

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN – HÌNH CẦU****H. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN****Mục Lục**

H. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.....	1
📁. HÌNH TRỤ	2
📁. Lý thuyết.....	2
📁. Bài tập.....	2
📁. HÌNH NÓN.....	11
📁. Lý thuyết.....	11
📁. Bài tập.....	12
📁. HÌNH CẦU	20
📁. Lý thuyết.....	20
📁. Bài tập.....	20
📁. BÀI TẬP TỔNG HỢP	28

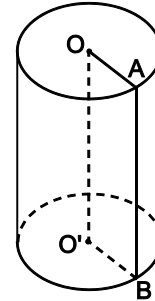
📁. HÌNH TRỤ

📁. Lý thuyết

1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABO'O$ một vòng quanh cạnh OO' cố định ta được một hình trụ.

- Hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Đường thẳng OO' gọi là trục của hình trụ.
- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.



2. Cắt hình trụ

- Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy thì mặt cắt là một hình tròn bằng hình tròn đáy.
- Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật.

3. Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi Rh ;$$

$$S_p = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \text{ hay } S_p = 2\pi R(h + R)$$

(R là bán kính đáy; h là chiều cao).

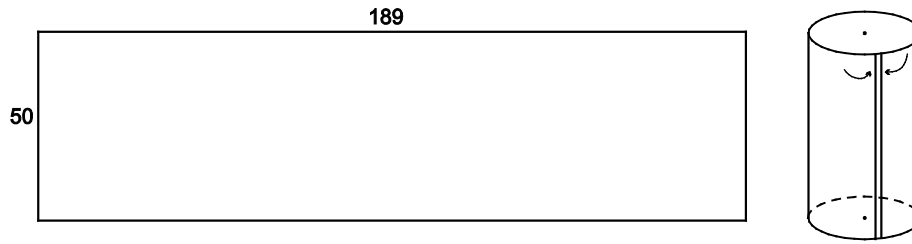
4. Thể tích hình trụ

$$V = S.h = \pi R^2 h.$$

📁. Bài tập

Bài 1. Từ một tấm tôn hình chữ nhật, kích thước $50\text{cm} \times 189\text{cm}$ người ta cuộn tròn lại thành mặt xung quanh của một hình trụ cao 50cm . Hãy tính:

- Diện tích tôn để làm hai đáy;
- Thể tích của hình trụ được tạo thành.

**Hướng dẫn giải**

a) Vì chiều cao của hình trụ là 50cm nên chu vi hình tròn đáy là $C = 189\text{cm}$.

$$\text{Ta có } C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{189}{2\pi} \approx 30(\text{cm})$$

Vậy bán kính hình tròn đáy là 30cm.

$$\text{Diện tích tôn để làm hai đáy là: } S = 2\pi R^2 = 2 \cdot \pi \cdot 30^2 = 1800\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{b) Thể tích hình trụ là: } V = \pi R^2 h = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 45000\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Nhận xét: Để trả lời hai câu hỏi của bài toán, ta cần biết bán kính của đường tròn đáy. Muốn vậy, phải xác định cạnh nào của tấm tôn cần giữ nguyên để làm chiều cao của hình trụ, cạnh nào phải cuộn lại. Từ công thức tìm chu vi của hình tròn suy ra cách tìm bán kính.

Bài 2. Một hình trụ có chiều cao là 25cm và diện tích toàn phần là $1200\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy hình trụ là R , chiều cao hình trụ là h .

$$\text{Vì diện tích toàn phần của hình trụ là } 1200\pi \text{ cm}^2 \text{ nên } 2\pi R(h + R) = 1200\pi.$$

$$\text{Suy ra } R(25 + R) = 600 \Leftrightarrow R^2 + 25R - 600 = 0.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm: } R_1 = 15 \text{ (chọn); } R_2 = -40 \text{ (loại)}.$$

Vậy bán kính đáy hình trụ là 15cm.

$$\text{Thể tích hình trụ là: } V = \pi R^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 25 = 5625\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Nhận xét: Ta đã biết chiều cao nên muốn tính thể tích hình trụ chỉ cần tìm bán kính đáy. Do đó ta tìm bán kính đáy từ công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ.

