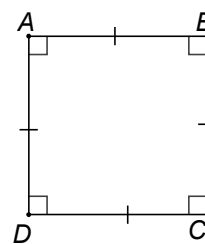


HÌNH VUÔNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (hình 97).



Hình 97

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$

Từ định nghĩa hình vuông suy ra hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

2. Tính chất

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

Ba dấu hiệu từ hình chữ nhật:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác thì nó là hình vuông.

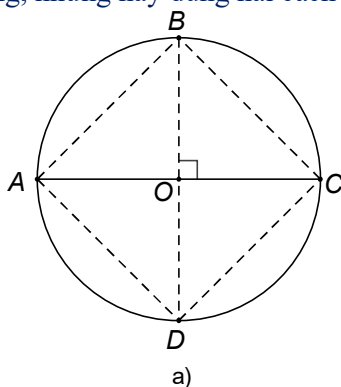
Hai dấu hiệu từ hình thoi:

- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

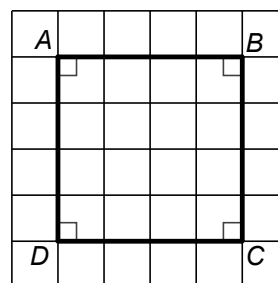
Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

4. Cách vẽ hình vuông

Có năm cách vẽ hình vuông, nhưng hay dùng hai cách sau:



a)



b)

Hình 98

Cách 1 (hình 98a): Vẽ một đường chéo, dựng đường trung trực của đường chéo đó. Lấy trung điểm vừa dựng làm tâm vẽ đường tròn có đường kính bằng đường chéo vừa vẽ, nó cắt đường trung trực tại hai điểm ta được đường chéo thứ hai.

Cách 2 (hình 98b): Sử dụng lưới ô vuông để vẽ tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Lưu ý:

- Cách 1 chứng minh được là hình vuông.
- Cách 2 không chứng minh được là nhận được hình vuông, chỉ là ảnh hình vuông.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

A. CÁC DẠNG BÀI TẬP MINH HỌA

Dạng 1. Nhận dạng hình vuông

Phương pháp giải

Sử dụng một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật có thêm dấu hiệu hai cạnh kề bằng nhau hoặc hai đường chéo vuông góc hoặc một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Cách 2: Chứng minh tứ giác là hình thoi có thêm dấu hiệu có một góc vuông hoặc hai đường chéo bằng nhau.

Bài 1. Cho hình 99, tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải

Tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

Giải thích:

Theo hình vẽ thì $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$. Tứ giác $AEDF$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật. Hình chữ nhật $AEDF$ có AD là đường phân giác của góc A nên nó là hình vuông.

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE .

a) Tứ giác $ADFE$ là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác $MENF$ là hình gì? Vì sao?

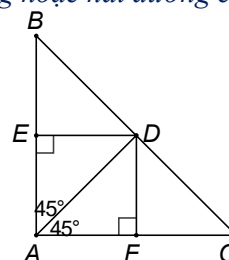
Lời giải (hình 100)

Đặt $AD = a$ thì $AB = 2a$.

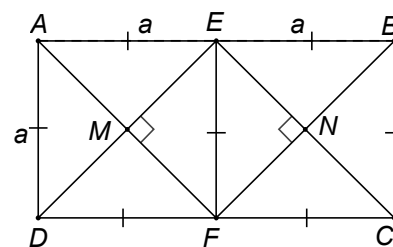
Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hình chữ nhật $ABCD$, ta được $AE = EB = BC = CF = FA = a$.

a) Tứ giác $ADFE$ là hình vuông.

Giải thích: Vì tứ giác $ADFE$ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.



Hình 99



Hình 100

Hình thoi $ADFE$ có $\widehat{A} = 90^\circ$ nên nó là hình vuông.

b) Tứ giác $MENF$ là hình vuông.

Giải thích:

Chứng minh tương tự như câu a) ta cũng có tứ giác $EBCF$ là hình vuông.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hai hình vuông $ADFE$ và $MENF$, ta được:

$$\begin{cases} AF \perp DE; EC \perp FB \\ \widehat{E_1} = \widehat{E_2} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{E} = 90^\circ.$$

Tứ giác $MENF$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật $MENF$ lại có EF là đường phân giác của góc MEN nên nó là hình vuông.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải (hình 101)

Gọi độ dài cạnh hình vuông là a và $AM = BN = CP = DQ = x$.

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông $ABCD$, ta được:

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $MB = NC = PD = QA = a - x$, nên bốn tam giác vuông MBN, NCP, PDQ, QAM

bằng nhau trường hợp (c-g-c) suy ra bốn cạnh tương ứng của các tam giác đó bằng nhau là

$MN = NP = PQ = QA$. Tứ giác $MNPQ$ có bốn cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.

