

HÌNH THOI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

* *Định nghĩa:* Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Hình thoi cũng là một hình bình hành.

* *Tính chất:*

- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
- Trong hình thoi:
 - + Hai đường chéo vuông góc với nhau.
 - + Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi.

* *Dấu hiệu nhận biết:*

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA CB-NC

Dạng 1. Chứng minh tứ giác là hình thoi

Phương pháp: Sử dụng các dấu hiệu nhận biết

- + Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- + Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- + Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- + Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC vuông góc với AD . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình thoi.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của hình thoi để chứng minh các tính chất hình học

Phương pháp: Sử dụng tính chất và định nghĩa của hình thoi để giải toán

- + Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- + Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
- Các cạnh đối song song và bằng nhau, các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- + Ngoài ra, trong hình thoi có:
 - Hai đường chéo vuông góc với nhau.
 - Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $B = 60^\circ$. Kẻ $AE \perp DC, AF \perp BC$.

- a) Chứng minh $AE = AF$.
- b) Chứng minh tam giác AEF đều.
- c) Biết $BD = 16 \text{ cm}$, tính chu vi tam giác AEF .

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = CN = CP = AQ$. Chứng minh:

- a) M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng;
- b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Dạng 3. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thoi.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của hai đáy và hai đường chéo của hình thang.

- a) Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.
- b) Hình thang $ABCD$ phải có thêm điều kiện gì để tứ giác $MPNQ$ là hình thoi?

Bài 6. Cho tam giác ABC , qua điểm D thuộc cạnh BC , kẻ các đường thẳng song song với AB và AC , cắt AC và AB theo thứ tự ở E và F .

- a) Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

b) Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $AEDF$ là hình thoi?

Dạng 4. Tổng hợp

Bài 7. Cho tam giác ABC , phân giác AD . Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E, qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F. Chứng minh EF là phân giác của $\widehat{AED}$.

Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) $EFGH$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh AC, BD, EG, FH đồng qui.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM . Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại P và đường thẳng song song với AB cắt AC tại Q.

a) Tứ giác $APMQ$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh $PQ \parallel BC$.

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F.

a) Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB .

b) Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi

c) Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD, CE . Tia phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACE}$ cắt nhau tại O, và lần lượt cắt AC, AB tại N, M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh rằng:

a) $BN \perp CM$;

b) Tứ giác $MNFK$ là hình thoi.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác ta chứng minh được:

$$EH = FG = \frac{1}{2}BD \text{ và } HG = EF = \frac{1}{2}AC$$

Mà $AC = BD \Rightarrow EH = HG = GF = FE$ nên EFGH là hình thoi.

Bài 2. Chứng minh AECF là hình bình hành có 2 đường chéo vuông góc với nhau có 4 cạnh bằng nhau.

Bài 3.

a) Do AC là phân giác của góc $\widehat{DBC}$ nên $AE = FA$

b) Có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ là các tam giác đều $\Rightarrow$

$\widehat{EAC} = \widehat{FAC} = 30^\circ$. Vậy $\triangle AFE$ cân và có $\widehat{FAE} = 60^\circ$ nên $\triangle FAE$ đều.

c) EF là đường trung bình của $\widehat{EAC} = \widehat{FAC} = 30^\circ$ DCB

$$\text{Vậy } FE = \frac{1}{2}DB = 8\text{cm};$$

Chu vi $\triangle FAE$ là 24cm

Bài 4.

a) Chứng minh được MBPD và BNDQ đều là hình bình hành $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Áp dụng định lý Talet đảo cho $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ ta có $MQ \parallel BD$ và $MN \parallel AC$.

Mà ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp MN$

MNPQ là hình chữ nhật vì có các góc ở đỉnh là góc vuông

Bài 5.

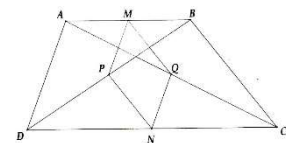
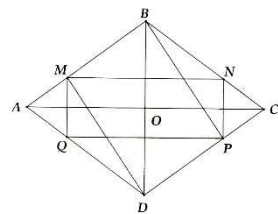
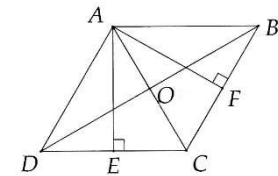
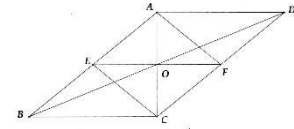
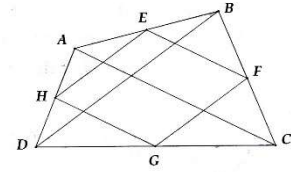
a) Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác cho $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ ta sẽ có:

$$MQ \parallel PN \parallel BC \text{ và } MQ = PN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MPNQ \text{ là hình bình hành.}$$

b) Tương tự ta có $QN \parallel MP \parallel AD$ và $QN = MP = \frac{1}{2}AD$.

Nên để MPNQ là hình thoi thì $MN \perp PQ$ khi đó $MN \perp CD$ và trung trực hay trục đối xứng của AB và CD.

$\Rightarrow$ hình thang ABCD là hình thang cân.



Bài 6.

a) Học sinh tự chứng minh

b) nếu AEDF là hình thoi thì AD là phân giác của $\widehat{FAE}$ suy ra AD là phân giác của $\widehat{BAC}$

Bài 7. Chứng minh tứ giác AEDF là hình thoi

$\Rightarrow$ EF là phân giác của $\widehat{AED}$

Bài 8.

a) Áp dụng tính chất đường trung bình cho $\triangle BAC$ và $\triangle ADC$ ta có:

$$EF \parallel HG; EF = HG = \frac{1}{2} AC \text{ và } HE \parallel FG; HE = FG = \frac{1}{2} BD.$$

Mà ABCD là hình chữ nhật nên $AB = BD \Rightarrow EFGH$ là hình thoi.

b) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD. Chứng minh EBGD và BFDH là hình bình hành suy ra AC, BD, EG, FH đồng quy tại trung điểm mỗi đường (điểm O).

Bài 9.

a) Vận dụng định lý 1 về đường trung bình của tam giác suy ra APMQ là hình thoi do có 4 cạnh bằng nhau.

b) Vì $PQ \perp AM$ mà $AM \perp BC$ (tính chất tam giác cân) nên $PQ \parallel BC$.

Bài 10.

a) Do $AM = DN \Rightarrow MADN$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{AMN} = \widehat{EMB} = \widehat{MBC}$$

Ta có $\triangle MPE = \triangle BPE$ nên $EP = FP$. Vậy MEBF là hình thoi và 2 điểm E, F đối xứng nhau qua AB.

b) Tứ giác MEBF có $MB \cap EF = P$; Lại có P trung điểm BM, P là trung điểm EF, $MB \perp EF$.

$\Rightarrow$ MEBF là hình thoi.