Bài 3. Một hình trụ với ABCD là một mặt cắt song song với trục. Diện tích mặt cắt là 96cm^2 , $AB = 8\text{cm}$. Biết tâm O cách AB là 3cm . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Hướng dẫn giải

Mặt cắt ABCD là một hình chữ nhật. Diện tích mặt cắt là 96cm^2 nên $AB \cdot AD = 96\text{cm}^2$.

$$\text{Suy ra } AD = \frac{96}{AB} = \frac{96}{8} = 12(\text{cm})$$

Vậy chiều cao của hình trụ là 12cm .

Trong mặt phẳng đáy, vẽ $OH \perp AB$.

Ta có $HA = HB = 8 : 2 = 4(\text{cm})$.

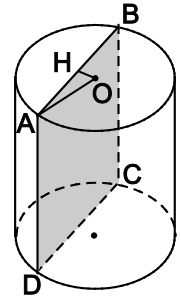
Xét $\triangle AOH$ vuông tại H có $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Suy ra $OA = 5\text{cm}$. Vậy bán kính đáy là 5cm .

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi (\text{cm}^2)$.

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi (\text{cm}^3)$.

Nhận xét: Để xác định đúng chiều cao và bán kính đáy của hình trụ trong ví dụ này, ta dựa vào mặt cắt ABCD. Từ số đo diện tích là 96cm^2 và $AB = 8\text{cm}$, ta tìm ra chiều cao. Từ khoảng cách $OH = 3\text{cm}$ ta tìm được bán kính nhờ định lý Py-ta-go.



Bài 4. Một hình trụ có diện tích toàn phần bằng $432\pi \text{ cm}^2$ và chiều cao bằng 5 lần bán kính đáy. Chứng minh rằng diện tích xung quanh bằng 10 lần diện tích đáy.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h.

Vì chiều cao bằng 5 lần bán kính đáy và diện tích toàn phần bằng $432\pi \text{ cm}^2$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} h = 5 \cdot R & (1) \\ 2\pi R(h + R) = 432\pi & (2) \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế:

Thế $h = 5R$ vào phương trình (2) ta được:

$$2\pi R(5R + R) = 432\pi \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow R = \pm 6. \text{ Giá trị } R = -6 \text{ bị loại.}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} R = 6 \\ h = 30 \end{cases}$$

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 30 = 360\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích đáy của hình trụ là: $S = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

$$\text{Ta thấy } \frac{S_{xq}}{S} = \frac{360\pi}{36\pi} = 10 \text{ (lần).}$$

Do đó diện tích xung quanh gấp 10 lần diện tích đáy.

Bài 5. Cho hình trụ có bán kính đáy là 10cm và diện tích xung quanh là $420\pi \text{ cm}^2$. Vẽ một đường sinh PQ cố định. Lấy điểm M trên đường tròn đáy, có chứa điểm Q. Xác định vị trí của điểm M để PM lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính hình trụ là R và chiều cao hình trụ là h.

$$\text{Ta có: } S_{xq} = 2\pi Rh \text{ suy ra } h = \frac{S_{xq}}{2\pi R} = \frac{420\pi}{2\pi \cdot 10} = 21(\text{cm})$$

Ta có PQ là đường sinh nên $PQ = 21\text{cm}$ và PQ vuông góc với mặt phẳng đáy. Suy ra $PQ \perp QM$.

Xét $\triangle PQM$ vuông tại Q, ta có:

$$PM^2 = PQ^2 + QM^2 = 21^2 + QM^2 = 441 + QM^2.$$

Do đó PM lớn nhất $\Leftrightarrow$ QM lớn nhất $\Leftrightarrow$ QM là đường kính

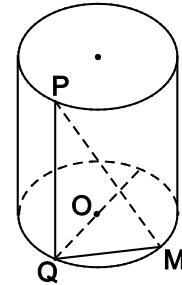
$$\Leftrightarrow QM = 20\text{cm}.$$

Vậy $\max PM = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29(\text{cm})$ khi QM là đường kính của đường tròn đáy.

Lưu ý: Trong hình trụ, đường sinh vuông góc với đáy nên vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong đáy, do đó $PQ \perp QM$.

Bài 6. Một hình trụ có thể tích là V (m^3) và diện tích toàn phần là S (m^2). Gọi R là bán kính đáy hình trụ và h là chiều cao của nó. Biết thương $\frac{V}{S}$ bằng $\frac{1}{2}(\text{m})$, chứng minh

$$\text{rằng } \frac{1}{h} + \frac{1}{R} = 1$$



Hướng dẫn giải

Ta có $V = \pi R^2 h$; $S = 2\pi R(h + R)$. Theo đề bài ta có: $\frac{V}{S} = \frac{1}{2}$

$$\text{Suy ra } \frac{\pi R^2 h}{2\pi R(h + R)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Rh = R + h \Leftrightarrow 1 = \frac{R + h}{Rh} \Leftrightarrow \frac{1}{h} + \frac{1}{R} = 1$$

Bài 7: Một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao. Cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng chứa trục ta được một mặt cắt có diện tích là 80cm^2 . Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h .

