giá trị là: 11

d) Biến đổi biểu thức: $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}-\sqrt{\frac{16}{7}}+\sqrt{7}\right):\sqrt{7}=\left(\frac{\sqrt{7}}{7}-\frac{4\sqrt{7}}{7}+\sqrt{7}\right):\sqrt{7}=\frac{4\sqrt{7}}{7}:\sqrt{7}=\frac{4}{7}$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\frac{4}{7}$

Bài 5: Thực hiện các phép tính sau:

a) Ta có: $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(2-3+1\right)=0$

b) Ta có: $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{75}\right)\sqrt{3}=\sqrt{12}.\sqrt{3}-2\sqrt{75}.\sqrt{3}$

$=\sqrt{36}-2\sqrt{225}=6-2.15=-24$

c) Ta có: $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}$

$=6\sqrt{7}-10\sqrt{7}+12\sqrt{7}$

$=\left(6-10+12\right)\sqrt{7}=8\sqrt{7}$

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)$

$=\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)$

$=\sqrt{3}.4\sqrt{3}=3.4=12$

Bài 6: Thực hiện các phép tính sau:

a) Biến đổi biểu thức $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{2}}-\frac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\sqrt{2}$

b) Biến đổi biểu thức $\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$$=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]=\left[\left(1+2\sqrt{3}+3\right)-2\right]$$

$$=4+2\sqrt{3}-2=2+2\sqrt{3}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $2+2\sqrt{3}$

c) Biến đổi biểu thức $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

$$=\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2+2\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$$

$$=\left(3-\sqrt{5}\right)+2\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}+\left(3+\sqrt{5}\right)$$

$$=3-\sqrt{5}+2\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}+3+\sqrt{5}$$

$$=6+2\sqrt{9-5}=6+4=10$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 10

d) Biến đổi biểu thức $\sqrt{15-\sqrt{216}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$

$$=\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{6}\right)^2}$$

$$=\left|15-6\sqrt{6}\right|+\left|3-2\sqrt{6}\right|=\left(3-\sqrt{6}\right)+\left(2\sqrt{6}-3\right)$$

$$=\sqrt{6}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: $\sqrt{6}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức

Ví dụ minh họa 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{25a^2}-25a$ với $a<0$

b) $\sqrt{49a^2}+3a$ với $a\ge 0$

c) $\sqrt{16a^4}+6a^2$ với a bất kì

d) $3\sqrt{9a^6}-6a^3$ với a bất kì.

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức $5\sqrt{25a^2}-25a=5.|5a|-25a$ vì $a<0$ nên $5a<0$, do đó $|5a|=-5a$.

Vậy $5\sqrt{25a^2}-25a=5.(-5a)-25a=-25a-25a=-50a.$

b) Biểu thức $\sqrt{49a^2}+3a=|7a|+3a.$

Với $a\ge 0$ nên $7a\ge 0$, do đó $|7a|=7a$.

Vậy $\sqrt{49a^2}+3a=7a+3a=10a.$

c) Biểu thức $\sqrt{16a^4}+6a^2=|4a^2|+6a^2$

Với mọi a ta đều có $4a^2\ge 0$ nên $|4a^2|=4a^2$

Vậy $\sqrt{16a^4}+6a^2=4a^2+6a^2=10a^2$

d) Biểu thức $3\sqrt{9a^6}-6a^3=3.|3a^3|-6a^3$

Nếu $a\ge 0$ thì $3a^3\ge 0$ nên $|3a^2|=3a^2$, ta có: $3\sqrt{9a^6}-6a^3=3.3a^3-6a^3=3a^2$

Nếu $a<0$ thì $3a^3<0$ nên $|3a^2|=-3a^2$, ta có: $3\sqrt{9a^6}-6a^3=3.(-3a^3)-6a^3=-15a^2$.

Ví dụ minh họa 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x-\sqrt{x^2-4x+4}$ với $x\ge 2$

b) $3x+\sqrt{9+6x+x^2}$ với $x<-3$

c) $\dfrac{x+6\sqrt{x}+9}{x-9}$ với $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 9\end{cases}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$ với $x\ne -2$

Hướng dẫn giải:

a) Biểu thức $4x-\sqrt{x^2-4x+4}=4x-\sqrt{(x-2)^2}=4x-|x-2|$

Vì $x\ge 2$ nên $x-2\ge 0$, do đó $|x-2|=x-2$.

Vậy $4x-\sqrt{x^2-4x+4}=4x-(x-2)=3x+2$

b) Biểu thức $3x+\sqrt{9+6x+x^2}=3x+\sqrt{(3+x)^2}=3x+|3+x|$

Vì $x<-3$ nên $3+x<0$, do đó $|3+x|=-(3+x)$

Vậy $3x+\sqrt{9+6x+x^2}=3x-(3+x)=2x-3$

c) Biểu thức $\dfrac{x+6\sqrt{x}+9}{x-9}=\dfrac{(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

d) Biểu thức $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}=\frac{|x+2|}{x+2}$

Với $x>-2$ thì $x+2>0$ nên $|x+2|=x+2$.

Vậy $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}=1$

Với $x<-2$ thì $x+2<0$ nên $|x+2|=-(x+2)$.

Vậy $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}=\frac{-(x+2)}{x+2}=-1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$

c) $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}$ với $(x>0;y>0)$

b) $\frac{\sqrt{a}+a\sqrt{b}-\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab-1}$ với $\begin{cases}a>0;b>0\\ab\neq 1\end{cases}$

c) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

d) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}\ (x\geq 0)$

e) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{(x-1)^4}}\ (x\neq 1,y\neq 1,y>0)$

Bài 3: Rút gọn và tính:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}:\sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$ với $a=7,25;b=3,25$

b) $\sqrt{15a^2-8a\sqrt{15}+16}$ với $a=\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{10a^2-4a\sqrt{10}+4}$ với $a=\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}$

d) $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$ với $a=\sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

a) Biểu thức: $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$

Biểu thức rút gọn là: $\sqrt{\frac{3}{7}}$

b) Biểu thức: $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) Biểu thức: $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

$=\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}$

$=\frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}$

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

d) Biểu thức: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

$=1+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}$

Biểu thức rút gọn là: $1+\sqrt{2}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức:

a) Với $\left(x>0;y>0\right)$ thì $\frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Biểu thức rút gọn là: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

b) Với $\begin{cases}a>0;b>0\\ab\neq 1\end{cases}$ thì $\frac{\sqrt{a}+a\sqrt{b}-\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab-1}$

$=\frac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{ab}\right)-\sqrt{b}\left(1+\sqrt{ab}\right)}{\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)}$