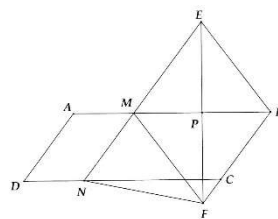
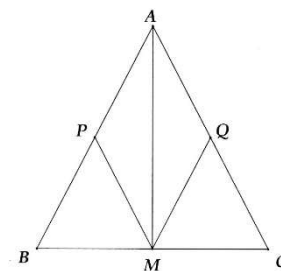
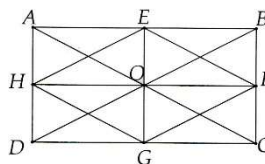
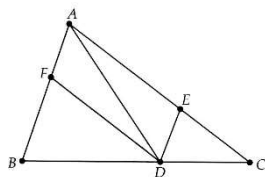
c) Để BNCE là hình thang cân thì $\widehat{CNE} = \widehat{BEN}$

Mà

$\widehat{CNE} = \widehat{D} = \widehat{MBC} = \widehat{EBM}$ nên $\triangle MEB$ có 3 góc bằng nhau, suy ra điều kiện để BNCE là hình thang cân thì $\widehat{ABC} = 60^\circ$

Bài 11.

a) Sử dụng tính chất tổng các góc trong một tam giác bằng 180° .



$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEC}$$

$$\Rightarrow \widehat{NBD} = \widehat{MCA}$$

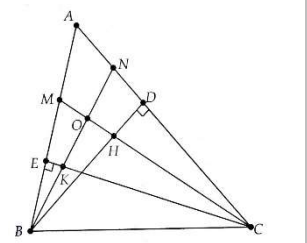
Trong $\triangle DBN$ có: $\widehat{NBD} + \widehat{BND} = 90^\circ$

Gọi $O = CM \cap BN \Rightarrow CM \perp BN = O$ (1)

b) Xét $\triangle CNK$ có: $CO \perp KN \Rightarrow CO \perp BN$, CO là phân giác $\widehat{ACE}$ nên $\triangle CNK$ cân ở $C \Rightarrow O$ là trung điểm KN (2).

Tương tự chứng minh được là trung điểm MH (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $MNHK$ là hình thoi.



B. PHIẾU BÀI NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Dạng 1: Nhận biết tứ giác là hình thoi

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB, AC . Chứng minh: tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ là đường thẳng chứa cạnh BC , vẽ tia $Bx \parallel AC$ và tia $Cy \parallel AB$. Gọi D là giao điểm của hai tia Bx và Cy . Chứng minh: tứ giác $ACDB$ là hình thoi.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại B có đường cao BE . Trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho $ED = EB$. Chứng minh: tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ cân tại B . Đường thẳng qua C song song với AB cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ tại D . Chứng minh: tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD \perp AC$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Chứng minh tứ giác $AMCN$ là hình thoi.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao tại AD, BE . Tia phân giác của $\widehat{DAC}$ cắt BE, BC theo thứ tự ở I, K . Tia phân giác của $\widehat{EBC}$ cắt AD, AC theo thứ tự ở M, N . Chứng minh: $MINK$ là hình thoi.

Dạng 2. Sử dụng tính chất hình thoi để tính toán, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau, các đường thẳng vuông góc.

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} > 90^\circ$. Kẻ $BE \perp AD$ tại $E, BF \perp DC$ tại $F, DG \perp AB$ tại $G, DH \perp BC$ tại H, BE cắt DG tại M, BF cắt DH tại N . Chứng minh các góc của tứ giác $BMDN$ bằng các góc của hình thoi $ABCD$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy D sao cho $CD = AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I . Chứng minh: $AI \perp MN$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} < 90^\circ$ và $AD = 2.AB$. Kẻ $CH \perp AB$ có $\hat{A} < 90^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Chứng minh: $\widehat{BAD} = 2.\widehat{AHM}$

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$. Trên AB, CD lấy E, F sao cho $AE = \frac{1}{3}AB, CF = \frac{1}{3}CD$. Gọi I là giao điểm của EF và DA, K là giao điểm của DE và BI . Chứng minh:

a) $\triangle BDI$ vuông.

b) $BK = IK$.

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$ có AC cắt BD tại O . Lấy E đối xứng với A qua B . Gọi I, K lần lượt là giao điểm của DE với AC và BC ; G là giao điểm của OE và BC ; H là giao điểm của OK và CE . Chứng minh: A, G, H thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 25\text{ cm}, AC + BD = 70\text{ cm}$. Tính AC, BD ?

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có AC cắt BD tại O . Kẻ $OH \perp AB$. Biết $AB = 4\text{ cm}, OH = 1\text{ cm}$. Tính các góc của hình thoi?

Dạng 3. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi.

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA

a) Chứng minh: $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Hình thang $ABCD$ thêm tính chất gì để $MNPQ$ là hình thoi

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AD . M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC . Từ M vẽ ME vuông góc với AB tại E, MF vuông góc AC tại F . Gọi I là trung điểm của AM .

a) Chứng minh $\triangle EID, \triangle DIF$ cân.

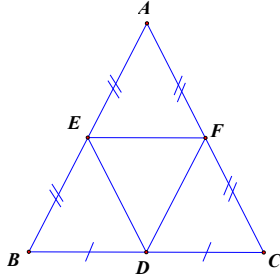
b) $\triangle ABC$ cân thêm điều kiện gì để tứ giác $DEIF$ là hình thoi?

c) Với điều kiện của $\triangle ABC$ ở câu b, gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh EF, ID, MH đồng quy.

Dạng 1: Nhận biết tứ giác là hình thoi

Bài 1: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB, AC . Chứng minh: tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

Giải



Cách 1: Vì D, E là trung điểm của các cạnh $BC, AB \Rightarrow DE$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow DE = \frac{1}{2} AC \quad (1)$$

Vì D, F là trung điểm của các cạnh $BC, AC \Rightarrow DF$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow DF = \frac{1}{2} AB \quad (2)$$

Vì E, F là trung điểm của các cạnh $AB, AC \Rightarrow AE = \frac{1}{2} AB, AF = \frac{1}{2} AC \quad (3)$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC \quad (4)$

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow AE = ED = DF = FA$.

Tứ giác $AEDF$ có $AE = ED = DF = FA \Rightarrow AEDF$ là hình thoi.

Cách 2: Vì D, F là trung điểm của các cạnh $BC, AC \Rightarrow DF$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow DF \parallel AB \text{ và } DF = \frac{1}{2} AB$$

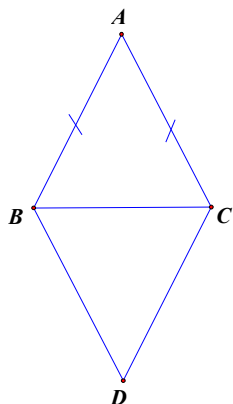
Mà $AB = AE$ và A, E, B thẳng hàng

Tứ giác $AEDF$ có $\begin{cases} DF \parallel AE \\ DF = AE \end{cases} \Rightarrow AEDF$ là hình bình hành.

Hình bình hành $AEDF$ có $AE = AF \left(= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC \right) \Rightarrow AEDF$ là hình thoi.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ là đường thẳng chứa cạnh BC , vẽ tia $Bx \parallel AC$ và tia $Cy \parallel AB$. Gọi D là giao điểm của hai tia Bx và Cy . Chứng minh: : tứ giác $ACDB$ là hình thoi.

Giải



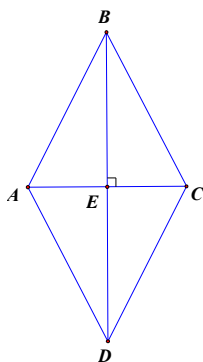
$$\text{Vì } \begin{cases} Cy // AB \\ Bx // AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD // AB \\ BD // AC \end{cases}$$

Tứ giác $ACDB$ có $\begin{cases} CD // AB \\ BD // AC \end{cases} \Rightarrow ACDB$ là hình bình hành.