Mặt cắt chứa trục là một hình chữ nhật có một cạnh là $2R$ và cạnh kề là h .

$$\text{Theo các điều kiện trong đề bài ta có: } \begin{cases} R = \frac{2}{5}h & (1) \\ 2R \cdot h = 80 & (2) \end{cases}$$

Thế R từ (1) vào (2) ta được: $2 \cdot \frac{2}{5}h \cdot h = 80$ hay $4h^2 = 400 \Rightarrow h = \pm 10$.

Giá trị $h = -10$ bị loại. Vậy chiều cao của hình trụ là 10cm .

$$\text{Bán kính đáy là } R = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4(\text{cm})$$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 4(10 + 4) = 112\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 8: Một hình trụ có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ đường kính đáy. Biết thể tích của nó là $768\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h .

Vì chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ đường kính nên chiều cao bằng $\frac{3}{2}$ bán kính đáy.

$$\text{Vậy } h = \frac{3}{2}R$$

Ta có $V = \pi R^2 h$ mà $h = \frac{3}{2}R$ nên $V = \pi R^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}\pi R^3$

Theo đề bài ta có: $\frac{3}{2}\pi R^3 = 786 \Rightarrow R^3 = 512 \Rightarrow R = \sqrt[3]{512} = 8 \text{ (cm)}$.

Vậy $h = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ (cm)}$.

Do đó diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 8 \cdot 12 = 192\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 9: Một hộp bánh hình trụ có chiều cao nhỏ hơn bán kính đáy là 1,5cm. Biết thể tích của hộp là $850\pi \text{ cm}^3$, tính diện tích vỏ hộp.

Hướng dẫn giải

** Tìm hướng giải*

Diện tích vỏ hộp chính là diện tích toàn phần của hình trụ. Tìm được bán kính đáy sẽ tìm được chiều cao do đó sẽ tìm được diện tích toàn phần.

** Trình bày lời giải*

Gọi R và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hộp bánh hình trụ.

Ta có $h = R - 1,5$.

Vì thể tích của hộp là $850\pi \text{ cm}^3$ nên: $\pi R^2 h = 850\pi$.

Suy ra $R^2(R - 1,5) = 850 \Leftrightarrow R^3 - 1,5R^2 - 850 = 0 \Leftrightarrow 2R^3 - 3R^2 - 1700 = 0$

$\Leftrightarrow 2R^3 - 20R^2 + 17R^2 - 170R + 170R - 1700 = 0$

$\Leftrightarrow 2R^2(R - 10) + 17R(R - 10) + 170(R - 10) = 0$

$\Leftrightarrow (R - 10)(2R^2 + 17R + 170) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} R - 10 = 0 & (1) \\ 2R^2 + 17R + 170 = 0 & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) có nghiệm $R = 10$ (thoả mãn).

Phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy bán kính đáy hộp là 10cm.

Chiều cao của hộp là: $10 - 1,5 = 8,5 \text{ (cm)}$.

Diện tích vỏ hộp là: $S = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 10(8,5 + 10) = 370\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 10: Một hình trụ có diện tích toàn phần gấp hai lần diện tích xung quanh. Biết bán kính đáy hình trụ là 6cm. Tính thể tích hình trụ.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao hình trụ đó là h .

Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh$.

Suy ra $2\pi R^2 = 2\pi Rh \Rightarrow R = h = 6\text{cm}$.

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 11: Một chậu hình trụ cao 20cm. Diện tích đáy bằng nửa diện tích xung quanh. Trong chậu có nước cao đến 15cm. Hỏi phải thêm bao nhiêu nước vào chậu để nước vừa đầy chậu?

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy chậu và h là chiều cao của chậu.

Vì diện tích đáy bằng nửa diện tích xung quanh nên $\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi Rh$

$\Rightarrow R = h = 20\text{cm}$.