$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-1}$

Biểu thức rút gọn là: $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-1}$

c) Biểu thức $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$

$=\dfrac{\sqrt{x}^3+\sqrt{y}^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(x-2\sqrt{xy}+y\right)$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(x-2\sqrt{xy}+y\right)$

$=x-\sqrt{xy}+y-x+2\sqrt{xy}-y$

$=\sqrt{xy}$

Biểu thức rút gọn là: $\sqrt{xy}$

d) Với $\left(x\ge 0\right)$ nên $\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{x}-1\right|}{\left|\sqrt{x}+1\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{x}-1\right|}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức rút gọn là: $\dfrac{\left|\sqrt{x}-1\right|}{\sqrt{x}+1}$

e) Biểu thức $\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{\left(y-2\sqrt{y}+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}}\left(x\ne 1,y\ne 1,y>0\right)$

$\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left|\sqrt{y}-1\right|}{\left(x-1\right)^2}$

Nếu $0<\mathrm{y}<1\Rightarrow\sqrt{\mathrm{y}}-1<0\Rightarrow\left|\sqrt{\mathrm{y}}-1\right|=-\left(\sqrt{\mathrm{y}}-1\right),$

Thì $\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left|\sqrt{y}-1\right|}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{-\left(\sqrt{y}-1\right)}{\left(x-1\right)^2}=-\dfrac{1}{x-1}$

Nếu $\mathrm{y}>1\Rightarrow\sqrt{\mathrm{y}}-1>0\Rightarrow\left|\sqrt{\mathrm{y}}-1\right|=\left(\sqrt{\mathrm{y}}-1\right),$

Thì $\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left|\sqrt{y}-1\right|}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}.\dfrac{\left(\sqrt{y}-1\right)}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{1}{x-1}$

Bài 3: Rút gọn và tính:

a) Ta có $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

$=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}}.\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{b}-1}}=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{b}+1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)}}=\sqrt{\dfrac{a-1}{b-1}}$

Với $a=7,25;b=3,25$ thay vào ta được $\sqrt{\frac{7,25-1}{6,25-1}}=\sqrt{\frac{6,25}{2,25}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$

Vậy biểu thức có giá trị $\frac{5}{3}$.

b) Ta có $\sqrt{15a^2-8a\sqrt{15}+16}=\sqrt{\left(\sqrt{15}a-4\right)^2}=\left|\sqrt{15}a-4\right|$

Với $a=\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}$ thay vào ta được

$$\left|\sqrt{15}a-4\right|=\left|\sqrt{15}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)-4\right|$$

$$=\left|\sqrt{15}.\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{15}.\sqrt{\frac{5}{3}}-4\right|=\left|3+5-4\right|=4$$

c) Ta có $\sqrt{10a^2-4a\sqrt{10}+4}=\sqrt{\left(a\sqrt{10}-2\right)^2}=\left|a\sqrt{10}-2\right|$

Với $a=\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}$ thay vào ta được $\left|a\sqrt{10}-2\right|=\left|\left(\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{10}-2\right|$

$$=\left|\sqrt{\frac{2}{5}}.\sqrt{10}+\sqrt{\frac{5}{2}}.\sqrt{10}-2\right|=\left|2+5-2\right|=5$$

d) Ta có $\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2-1}}$

$$=\sqrt{\left(a^2-1\right)+2\sqrt{a^2-1}+1}-\sqrt{\left(a^2-1\right)-2\sqrt{a^2-1}+1}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a^2-1}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{a^2-1}-1\right)^2}$$

$$=\left|\sqrt{a^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{a^2-1}-1\right|$$

Với $a=\sqrt{5}$ thay vào ta được $\left|\sqrt{a^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{a^2-1}-1\right|$

$$=\left|\sqrt{\sqrt{5}^2-1}+1\right|-\left|\sqrt{\sqrt{5}^2-1}-1\right|=\left|\sqrt{5-1}+1\right|-\left|\sqrt{5-1}-1\right|$$

$$=\left|\sqrt{4}+1\right|-\left|\sqrt{4}-1\right|=\left|2+1\right|-\left|2-1\right|$$

$$=3-1=2$$

Dạng 3. Giải phương trình

Ví dụ minh họa 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5}=5$ b) $\sqrt{x-7}+3=0$ c) $\sqrt{10(x-3)}=\sqrt{20}$ d) $\sqrt{3x^2}=x+2$

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện xác định là $2x+5\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{5}{2}$

Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$2x+5=25\Leftrightarrow 2x=20\Leftrightarrow x=10$ thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=10$.

b) Điều kiện xác định là $x\ge 7$.

$\sqrt{x-7}+3=0\Leftrightarrow \sqrt{x-7}=-3$

với mọi $x\ge 7$ ta có $\sqrt{x-7}\ge 0$ và $-3<0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện xác định là $x\ge 3$

Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$10(x-3)=20\Leftrightarrow x-3=2\Leftrightarrow x=5$.

Vậy $x=5$ là nghiệm của phương trình.

d) Với $x+2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -2$ thì

$\sqrt{3x^2}=x+2\Leftrightarrow 3x^2=(x+2)^2\Leftrightarrow 3x^2=x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow 2(x^2-2x-2)=0\Leftrightarrow x^2-2x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-3=0\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})=0$

$\begin{cases}x-1+\sqrt{3}=0\\ x-1-\sqrt{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1-\sqrt{3};x=1+\sqrt{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x+1}=\sqrt{10}$ b) $\sqrt{16-7x}=11$

c) $\sqrt{x^2+6x+9}=3x-6$ d) $\sqrt{x^2-4x+4}-2x+5=0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) Điều kiện có nghĩa: $3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{3}$

Khi đó, phương trình $\sqrt{3x+1}=\sqrt{10}\Leftrightarrow 3x+1=10\Leftrightarrow x=3$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=3$.

b) $\sqrt{16-7x}=11$

Điều kiện có nghĩa: $\sqrt{16-7x}\ge 0\Leftrightarrow x\le \frac{16}{7}$

Khi đó, phương trình $\sqrt{16-7x}=11\Leftrightarrow 16-7x=11\Leftrightarrow x=\frac{5}{7}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{5}{7}$

c) $\sqrt{x^2+6x+9}=3x-6\Leftrightarrow\sqrt{(x+3)^2}=3x-6\Leftrightarrow|x+3|=3x-6$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-6\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x+3=3x-6\\ x+3=-3x+6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{9}{2}(TM)\\ x=\frac{3}{4}(L)\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{9}{2}$

d) $\sqrt{x^2-4x+4}-2x+5=0\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2}=2x-5\Leftrightarrow|x-2|=2x-5$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x+3=2x-5\\ x+3=-2x+5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{5}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=8(TM)\\ x=\frac{2}{3}(L)\end{array}\right.\end{cases}$$

Dạng 4:Nâng cao phát triển tư duy

Ví dụ minh họa 1: Rút gọn các biểu thức sau: $P=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ đề bài, ta thấy có hai biểu thức trong căn có dạng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ và $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ nên ta dùng tính chất giao hoán và thực hiện phép tính.