Hình bình hành $ACDB$ có $AB = AC$ (tam giác ABC cân tại A) $\Rightarrow AEDF$ là hình thoi.

Bài 3 : Cho $\triangle ABC$ cân tại B có đường cao BE . Trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho $ED = EB$. Chứng minh: tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Giải



Vì $\triangle ABC$ cân tại B có đường cao $BE \Rightarrow BE$ là đường trung tuyến

$$\Rightarrow EA = EC \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } EB = ED (gt) \quad (2)$$

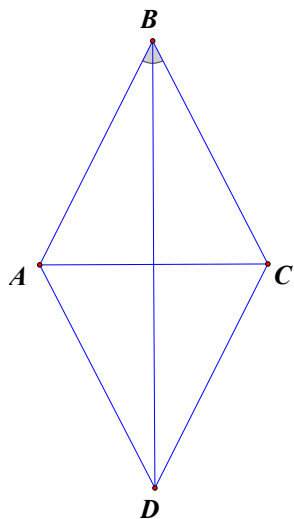
Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Vì BE là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow BE \perp AC$

Hình bình hành $ABCD$ có $BE \perp AC \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ cân tại B . Đường thẳng qua C song song với AB cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ tại D . Chứng minh: tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Giải



Vì $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong) (1)

Vì BD là phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DBC} \Rightarrow \triangle BCD$ cân tại $D \Rightarrow CB = CD$ (3)

Vì $\triangle ABC$ cân tại $B \Rightarrow CB = AB$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AB = CD$.

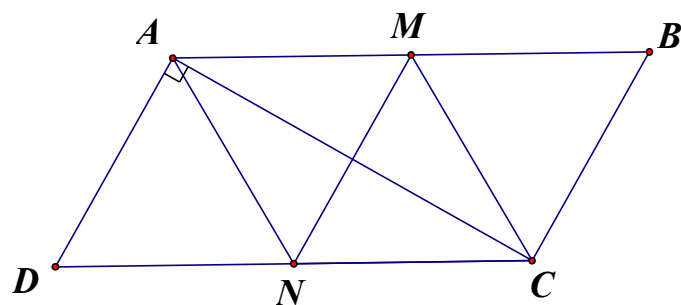
Tứ giác $ABCD$ có $\begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Cách 1: Hình bình hành $ABCD$ có DB là phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Cách 2: Hình bình hành $ABCD$ có $CB = AB \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD \perp AC$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Chứng minh tứ giác $AMCN$ là hình thoi.

Giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$

Tứ giác $AMCN$ có $\begin{cases} AM = CN \\ AM \parallel CN \end{cases} \Rightarrow AMCN \text{ là hình bình hành (1)}$

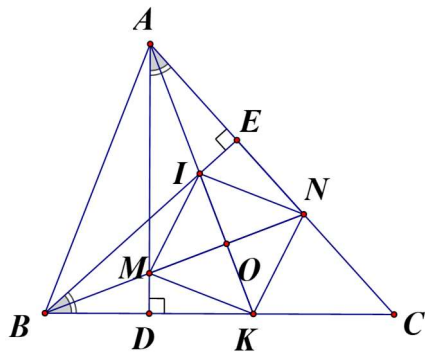
Tứ giác $AMND$ có $\begin{cases} AM = DN \\ AM \parallel DN \end{cases} \Rightarrow AMND \text{ là hình bình hành}$

$\Rightarrow AD \parallel MN$, mà $AD \perp AC \Rightarrow MN \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AMCN$ là hình thoi.

Bài 6 : Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao tại AD, BE . Tia phân giác của $\widehat{DAC}$ cắt BE, BC theo thứ tự ở I, K . Tia phân giác của $\widehat{EBC}$ cắt AD, AC theo thứ tự ở M, N . Chứng minh: $MINK$ là hình thoi.

Giải



Gọi O là giao điểm của AK và BN .

Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{CAD}$ (vì cùng phụ với $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{DAO} = \widehat{CBO} = \widehat{EBO}$

Ta có $\triangle ABD$ vuông tại D nên $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{IBA} + \widehat{IBO} + \widehat{OBD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{IBA} + \widehat{IBO} + \widehat{OAD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{OAB} = 90^\circ$

(1)

Suy ra $\triangle ABO$ vuông tại $O \Rightarrow AK \perp BN$ tại O .

$\triangle AMN$ có AO là đường cao, đồng thời là đường phân giác nên $\triangle AMN$ cân tại A

Do đó AO là đường trung trực của đoạn thẳng $MN \Rightarrow \begin{cases} IM = IN \\ KM = KN \end{cases}$ (2)

và O là trung điểm của MN (3)

$\triangle BIK$ có BO là đường cao, đồng thời là đường phân giác nên $\triangle BIK$ cân tại B

Do đó BO là đường trung trực của đoạn thẳng $IK \Rightarrow IM = KM$ (4)

và O là trung điểm của IK (5)

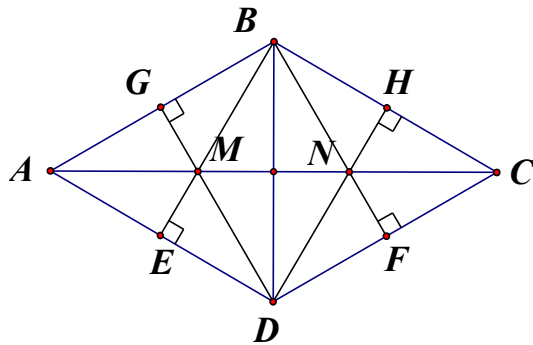
Từ (2) và (4) suy ra tứ giác $MINK$ có $IM = KM = KN = IN$

Do đó tứ giác $MINK$ là hình thoi.

Dạng 2. Sử dụng tính chất hình thoi để tính toán, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau, các đường thẳng vuông góc.

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} > 90^\circ$. Kẻ $BE \perp AD$ tại E , $BF \perp DC$ tại F , $DG \perp AB$ tại G , $DH \perp BC$ tại H , BE cắt DG tại M , BF cắt DH tại N . Chứng minh các góc của tứ giác $BMDN$ bằng các góc của hình thoi $ABCD$.

Giải



Ta có: $AB \parallel CD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

mà $BF \perp CD$

$$\Rightarrow BF \perp AB \Rightarrow \widehat{ABF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MBN} = 90^\circ - \widehat{ABE}$$

Mà $\widehat{A} = 90^\circ - \widehat{ABE}$ (vì $\triangle ABE$ vuông tại E)

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{MBN}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} DG \perp AB \\ BF \perp AB \end{cases} \Rightarrow BF \parallel DG \text{ hay } BN \parallel DM$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta có: } \begin{cases} DH \perp AD \\ BE \perp AD \end{cases} \Rightarrow BE \parallel DH \text{ hay } BM \parallel DN$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMDN$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MDN} = \widehat{A}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{MBN} \text{ (hai góc trong cùng phía)}$$

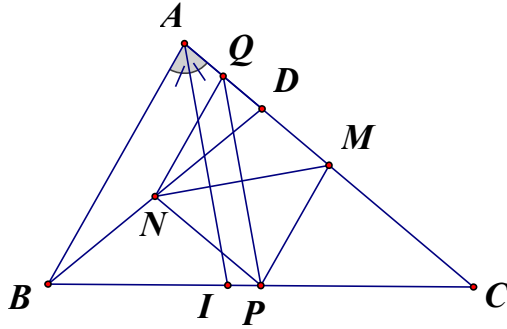
$$\widehat{MBN} + \widehat{BND} = 180^\circ \rightarrow \widehat{BND} = 180^\circ - \widehat{MBN}$$

$$\widehat{BND} = \widehat{BMD} = \widehat{B}$$

Vậy các góc của tứ giác $BMDN$ bằng các góc của tứ giác $ABCD$

Bài 2. Cho ΔABC có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy D sao cho $CD = AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I . Chứng minh: $AI \perp MN$.

