

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

3. Bổ sung

- a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

- c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

II. BÀI TẬP MINH HỌA

A. BÀI MINH HỌA

Phương pháp giải: Để giải các bài toán liên quan đến cung và dây, cần nắm chắc định nghĩa góc ở tâm và kết hợp với sự liên hệ giữa cung và dây.

1. Chứng minh hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau.
2. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB . Chứng minh $AC = BE$.

3. Giả sử AB là một dây cung của đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy các điểm C và D sao cho $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. Chứng minh AB và CD song song.

4. Giả sử ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D. Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Chứng minh:

a) BC song song với DE ;

b) Tứ giác $BCED$ là hình thang cân.

5. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO . Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \widehat{CD}$ và $BC < BD$. Các dây AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F. Hãy so sánh:

a) Độ dài các đoạn thẳng OE và OF ;

b) Số đo các cung $\widehat{AE}$ và $\widehat{AF}$ của đường tròn (O').

6. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho số $\widehat{BM} < 90^\circ$. Vẽ dây MD song song với AB . Dây DN cắt AB tại E. Từ R vẽ một đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng DM tại C. Chứng minh:

a) $AB \perp DN$;

b) BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

7. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA và CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{CM} = \widehat{BN}$. Chứng minh:

a) $AM = CN$;

b) $MN = CA = CB$.

8. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên cung nửa đường tròn lấy hai điểm C, D. Kẻ CH vuông góc với AB tại H, CH cắt (O) tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD tại K, AK cắt (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

a) Hai cung nhỏ $\widehat{CF}$ và $\widehat{DB}$ bằng nhau;

b) Hai cung nhỏ $\widehat{BF}$ và $\widehat{DE}$ bằng nhau;

c) $DE = BF$.

HƯỚNG DẪN

1. Trường hợp 1: Tâm O ở giữa của hai dây.

Kẻ $OM \perp AB$ suy ra $OM \perp CD$ tại N.

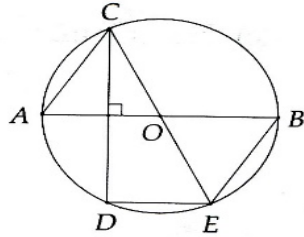
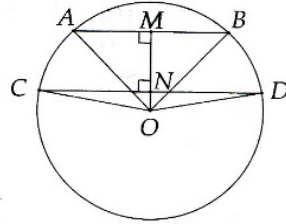
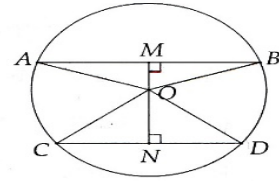
Ta chứng minh được $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (1)

Tương tự $\widehat{CON} = \widehat{DON}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

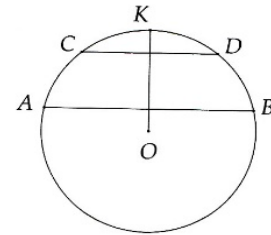
Trường hợp 2: Tâm O nằm ngoài khoảng hai dây. Kẻ $OM \perp AB$ suy ra $OM \perp CD$ tại N.

Tương tự $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$



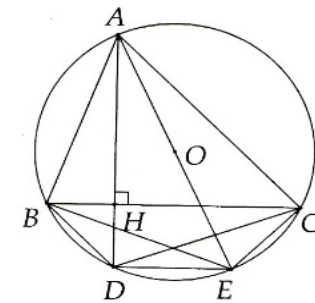
2. Ta chứng minh $\widehat{AD} = \widehat{BE}$, mà $CD \perp AB$ nên . Từ đó suy ra .

* Cách khác: Chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{BOE} \Rightarrow \text{ĐPCM}$.



3. Ta lấy K là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$

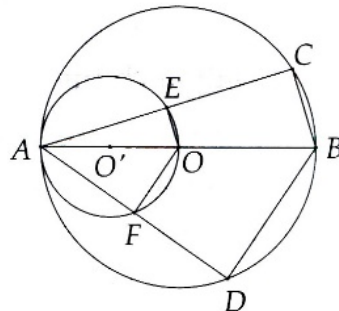
Ta chứng minh được $\widehat{CK} = \widehat{KD}$. Từ đó ta có $OK \perp CD$, $OK \perp AB \Rightarrow CD \parallel AB$.



4.

a) HS tự chứng minh.

b) Ta chứng minh được $\widehat{BE} = \widehat{CD}$ từ đó suy ra $BE = CD$ và tứ giác BDEC là hình thang cân.



5.

a) Ta chứng minh E là trung điểm của AC nên $OE = \frac{1}{2}BC$.