Trình bày lời giải

$$P=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{4+\sqrt{8}}$$

$$P=\sqrt{4-2-\sqrt{2}}.\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2}$$

$$P=\sqrt{4-2}.\sqrt{2}=2.$$

Ví dụ minh họa 2:: Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}$

Giải

Tìm cách giải. Với những bài toán có nhiều căn "*chồng chất*", ta có thể giảm bớt số căn, bằng cách đưa các căn ở phía trong về dạng $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ sau đó dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$ và giải như các ví dụ trên.

Trình bày lời giải

Ta có $A=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\sqrt{4}.$$

Suy ra $A=2$.

Ví dụ minh họa 3: Rút gọn: $C=\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}$

Giải

Tìm cách giải.

Ví dụ này không thể biến đổi để đưa về dạng $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2}$.

Do vậy để rút gọn biểu thức dạng $C=\sqrt{x+\sqrt{y}}\pm\sqrt{x-\sqrt{y}}$ ta thường tính C^2 sau đó nhận xét dấu của C, từ đó tìm được C.

Trình bày lời giải

Xét $C^2=2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}+2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}-2\sqrt{\left(2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}\right)\left(2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}\right)}$

$C^2=4-2\sqrt{4-2\sqrt{5}+2}=4-2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=4-2\left(\sqrt{5}-1\right)$

$C^2=6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$. Vì $C<0$ nên $C=1-\sqrt{5}$.

Ví dụ minh họa 4: Cho $x,\ y$ thỏa mãn $\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{y-1}+y^2$. Chứng minh rằng: $x=y$.

Giải

Tìm cách giải. Nhận xét giả thiết *x*, *y* có vai trò như nhau. Phân tích từ kết luận để có $x=y$, chúng ta cần phân tích giả thiết xuất hiện nhân tử $(x-y)$.

Dễ thấy x^2-y^2 có chứa nhân tử $(x-y)$, do vậy phần còn lại để xuất hiện nhân tử $(x-y)$ chúng ta vận dụng $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$ từ đó suy ra: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Lưu ý rằng mẫu số khác 0. Từ đó chúng ra có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Từ đề bài ta có điều kiện: $x\ge 1;\ y\ge 1$.

- *Trường hợp 1:* Xét $x=1;y=1\Rightarrow x=y$.

- *Trường hợp 2:* Xét ít nhất *x* hoặc *y* khác 1. Ta có:

$x^2-y^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+\dfrac{(x-1)-(y-1)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+y+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right)=0$

Vì $x+y+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}>0\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$.

Ví dụ minh họa 5: Cho $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị biểu thức $\sqrt{16a^8-51a}$

Giải

Tìm cách giải. Để thay giá trị trực tiếp $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ vào biểu thức thì khai triển dài dòng, dễ dẫn đến sai lầm. Do vậy chúng ta nên tính từ từ, bằng cách tính $a^2;a^4$ và a^8 bằng hằng đẳng thức. Bài toán sẽ đơn giản và không dễ mắc sai lầm.

Trình bày lời giải

$2a=1-\sqrt{2}\Rightarrow 2a-1=-\sqrt{2}\Rightarrow 4a^2-4a+1=2$

$\Rightarrow 4a^2=1+4a=1+2\left(1-\sqrt{2}\right)=3-2\sqrt{2}\Rightarrow 16a^4=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$

$\Rightarrow 256a^8=289-408\sqrt{2}+288=577-408\sqrt{2}\Rightarrow 16a^8=\dfrac{577-408\sqrt{2}}{16}$

Xét $16a^8-51a=\dfrac{577-408\sqrt{2}}{16}-\dfrac{51\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$

$=\dfrac{577-408\sqrt{2}-408+408\sqrt{2}}{16}=\dfrac{169}{16}$

Vậy $\sqrt{16a^8-51a}=\sqrt{\dfrac{169}{16}}=\dfrac{13}{4}$.

Ví dụ minh họa 6: Tính giá trị $S=\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}$ với $a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\ b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

Giải

Tìm cách giải. Nếu thay giá trị của a và b vào biểu thức và biến đổi thì bài toán sẽ phức tạp, có thể dẫn đến sai lầm. Bài toán có dạng đối xứng cơ bản, ta có thể tính tổng và tích của a và b, sau đó dùng các hằng đẳng thức để tính dần dần.

Trình bày lời giải

Từ đề bài suy ra: $a+b=\sqrt{6};\ ab=1$

Ta có: $a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab=4$;

$a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)=6\sqrt{6}-3.1.\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

Xét $\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)=a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5=a^5+b^5+a^2b^2\left(a+b\right)$

$4.3\sqrt{6}=a^5+b^5+1\sqrt{6}$

Từ đó tính được: $a^5+b^5=11\sqrt{6}$

Xét $\left(a^2+b^2\right)\left(a^5+b^5\right)=a^7+a^2b^5+a^5b^2+b^7=a^7+b^7+a^2b^2\left(a^3+b^3\right)$

Suy ra: $4.11\sqrt{6}=a^7+b^7+1.3\sqrt{6}\Rightarrow a^7+b^7=41\sqrt{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}=b^7+a^7=41\sqrt{6}$.

Ví dụ minh họa 7: Cho $b\ge 0;\ a\ge\sqrt{b}$. Chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Giải

Đặt vế phải là: $B=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Ta có $B\geq 0$

Xét $B^2=\frac{a+2\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2.\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)}{2}.\frac{\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$

$B^2=a\pm 2.\sqrt{\frac{a^2-\left(a^2-b\right)}{4}};\ B^2=a\pm\sqrt{b}$

Vì $B\geq 0$ nên $B=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$.