Thể tích của chậu là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 20 = 8000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích nước trong chậu là: $V_1 = \pi \cdot 20^2 \cdot 15 = 6000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích nước phải thêm vào chậu là: $V_2 = V - V_1 = 8000\pi - 6000\pi = 2000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 12: Một hình trụ có thể tích là 200cm^3 . Giảm bán kính đáy đi hai lần và tăng chiều cao lên hai lần ta được một hình trụ mới. Tính thể tích của hình trụ này.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h .

Thể tích của hình trụ này là: $V_1 = \pi R^2 h$.

Nếu giảm bán kính đáy đi hai lần và tăng chiều cao lên hai lần thì bán kính đáy là $\frac{R}{2}$ và chiều cao là $2h$.

Thể tích hình trụ về sau là: $V_2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot (2h) = \frac{\pi R^2 h}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 13: Một viên than tổ ong có dạng hình trụ, đường kính đáy là 114mm, chiều cao là 100mm. Viên than này có 19 lỗ “tổ ong” hình trụ có trục song song với trục của viên than, mỗi lỗ có đường kính 12mm. Tính thể tích nhiên liệu đã được nén của mỗi viên than (làm tròn đến cm^3).

Hướng dẫn giải

Thể tích viên than (kể cả 19 lỗ) là:

$$V_1 = \pi R_1^2 h = \pi 57^2 \cdot 100 \approx 1020186 (\text{mm}^3) \approx 1020 (\text{cm}^3)$$

Thể tích 19 lỗ “tổ ong” là:

$$V_2 = 19\pi R_2^2 h = 19 \cdot \pi 6^2 \cdot 100 \approx 214776 (\text{mm}^3) \approx 215 (\text{cm}^3)$$

Thể tích nhiên liệu đã được nén của mỗi viên than là:

$$V = V_1 - V_2 = 1020 - 215 = 805 (\text{cm}^3).$$

Bài 14: Một cây gỗ hình trụ có đường kính đáy là 4dm và dài 5m. Từ cây gỗ này người ta xẻ thành một cây cột hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông lớn nhất. Tính thể tích phần gỗ bị loại bỏ đi.

Hướng dẫn giải

Thể tích cây gỗ hình trụ là: $V_1 = \pi R^2 h \approx 3,14 \cdot 2^2 \cdot 50 = 628 (\text{dm}^3)$.

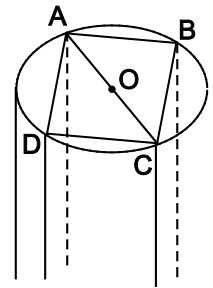
Diện tích đáy hình vuông của hình lăng trụ đứng là:

$$S = AB^2 = \frac{AC^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8 (\text{dm}^2).$$

Thể tích hình lăng trụ đứng là: $V_2 = S \cdot h = 8 \cdot 50 = 400 (\text{dm}^3)$.

Thể tích phần gỗ bị loại bỏ đi là:

$$V = V_1 - V_2 = 628 - 400 = 228 (\text{dm}^3).$$



Hình 23.9

Bài 15: Hai mặt của một cổng vòm thành cổ có dạng hình chữ nhật, phía trên là một nửa hình tròn có đường kính bằng chiều rộng của cổng. Biết chiều rộng của cổng là 3,2m, chiều cao của cổng (phần hình chữ nhật) bằng 2,8m và chiều sâu của cổng bằng 3,0m. Tính thể tích phần không gian bên trong cổng (làm tròn đến phần mười m^3).

Hướng dẫn giải

Phần không gian bên trong cổng gồm một hình hộp chữ nhật và một nửa hình trụ.

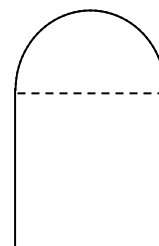
Thể tích phần hình hộp chữ nhật là: $V_1 = 3,2 \cdot 2,8 \cdot 3,0 = 26,9 \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích phần nửa hình trụ là:

$$V_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot (1,6)^2 \cdot 3,0 = 12,1 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Thể tích phần không gian bên trong cổng là:

$$V = V_1 + V_2 = 26,9 + 12,1 = 39,0 \text{ (m}^3\text{)}.$$



Bài 16: Một hình trụ có thể tích bằng $125\pi \text{ cm}^3$. Biết diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ này.