Giải



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AD .

ΔABD : N, Q là trung điểm của $BD, AD \Rightarrow NQ$ là đường trung bình của ΔABD

$$\Rightarrow \begin{cases} NQ \parallel AB \\ NQ = \frac{1}{2} AB \end{cases} \quad (1)$$

ΔABC : M, P là trung điểm của $AC, BC \Rightarrow MP$ là đường trung bình của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} MP \parallel AB \\ MP = \frac{1}{2} AB \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow MQNP$ là hình bình hành.

ΔBCD : N, P là trung điểm của $BD, BC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của ΔBCD

$$\Rightarrow NP = \frac{1}{2} \cdot CD$$

Vì $CD = AB \Rightarrow NP = NQ$.

Hình bình hành $MQNP$ có $NP = NQ \Rightarrow MQNP$ là hình thoi

$\Rightarrow PQ \perp MN$ và QP là phân giác của $\widehat{NQM}$

$$QP \text{ là phân giác của } \widehat{NQM} \Rightarrow \widehat{NQP} = \frac{1}{2} \widehat{NQM} \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } AI \text{ là phân giác của } \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAI} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (4)$$

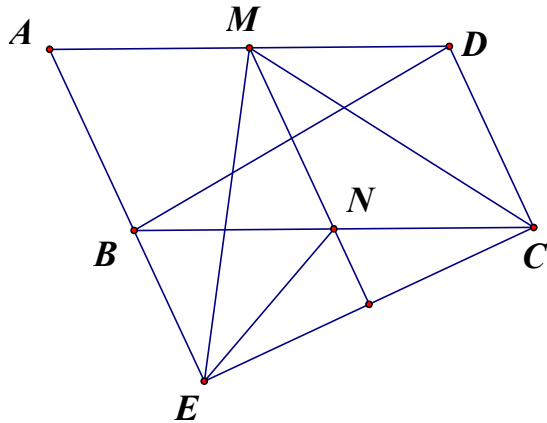
Vì $NQ \parallel AB \Rightarrow \widehat{NQM} = \widehat{BAC}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{NOP}$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\Rightarrow AI \parallel PQ$, mà $PQ \perp MN \Rightarrow AI \perp MN$

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} < 90^\circ$ và $AD = 2.AB$. Kẻ $CH \perp AB$ có $\hat{A} < 90^\circ$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Chứng minh: $\widehat{BAD} = 2.\widehat{AHM}$

Giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = BC$, $AB = CD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$

Vì M, N là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow MD = NC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$.

Tứ giác $DMNC$ có $\begin{cases} DM = CN \left(= \frac{1}{2}AB \right) \\ DM \parallel CN \end{cases} \Rightarrow DMNC$ là hình bình hành

Hình bình hành $DMNC$ có $CD = DM \left(= \frac{1}{2}AD \right) \Rightarrow DMNC$ là hình thoi.

Gọi F là giao điểm của MN và CE .

$DMNC$ là hình thoi $\Rightarrow MN \parallel CD$.

Hình thang $ADCE$ ($AE \parallel DC$) có $\begin{cases} MA = MD \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow FC = FE$

Ta có: $\begin{cases} MF \parallel AE \\ AE \perp CE \end{cases} \Rightarrow MF \perp CE$

$\triangle MEC$ có MF là đường cao và là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle MEC$ cân tại M

$$\Rightarrow MF \text{ là đường phân giác của } \widehat{EMC} \Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{CMF} \quad (1)$$

$$DMNC \text{ là hình thoi} \Rightarrow MC \text{ là phân giác của } \widehat{NMD} \Rightarrow \widehat{CMF} = \widehat{CMD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{CMF} = \widehat{CMD} = \frac{1}{2} \widehat{NMD} \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AEM} = \widehat{EMF} \text{ (vì } AB // MN) \quad (4)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BAD} = \widehat{NMD} \text{ (hai góc đồng vị)} \quad (5)$$

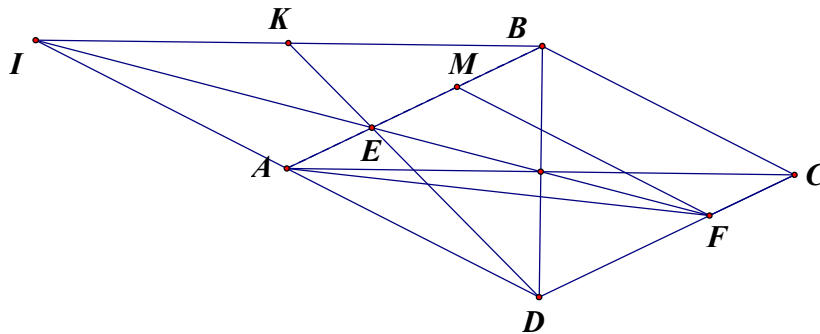
$$\text{Từ (3), (4), (5)} \Rightarrow \widehat{BAD} = 2.\widehat{AHM}$$

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$. Trên AB , CD lấy E , F sao cho $AE = \frac{1}{3}AB$, $CF = \frac{1}{3}CD$. Gọi I là giao điểm của EF và DA , K là giao điểm của DE và BI . Chứng minh:

c) $\triangle BDI$ vuông.

d) $BK = IK$.

Giải



a) Gọi M là trung điểm của $BE \Rightarrow BM = CF$. (1)

Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB // CD \Rightarrow BM // CF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BMFC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} BC = MF \\ BC // MF \end{cases} \Rightarrow MF // AD$

$$\triangle AIE = \triangle MQE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = MF, EI = EF$$

$$\Rightarrow AI = AD (= BC)$$

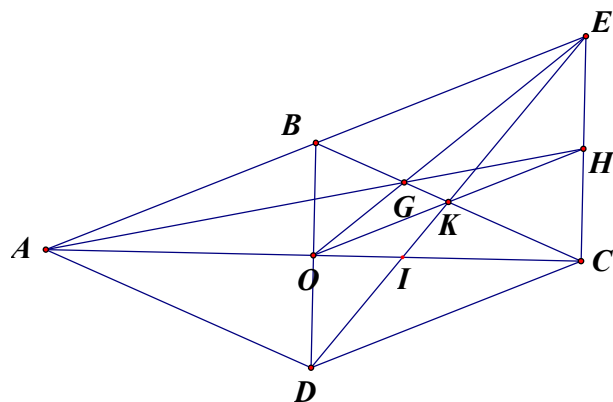
$\triangle BID$ có: $AI = AD = AB \Rightarrow \triangle BID$ vuông tại B .

b) $\triangle BID$: BA là đường trung tuyến và $BE = \frac{2}{3}BA \Rightarrow E$ là trọng tâm của $\triangle BID$

$\Rightarrow BE$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm $BI \Rightarrow BK = IK$.

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$ có AC cắt BD tại O . Lấy E đối xứng với A qua B . Gọi I, K lần lượt là giao điểm của DE với AC và BC ; G là giao điểm của OE và BC ; H là giao điểm của OK và CE . Chứng minh: A, G, H thẳng hàng.