Áp dụng tính chất về góc và kết quả hai tam giác bằng nhau vào hai tam giác MBN, NCP ta được:

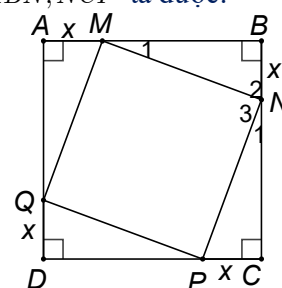
$$\begin{cases} \widehat{M_1} + \widehat{N_2} = 90^\circ \\ \widehat{M_1} = \widehat{N_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 90^\circ \quad (1)$$

Lại có góc BNC là góc bẹt hay

$$\widehat{BNC} = \widehat{N_1} + \widehat{N_2} + \widehat{N_3} = 180^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{N_3} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ hình thoi $MNPQ$ có một góc vuông nên nó là hình vuông.



Hình 101

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN SỐ 1

- Nêu các tính chất về đường chéo của hình vuông. Chỉ rõ tính chất nào có ở hình bình hành, ở hình chữ nhật, ở hình thoi.
- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau và hai đường chéo vuông góc có phải là hình vuông không? Nếu không hãy sửa lại một dấu hiệu để tứ giác là hình vuông.
- Các câu sau đúng hay sai?
 - Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
 - Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
 - Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

d) Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cạnh BC lấy hai điểm D, E sao cho $BD = DE = EC$. Qua D và E kẻ các đường vuông góc với BC , chúng cắt AB, AC lần lượt ở K và H . Tứ giác $KHED$ là hình gì? Vì sao?

5. Cho một hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.

6. Cho hình vuông $ABCD$. Trên AD lấy điểm E , trên tia đối của tia AD lấy điểm F , trên tia đối của tia BA lấy điểm I sao cho $DE = AF = BI$. Vẽ hình vuông $AFGH$, H thuộc cạnh AB . Chứng minh rằng tứ giác $EGIC$ là hình vuông.

Dạng 2. Sử dụng định nghĩa, tính chất của hình vuông để chứng minh các quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc, thẳng hàng

Phương pháp giải

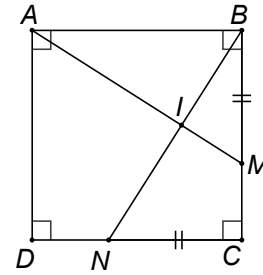
Sử dụng định nghĩa, tính chất và bổ đề về hình vuông.

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $BM = CN$ và $AM \perp BN$.

Lời giải (hình 102)

Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông $ABCD$, ta được:

$$\begin{cases} AB = BC \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ BM = CN \end{cases}$$



Hình 102

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle BCN$ (c.g.c), nên $AM = BN$.

Gọi I là giao điểm của AM và BN .

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác vuông ABM và BCN kết quả của hai tam giác bằng nhau, ta được:

$$\begin{cases} \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \\ \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \quad (1)$$

Áp dụng tính chất về góc vào tam giác BIM ta có $\widehat{B_1} + \widehat{M_1} + \widehat{I_1} = 180^\circ \quad (2)$

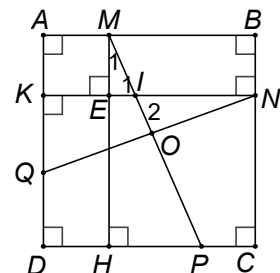
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{I_1} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ hay $AM \perp BN$.

Bài 2. Bổ đề về hình vuông

Cho hình vuông $ABCD$. Nếu các điểm M, N, P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD và DA thì $MP = NQ \Leftrightarrow MP \perp NQ$.

Lời giải (hình 103)

Ta cần chứng minh bài toán đúng với các điểm M, N, P, Q nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự).



Hình 103

Gọi H, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến hai cạnh

CD, DA và E, I, O thứ tự là giao điểm của MH với NK, MP với NQ .

Áp dụng định nghĩa vào hình vuông $ABCD$ và tính chất góc đồng vị của $KN \parallel DC$, ta được

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ.$$

Các tứ giác $MBHC, KNCD$ và $MBNE$ là các tứ giác có ba góc vuông nên chúng là các hình chữ nhật.

a) $MP = NQ \Rightarrow MP \perp NQ$.

Áp dụng tính chất về cạnh và giả thiết vào hai hình chữ nhật $MBCH, KNCD$ và hình vuông $ABCD$ ta được:

$$\begin{cases} MH = BC, NK = CD \\ BC = CD, MP = NQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH = MK \\ MP = NQ \end{cases} \Rightarrow \triangle MHP = \triangle NKQ \text{ (trường hợp cạnh huyền, cạnh góc vuông)}.$$

Áp dụng tính chất về góc vào hai tam giác bằng nhau ở trên và tính chất của hai góc đối đỉnh ta có

$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \\ \widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (vì hai tam giác, có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc thứ ba cũng bằng nhau).}$$

Vậy MP vuông góc với NQ tại O .

b) $MP \perp NQ \Rightarrow MP = NQ$.

Xét hai tam giác MEI và NOI có $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ vì đối đỉnh, $\widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$ (1) vì hai tam giác, có hai cặp góc bằng nhau thì cặp góc còn lại cũng bằng nhau.

Lại có $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ, MH = NK$ (2) theo câu a).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MHB = \triangle NKQ$ (c-g-c) nên $MP = NQ$.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai cạnh BC, CD lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$, trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho $DK = BM$. Hãy tính:

a) Số đo góc KAN .

b) Chu vi tam giác MCN theo a .