Hướng dẫn giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Vì diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy nên ta có:

$$2\pi R h = 2\pi R^2 \Rightarrow h = R. \text{ Theo đề bài, thể tích hình trụ bằng } 125\pi \text{ cm}^3 \text{ nên } \pi R^2 h = 125\pi.$$

Suy ra $\pi R^3 = 125\pi$ (vì $h = R$). Do đó $R^3 = 125 \Rightarrow R = 5\text{cm}.$

Vậy $h = 5\text{cm}.$

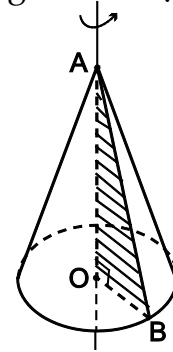
📁. HÌNH NÓN

📁. Lý thuyết

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOB một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định ta được một hình nón:

- Đáy là hình tròn (O) bán kính OB.
- Mặt xung quanh do cạnh OB quét nên. Mỗi vị trí của OB gọi là một đường sinh.
- A gọi là đỉnh; AO là đường cao.



2. Diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{xq} = \pi Rl;$$

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 \text{ hay } S_{tp} = \pi R(l + R)$$

(R là bán kính đáy; l là đường sinh).

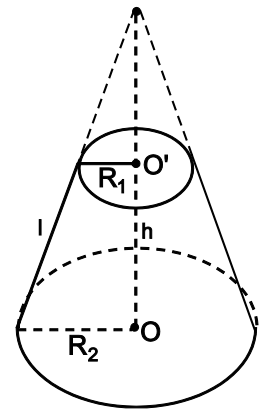
3. Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \text{ (h là chiều cao).}$$

4. Hình nón cụt

Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn.

Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy được gọi là hình nón cụt.



5. Diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt

$$S_{xq} = \pi (R_1 + R_2) l ; \quad V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$$

(R_1, R_2 là các bán kính; l là đường sinh; h là chiều cao).

Bài tập

Bài 1: Một hình nón có đường cao bằng 24cm và thể tích bằng $800\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích toàn phần của hình nón này.

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy và h là chiều cao của hình nón.

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ Suy ra } R^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3 \cdot 800\pi}{\pi \cdot 24} = 100 (\text{cm}^2)$$

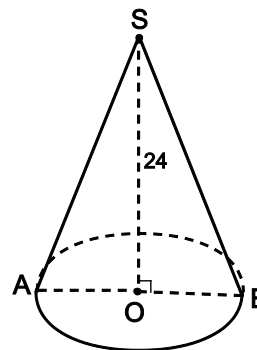
Do đó $R = 10\text{cm}$. Vậy bán kính đáy hình nón là 10cm.

Đường sinh của hình nón này là:

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 (\text{cm})$$

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{tp} = \pi R(l + R) = \pi \cdot 10(26 + 10) = 360\pi (\text{cm}^2).$$



Nhận xét: Mấu chốt trong bài toán này là tìm được bán kính đáy, từ đó tính được đường sinh và do đó tính được diện tích toàn phần của hình nón.

Bài 2. Mặt cắt chứa trục của một hình nón là một tam giác đều có diện tích là $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Hướng dẫn giải

* Tìm hướng giải

Để tính thể tích hình nón ta cần biết bán kính đáy và chiều cao của nó. Vì mặt cắt chứa trục là một tam giác đều nên nếu biết cạnh của tam giác đều là tính được tất cả.

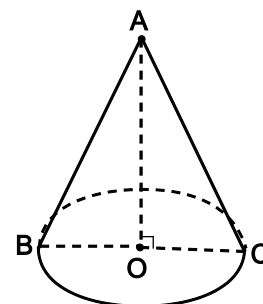
* Trình bày lời giải

Gọi mặt cắt là tam giác đều ABC.

Ta đặt $AB = AC = BC = a$ thì bán kính đáy hình nón là $R = \frac{a}{2}$ và

chiều cao hình nón là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì diện tích của tam giác đều là $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ nên ta có: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 (\text{cm})$.



Vậy bán kính đáy là $R = 3\text{cm}$ và chiều cao hình nón là $h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\text{cm})$.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi (\text{cm}^3)$

Bài 3. Khai triển một hình nón theo một đường sinh rồi trải phẳng ra ta được một hình quạt tròn có bán kính 10cm và có diện tích là $60\pi \text{ cm}^2$.

- Tính số đo cung của hình quạt;
- Tính số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón.

Hướng dẫn giải

a) Gọi số đo của cung hình quạt là n° .