Giải



Vì $ABCD$ là hình thoi $\begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$

Vì E đối xứng với A qua $B \Rightarrow AB = BE$

$\Rightarrow \begin{cases} BE = CD \\ BE \parallel CD \end{cases} \Rightarrow BDCE$ là hình bình hành $\Rightarrow KB = KC$

$\Delta ACE: \begin{cases} OA = OC \\ KB = KC \end{cases} \Rightarrow OK$ là đường trung bình của ΔACE

$\Rightarrow OK \parallel AB$ hay $OH \parallel AE$

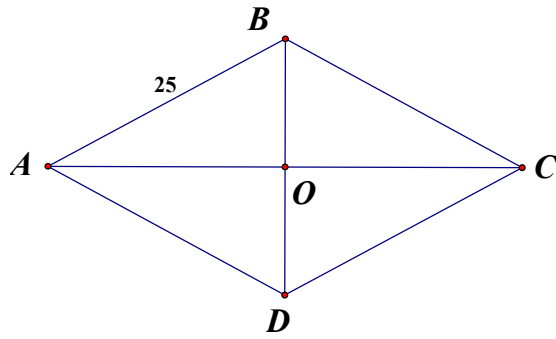
$\Delta ACE: \begin{cases} OA = OC \\ OH \parallel AE \end{cases} \Rightarrow HE = HC \Rightarrow H$ là trung điểm CE

ΔACE có EO, CB là các đường trung tuyến $\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔACE

Mà H là trung điểm $CE \Rightarrow A, G, H$ thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = 25\text{ cm}$, $AC + BD = 70\text{ cm}$. Tính AC, BD ?

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Giả sử $AC > BD$.

Đặt $OA = x, OB = y$ ($x > y$)

$$\text{Ta có: } x + y = \frac{OA}{2} + \frac{OB}{2} = \frac{70}{2} = 35 \quad (1)$$

$$\triangle OAB \text{ vuông tại } O \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25^2 = 625 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow (x + y)^2 = 35^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 35^2 = 1225 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow 2xy = 1225 - 625 = 600$$

$$\text{Mà } (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 625 - 600 = 25$$

$$\Rightarrow x - y = 5$$

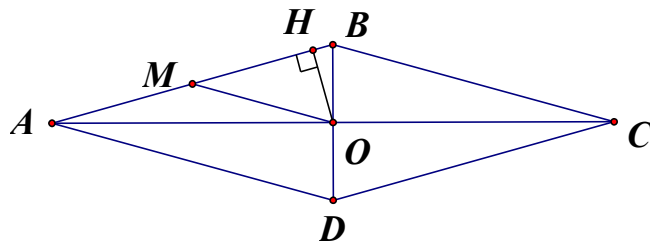
$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 35 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 20, y = 15$$

$$\text{Vậy } AC = 2.OA = 2x = 2.20 = 40 \text{ cm}$$

$$BD = 2.OB = 2y = 2.15 = 30 \text{ cm}$$

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có AC cắt BD tại O . Kẻ $OH \perp AB$. Biết $AB = 4 \text{ cm}, OH = 1 \text{ cm}$. Tính các góc của hình thoi?

Giải



Gọi M là trung điểm của AB

$\triangle OAB$ vuông tại A có M là trung điểm của $AB \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AB = 2cm$.

Vì $OH = 1cm = \frac{1}{2}OM \Rightarrow \triangle OMH$ là một nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{OMH} = 30^\circ$

Vì M là trung điểm của $AB \Rightarrow MA = MO = MB \Rightarrow \triangle MOA$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{OMH} = 2.\widehat{MAO} \Rightarrow \widehat{MAO} = \frac{\widehat{OMH}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Ta có: $\widehat{BAD} = 2.\widehat{MAO} = 2.15^\circ = 30^\circ$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 150^\circ$

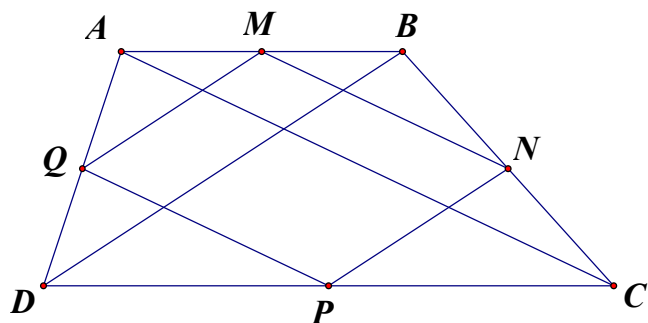
Dạng 3. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi.

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA ,

c) Chứng minh: $MNPQ$ là hình bình hành.

d) Hình thang $ABCD$ thêm tính chất gì để $MNPQ$ là hình thoi

Giải



a) Vì M, N là trung điểm của $AB, BC \Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2}AC \end{cases} \quad (1)$$

Vì P, Q là trung điểm của $CD, DA \Rightarrow PQ$ là đường trung bình của $\triangle ADC$

$$\begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2}AC \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành..

$$\text{b) Để } MNPQ \text{ là hình thoi} \Rightarrow MN = NP = \frac{1}{2} AC \quad (3)$$

Vì P, N là trung điểm của $CD, BC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle BDC$

$$\Rightarrow NP = \frac{1}{2} BD \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow AC = BD$$

Hình thang $ABCD$ có $AC = BD \Rightarrow ABCD$ là hình thang cân

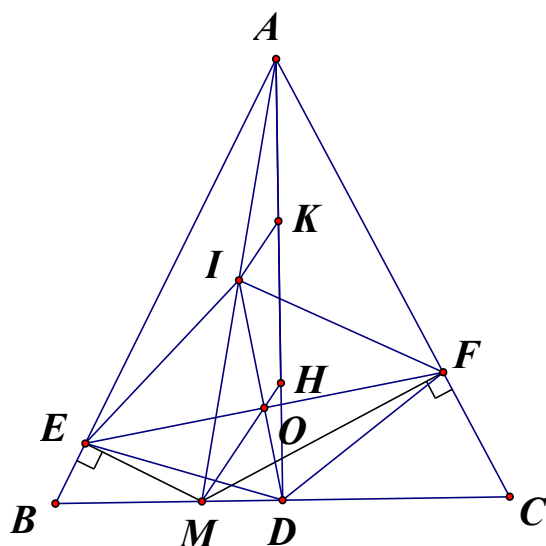
Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AD . M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Từ M vẽ ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với AC tại F . Gọi I là trung điểm của AM .

d) Chứng minh $\triangle EID, \triangle DIF$ cân.

e) $\triangle ABC$ cân thêm điều kiện gì để tứ giác $DEIF$ là hình thoi?

f) Với điều kiện của $\triangle ABC$ ở câu b, gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh EF, ID, MH đồng quy.

