

CHƯƠNG 4. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ
BÀI 1. KHÁI NIỆM BIỂU THỨC ĐẠI SỐ.
GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Trình bày được khái niệm biểu thức đại số.
- + Trình bày được cách tính giá trị của một biểu thức đại số.

❖ **Kĩ năng**

- + Viết được biểu thức đại số theo yêu cầu.
- + Tính được giá trị của một biểu thức đại số và trình bày được lời giải.

I. LÝ THUYẾT TRONG TÂM

Khái niệm về biểu thức đại số

Các biểu thức mà trong đó ngoài các số, các kí hiệu phép toán cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, còn có cả các chữ (đại diện cho các số). Người ta gọi những biểu thức như vậy là biểu thức đại số.

Giá trị của biểu thức đại số

Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Biểu thức đại số biểu thị trung bình cộng của hai số a và b là $\frac{a+b}{2}$.

Biểu thức đại số biểu thị lập phương của tổng hai số a và b là: $(a + b)^3$.

Tính giá trị biểu thức $A = x + 2y$ tại $x = 1$ và $y = 2$.

Thay $x=1, y=2$ vào biểu thức A ta có:

$$A = 1 + 2.2 = 5.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết các biểu thức đại số theo cách diễn đạt cho trước

Phương pháp giải

Bước 1. Đọc đề bài để tìm các ẩn và phép tính có thể có. Viết biểu thức đại số biểu thị tổng của a và b .
 Ẩn: a và b .

Bước 2. Viết các biểu thức chứa ẩn tương ứng. Biểu thức đại số biểu thị tổng của a và b là: $a + b$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết các biểu thức đại số theo các diễn đạt cho trước:

- a) Hiệu của a và $2b$; b) Tổng của hai số tự nhiên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

- a) Biểu thức đại số cần tìm là: $a - 2b$.
- b) Biểu thức đại số cần tìm là: $n + (n + 1) = 2n + 1 (n \in \mathbb{N})$.

Chú ý: Kí hiệu của hai số tự nhiên liên tiếp là n và $n+1$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 2. Hình chữ nhật lần lượt có độ lớn hai cạnh chiều rộng là $a\text{ cm}$ và chiều dài là $b\text{ cm}$. Viết biểu thức tính độ dài đường chéo hình chữ nhật trên.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông, ta có độ lớn đường chéo hình chữ nhật là:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 3. Một quả bưởi Năm roi giá 60 000 đồng, một kilogram cam Canh giá 50 000 đồng. Viết biểu thức đại số cho số tiền ứng với x quả bưởi Năm roi và y kilogram cam.

Hướng dẫn giải

x quả bưởi có giá là $60\,000x$ (đồng).

y kilogram cam có giá là $50\,000y$ (đồng).

Biểu thức đại số cho số tiền ứng với x quả bưởi năm roi và y cân cam là:

$$60\,000x + 50\,000y \text{ (đồng)}.$$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Viết biểu thức đại số biểu diễn diện tích hình vuông có cạnh a cm.

Câu 2: Viết biểu thức đại số biểu thị chu vi hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là a và b .

Câu 3: Bạn Tâm mua 5 quyển vở giá x đồng một quyển và 4 cái bút giá y đồng một cái. Viết biểu thức biểu thị số tiền Tâm phải trả.

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức đại số

Phương pháp giải

Thay các giá trị của ẩn vào rồi tính toán, rút gọn.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2x + 1$ tại $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào biểu thức, ta có:

$$A = 2.1 + 1 = 3.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $2x^2 - 3x + 7$ tại $x = 3$;

b) $2y + 3$ tại $y = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Thay $x = 3$ vào biểu thức, ta có:

$$2x^2 - 3x + 7 = 2.3^2 - 3.3 + 7 = 16.$$

b) Thay $y = 2$ vào biểu thức, ta có:

$$2y + 3 = 2.2 + 3 = 7.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $x^2y - 5$ tại $x = -2; y = 1$.

b) $15xy^2z$ tại $x = 2; y = -2; z = 3$.

Hướng dẫn giải

a) Thay $x = -2; y = 1$ vào biểu thức, ta có:

$$x^2y - 5 = (-2)^2.1 - 5 = -1.$$

b) Thay $x = 2; y = -2; z = 3$ vào biểu thức, ta có:

$$15xy^2z = 15.2(-2)^2.3 = 30.4.3 = 360.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = 2x - 3y + 4z$ tại $x = 1; y = 2; z = 3$.