Lời giải (hình 104)

a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông $ABCD$,

ta được $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = AD, BM = DK \end{cases}$

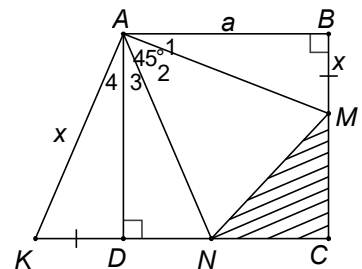
$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADK \text{ (c-g-c)}.$$

Áp dụng kết quả của hai tam giác bằng nhau ở trên và giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 90^\circ \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_4, \widehat{A}_2 = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

b) Đặt $BM = DK = x$ thì $KN = x + DN, MC = a - x, CN = a - DN$.

Từ kết quả của hai tam giác bằng nhau ở câu a) và giả thiết, ta được:



Hình 104

$$\begin{cases} AM = AK, AN = AN \\ \widehat{MAN} = \widehat{KAN} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN = \triangle AKN \text{ (c-g-c) suy ra } MN = KN.$$

Vậy chu vi tam giác MCN bằng $MC + CN + NM = a - x + a - DN + x + DN = 2a$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , qua A kẻ $AN \perp AM$ (điểm N thuộc tia đối của tia DC). Gọi I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng:

- $AM = AN$.
- Ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Lời giải

a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông $ABCD$, ta được:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} \\ \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A} = 90^\circ \\ AB = AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = AD \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_1} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADN \text{ (c-g-c)}.$$

Do đó $AM = AN$.

b) *Cách 1* (hình 105a): Nối IA, IC thì IA và IC lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của hai tam giác vuông AMN, CMN .

Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền vào hai tam giác vuông trên và định nghĩa hình

$$\text{vuông ta được } \begin{cases} IA = IC = \frac{1}{2}MN \\ BA = BC \end{cases}.$$

Điều này chứng tỏ hai điểm B và I cách đều hai điểm A và C nên BI là đường trung trực của đoạn AC . Mặt khác theo tính chất về đường chéo của hình vuông thì BD là trung trực của AC mà đoạn AC thì chỉ có một đường trung trực nên BI trùng với BD hay B, I, D thẳng hàng.

Cách 2 (hình 101): Qua M kẻ $MP \parallel BD$ (1) (điểm $P \in DC$) suy ra $DI \parallel MP$ (2).

Lại có $NI = MI$ (3) theo giả thiết. Từ (2) và (3) suy ra $ND = DP$ (4)

theo định lý đường trung bình.

Từ (3) và (4) ta có DI là đường trung bình của tam giác NMP .

Áp dụng định lý đường trung bình vào tam giác NMP ta được

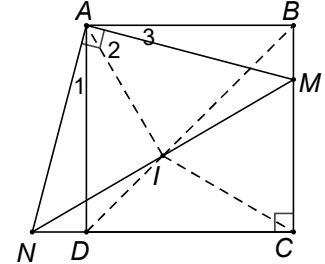
$DI \parallel MP$ (5).

Từ (1) và (5) suy ra B, I, D thẳng hàng, vì từ điểm I ở ngoài đường

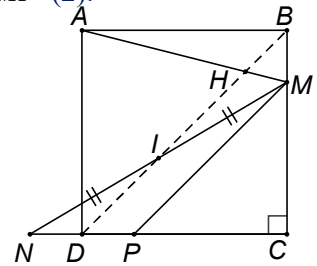
thẳng MP chỉ kẻ được một đường thẳng song song với MP .

Cách 3: Qua M kẻ $MH \parallel ND$ (1) (điểm $H \in BD$) thì $\widehat{D_1} = \widehat{H_1}$ (2) do đồng vị.

Mà BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên BD là đường phân giác của hai góc vuông B và D do đó $\widehat{D_1} = \widehat{H_1} = 45^\circ$ (3).



Hình 105a



Hình 105b

Từ (2) và (3) ta có $BM = MH$ (4) vì trong một tam giác, đối diện với hai góc bằng nhau là hai cạnh bằng nhau.

Kết hợp (1) với (4) ta được tứ giác $NHMD$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên nó là hình bình hành.

Áp dụng tính chất về đường chéo vào hình bình hành $NHMD$, ta được đường chéo DH đi qua trung điểm I của đường chéo NM nên BD đi qua I .

Điều đó chứng tỏ B, I, D thẳng hàng.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN SỐ 1

7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là một điểm nằm giữa C và D . Tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F . Kẻ $FH \perp AE$ ($H \in AE$), FH cắt BC ở K .

a) Tính độ dài AH .

b) Tính số đo góc FAK .

8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD và I là giao điểm của AN, DM .

Chứng minh rằng:

a) $AN \perp DM$;

b) $BA = BI$.

9. Cho một hình vuông cạnh dài $1m$. Vẽ hình vuông thứ hai nhận đường chéo của hình vuông đã cho làm cạnh. Tính độ dài đường chéo của hình vuông này.