Tương tự ta có $OF = \frac{1}{2}DB$.

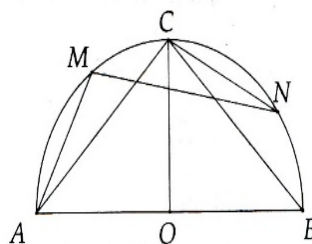
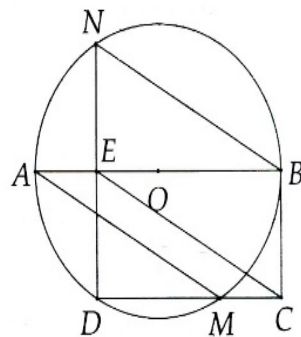
Mà $BC < BD$ ta suy ra $OE < OF$

b) Chứng minh được $AE^2 = AO^2 - OE^2$ và $AF^2 = AO^2 - OF^2$

Từ đó ta có

$$AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF$$

$$\Rightarrow sđ \widehat{AE} > sđ \widehat{AF}$$



6.

a) HS tự chứng minh

b) Ta chứng minh được tứ giác BCEN là hình bình hành $\Rightarrow BC = EN$.

Do BCDE là hình bình hành

$$\Rightarrow BC = ED; DE = EN$$

$$\Rightarrow BA \perp EN \Rightarrow BA \perp BC$$

$\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến

7.

a) HS tự chứng minh.

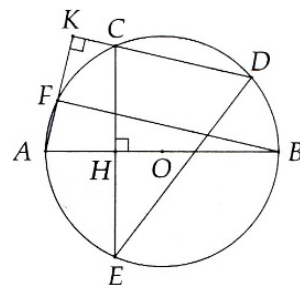
b) Chứng minh được $\widehat{MN} = \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow \text{ĐPCM}$.

8. a) HS tự chứng minh.

b) Từ giả thiết ta có AB là đường trung trực của

$$CE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE}$$

c) Sử dụng mối liên hệ cung và dây.



B.BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB

Chứng minh: $\widehat{AC} = \widehat{BE}$

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại I (C thuộc cung nhỏ AB). Kẻ đường kính BE của (O) . Chứng minh:

a) $AC = DE$.

b) $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

c) $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OI^2$

Bài 3: Giả sử tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D . Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) . Chứng minh:

a) BC song song với DE .

b) Tứ giác $BCED$ là hình thang cân.

Bài 4: Trên dây cung AB của (O) , lấy 2 điểm C, D chia dây này thành 3 đoạn bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) $\widehat{AE} = \widehat{FB}$

b) $\widehat{AE} < \widehat{EF}$

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên cung nửa đường tròn lấy hai điểm C, D . Kẻ CH vuông góc với AB tại H , CH cắt (O) tại điểm thứ hai E . Kẻ AK vuông góc với CD tại K , AK cắt (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh :

a) Hai cung nhỏ $\widehat{CF}$, $\widehat{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\widehat{BE}$, $\widehat{DE}$ bằng nhau.

c) $DE = BF$.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho số đo cung nhỏ $\widehat{BM} < 90^\circ$. Vẽ dây MD song song với AB . Dây DN cắt AB tại E .

Chứng minh:

- a) $\widehat{BM} = \widehat{AD}$. b) $DN \perp AB$. c) $DE = EN$

Bài 7: Cho đường tròn (O, R) và dây AB . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ AB , cung lớn AB và P là trung điểm của dây cung AB .

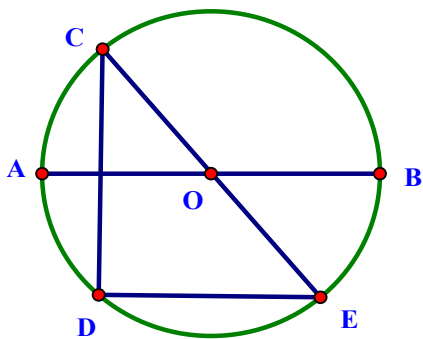
- a) Chứng minh bốn điểm M, N, O, P thẳng hàng.
b) Xác định số đo của cung nhỏ AB để tứ giác $AMBO$ là hình thoi.