Câu 2: Tính các giá trị của biểu thức: $P = 3x^2 - 9$ tại $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức: $B = 2x^2 + y$ tại $x = 1$ và $y = 1$.

Dạng 3: Tính giá trị biểu thức khi biết mối quan hệ giữa các biến

Phương pháp giải

Ví dụ: Một hình chữ nhật có chiều rộng x cm, chiều dài lớn hơn chiều rộng 2 cm.

Tính diện tích hình chữ nhật khi $x = 2$ cm.

Hướng dẫn giải

Chiều rộng là x (cm).

Chiều dài hình chữ nhật là: $x + 2$ (cm).

Diện tích hình chữ nhật là: $x(x + 2)$ (cm).

Thay $x = 2$ vào biểu thức ta có:

$$x(x + 2) = 2(2 + 2) = 8(\text{cm}^2).$$

Vậy diện tích hình chữ nhật là 8cm^2 (đơn vị diện tích)

Bước 1. Đọc kĩ bài viết và xác định các biến.

Bước 2. Viết biểu thức đại số thể hiện mối quan hệ giữa các biến.

Bước 3. Thay giá trị của các biến vào biểu thức đại số rồi tính toán ra kết quả.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Hình vuông có độ lớn một cạnh là x cm, tam giác vuông cân có độ lớn cạnh góc vuông là y cm. Tính tổng diện tích của hình vuông và của tam giác vuông cân khi $x = 2$ và $y = 4$.

Hướng dẫn giải

Diện tích của hình vuông cạnh là x cm là: $x^2 (\text{cm}^2)$.

Diện tích của tam giác vuông cân có độ lớn cạnh góc vuông là y cm là: $\frac{1}{2}y^2 (\text{cm}^2)$.

Tổng diện tích của hình vuông và của tam giác vuông cân là $x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Thay $x = 2$ và $y = 4$ vào biểu thức, ta có:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{1}{2}y^2 &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \\&= 4 + \frac{1}{2} \cdot 16 \\&= 12.\end{aligned}$$

Vậy tổng diện tích của hình vuông và của tam giác vuông cân là 12cm^2 .

Ví dụ 2. Trong một ngày hè, buổi sáng nhiệt độ là $x^{\circ}\text{C}$, buổi trưa tăng thêm $y^{\circ}\text{C}$ so với buổi sáng. Buổi chiều lúc mặt trời lặn nhiệt độ lại giảm đi $z^{\circ}\text{C}$ so với ban trưa. Viết biểu thức đại số biểu thị nhiệt độ lúc mặt trời lặn theo x, y, z và tính giá trị biểu thức đại số khi $x = 30^{\circ}\text{C}; y = 6^{\circ}\text{C}; z = 10^{\circ}\text{C}$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức đại số biểu thị nhiệt độ lúc mặt trời lặn theo x, y, z là: $x + y - z (^{\circ}\text{C})$.

Giá trị biểu thức đại số khi $x = 30^{\circ}\text{C}; y = 6^{\circ}\text{C}; z = 10^{\circ}\text{C}$ là:

$$x + y - z = 30^{\circ} + 6^{\circ} - 10^{\circ} = 26^{\circ} (^{\circ}\text{C}).$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài là a (m), chiều rộng ngắn hơn chiều dài 8m , người ta đào một cái ao hình vuông có cạnh bằng $b(\text{m})(b < a - 8)$. Tính diện tích còn lại của khu vườn biết $a = 50\text{m}; b = 10\text{m}$.

Câu 2. Tính giá trị của các biểu thức đại số:

a) $M = x^2(x + y) - y^2(x + y) + x^2 - y^2 + 2(x + y) + 3$ biết $x + y + 1 = 0$.

b) $M = x^4 - xy^3 + x^3y - y^4 - 1$ biết $x + y = 0$.

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

 Phương pháp giải

Áp dụng linh hoạt các tính chất sau để áp dụng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

- $A^{2n} \geq 0; \forall A, n \in \mathbb{N}^*$ và $-A^{2n} \leq 0; \forall A, n \in \mathbb{N}^*$.
- $|A| \geq 0; \forall A$ và $-|A| \leq 0; \forall A$.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $P = |x - 10| + (x - y)^2 + 10$.

b) $P = (x - y)^4 + 2019$.

Hướng dẫn giải

a) $P = |x - 10| + (x - y)^2 + 10$

Ta có: $\begin{cases} |x - 10| \geq 0 \\ (x - y)^2 \geq 0 \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |x - 10| + (x - y)^2 + 10 \geq 10$$

$$\Rightarrow P \geq 10.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x - 10 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$. Suy ra $x = y = 10$.