Giải



a) $\triangle AEM$ vuông tại E , I là trung điểm của AM

$$\text{Do đó } EI = \frac{1}{2} AM$$

$$\text{Tương tự ta có } FI = \frac{1}{2} AM, DI = \frac{1}{2} AM$$

$$\text{Do đó } EI = DI = FI$$

$$\Rightarrow \triangle EID, \triangle DIF \text{ cân tại } I$$

$$\text{b) } DEIF \text{ là hình thoi} \Rightarrow EI = ED = DF = FI$$

$$\Rightarrow \triangle EID, \triangle DIF \text{ là các tam giác đều.}$$

$$\Rightarrow \widehat{EIF} = 120^\circ.$$

$$\text{Mà } \triangle EIA \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{EIM} = 2.\widehat{EAM}$$

Mà $\triangle FIA$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{FIM} = 2.\widehat{FAM}$

$$\Rightarrow \widehat{FAM} + \widehat{EAM} = \frac{1}{2}(\widehat{FIM} + \widehat{EIM}) = \frac{1}{2}\widehat{EIF} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

Do đó để $DEIF$ là hình thoi thì $\triangle ABC$ cân tại A cần thêm điều kiện $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

c) Gọi O là giao điểm của EF và $DI \Rightarrow OE = OF$

Gọi K là trung điểm của AH

$\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều

$$\Rightarrow H \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow OH = \frac{1}{2}HA = KH$$

Ta có IK và OH lần lượt là đường trung bình của $\triangle AMH$ và $\triangle AID$

$$\Rightarrow IK \parallel MH, OH \parallel IK$$

H, M, O thẳng hàng. Do đó EF, ID, MH đồng quy tại O .

C.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CB-NC

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là hình thoi

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $DF \perp AB$ tại F . Biết $AE = DF$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$, đường trung tuyến BM . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến tia phân giác của góc A . Chứng minh rằng $ABHM$ là hình thoi.

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

1) Chứng minh: $EF = GH$; $EH = GF$.

2) Chứng minh: tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

3) Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, AC . Chứng minh: $EN = MG = \frac{BC}{2}$.

4) Tứ giác $ENGM$ là hình gì? Vì sao?

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt EF tại D , cắt BC tại G . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC . Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F .

- a) Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB ;
- b) Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi;
- c) Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân.

Dạng 2: Vận dụng kiến thức hình thoi để chứng minh và giải toán.

Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Kẻ 2 đường cao BE và BF ($E \in AD; F \in DC$).

- 1) Chứng minh: $BE = BF$.
- 2) Tính số đo $\widehat{ABC}$.
- 3) Tính số đo $\widehat{EBF}$. $\triangle BEF$ là tam giác đặc biệt gì? Vì sao?

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), rồi kéo dài một đoạn $HE = BH$.

Nối E với A , E với D . Chứng minh :

- 1) H là trung điểm AD .
- 2) Tứ giác $ABDE$ là hình thoi.
- 3) D là trung điểm CE .
- 4) $AC = BE$.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$.

- 1) Chứng minh: $\triangle ABD$ đều.
- 2) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $OA^2 = \frac{3}{4} AB^2$.
- 3) Biết chu vi của hình thoi $ABCD$ là 8 cm. Tính độ dài đường chéo BD ; AC .
- 4) Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Bài 9. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Một góc xBy thay đổi sao cho tia Bx cắt cạnh AD tại M , tia By cắt cạnh CD tại N và $\widehat{xBy} = 60^\circ$. Chứng minh :

- 1) $AB = BD$.
- 2) $\triangle ABM = \triangle DBN$.

3) Tổng độ dài $(DM + DN)$ không đổi.

Bài 10. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $AM + NC = AD$.

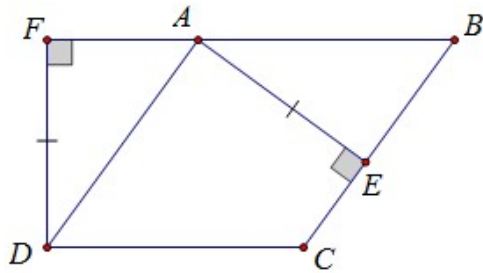
1) Chứng minh: $AM = BN$.

2) Chứng minh: $\triangle AMD = \triangle BND$.

3) Tính số đo các góc của $\triangle DMN$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $DF \perp AB$ tại F . Biết $AE = DF$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.



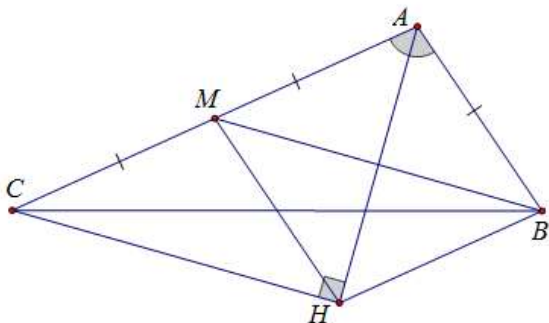
Hướng dẫn

Ta có: $\widehat{FAD} = \widehat{ABE}$ (vì $AD \parallel BC$) $\Rightarrow \triangle AFD = \triangle BEA$ (cgv - gn)

$\Rightarrow AD = AB$ (hai cạnh tương ứng).

Xét hình bình hành $ABCD$ có $AD = AB$ nên $ABCD$ là hình thoi.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$, đường trung tuyến BM . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến tia phân giác của góc A . Chứng minh rằng $ABHM$ là hình thoi.



Hướng dẫn

+ Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có HM là đường trung tuyến $\Rightarrow HM = MA = MC$.

+ Ta có: $\triangle MAH = \triangle BAH$ (c-g-c) $\Rightarrow HM = HB$.

+ Xét tứ giác $ABHM$ có: $AB = BH = HM = MA \Rightarrow ABHM$ là hình thoi.

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

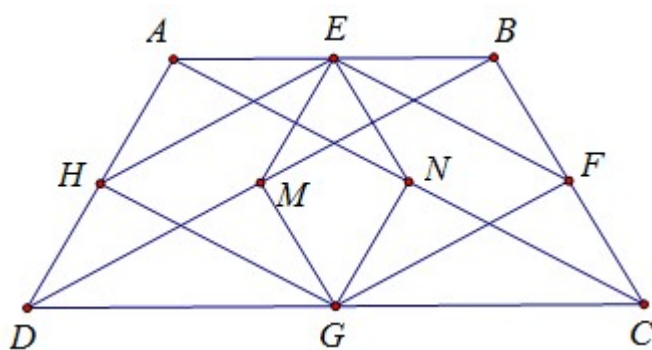
1) Chứng minh: $EF = GH$; $EH = GF$.

2) Chứng minh: tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

3) Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, AC . Chứng minh: $EN = MG = \frac{BC}{2}$.

4) Tứ giác $ENGM$ là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn



1) Vì E là trung điểm của AB , F là trung điểm của BC

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2} \cdot AC \quad (1)$$

Vì H là trung điểm của AD , G là trung điểm của DC

$\Rightarrow HG$ là đường trung bình của tam giác ADC

$$\Rightarrow HG = \frac{1}{2} \cdot AC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow EF = GH = \frac{1}{2} \cdot AC$$

Chứng minh tương tự ta được $EH = GF$

2) $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BD$ (3)

$$EF = GH = \frac{1}{2} \cdot AC \quad (4)$$

$$EH = GF = \frac{1}{2} BD \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow EF = GH = EH = GF$

Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

3) Vì E là trung điểm của AB , N là trung điểm của AC

$\Rightarrow EN$ là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow EN = \frac{1}{2} BC \quad (6)$$

Vì G là trung điểm của CD , M là trung điểm của BD

$\Rightarrow GM$ là đường trung bình của tam giác BCD

$$\Rightarrow MG = \frac{1}{2} BC \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) và (7)} \Rightarrow EN = MG = \frac{1}{2} BC \quad (8)$$

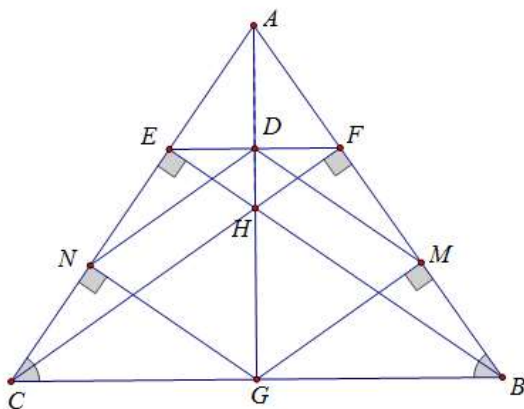
$$4) \quad \text{Chứng minh tương tự ta được } ME = NG = \frac{1}{2} AD \quad (9)$$

$$ABCD \text{ là hình thang cân} \Rightarrow AD = BC \quad (10)$$

$$\text{Từ (8),(9),(10)} \Rightarrow EN = MG = ME = NG$$

Suy ra tứ giác $ENGM$ là hình thoi.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt EF tại D , cắt BC tại G . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC . Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.