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB

Chứng minh: $\widehat{AC} = \widehat{BE}$

Giải



Ta có: $CD \perp AB$ và $AB \parallel DE \Rightarrow CD \perp DE \Rightarrow CE$ là đường kính của (O)

Chứng minh được:

$$\Delta AOC = \Delta BOE (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$$

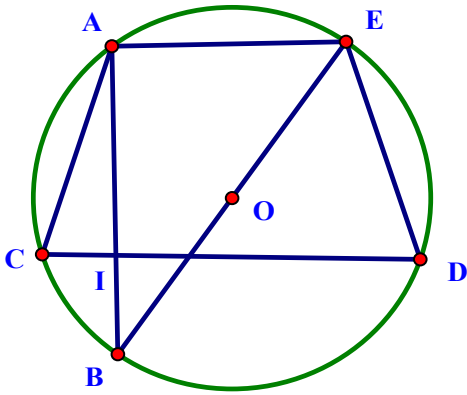
Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại I (C thuộc cung nhỏ AB). Kẻ đường kính BE của (O) . Chứng minh:

a) $AC = DE$.

b) $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

c) $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OI^2$

Giải



a) Dễ dàng chứng minh được: $AC = DE$.

b) Gợi ý:

$$IA^2 + IC^2 = AC^2$$

$$IB^2 + ID^2 = BD^2$$

Và $AC = DE$

Lại có: $BD^2 + DE^2 = BE^2 = (2R)^2 = 4R^2$

c) Gợi ý:

Lấy $M; N$ lần lượt là trung điểm của $AB; CD$

Ta có:

$$AB^2 + CD^2 = 4AM^2 + 4CN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2)$$

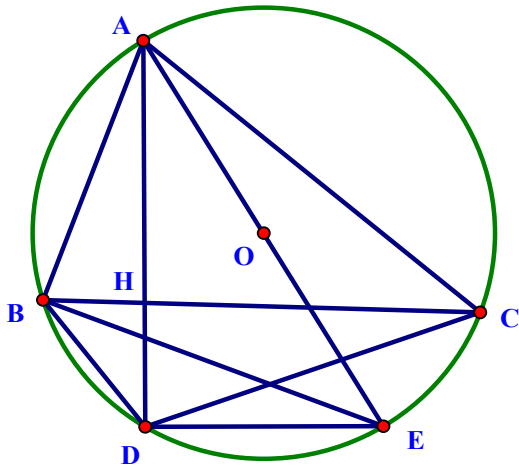
(Chú ý: $OM^2 + ON^2 = OI^2$)

Bài 3: Giả sử tam giác ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D . Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) . Chứng minh:

a) BC song song với DE .

b) Tứ giác $BCED$ là hình thang cân.

Giải



a) Chứng minh được:

$$AD \perp DE \text{ và } AD \perp BC \Rightarrow DE \parallel BC$$

b) Ta có:

$$DE \parallel BC$$

Chứng minh được:

$$\widehat{BE} = \widehat{CD} \Rightarrow BE = CD \\ \Rightarrow BDEC$$

Là hình thang cân.

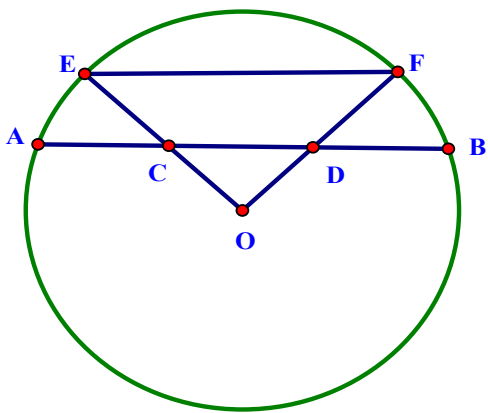
Bài 4: Trên dây cung AB của (O) , lấy 2 điểm C, D chia dây này thành 3 đoạn bằng nhau

$AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) $\widehat{AE} = \widehat{FB}$

b) $\widehat{AE} < \widehat{EF}$

Giải



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \Delta AOC = \Delta BOD (c.g.c) \\ & \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{BOF} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & OC = OD \Rightarrow \Delta OCD \text{ cân tại } O \\ & \Rightarrow \widehat{OCD} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECD} > 90^\circ \end{aligned}$$

Xét ΔCDE có:

$$\widehat{ECD} > \widehat{CED} \Rightarrow ED > CD \Rightarrow ED > AC$$

Xét ΔAOC và ΔEOD có:

$$OA = OE$$

$$OC = OD$$

$$AC < ED$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} < \widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{AE} < \widehat{EF}$$