10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $MANF$, gọi O là trung điểm của AF . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MANF$ là hình vuông.

b) F thuộc tia phân giác của góc MCN .

c) $AC \perp CF$.

d) Tứ giác $BOFC$ là hình thang.

Dạng 3. Tìm điều kiện để một hình trở thành hình vuông

Phương pháp giải

-sử dụng các dấu hiệu nhận biết hình vuông.

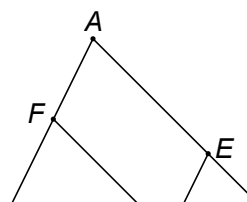
-nếu bài toán chỉ yêu cầu tìm vị trí của một điểm nào đó để một hình trở thành hình vuông ta làm như sau: giả sử hình đó là hình vuông rồi dựa vào các tính chất của hình vuông để chỉ ra vị trí cần tìm.

Bài 1. Cho tam giác ABC , D là điểm nằm giữa B và C . Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC , chúng cắt các cạnh AC và AB thứ tự ở E và F .

a) Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình thoi?

c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác $AEDF$ là hình gì? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình vuông?



Lời giải (hình 106)

a) Tứ giác $AEDF$ là hình bình hành.

Giải thích: Từ giả thiết $\begin{cases} DE \parallel AC \\ DF \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE \parallel AF \\ DF \parallel AE \end{cases}$.

Tứ giác $AEDF$ có các cạnh đối song song nên nó là hình bình hành.

b) Giả sử $AEDF$ là hình thoi khi đó theo tính chất vẽ đường chéo của hình thoi thì AD là đường phân giác của góc A .

Vậy nếu D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì hình bình hành $AEDF$ là hình chữ nhật. Nếu tam giác ABC vuông tại A và D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC thì $AEDF$ vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi nên nó là hình vuông.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA . Hai đường chéo AC và BD phải thoả mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của:

a) Hình chữ nhật?

b) Hình thoi?

c) Hình vuông?

Lời giải (hình 107)

Trước hết ta chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành (xem Ví dụ 1, Dạng 1, Chủ đề 5)

a) $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow MN \perp NP$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$ (vì $MN \parallel AC, NP \parallel BD$).

Điều kiện cần tìm là hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau.

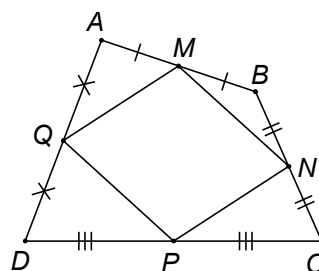
b) $MNPQ$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = NP$

$\Leftrightarrow AC = BD$ (vì $MN = \frac{1}{2}AC, NP = \frac{1}{2}BD$)

Điều kiện cần tìm là các đường chéo AC và BD bằng nhau.

c) $MNPQ$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} MN \perp PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD \end{cases}$.

Điều kiện cần tìm là các đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau.



Hình 107

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN SỐ 1

11. Cho tam giác ABC cân tại A , đường trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng với M qua điểm I .

a) Tứ giác $AMCK$ là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác $AKMB$ là hình gì? Vì sao?

c) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác $AMCK$ là hình vuông.

12. Cho hình thoi $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua B vẽ đường thẳng song song với AC , qua C vẽ đường thẳng song song với BD , hai đường thẳng này cắt nhau ở K .

- Tứ giác $OBKC$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh $AB = OK$.
- Tìm điều kiện của hình thoi $ABCD$ để tứ giác $OBKC$ là hình vuông.

13. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của BC, AD .

- Tứ giác $ECDF$ là hình gì? Vì sao?
- Tứ giác $ABED$ là hình gì? Vì sao?
- Tính số đo của góc AED .

HƯỚNG DẪN BÀI TỰ LUYỆN SỐ 1

- Hình vuông có các tính chất sau về đường chéo.
 - Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (có ở hình bình hành).
 - Hai đường chéo bằng nhau (có ở hình chữ nhật).
 - Hai đường chéo vuông góc với nhau (có ở hình thoi).
 - Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình vuông (có ở hình thoi).
- Câu trả lời là không. Phải sửa lại dấu hiệu về đường chéo là: Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau.
- Các câu đúng là: a, b, d. Câu sai là c.
- (hình 169) Tứ giác $KHED$ là hình vuông.

Giải thích: Tam giác vuông BDK có $\hat{B} = 45^\circ$ nên là tam giác cân, do đó $BD = DK$. Chứng minh tương tự, $HE = EC$.

Vì $BD = DE = EC$ theo giả thiết, nên:

$$KD = DE = EH.$$

Tứ giác $KHED$ có $KD \parallel HE, KD = HE$ nên là hình bình hành.

Hình bình hành này lại có $\hat{D} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật này lại có $KD = DE$ nên nó là hình vuông.

- (hình 170) Vì $\triangle NCD$ có $\hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 45^\circ$ nên vuông cân tại N .

Suy ra $\hat{N} = 90^\circ$ và $ND = NC$ (1).