Vế phải bằng vế trái. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ minh họa 8: Cho các số thực $x;\ y$ thỏa mãn: $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(y-1+\sqrt{y^2-2y+3}\right)=2$

Chứng minh rằng: $x^3+y^3+3xy=1$

Giải

Đặt $y-1=z$ từ giả thiết ta có: $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2\ \ (*)$

Nhân hai vế với $\sqrt{x^2+2}-x$ ta được

$\left(x^2+2-x^2\right)\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

$\Rightarrow 2\left(z+\sqrt{z^2+2}\right)=2\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\Leftrightarrow z+\sqrt{z^2+2}=\sqrt{x^2+2}-x\ \ (1)$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{z^2+2}-z$ ta được

$\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\left(z^2+2-z^2\right)=2\left(\sqrt{z^2+2}-z\right)$

$\Rightarrow\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)2=2\left(\sqrt{z^2+2}-z\right)$

$\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2}=\sqrt{z^2+2}-z\ \ (2)$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, rút gọn ta được:

$$x+z=0\Rightarrow x+y-1=0\Rightarrow x+y=1$$

Xét $x^3+y^3+3xy=(x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy=x^2-xy+y^2+3xy$

$=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=1$

Vậy $x^3+y^3+3xy=1$. Điều phải chứng minh.

BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng các số sau là số tự nhiên.

a) $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}.(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$; b) $B=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2-\sqrt{3}})$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

a) $P=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{20}-3\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; b) $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức:

a) $C=\dfrac{\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$;

b) $D=\dfrac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Bài 4. Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị $B=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2018$.

Bài 5. Tính giá trị biểu thức $A=x^2+2002x-2003$ với

$$x=\frac{(27+10\sqrt{2})\sqrt{27-10\sqrt{2}}-(27-10\sqrt{2})\sqrt{27+10\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{\sqrt{13}+3}):\sqrt{\sqrt{13}+2}}$$

Bài 6. a) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn:

$$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

b) Chứng minh rằng số $\sqrt{2009^2+2009^2.2010^2+2010^2}$ là số nguyên dương.

Bài 7. Cho $b\ge 0;\ a\ge\sqrt{b}$. Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}$

Bài 8. Cho $x_1=\sqrt{3+\sqrt{5}}$ và $x_2=\sqrt{3-\sqrt{5}}$. Hãy tính: $A=x_1.x_2;\ B=x_1^2+x_2^2;\ C=x_1^3+x_2^3;\ D=x_1^5+x_2^5$

Bài 9. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}}+\sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Bài 10. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn: $\sqrt{x-1}-y\sqrt{y}=\sqrt{y-1}-x\sqrt{x}$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=x^2+3xy-2y^2-8y+12$.

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau:

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$;

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}$.

Bài 12. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{3}+1}$ b) $T=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Bài 13. Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Bài 14. Biết $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ .Tính giá trị biểu thức: $S=x^4-16x^2$.

Bài 15. Cho $\left(x-2019+\sqrt{(x-2019)^2+2020}\right)\left(y-2019+\sqrt{(y-2019)^2+2020}\right)=2020$ .Tính giá trị của $A=x+y$.

Bài 16. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$

Bài 17. Cho biểu thức $P=\left(a^{2013}-8a^{2012}+11a^{2011}\right)+\left(b^{2013}-8b^{2012}+11b^{2011}\right)$. Tính giá trị biểu thức của P với $a=4+\sqrt{5}$ và $b=4-\sqrt{5}$.

Bài 18. Cho $\dfrac{-3}{2}\le x\le\dfrac{3}{2};x\ne 0$ và $\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}=a$ .Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{9-4x^2}}}{x}$ theo a.

Bài 19. Tính giá trị của biểu thức: $A=2x^3+3x^2-4x+2$ Với $x=\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1$.

Bài 20. ***Đố.*** Căn bậc hai của 64 có thể viết dưới dạng như sau: $\sqrt{64}=6+\sqrt{4}$. Hỏi có tồn tại hay không các số có hai chữ số có thể viết căn bậc hai của chúng dưới dạng như trên.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Chứng minh rằng các số sau là số tự nhiên.

a) $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$;

b) $B=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{6-2\sqrt{5}}.\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}.\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-1\right).\left(\sqrt{5}-1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)$

$=\left(5-2\sqrt{5}+1\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=2\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)=2.(9-5)=8$.

Vậy A là số tự nhiên.

b) Ta có $B=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$

$\Rightarrow B=\left(\sqrt{3}+1\right).\left(\sqrt{3}-1\right)=3-1=2$.

Vậy B là số tự nhiên.

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

a) $P=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{20}-3\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

b) $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{10}\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{6}\left(3+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$P=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right).\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+2$.

b) Ta có $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức:

a) $C=\dfrac{\sqrt{6+2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-\sqrt{6-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}$;

b) $D=\dfrac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $C=\dfrac{\sqrt{1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}-\sqrt{1+2+3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}$

$C=\dfrac{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$

$C=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2.$

b) $D=\dfrac{\sqrt{3.\left(3-2\sqrt{2}\right)}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}=-1.$

Bài 4. Cho $x+\sqrt{3}=2$. Tính giá trị $B=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2018$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x-2=-\sqrt{3}$, bình phương hai vế ta được:

$$x^2-4x+4=3\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\ \ (*)$$

Ta có $B=x^3\left(x^2-4x+1\right)+x^2\left(x^2-4x+1\right)+5\left(x^2-4x+1\right)+2013$

Kết hợp với (*) ta có: $B=2013$.

Bài 5. Tính giá trị biểu thức $A=x^2+2002x-2003$ với

$$x=\frac{\left(27+10\sqrt{2}\right)\sqrt{27-10\sqrt{2}}-\left(27-10\sqrt{2}\right)\sqrt{27+10\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{\sqrt{13}+3}\right):\sqrt{\sqrt{13}+2}}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}=5+\sqrt{2}$.

$\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}=5-\sqrt{2}$

Tử số là: $\left(5+\sqrt{2}\right)^2.\left(5-\sqrt{2}\right)-\left(5-\sqrt{2}\right)^2.\left(5+\sqrt{2}\right)$

$=\left(5+\sqrt{2}\right).23-\left(5-\sqrt{2}\right).23=46\sqrt{2}$.

Xét $a=\sqrt{\sqrt{13}-3}+\sqrt{\sqrt{13}+3};\ a>0$.

$\Rightarrow a^2=\sqrt{13}-3+\sqrt{13}+3+2\sqrt{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{13}+3\right)}$

$\Rightarrow a^2=2\sqrt{13}+4\Leftrightarrow a=\sqrt{2\left(\sqrt{13}+2\right)}$.

Do đó $x=\dfrac{46\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(\sqrt{13}+2\right)}:\sqrt{\sqrt{13}+2}}=46$.

Vậy giá trị biểu thức $A=46^2+2002.46-2003=92205$.