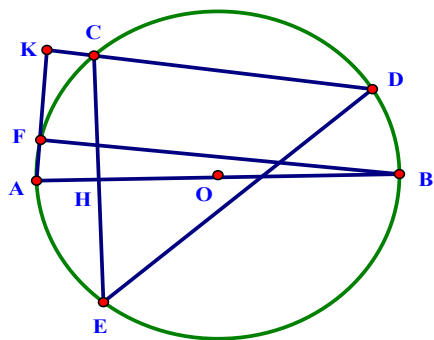
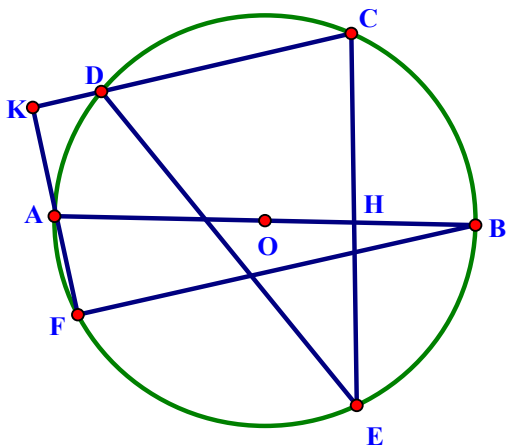
Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên cung nửa đường tròn lấy hai điểm C, D . Kẻ CH vuông góc với AB tại H , CH cắt (O) tại điểm thứ hai E . Kẻ AK vuông góc với CD tại K , AK cắt (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh :

a) Hai cung nhỏ $\widehat{CF}$, $\widehat{DB}$ bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ $\widehat{BE}$, $\widehat{DE}$ bằng nhau.

c) $DE = BF$.

Giải



Có thể dùng Hình 1 hoặc Hình 2:

Dưới đây là Chứng minh theo Hình 1:

- a) $BF \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DF}$
 $\Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{CD} = \widehat{DF} + \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CF}$
- b) AB là đường trung trực của CE
 $\Rightarrow BC = BE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{DF} = \widehat{BE}$
 $\Rightarrow \widehat{BE} + \widehat{EF} = \widehat{DF} + \widehat{EF} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE}$
- c) $\widehat{BF} = \widehat{DE} \Rightarrow BF = DE$

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho số đo cung nhỏ $\widehat{BM} < 90^\circ$. Vẽ dây MD song song với AB . Dây DN cắt AB tại E.

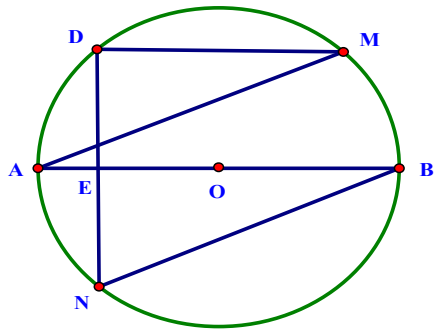
Chứng minh:

a) $\widehat{BM} = \widehat{AD}$.

b) $DN \perp AB$.

c) $DE = EN$

Giải



a) Ta có:

$$MD \parallel AB \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{AD}$$

$$AM \parallel BN \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{AN}$$

b) $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AN} \Rightarrow AD = AN$
 $\Rightarrow AO$

Là trung trực của $DN \Rightarrow AO \perp DN$

c) $DN \perp AB = \{E\} \Rightarrow DE = EN$

Bài 7: Cho đường tròn (O, R) và dây AB . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ AB , cung lớn AB và P là trung điểm của dây cung AB .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, O, P thẳng hàng.

b) Xác định số đo của cung nhỏ AB để tứ giác $AMBO$ là hình thoi.

Giải

a) Ta có:

$$\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow MA = MB$$

$$\widehat{NA} = \widehat{NB} \Rightarrow NA = NB$$

Mặt khác:

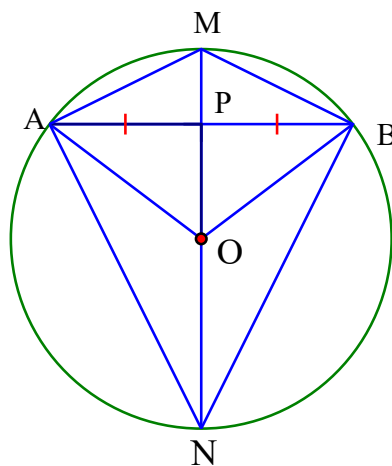
$$PA = PB; OA = OB$$

Nên 4 điểm: M, N, O, P thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường trung trực của AB).

b) Tứ giác $AMBO$ là hình thoi

$$\Leftrightarrow OA = AM = MB = BO \Leftrightarrow \Delta AOM \text{ đều}$$

$$\widehat{AOM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Leftrightarrow \text{Số } \widehat{AMB} = 120^\circ.$$



----- HẾT -----