Vậy $P_{\min} = 10$ khi $x = y = 10$.

$$b) P = (x - y)^4 + 2019$$

Ta có: $(x - y)^4 \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - y)^4 + 2019 \geq 2019 \Rightarrow P \geq 2019$

Vậy $P_{\min} = 2019$ khi $x = y$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$a) P = -(x - 5)^6 + 1.$$

$$b) P = -|x - 1| - (y + 2)^2 + 2019.$$

Hướng dẫn giải

$$a) P = -(x - 5)^6 + 1.$$

Ta có: $-(x - 5)^6 \leq 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow -(x - 5)^6 + 1 \leq 1 \Rightarrow P \leq 1$

Vậy $P_{\max} = 1$ khi $x - 5 = 0$ hay $x = 5$

$$b) P = -|x - 1| - (y + 2)^2 + 2019.$$

Ta có: $\begin{cases} -|x - 1| \leq 0 \\ -(y + 2)^2 \leq 0 \end{cases}$ với mọi x, y .

$\Rightarrow -|x - 1| - (y + 2)^2 + 2019 \leq 2019 \Rightarrow P \leq 2019.$

Vậy $P_{\max} = 2019$ khi $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Bài tập tự luyện dạng 4

Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của các biểu thức:

$$\text{Câu 1: } A = (2x - 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2017.$$

$$\text{Câu 2: } B = 2(x + 1)^2 + |-3(x^2 - 1)|.$$

$$\text{Câu 3: } C = \frac{-1}{2(x + 1)^2 + 1}.$$

PHẦN ĐÁP ÁN

Dạng 1. Viết các biểu thức đại số theo cách diễn đạt cho trước

Câu 1. Biểu thức đại số biểu thị diện tích hình vuông có cạnh a cm là: a^2 (cm²).

Câu 2. Biểu thức đại số biểu thị chu vi hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là a và b là:

$$2(a + b) \text{ (cm)}.$$

Câu 3. Biểu thức đại số biểu diễn cho số tiền cần trả là $5x + 4y$ (đồng).

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức đại số

Câu 1. Thay $x = 1; y = 2; z = 3$ vào biểu thức $P = 2x - 3y + 4z$, ta có $P = 2.1 - 3.2 + 4.3 = 8$.

Câu 2.

Thay $x = -1$ vào biểu thức $P = 3x^2 - 9$ ta được $P = 3.(-1)^2 - 9 = -6$.

Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào biểu thức $P = 3x^2 - 9$ ta được $P = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = -\frac{33}{4}$.

Câu 3. Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào biểu thức $B = 2x^2 + y$ ta được $B = 2.1^2 + 1 = 3$.

Dạng 3. Tính giá trị của biểu thức khi biết mối quan hệ giữa các biến

Câu 1. Diện tích còn lại của khu vườn là $a(a - 8) - b^2$.

Thay $a = 50\text{m}$ và $b = 10\text{m}$ vào biểu thức, ta có:

$$50.(50 - 8) - 10^2 = 2000(m^2).$$

Câu 2.

a) Ta có $x + y + 1 = 0 \Rightarrow x + y = -1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} M &= x^2(x + y) - y^2(x + y) + x^2 - y^2 + 2(x + y) + 3 \\ &= (x + y)(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2) + 2(x + y) + 3 \\ &= (x^2 - y^2)(x + y + 1) + 2(x + y) + 3. \end{aligned}$$

Thay $x + y = -1$ vào biểu thức, ta có

$$\begin{aligned} M &= (x^2 - y^2)(-1 + 1) + 2.(-1) + 3 \\ &= (x^2 - y^2).0 - 2 + 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) Ta có $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

Thay $y = -x$ vào biểu thức, ta có

$$\begin{aligned} M &= x^4 - x(-x)^3 + x^3(-x) - (-x)^4 - 1 \\ &= x^4 + x^4 - x^4 - x^4 - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Dạng 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 1.

Với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $(2x - 3)^2 \geq 0; \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Do đó $(2x - 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2017 \geq 2017$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2017 khi $x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$.

Câu 2.

Với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $2(x+1)^2 \geq 0; \left| -3(x^2 - 1) \right| \geq 0$.

Do đó $B = 2(x+1)^2 + \left| -3(x^2 - 1) \right| \geq 0$ nên $\min B = 0$ khi $x = -1$.

Câu 3.

Với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $2(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2(x+1)^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2(x+1)^2 + 1} \geq -1$.

Vậy $\min C = -1$ khi $x = -1$.