Bài 6. a) Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn:

$$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

b) Chứng minh rằng số $\sqrt{2009^2+2009^2.2010^2+2010^2}$ là số nguyên dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $a+\sqrt{1-a^2}=b+\sqrt{1-b^2}$.

Bình phương hai vế không âm, ta được:

$a^2+2a\sqrt{1-a^2}+1-a^2=b^2+2b\sqrt{1-b^2}+1-b^2\Leftrightarrow a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$.

Bình phương hai vế không âm, ta được:

$a^2\left(1-a^2\right)=b^2\left(1-b^2\right)\Leftrightarrow a^4-b^4-a^2+b^2=0$

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right)=0$

Do a, b là hai số dương khác nhau nên $a^2-b^2\neq 0$

$\Rightarrow a^2+b^2-1=0$ hay $a^2+b^2=1$. Điều phải chứng minh.

b) Đặt $a=2009$, ta có:

$\sqrt{a^2+a^2\left(a+1\right)^2+\left(a+1\right)^2}=\sqrt{a^2+a^4+2a^3+a^2+\left(a+1\right)^2}$

$=\sqrt{a^4+2a^2\left(a+1\right)+\left(a+1\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+a+1\right)^2}$

$=\left(a^2+a+1\right)=2009^2+2009+1$ là số nguyên dương.

Bài 7. Cho $b\geq 0;\ a\geq\sqrt{b}$. Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $A=\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$ ta có $A\geq 0$.

Xét $A^2 = a+\sqrt{b} \pm 2.\sqrt{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)} + a-\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow A^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2-b} \Leftrightarrow A^2 = 2.\left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)$

Vì $A \ge 0$ nên $A = \sqrt{2\left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 8. Cho $x_1 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$ và $x_2 = \sqrt{3-\sqrt{5}}$. Hãy tính: $A = x_1.x_2$; $B = x_1^2 + x_2^2$; $C = x_1^3 + x_2^3$; $D = x_1^5 + x_2^5$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A = x_1.x_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{9-5} = 2$.

Ta có: $B = x_1^2 + x_2^2 = 3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5} = 6$.

Ta có: $C = \left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)(6-2)$

$\Rightarrow C = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right).4$

$\Rightarrow C = \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right).2.\sqrt{2}$

$\Rightarrow C = \left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1\right).2\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$.

Xét $\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^3+x_2^3\right) = x_1^5 + x_1^2x_2^3 + x_1^3x_2^3 + x_2^5$

$\Rightarrow 6.4\sqrt{10} = x_1^5 + x_2^5 + x_1^2x_2^2\left(x_1+x_2\right)$

$\Rightarrow 24\sqrt{10} = x_1^5 + x_2^5 + 4\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow 24\sqrt{10} = x_1^5 + x_2^5 + \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right).2.\sqrt{2}$

$\Rightarrow 24\sqrt{10} = x_1^5 + x_2^5 + \left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1\right).2\sqrt{2}$

$\Rightarrow D = x_1^5 + x_2^5 = 20\sqrt{10}$.

Bài 9. Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $B = \sqrt{7+\sqrt{5}} + \sqrt{7-\sqrt{5}}$

$\Rightarrow B^2 = 7+\sqrt{5}+2\sqrt{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}+7-\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow B^2 = 14 + 2\sqrt{49-5} = 14 + 4\sqrt{11}$

Mà $B > 0$ nên $B = \sqrt{14 + 4\sqrt{11}}$.

Từ đó suy ra: $A = \dfrac{\sqrt{14+4\sqrt{11}}}{\sqrt{7+2\sqrt{11}}} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \Rightarrow A = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2}-1\right) = 1$.

Bài 10. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn: $\sqrt{x-1} - y\sqrt{y} = \sqrt{y-1} - x\sqrt{x}$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x^2 + 3xy - 2y^2 - 8y + 12$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Tập xác định $x \ge 1; y \ge 1$.

• Trường hợp 1: Xét $x = y = 1$ suy ra:

$$P = 1^2 + 3.1.1 - 2.1^2 - 8.1 + 12 = 6 \ (1)$$

• Trường hợp 2: Xét ít nhất $x \ne 1$ hoặc $y \ne 1$. Ta có:

$x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y\right) + \dfrac{x-1-y+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y\right) + \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).\left(x + \sqrt{xy} + y + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right) = 0$

Mà $x \ge 1; y \ge 1$ nên $x + \sqrt{xy} + y + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} > 0$

Suy ra $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = y$

Ta có: $S = x^2 + 3x^2 - 2x^2 - 8x + 12$

$\Leftrightarrow S = 2x^2 - 8x + 12 \Leftrightarrow S = 2.\left(x-2\right)^2 + 4 \ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi $x = 2 \ (2)$.

Từ (1) và (2) vậy giá trị nhỏ nhất của S là 4 khi $x = 2$.

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau:

$P = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$;

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\left(2+\sqrt{3}\right)}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\left(5-\sqrt{3}\right)}}$

$P=\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+25-5\sqrt{3}}}=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{9}=3$.

b) $Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{16-8\sqrt{2}+2}}}}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}}}}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}}}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{6+2\left(\sqrt{3}-1\right)}$

$Q=\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=2$.

Bài 12. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{3}+1}$ b) $T=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{12+4\sqrt{3}+1}}}}{\sqrt{3}+1}$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{6+2\left(\sqrt{3}-1\right)}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}$$

$$A=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=1.$$

b) Ta có $T=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$T=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3-\sqrt{3}-1}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$T=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=1.$$

Bài 13. Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}}.\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$A=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right).\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$A=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Bài 14. Biết $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ .Tính giá trị biểu thức: $S=x^4-16x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{3\left(4-2-\sqrt{3}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2=8-2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 8-x^2=2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right).$

Bình phương hai vế ta được:

$64-16x^2+x^4=4\left(2+\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}+2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(6-3\sqrt{3}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow 64-16x^2+x^4=32$

$\Rightarrow x^4-16x^2=32$.

Bài 15. Cho $\left(x-2019+\sqrt{(x-2019)^2+2020}\right)\left(y-2019+\sqrt{(y-2019)^2+2020}\right)=2020$ .Tính giá trị của $A=x+y$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $x-2019=a;\ y-2019=b$.