Hướng dẫn

$\triangle ABE = \triangle ACF$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$.

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.

Xét $\triangle EBC$ có $GN \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB = GC$ nên $NE = NC$.

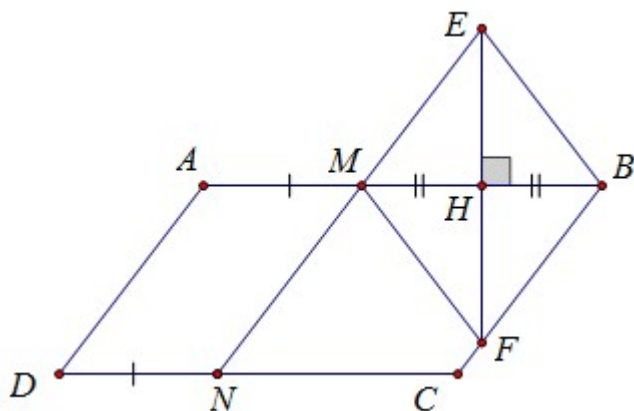
Chúng minh tương tự ta được $MF = MB$.

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F .

- Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB ;
- Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi;
- Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân.



Hướng dẫn

a) Gọi H là giao điểm của EF và MB .

Ta có: $AMND$ là hình bình hành ($AM = DN$ và $AM \parallel ND$) $\Rightarrow AD \parallel NM$.

Lại có $AD \parallel BC$, nên suy ra $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{HFB}$.

Ta có: $\triangle EHM = \triangle FHB$ (cgv - gn) $\Rightarrow HE = HF$.

Mà $EF \perp AB$ nên E và F đối xứng với nhau qua AB .

b) Xét tứ giác $MEBF$ có $HE = HF$, $HB = HM$, $EF \perp MB$ nên $MEBF$ là hình thoi.

c) Để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân thì $\widehat{ENC} = \widehat{NEB}$.

Ta có: $\widehat{ENC} = \widehat{EMB}$ (vì $AB \parallel CD$); $\widehat{FBH} = \widehat{HBE}$ (vì $\triangle FBE$ cân tại B);

$\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$ (vì $MBCN$ là hình bình hành).

Xét $\triangle EMB$ có: $\widehat{EMB} = \widehat{MBE} = \widehat{BEM}$ nên suy ra $\widehat{EMB} = \widehat{MBE} = \widehat{BEM} = 60^\circ$.

Vậy để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân thì $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

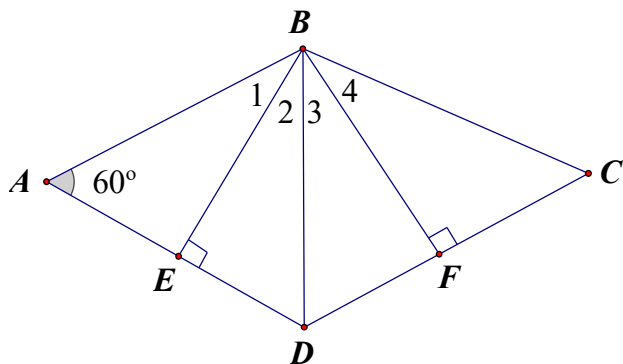
Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Kẻ 2 đường cao BE và BF ($E \in AD$; $F \in DC$).

1) Chứng minh: $BE = BF$.

2) Tính số đo $\widehat{ABC}$.

3) Tính số đo $\widehat{EBF}$. $\triangle BEF$ là tam giác đặc biệt gì? Vì sao?

Hướng dẫn



1) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD = CB = CD$

Mặt khác $\widehat{A} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD, \triangle CBD$ đều (vì tam giác cân có một góc bằng 60°)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{\widehat{ABD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ và } \widehat{B_3} = \widehat{B_4} = \frac{\widehat{DBC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

(trong tam giác đều thì đường cao cũng là đường phân giác).

Xét 2 tam giác vuông $\triangle BED$ và $\triangle BFD$ có:

$$\widehat{B_2} = \widehat{B_3} = 30^\circ$$

BD cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BED = \triangle BFD \text{ (cạnh huyền- góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BE = BF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$2) \text{ Ta có: } \widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$$

$$3) \text{ Ta có: } \widehat{EBF} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

Xét tam giác $\triangle BEF$ có:

$$BE = BF$$

$$\widehat{EBF} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BEF \text{ là tam giác đều.}$$

Bài 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, kẻ $BH \perp AD$ ($H \in AD$), rồi kéo dài một đoạn $HE = BH$.

Nối E với A , E với D . Chứng minh :

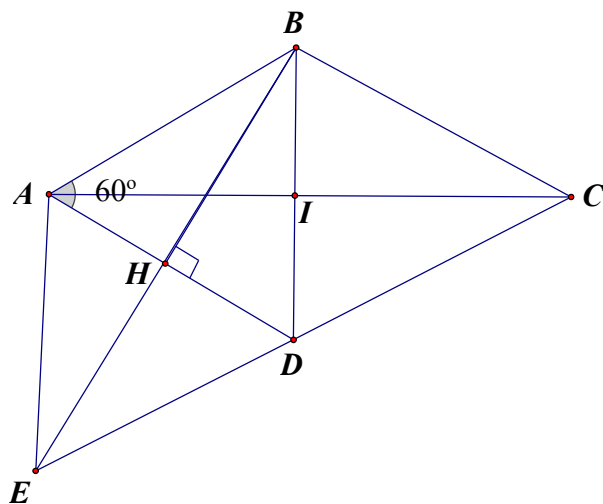
1) H là trung điểm AD .

2) Tứ giác $ABDE$ là hình thoi.

3) D là trung điểm CE .

4) $AC = BE$.

Hướng dẫn



1) Ta có: $AB = AD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

Và $\widehat{A} = 60^\circ$

Suy ra: $\triangle ABD$ là tam giác đều.

Mà $BH \perp AD$ nên H là trung điểm của AD .

2) Xét tứ giác $ABDE$ có:

$HA = HD$ (chứng minh trên)

$HE = HB$ (Giả thiết)

$\Rightarrow ABDE$ là hình bình hành.

Mặc khác: $AD \perp BE$ nên $ABDE$ là hình thoi

(vì hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi).

3) Ta có:

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow DC = AB, DC \parallel AB$ (1)

$ABDE$ là hình thoi $\Rightarrow DE = AB, DE \parallel AB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra C, D, E thẳng hàng (theo tiên đề Ôclit) và $DC = DE$.