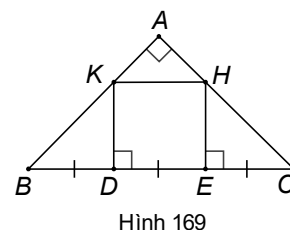
Chứng minh tương tự, $\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ$. Tứ giác $MNPQ$ có ba góc

vuông nên là hình chữ nhật.

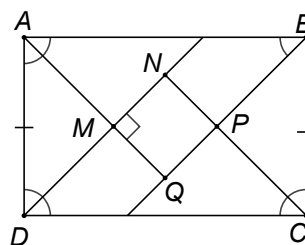
$$\triangle AMD = \triangle BPC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow MD = PC \text{ (2)}.$$

Trừ theo về đẳng thức (1) cho đẳng thức (2) ta được $NM = NP$.

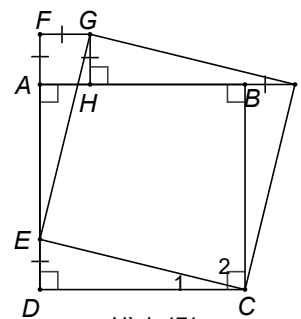
Như vậy hình chữ nhật $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.



Hình 169



Hình 170



Hình 171

6. (hình 171) Chứng minh bốn tam giác vuông EFG, IHG, CBI, CDE bằng

nhau để suy ra $EG = GI = IC = CE$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_3}$.

Sau đó chứng minh $\widehat{ECI} = 90^\circ$.

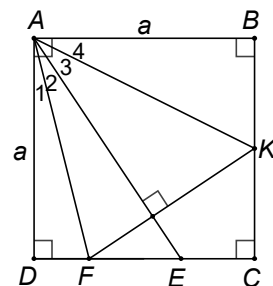
7. (hình 172)

a) $\triangle ADF = \triangle AHF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = AD = a$.

b) $\triangle AHK = \triangle ABK$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

Kết hợp với giả thiết, ta có:

$$\widehat{FAK} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \frac{1}{2}90^\circ = 45^\circ.$$



Hình 172

8. (hình 173)

a) Áp dụng định nghĩa và giả thiết vào hình vuông $ABCD$ ta được:

$$\begin{cases} AD = DC, \widehat{D} = \widehat{C} \\ DN = CM \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle DCM$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$.

Vì $\triangle ADN$ vuông ở D , nên $\widehat{A_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ$. (1)

Thay $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ vào đẳng thức (1) ta được $\widehat{D_1} + \widehat{N_1} = 90^\circ$.

Điều này chứng tỏ tam giác DIN vuông ở I hay $AN \perp DM$.

b) Gọi giao điểm của DM với AB là K , khi đó

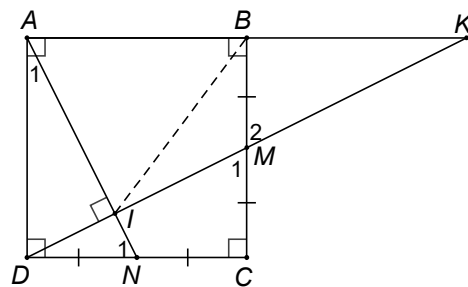
$$\triangle DMC = \triangle KMB \text{ (g-c-g)} \Rightarrow BK = DC.$$

Lại có $AB = DC$ nên $AB = BK$ suy ra IB là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AIK . Do đó $IB = BA$.

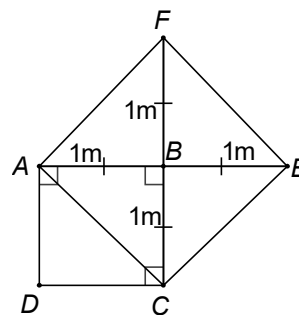
9. (hình 174) Xét hình vuông $ABCD$ có $AB = BC = 1m$.

Ta đi dựng hình vuông nhận đường chéo AC làm cạnh để tính đường chéo của hình vuông mới này.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E , tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $BE = BF = 1m$. Ta được tứ giác $AFEC$ có hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi



Hình 173



Hình 174

đường nên nó là hình vuông cạnh AC . Hình vuông này có đường chéo

$$AE = 2m.$$

10.(hình 175)

a) $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c-g-c)

$$\Rightarrow AM = AN, \widehat{A_1} = \widehat{A_3}.$$

Hình bình hành $MANF$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Do góc A_2 phụ với góc A_3 nên góc A_1 phụ với A_2 hay $\widehat{MAN} = 90^\circ$

Điều này chứng tỏ hình thoi $MANF$ là hình vuông vì có một góc vuông.

b) Kẻ FH, FK theo thứ tự vuông góc với hai đường thẳng

BC, NC thu được tứ giác $KCHF$ có ba góc vuông nên là

hình chữ nhật, suy ra

$$\widehat{KFH} = 90^\circ.$$

Lại có $\widehat{NFM} = 90^\circ$ vì là góc của hình vuông nên $\widehat{F_1} = \widehat{F_3}$ do cùng phụ

với $\widehat{F_2}$.

Từ đó $\triangle FKN = \triangle FHM$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow FH = FK$.