Đẳng thức đã cho có dạng: $\left(a+\sqrt{a^2+2020}\right).\left(b+\sqrt{b^2+2020}\right)=2020\ \ (*)$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{a^2+2020}-a$, ta được:

$\left(a^2+2020-a^2\right)\left(b+\sqrt{b^2+2020}\right)=\left(\sqrt{a^2+2020}-a\right).2020$

$\Leftrightarrow b+\sqrt{b^2+2020}=\sqrt{a^2+2020}-a\ \ (1)$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với $\sqrt{b^2+2020}-b$, ta được:

$$\left(a+\sqrt{a^2+2020}\right)\left(b^2+2020-b^2\right)=2020.\left(\sqrt{b^2+2020}-b\right)$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+2020}=\sqrt{b^2+2020}-b\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế và rút gọn ta được:

$a+b=0\Rightarrow x-2019+y-2019=0$

Vậy $A=x+y=4038$.

Bài 16. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A=\dfrac{(x+2)(x+3)+x\sqrt{(3-x)(3+x)}}{x(3-x)+(x+2)\sqrt{(3-x)(3+x)}}:2\sqrt{\dfrac{3-x+2x}{3-x}}$

Điều kiện xác định $-3<x<3$,

$$A=\frac{\sqrt{x+3}\left((x+2)\sqrt{x+3}+x\sqrt{3-x}\right)}{\sqrt{3-x}\left(x\sqrt{3-x}+(x+2)\sqrt{x+3}\right)}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$A=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}=\frac{1}{2}.$$

Bài 17. Cho biểu thức $P=\left(a^{2013}-8a^{2012}+11a^{2011}\right)+\left(b^{2013}-8b^{2012}+11b^{2011}\right)$. Tính giá trị biểu thức của P với $a=4+\sqrt{5}$ và $b=4-\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $a-4=\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$a^2-8a+16=5\Rightarrow a^2-8a+11=0$

Xét $b-4=-\sqrt{5}$ bình phương hai vế ta được:

$b^2-8b+16=5\Rightarrow b^2-8b+11=0$.

$P=a^{2011}\left(a^2-8a+11\right)+b^{2011}\left(b^2-8b+11\right)$

$\Rightarrow P=0$.

Bài 18. Cho $\dfrac{-3}{2}\le x\le\dfrac{3}{2};x\ne 0$ và $\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}=a$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{9-4x^2}}}{x}$ theo a.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $P=\dfrac{\sqrt{3+2x+2\sqrt{(3+2x)(3-2x)}+3-2x}}{x}$

$$P=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}\right)^2}}{x}=\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-2x}}{x}$$

$$P=\frac{(3+2x)-(3-2x)}{x\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}\right)}=\frac{4x}{x\left(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}\right)}=\frac{4}{a}.$$

Bài 19. Tính giá trị của biểu thức: $A=2x^3+3x^2-4x+2$ Với

$$x=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $a=\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}, a>0$.

Xét $a^2=4+2\sqrt{4-\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}=4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=3+\sqrt{5}$

$\Rightarrow a=\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-1=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}-1$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

$x=\sqrt{2}-1\Rightarrow x+1=\sqrt{2}\Rightarrow (x+1)^2=2\Rightarrow x^2+2x-1=0$.

Ta có: $A=2x^3+3x^2-4x+2$

$A=2x\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)+1=1$.

Bài 20. ***Đố.*** Căn bậc hai của 64 có thể viết dưới dạng như sau: $\sqrt{64}=6+\sqrt{4}$. Hỏi có tồn tại hay không các số có hai chữ số có thể viết căn bậc hai của chúng dưới dạng như trên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt số đó là $\overline{ab}$. Theo đầu bài, ta có:

$\sqrt{\overline{ab}} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow \overline{ab} = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$

$\Leftrightarrow 10a = a^2 + 2a\sqrt{b} \Leftrightarrow a + 2\sqrt{b} = 10$

$\Rightarrow a$ chẵn. Đặt $a = 2K\left(K \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow 2K + 2\sqrt{b} = 10 \Rightarrow K + \sqrt{b} = 5$.

Do $b \le 9$ nên $b = 0;1;4;9$.

- Nếu $b = 0 \Rightarrow K = 5 \Rightarrow a = 10$ (loại)
- Nếu $b = 1 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow$ Số đó là 81
- Nếu $b = 4 \Rightarrow K = 3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow$ Số đó là 64 (đã cho)
- Nếu $b = 9 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$ Số đó là 49.

II.TRẮC NGHIỆM RÈN PHẢN XẠ CÁC DẠNG

Câu 1. Cho a là số không âm b, c là số dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. **B.** $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. **C.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$. **D.** Cả A, B đều đúng.

Câu 2. Cho a,b là hai số không âm. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{ab} = a\sqrt{b}$. **B.** $\sqrt{a}\sqrt{b} = b\sqrt{a}$. **C.** $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. **D.** $\sqrt{ab} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sqrt{2018 + 2019} = \sqrt{2018} + \sqrt{2019}$. **B.** $\sqrt{2018.2019} = \frac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2019}}$.

C. $\sqrt{2018}.\sqrt{2019} = \sqrt{2018.2019}$. **D.** $2018.2019 = \frac{\sqrt{2019}}{\sqrt{2018}}$.

Câu 4. Kết quả của phép tính $\sqrt{1,25}.\sqrt{51,2}$ là?

A. 32. **B.** 16. **C.** 64. **D.** 8.

Câu 5. Kết quả của phép tính $\sqrt{2,5}.\sqrt{14,4}$ là?

A. 36. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 9.

Câu 6. Kết quả của phép tính $\sqrt{\frac{81}{169}}$ là?

A. $\frac{9}{13}$. **B.** $\frac{9}{169}$. **C.** $\frac{3}{13}$. **D.** $\frac{13}{9}$.

Câu 7. Kết quả của phép tính $\sqrt{\frac{1,21}{576}}$ là?

A. $\frac{1,1}{240}$. **B.** $\frac{11}{24}$. **C.** $\frac{11}{240}$. **D.** $\frac{240}{11}$.

Câu 8. Kết quả phép tính: $\sqrt{\frac{625}{-729}}$

A. $\frac{25}{27}$. **B.** $-\frac{25}{27}$. **C.** $-\frac{5}{7}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 9. Kết quả của phép tính $\sqrt{\frac{-999}{111}}$ là?

A. 9. **B.** -9. **C.** -3. **D.** Không tồn tại.

Câu 10. Phép tính $\sqrt{12^2.(-11)^2}$ có kết quả là?