Vì diện tích hình quạt là $60\pi \text{ cm}^2$ nên

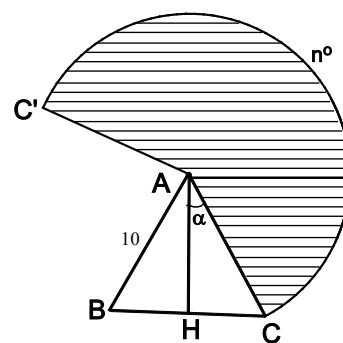
$$\frac{\pi AC^2 n}{360} = 60\pi \Rightarrow n = \frac{60 \cdot 360}{10^2} = 216 (\text{độ}).$$

b) Vì diện tích xung quanh hình nón là $60\pi \text{ cm}^2$ nên

$$\pi \cdot HC \cdot AC = 60\pi \Rightarrow HC = \frac{60}{10} = 6 (\text{cm})$$

Gọi α là số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón.

Ta có $\sin \alpha = \frac{HC}{AC} = \frac{6}{10} = 0,6 \approx \sin 36^\circ 52'$ Do đó $\alpha \approx 36^\circ 52'$.



Bài 4. Cho tam giác vuông tại A, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$. Quay tam giác này một vòng quanh cạnh BC. Tính diện tích toàn phần của hình tạo thành.

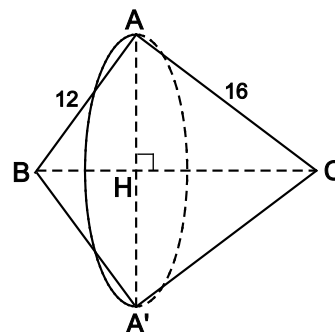
Hướng dẫn giải

Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 (\text{cm})$$

Vẽ $AH \perp BC$. Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$$\Rightarrow AH = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6 (\text{cm})$$



Khi quay $\triangle ABC$ một vòng quanh cạnh cố định thì hình tạo thành gồm hai hình nón chung đáy, bán kính là $9,6\text{cm}$. Diện tích toàn phần của hình tạo thành là:

$$S_p = \pi \cdot AH \cdot (AB + AC) = \pi \cdot 9,6(12 + 16) = 268,8\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Nhận xét: Khi quay một tam giác vuông quanh một cạnh cố định thì hình tạo thành phụ thuộc vào trục quay.

- Nếu quay theo một cạnh góc vuông thì hình tạo thành là một hình nón.
- Nếu quay theo cạnh huyền thì hình tạo thành là hai hình nón chung đáy.

Bài 5. Một hình nón cắt có các bán kính đáy là 21cm và 49cm. Biết diện tích xung quanh của nó là $3710\pi \text{ cm}^2$, tính thể tích của hình nón cắt.

Hướng dẫn giải

Gọi mặt cắt chứa trục của hình nón cắt là hình thang cân ABCD.

Trong mặt phẳng này vẽ $BH \perp CD$.

Ta đặt $O'B = R_1$; $OC = R_2$; $OO' = h$ và $BC = l$.

Ta có $BH = OO' = h$; $HC = R_2 - R_1 = 49 - 21 = 28 \text{ (cm)}$.

Vì diện tích xung quanh của hình nón cắt là $3710\pi \text{ cm}^2$ nên

$$\pi(R_1 + R_2)l = 3710\pi.$$

$$\text{Suy ra } l = \frac{3710\pi}{\pi(21+49)} = 53(\text{cm})$$

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H, ta có: $BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{53^2 - 28^2} = 45(\text{cm})$

Thể tích của hình nón cắt là:

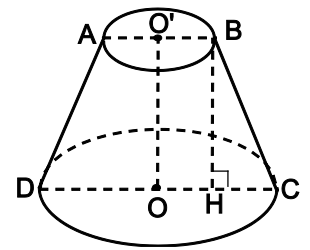
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 45(21^2 + 49^2 + 21 \cdot 49) = 58065\pi (\text{cm}^3)$$

Nhận xét: Việc vẽ $BH \perp CD$ giúp ta gắn kết được các bán kính của hình nón cắt, đường sinh, chiều cao của nó vào một tam giác vuông. Nhờ định lý Py-ta-go ta có thể giải quyết được vấn đề.

Bài 6. Một hình nón có bán kính đáy bằng 6cm, chiều cao bằng trung bình cộng của bán kính đáy và đường sinh. Chứng minh rằng hình nón này có số đo diện tích toàn phần (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng cm^3).