Điều này chứng tỏ điểm F cách đều hai cạnh CM, CN của góc MCN nên F thuộc tia phân giác của góc MCN .

c) Theo tính chất về đường chéo của hình vuông và từ câu b), ta có

$$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACF} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CF.$$

d) Tương tự như trên ta có $\widehat{B_1} = \widehat{C_3} = 45^\circ \Rightarrow OB \parallel CF$.

Tứ giác $BOFC$ có hai cạnh đối song song nên là hình thang.

11.(hình 176)

a) Tứ giác $AMCK$ là hình chữ nhật.

Giải thích:

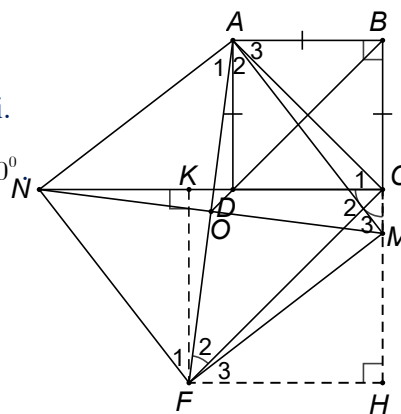
Tứ giác $AMCK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Hình bình hành này lại có $\widehat{AMC} = 90^\circ$ theo tính chất của tam giác cân nên nó là hình chữ nhật.

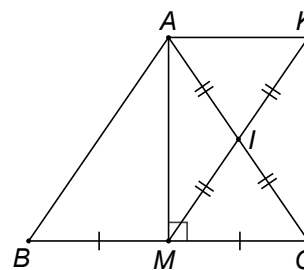
b) Tứ giác $AKMB$ là hình bình hành vì có hai cạnh đối là

AK, BM song song và bằng nhau.

c) Hình chữ nhật $AMCK$ là hình vuông $\Leftrightarrow AM = MC \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$



Hình 175



Hình 176

$\Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông ở A .

12.(hình 177)

a) Tứ giác $BOCK$ là hình chữ nhật.

Giải thích:

Tứ giác $BOCK$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành. Hình bình hành lại có $\widehat{BOC} = 90^\circ$ do hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau tại O . Vậy nó là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $ABKO$ có hai cạnh đối AO và BK song song và bằng nhau do BK song song và bằng OC .

Suy ra $AB = OK$.

c) Hình chữ nhật $BOCK$ là hình vuông

$\Leftrightarrow BO = OC \Leftrightarrow BD = AC \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

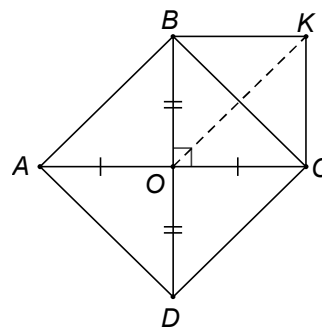
Điều kiện cần tìm là $ABCD$ là hình vuông.

13.(hình 178)

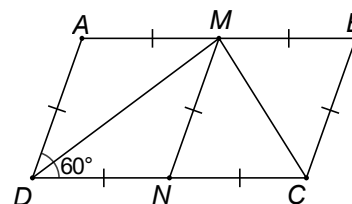
a) Tứ giác $ECDF$ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.

b) Hình thang $ABED$ có $\widehat{A} = \widehat{D_1} = 60^\circ$ nên là hình thang cân.

c) $\triangle AED$ có $EF = AF = FD$ nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.



Hình 177



Hình 178

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN SỐ 2

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, BC, CD, DA , lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh $EFGH$ là hình vuông.

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE .

a) Tứ giác $ADFE$ là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì? Vì sao?

Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AD < AB < 2AD$). Vẽ các tam giác vuông cân ABI, CDK

($\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$), I và K nằm trong hình chữ nhật. Gọi E là giao điểm của AI và DK , F là giao điểm của BI và CK . Chứng minh rằng:

a) EF song song với CD .

b) $EKFI$ là hình vuông.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Ở phía ngoài hình bình hành vẽ các hình vuông ADEF và ABGH. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình vuông ADEF. Chứng minh rằng.

- a) $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ b) $OH = OC$ c) $OH \perp OC$

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

- a) Chứng minh $AN = DM$ và $AN \perp DM$
b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.
c) Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh $CE = CD$.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho $AE = DF$. Chứng minh rằng $DE = CF$ và $DE \perp CF$

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc ABD cắt EC và AC theo thứ tự tại M và P. Tia phân giác của góc ACE cắt DB và AB theo thứ tự tại Q và N. Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. b) $BH = CH$.
c) Tam giác BOC vuông cân. d) MNPQ là hình vuông.