A. -33. **B.** -132. **C.** 132. **D.** Không tồn tại.

Câu 11. Rút gọn biểu thức $\sqrt{a^4.(2a-1)^2}$ với $a \geq \frac{1}{2}$ ta được

A. $a(2a-1)$. **B.** $(1-2a)a^2$. **C.** $(2a-1)a^2$. **D.** $(1-2a)a$.

Câu 12. Rút gọn biểu thức $\sqrt{a^2.(2a-3)^2}$ với $0 \leq a < \frac{3}{2}$ ta được

A. $a(2a-3)$. **B.** $(3-2a)a^2$. **C.** $(2a-3)a^2$. **D.** $(3-2a)a$.

Câu 13. Rút gọn biểu thức $\sqrt{0,9.0,1.(3-x)^2}$ với $x > 3$

A. $0,3(x-3)$. **B.** $0,3(3-x)$. **C.** $0,9(x-3)$. **D.** $0,1(x-3)$.

Câu 14. Giá trị biểu thức $\sqrt{x-2}.\sqrt{x+2}$ khi $x = \sqrt{29}$ là

A. 29. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 25.

Câu 15. Rút gọn biểu thức $D = \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{b}{a^2+2ab+b^2}}$ với $a,b>0$ ta được

A. $a+b$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{b}}{2}$. **D.** $2\sqrt{b}$.

Câu 16. Rút gọn biểu thức $E = \frac{a-b}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $0<a<b$ ta được

A. $\frac{\sqrt{a}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{b}}{2}$. **C.** $\frac{-\sqrt{b}}{2}$. **D.** $a\sqrt{b}$.

Câu 17. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$ với $b \neq 0$ ta được

A. $\frac{a^2}{b}$. **B.** $\frac{a}{b}$. **C.** $-\frac{a^2}{b}$. **D.** $\frac{a^2}{|b|}$.

Câu 18. Rút gọn biểu thức $\frac{3m}{8n}\sqrt{\frac{64n^2}{9m^2}}$ với $m > 0; n < 0$ ta được:

A. -1. **B.** 1. **C.** $\frac{m}{n}$. **D.** $-\frac{m}{n}$.

Câu 19. Rút gọn biểu thức $\frac{a^2}{11}.\sqrt{\frac{121}{a^4b^{10}}}$ với $ab \neq 0$ ta được:

A. $\frac{1}{|b^5|}$. **B.** $\frac{1}{b^5}$. **C.** b^5. **D.** $\frac{11}{b^5}$.

Câu 20. Rút gọn biểu thức $4a^4b^2.\sqrt{\frac{9}{a^8b^4}}$ với $ab \neq 0$ ta được.

A. $\frac{a^2}{b}$. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 36.

Câu 21. Rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$ với $x > 0$ ta được

A. x. **B.** $-x$. **C.** $\sqrt{x}$. **D.** $\sqrt{x+2}$.

Câu 22. Rút gọn biểu thức $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\2\sqrt{x}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\frac{\sqrt{9x^5+33x^4}}{\sqrt{3x+11}}$

với $x > 0$ ta được:

A. x^2. **B.** x^4. **C.** $\sqrt{3}x^2$. **D.** $\sqrt{3x+11}$.

Câu 23. Với $x > 0$ cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{2x^2+12x}}{\sqrt{x+6}}$ và $B = 2x$. Có bao nhiêu giá trị của x để $A = B$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 24. Với $x>5$ cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x^2-5x}}{\sqrt{x-5}}$ Và $B=x$.

Có bao nhiêu giá trị của x để $A=B$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 25. Với $x,y\ge 0;3x\ne y$, rút gọn biểu thức $B=\dfrac{3x-\sqrt{3xy}}{3x-y}$ ta được:

A. $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}-\sqrt{y}}$. **B.** $\dfrac{1}{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}+\sqrt{y}}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Câu 26. Với $x,y\ge 0;x\ne y,$ rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x-\sqrt{xy}}{x-y}$ ta được

A. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Câu 27. Giá trị của biểu thức $\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}$ là:

A. $\sqrt{7}$. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{7}$.

Câu 28. Với $a\ge 0,b\ge 0,a\ne b,$ rút gọn biểu thức $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{a-b}$ ta

được.

A. $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{ab}-2b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **C.** $\dfrac{2b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{ab}-2a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Câu 29. Khẳng định nào sau đây đúng về nghiệm x_0 của phương trình

$\dfrac{9x-7}{\sqrt{7x+5}}=\sqrt{7x+5}$.

A. $x_0<5$. **B.** $x_0>8$. **C.** $x_0>9$. **D.** $5<x_0<7$.

Câu 30. Nghiệm của phương trình $\sqrt{4x-20}+\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4$ là

A. $x=-9$. **B.** $x=5$. **C.** $x=8$. **D.** $x=9$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án D.

Với số a không âm và số b dương , ta có $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{ab}{c}}$ với $c>0$

Câu 2. Đáp án C.

Với hai số a,b không âm, ta có $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$

Câu 3. Đáp án C.

Ta có $\sqrt{2018}.\sqrt{2019}=\sqrt{2018.2019}$

Câu 4. Đáp án D.

$\sqrt{1,25}.\sqrt{51,2}=\sqrt{1,25.51,2}=\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$.

Câu 5. Đáp án B.

$\sqrt{2,5}.\sqrt{14,4}=\sqrt{2,5.14,4}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$.

Câu 6. Đáp án A.

$\sqrt{\frac{81}{169}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{13^2}}=\frac{9}{13}$.

Câu 7. Đáp án C.

$\sqrt{\frac{1,21}{576}}=\frac{\sqrt{1,21}}{\sqrt{576}}=\frac{\sqrt{1,1^2}}{\sqrt{24^2}}=\frac{1,1}{24}=\frac{11}{240}$.

Câu 8. Đáp án D.

Vì $-729<0;625>0\Rightarrow\frac{625}{-729}<0$ nên không tồn tại căn bậc hai của số âm.

Câu 9. Đáp án D.

Vì $-999<0;111>0\Rightarrow\frac{-999}{111}<0$ nên không tồn tại căn bậc hai của số âm

Câu 10. Đáp án C.

$\sqrt{12^2.(-11)^2}=\sqrt{12^2}.\sqrt{(-11)^2}=|12|.|-11|=12.11=132$.

Câu 11. Đáp án C.

$\sqrt{a^4.(2a-1)^2}=\sqrt{a^4}.\sqrt{(2a-1)^2}=\sqrt{\left(a^2\right)^2}.\sqrt{(2a-1)^2}=|a^2|.|2a-1|=a^2.(2a-1)$

(vì $a\ge\frac{1}{2}\Rightarrow 2a-1\ge 0\Rightarrow\left|2a-1\right|=2a-1$)

Câu 12. Đáp án D.

$\sqrt{a^2.(2a-3)^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{(2a-3)^2} = |\,a\,|\,.\,|\,2a-3\,| = a.(3-2a)$

(vì $0 \le a < \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2a-3 \le 0 \Rightarrow |2a-3| = 3-2a$)

Câu 13. Đáp án A.