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy, h là chiều cao và l là đường sinh của hình nón.



Ta có $R = 6\text{cm}$, $h = \frac{R+1}{2} \Rightarrow l = 2h - 6$.

Mặt khác $l = \sqrt{h^2 + R^2}$ Suy ra $2h - 6 = \sqrt{h^2 + R^2}$ ($h > 3$).

Bình phương hai vế ta có: $4h^2 - 24h + 36 = h^2 + 36$

$$\Leftrightarrow 3h^2 - 24h = 0 \Leftrightarrow 3h(h - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 (\text{loại}) \\ h = 8 (\text{chọn}) \end{cases}$$

Vậy chiều cao của hình nón là 8 cm ; đường sinh bằng $2.8 - 6 = 10 (\text{cm})$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi R(l + R) = \pi.6(10 + 6) = 96\pi (\text{cm}^2)$.

Thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 6^2.8 = 96\pi (\text{cm}^3)$

Vậy số đo diện tích toàn phần tính bằng cm^2 đúng bằng số đo thể tích tính bằng cm^3 .

Bài 7: Một hình nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a . Biết chiều cao của hình nón bằng $\frac{a}{3}\sqrt{6}$ Tính diện tích toàn phần của hình nón.

Hướng dẫn giải

Bán kính đáy hình nón chính là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

$$\text{Ta có } R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{3}} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét $\triangle SOA$ vuông tại O ta có

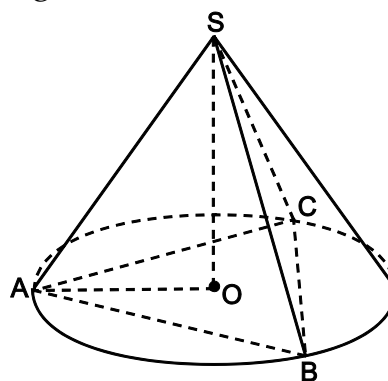
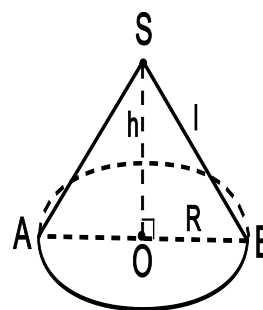
$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow SA^2 = a^2 \Rightarrow SA = a.$$

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi R(1 + R) = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \left(a + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi a^2}{3}(\sqrt{3} + 1)$

Bài 8: Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng 9cm và chiều cao $SO = 21,6\text{cm}$. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy tạo ra một hình nón cắt có chiều cao 12cm . Tính diện tích xung quanh của hình nón cắt.

Hướng dẫn giải



*** Tìm hướng giải**

Để tìm diện tích xung quanh của hình nón cụt, cần biết các bán kính đáy và đường sinh. Có thể tính được bán kính còn lại nhờ định lí Ta-lét. Có thể tính được độ dài đường sinh nhờ định lí Py-ta-go.

*** Trình bày lời giải**

Xét mặt cắt qua trục của hình nón là $\triangle SAB$ cân tại S.

Trong mặt phẳng SAB có $O'C \parallel OB$.

Theo định lí Ta-lét ta có $\frac{O'C}{OB} = \frac{SO'}{SO}$ Do đó $\frac{O'C}{9} = \frac{9,6}{21,6} \Rightarrow O'C = 4$ (cm).

Trong mặt phẳng SAB vẽ $CH \perp AB$, ta được

$$CH = OO' = 12\text{cm}, BH = 9 - 4 = 5 \text{ (cm)}.$$

Suy ra $BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (cm).

Diện tích xung quanh của hình nón cụt là: $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l = \pi(9 + 4).13 = 169\pi$ (cm²).

Bài 9: Một xô bằng tôn có các bán kính đáy là 17cm và 10cm, chiều cao 24cm. Tính diện tích tôn để làm xô.

Hướng dẫn giải

Xét mặt cắt qua trục của hình nón cụt, đó là hình thang cân ABCD.

Trong mặt phẳng này ta vẽ $CH \perp AB$.

Ta có $CH = OO' = 24\text{cm}$; $O'H = OC = 10\text{cm}$;

$BH = O'B - O'H = 7\text{cm}$.