Bài 9: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Chứng minh $\widehat{KAM} = 45^\circ$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Chỉ ra $AH = BE = CF = DG$. Từ đó suy ra:

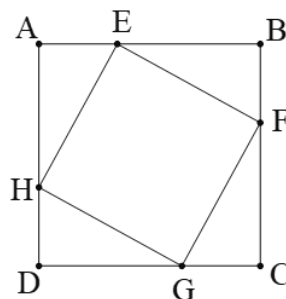
$$\triangle AEH = \triangle BFE = \triangle CGF = \triangle DHG \text{ (c-g-c)}.$$

$$\text{Do đó } HE = EF = FG = GH \text{ (1).}$$

$$\text{Mặt khác, vì } \triangle AEH = \triangle BFE \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{AHE}$$

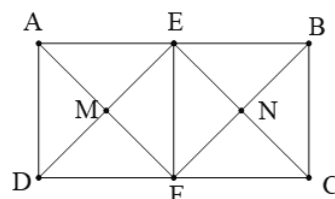
$$\text{Suy ra } \widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FEH} = 90^\circ \text{ (2).}$$

(1), (2) suy ra EFGH là hình vuông.



Bài 2: a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có

$EF \parallel AD \parallel BC$, do đó dễ thấy ADFE là hình chữ nhật.



Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. Vậy $ADFE$ là hình vuông.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $BCFE$ cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N . từ đó suy ra $EMFN$ là hình vuông.

Bài 3: a) Tam giác KCD cân tại K nên $KD = KC$ (1).

$\triangle EAD = \triangle FBC$ (g.c.g) nên $DE = CF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$KD - DE = KC - CF \Leftrightarrow KE = KF$.

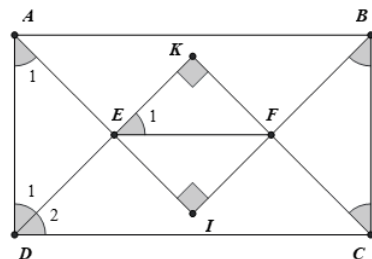
Tam giác vuông KEF có $KE = KF$ nên $\widehat{E}_1 = 45^\circ$.

Ta lại có: $\widehat{D}_2 = 45^\circ \Rightarrow EF \parallel CD$ (2 góc đồng vị bằng nhau).

b) Tam giác EAD có $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ$ nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Tứ giác $EKFI$ có $\widehat{E} = \widehat{K} = \widehat{I} = 90^\circ$ nên $EKFI$ là hình chữ nhật.

Lại có $KE = KF \Rightarrow EKFI$ là hình vuông.



Bài 4: a) Ta có : $OA \perp OD$ (tính chất đường chéo hình vuông); $AH \perp DC$ (vì $AH \perp AB$, $AB \parallel CD$). Vậy

$\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

b) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle ODC$:

$OA = OD$ (tính chất đường chéo hình vuông)

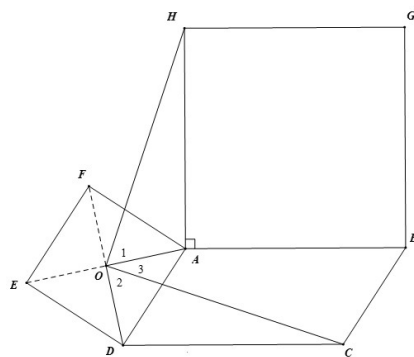
$\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (câu a)

$AH = DC$ (cùng bằng AB)

Vậy $\triangle OAH = \triangle ODC$ (c.g.c) suy ra $OH = OC$.

c) $\triangle OAH = \triangle ODC \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ mà $\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$ (tính chất đường chéo hình vuông), nên

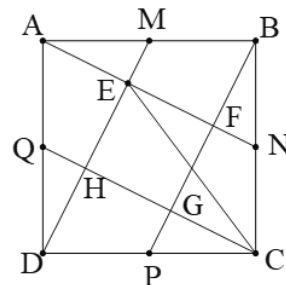
$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 90^\circ$. Vậy $OH \perp OC$.



Bài 5: a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A , có $AB = AD$ và $BN = AM$, do đó

$\triangle ABN = \triangle DAM$

suy ra $AN = DM$ và $\widehat{BAN} = \widehat{ADM}$.



Mà $\widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, do đó $\widehat{ADM} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, hay $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Vậy ta có $AN = DM$ và $AN \perp DM$.

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác $EFGH$.

$MB \parallel DP$ và $MB = DP \Rightarrow MBPD$ là hình bình hành.

Suy ra $BP \parallel DM \Rightarrow AN \perp BP$.

Tương tự ta cũng có $CQ \perp DM$.

Như vậy tứ giác $EFGH$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{H} = 90^\circ$.

* Ta chứng minh $EF = EH$:

Để thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF , E là trung điểm của AF .

Tương tự H là trung điểm của DE .

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E , có:

$AB = DA$; $\widehat{BAF} = \widehat{ADE}$ (vì $\triangle ABN = \triangle DAM$). Suy ra $\triangle ABF = \triangle DAE \Rightarrow AF = DE$.

Từ đó ta có $EF = EH$. Vậy $EFGH$ là hình vuông.

c) H là trung điểm của DE và $CH \perp DE$, do đó ta suy ra $\triangle CDE$ cân tại C , hay là $CE = CD$.

Bài 6: Trong tam giác ABC , MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2}BC$

Lập luận tương tự, ta có $PQ = \frac{1}{2}BC, MQ = \frac{1}{2}AD, NP = \frac{1}{2}AD$

Theo giả thiết, $AD = BC$ suy ra $MN = QP = MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình thoi (1).