Ta có $\sqrt{0,9.0,1.(3-x)^2} = \sqrt{0,09.(3-x)^2} = \sqrt{0,09}.\sqrt{(3-x)^2} = 0,3.\,|\,3-x\,|$

Mà $x > 3 \Rightarrow 3-x < 0 \Leftrightarrow |\,3-x\,| = x-3$

Nên $\sqrt{0,9.0,1.(3-x)^2} = 0,3.(x-3)$.

Câu 14. Đáp án B.

Ta có $\sqrt{x-2}.\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-4}$ với $x \ge 2$

Thay $x = \sqrt{29}$ (TMĐK)

Vào biểu thức ta được $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\left(\sqrt{29}\right)^2-4} = \sqrt{25} = 5$.

Câu 15. Đáp án B.

$$D = \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}\sqrt{\frac{b}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)^2}}$$

$$= \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{|\,a+b\,|} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{a+b} = 2$$

(vì $a,b>0 \Rightarrow a+b>0 \Rightarrow |a+b| = a+b$)

Câu 16. Đáp án C.

$$E = \frac{a-b}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{2\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{2\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{|\,a-b\,|} = \frac{(a-b)\sqrt{b}}{2\,|\,a-b\,|}$$

Mà $0 < a < b$ nên $a-b<0 \Rightarrow |\,a-b\,| = -(a-b)$. Khi đó

$$E = \frac{(a-b)\sqrt{b}}{-2(a-b)} = \frac{-\sqrt{b}}{2}$$

Câu 17. Đáp án D

Ta có $\sqrt{\dfrac{a^4}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{\sqrt{\left(a^2\right)^2}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{|a^2|}{|b|} = \dfrac{a^2}{|b|}$

Câu 18. Đáp án A.

Ta có: $\frac{3m}{8n}\sqrt{\frac{64n^2}{9m^2}}=\frac{3m}{8n}\sqrt{\frac{(8n)^2}{(3m)^2}}=\frac{3m}{8n}.\frac{|8n|}{|3m|}=\frac{3m.(-8n)}{8n.3m}=-1$

(vì $m>0;n<0$).

Câu 19. Đáp án A.

$$\frac{a^2}{11}.\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{a^4}.\sqrt{b^{10}}}=\frac{a^2}{11}.\frac{\sqrt{11^2}}{\sqrt{\left(a^2\right)^2}.\sqrt{\left(b^5\right)^2}}=\frac{a^2}{11}.\frac{11}{a^2.\left|b^5\right|}=\frac{1}{\left|b^5\right|}$$

Câu 20. Đáp án B.

$$4a^4b^2.\sqrt{\frac{9}{a^8b^4}}=4a^4b^2.\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{a^8b^4}}=4a^4b^2.\frac{3}{\sqrt{a^8}.\sqrt{b^4}}=\frac{12a^4b^2}{\sqrt{\left(a^4\right)^2}.\sqrt{\left(b^2\right)^2}}=\frac{12a^4b^2}{a^4.b^2}=12$$

Câu 21. Đáp án A.

Ta có $\frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2(x+2)}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x^2}=|x|$ mà $x>0$ nên $|x|=x$

Từ đó $\frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}=x$.

Câu 22. Đáp án C.

Ta có $\frac{\sqrt{9x^5+33x^4}}{\sqrt{3x+11}}=\frac{\sqrt{3x^4(3x+11)}}{\sqrt{3x+11}}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{x^4}.\sqrt{3x+11}}{\sqrt{3x+11}}=\sqrt{3}.\sqrt{\left(x^2\right)^2}=\sqrt{3}.\left|x^2\right|=\sqrt{3}x^2$

Câu 23. Đáp án A.

$$A=\frac{\sqrt{2x^2+12x}}{\sqrt{x+6}}=\frac{\sqrt{x(x+6)}}{\sqrt{x+6}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+6}}=\sqrt{x}$$

Để $A=B\Leftrightarrow\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x\left(2\sqrt{x}-1\right)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\2\sqrt{x}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(L)\\x=\frac{1}{4}(N)\end{array}\right.$$

Câu 24. Đáp án C.

$$A=\frac{\sqrt{x^2-5x}}{\sqrt{x-5}}=\frac{\sqrt{x(x-5)}}{\sqrt{x-5}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}=\sqrt{x}$$

Để $A=B$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=x \Leftrightarrow x-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$ (loại vì $x>5$)

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 25. Đáp án C.

$B=\dfrac{3x-\sqrt{3xy}}{3x-y}=\dfrac{\left(\sqrt{3x}\right)^2-\sqrt{3x}.\sqrt{y}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3x}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}+\sqrt{y}}$ **Câu 26. Đáp án D.**

$A=\dfrac{x-\sqrt{xy}}{x-y}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}.\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

Câu 27. Đáp án B.

$\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{1008}-\sqrt{448}=\sqrt{36.7}-\sqrt{100.7}+\sqrt{144.7}-\sqrt{64.7}$

$=6\sqrt{7}-10\sqrt{7}+12\sqrt{7}-8\sqrt{7}=\sqrt{7}(6-10+12-8)=0$

Câu 28. Đáp án B.

Ta có $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{a-b}$

$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left[\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}.\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$

$=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{a-b-a+\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}-2b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Câu 29. Đáp án D.

Điều kiện $7x+5>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{5}{7}$

Với điều kiện trên ta có $\dfrac{9x-7}{\sqrt{7x+5}}=\sqrt{7x+5} \Rightarrow 9x-7=\left(\sqrt{7x+5}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9x-7=7x+5 \Leftrightarrow 2x=12 \Leftrightarrow x=6$ (TM)

Vậy nghiệm của phương trình là $x_0=6 \Leftrightarrow 5<x_0<7$.

Câu 30. Đáp án D.

Điều kiện $\begin{cases}4x-20\geq 0\\ x-5\geq 0\\ 9x-45\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-5\geq 0\\ 4(x-5)\geq 0\\ 9(x-5)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq 5$

Với điều kiện trên ta có

$\sqrt{4x-20}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4.\Leftrightarrow\sqrt{4(x-5)}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}\sqrt{9(x-5)}=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{4}.\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}.\sqrt{9}.\sqrt{x-5}=4\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\frac{1}{3}.3.\sqrt{x-5}$
$=4\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5}=4\Leftrightarrow\sqrt{x-5}=2$
$\Leftrightarrow x-5=2^2\Leftrightarrow x-5=4\Leftrightarrow x=9(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=9$.

---------- **Toán Học Sơ Đồ** ----------