Vậy D là trung điểm của CE .

4) Ta có:

$AC = 2AI$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

$BE = 2BH$ (vì $ABDE$ là hình thoi)

Mà $BH = AI$ (cùng là đường cao của tam giác đều ABD)

$\Rightarrow AC = BE$.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$.

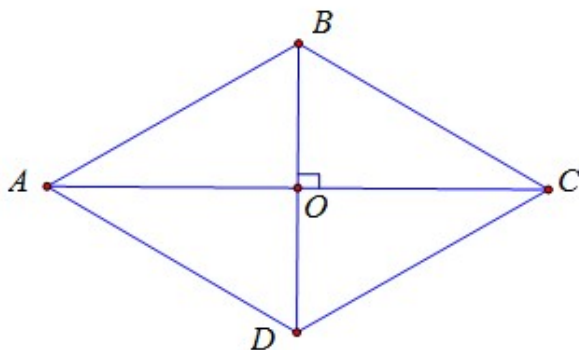
1) Chứng minh: $\triangle ABD$ đều.

2) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $OA^2 = \frac{3}{4} AB^2$.

3) Biết chu vi của hình thoi $ABCD$ là 8 cm . Tính độ dài đường chéo BD ; AC .

4) Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Hướng dẫn



1) $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AD$ mà $AB = BD$ (giả thiết)

Nên $AB = AD = BD$.

Vậy $\triangle ABD$ là tam giác đều.

2) $\triangle OAB$ vuông tại $O \Rightarrow OA^2 = AB^2 - OB^2$ mà $OB = \frac{BD}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow OB^2 = \frac{AB^2}{4}$.

Do đó : $OA^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4} AB^2$.

3) Chu vi $ABCD$ là 8 cm $\Rightarrow BD = AB = 2$ cm nên $BO = \frac{BD}{2} = 1$ cm .

Tam giác vuông OAB : $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AO = \sqrt{3}$ cm .

$AC = 2AO = 2\sqrt{3}$ cm . Vậy $BD = 2$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm .

4) Diện tích hình thoi $ABCD$ là : $\frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} 2\sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} .$

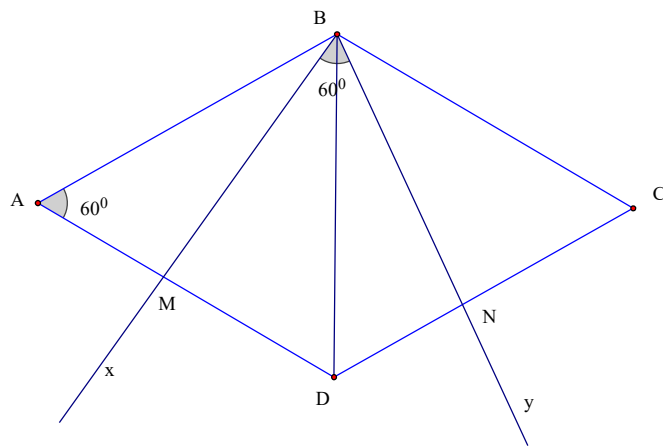
Bài 9. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Một góc xBy thay đổi sao cho tia Bx cắt cạnh AD tại M , tia By cắt cạnh CD tại N và $\widehat{xBy} = 60^\circ$. Chứng minh :

1) $AB = BD$.

2) $\triangle ABM = \triangle DBN$.

3) Tổng độ dài $(DM + DN)$ không đổi.

Hướng dẫn



1) Chứng minh $AB = BD$

Ta có $ABCD$ là hình thoi nên:

$$AB = AD \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại } A$$

Mà $\widehat{A} = 60^\circ$ (giả thiết) nên suy ra $\triangle ABD$ đều.

$$\Rightarrow AB = BD .$$

2) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle DBN$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBN$ có:

$$\widehat{BAM} = \widehat{BDN} = 60^\circ \text{ (Gt)}$$

$$AB = AD \text{ (cmt)}$$

$\widehat{ABM} = \widehat{DBN}$ (Cùng cộng với $\widehat{MBD}$ tạo thành góc có số đo 60°)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBN$ (g.c.g).

3) Chứng minh tổng độ dài $(DM + DN)$ không đổi.

Do $\triangle ABM = \triangle DBN$ (cmt) nên $AM = DN$ (1)

Từ (1) suy ra: $DM + DN = DM + AM \Rightarrow DM + DN = AD$.

Vì AD không đổi nên $(DM + DN)$ không đổi.

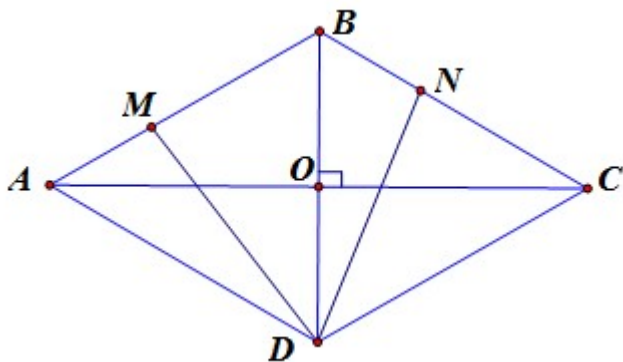
Bài 10. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD$. Gọi M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho $AM + NC = AD$.

1) Chứng minh: $AM = BN$.

2) Chứng minh: $\triangle AMD = \triangle BND$.

3) Tính số đo các góc của $\triangle DMN$.

Hướng dẫn



1) Theo bài ra ta có: $AM + NC = AD$
 Lại có: $BN + NC = BC = AD$ ($ABCD$ là hình thoi) }

$\Rightarrow AM = BN$.

2) + Có: $AB = AD$ ($ABCD$ là hình thoi) }
 + Lại có: $AB = BD$ (GT) }

$\Rightarrow AD = BD = AB$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MAD} = 60^\circ (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} + \text{C\acute{o:}} \quad \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad (ABCD \text{ là hình thoi}) \\ + \text{L\acute{a}i c\acute{o:}} \quad \widehat{ABD} = 60^\circ \quad (\triangle ABD \text{ là tam giác đều}) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{NBD} = 60^\circ (2)$$

$$+ \text{T\`ur (1) và (2) ta c\acute{o:}} \quad \widehat{MAD} = \widehat{NBD}$$

+ Xét $\triangle AMD$ và $\triangle BND$ c\acute{o:}

$$\left. \begin{array}{l} AM = BN \text{ (CMT)} \\ \widehat{MAD} = \widehat{NBD} \text{ (CMT)} \\ AD = BD \text{ (CMT)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle BND \text{ (c.g.c)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) + \text{C\acute{o}} \quad \triangle AMD = \triangle BND \text{ (CMT)} \\ \Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NDB} \text{ (c\acute{a}p g\`oc t\`uong \`ung)} \end{array} \right\}$$

$$+ \text{M\`a:} \quad \widehat{MDA} + \widehat{MDB} = \widehat{ADB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NDB} + \widehat{MDB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MDN} = 60^\circ$$

$$+ \text{C\acute{o}} \quad \triangle AMD = \triangle BND \text{ (CMT)}$$

$$\Rightarrow MD = ND \text{ (c\acute{a}p c\`anh t\`uong \`ung)}$$

$$\Rightarrow \triangle MNB \text{ là tam giác cân tại D, mà } \widehat{MDN} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MNB \text{ là tam giác đều}$$

$$\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{MND} = \widehat{MDN} = 60^\circ.$$

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====