Mặt khác ta có:

$\widehat{DPQ} = \widehat{DCB}, \widehat{NPC} = \widehat{ADC}$ (góc đồng vị).

theo giả thiết $\widehat{DCB} + \widehat{ADC} = 90^\circ$, suy ra

$\widehat{DPQ} + \widehat{NPC} = 90^\circ$. Do vậy ta được góc

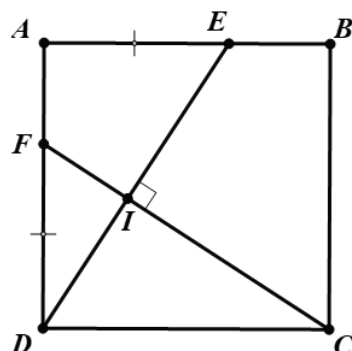
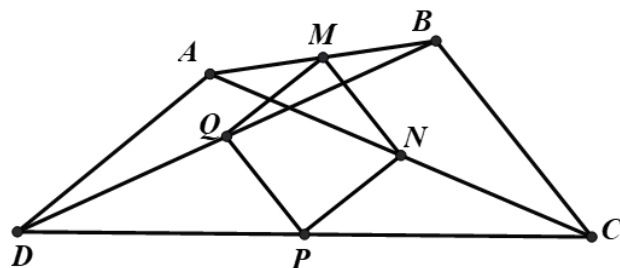
$\widehat{QPN} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) cho ta $MNPQ$ là hình vuông.

Bài 7: Gọi I là giao điểm của DE và CF .

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

$AD = DC$ (vì $ABCD$ là hình vuông).



$$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^\circ.$$

$$AE = DF \text{ (theo giả thiết)}$$

Vậy $\triangle ADE = \triangle DCF$, khi đó ta có:

$$DE = CF \text{ và } \widehat{ADE} = \widehat{DCF}.$$

Mặt khác $\widehat{DCF} + \widehat{DFC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{DFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIF} = 90^\circ$. Vậy $DE \perp CF$.

Bài 8:

$$a) \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}).$$

$$b) \text{Ta có: } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ mà } \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{ABD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{B_3} = \widehat{C_3}.$$

$$\Rightarrow BH = CH.$$

$$c) \text{Tam giác OBC có } \widehat{B_3} = \widehat{C_3}, \widehat{B_2} = \widehat{C_2}$$

$$\text{nên } \widehat{B_3} + \widehat{B_2} = \widehat{C_3} + \widehat{C_2} \Leftrightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$$

$$\Rightarrow \triangle OBC \text{ cân tại O (1).}$$

Mặt khác, vì $\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ nên ta có:

$$\widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{C_3} + \widehat{C_2} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_1} + \widehat{C_3} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle OBC$ vuông cân.

$$d) \text{Tam giác OBC cân tại O nên } OB = OC \text{ (3).}$$

$$\triangle BMH = \triangle CQH \text{ (g.c.g), } \Rightarrow BM = CQ \text{ (4).}$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } OB - BM = OC - CQ \Leftrightarrow OM = OQ$$

Mà $\triangle BNQ$ cân tại B có đường cao BO cũng là đường trung tuyến nên O là trung điểm của QN hay $ON = OQ$.

Tương tự ta có $OP = OM$.

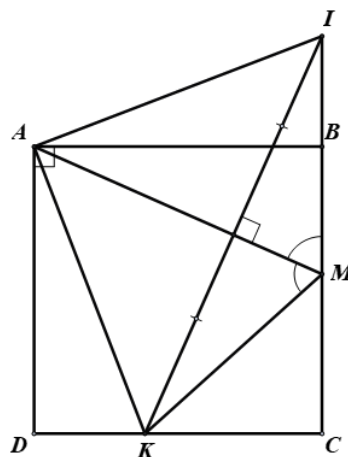
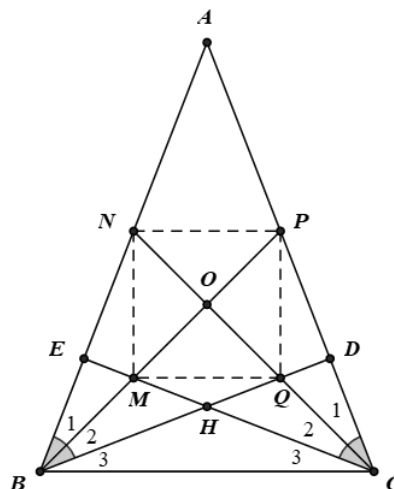
$$\Rightarrow OM = ON = OQ = OP \Rightarrow MNPQ \text{ là hình thoi.}$$

Ta lại có: $MP \perp NQ$ nên MNPQ là hình vuông

Bài 9: MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

$$\text{Ta có } AI = AK, AB = AD.$$



Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\triangle ABI = \triangle ADK$.

Từ đó ta có $\widehat{IAB} = \widehat{KAD}$.

$\widehat{IAK} = \widehat{IAB} + \widehat{BAK} = \widehat{KAD} + \widehat{BAK} = 90^\circ$. Vậy ta có: $\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{IAK} = 45^\circ$.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====