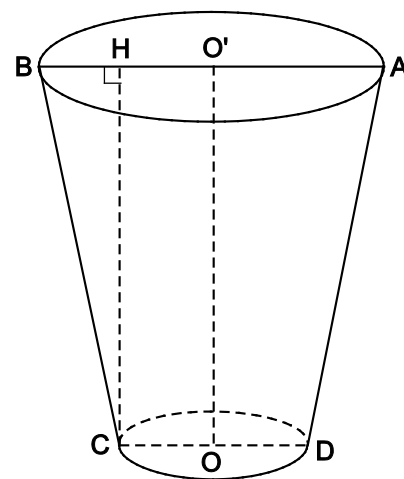
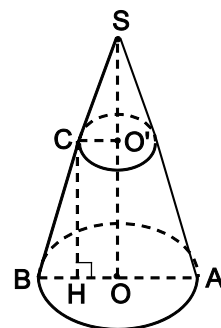
Suy ra $BC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ (cm)

Diện tích xung quanh của xô là:

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l = \pi(17 + 10).25 = 675\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy xô là: $S_{\text{đáy}} = \pi.10^2 = 100\pi$ (cm²).

Vậy diện tích tôn để làm xô là: $675\pi + 100\pi = 775\pi$ (cm²).



Bài 10: Một hình nón có diện tích đáy bằng $144\pi \text{ cm}^2$ và diện tích toàn phần bằng $588\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hình nón.

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy hình nón và l là đường sinh của nó.

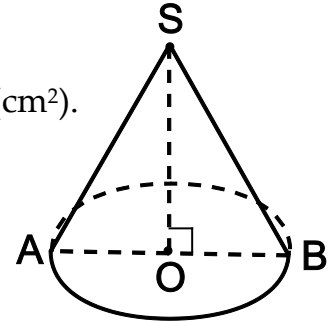
Ta có $\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R = 12(\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = 588\pi - 144\pi = 444\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Suy ra $\pi Rl = 444\pi \Rightarrow l = \frac{444\pi}{\pi 12} = 37(\text{cm})$

Chiều cao của hình nón là: $SO = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35(\text{cm})$

Thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 12^2 \cdot 35 = 1680\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.



Bài 11: Một chiếc cốc hình nón đựng rượu đến $\frac{1}{3}$ chiều cao của cốc. Biết thể tích của rượu trong cốc là 2cm^3 . Tính thể tích của cốc.

Hướng dẫn giải

Phần rượu trong cốc có dạng hình nón.

Gọi r là bán kính đáy của phần rượu hình nón trong cốc.

Suy ra bán kính miệng cốc là $3r$ (do định lí Ta-lét).

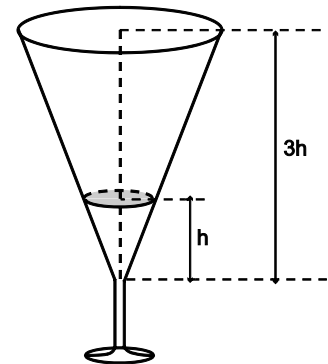
Thể tích phần rượu trong cốc là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Thể tích của cốc là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi (3r)^2 \cdot (3h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 27r^2 h$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi (3r)^2 \cdot (3h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 27r^2 h$.

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi 27r^2 h} = \frac{1}{27}$ Suy ra $\frac{2}{V_2} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_2 = 54 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vậy thể tích của cốc là 54cm^3



Bài 12: Cắt hình nón cụt bằng một mặt phẳng chứa trục ta được một hình thang cân có góc ở đáy bằng 45° và độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ. Biết diện tích mặt cắt này là 27cm^2 . Tính thể tích hình nón cụt.

Hướng dẫn giải

Gọi mặt cắt chứa trục là hình thang cân ABCD.

Đặt $O'B = a$ thì $OC = 2a$.

Vẽ $BH \perp OC$ ta được

$OH = O'B = a$ và $HC = a$.

Tam giác HBC vuông cân nên

$BH = HC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$

Diện tích hình thang cân ABCD là: $S = \frac{(AB + CD)BH}{2} = \frac{(2a + 4a) \cdot a}{2} = 3a^2$

Theo đề bài ta có: $3a^2 = 27 \Rightarrow a = 3(\text{cm})$.

Thể tích của hình nón cụt là:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2) = \frac{1}{3} \cdot \pi a(a^2 + 4a^2 + 2a^2) = \frac{7}{3}\pi a^3 = \frac{7}{3} \cdot \pi 3^3 = 63\pi (\text{cm}^3)$$

Bài 13: Một đồng cát hình nón có chu vi đáy là $12,56\text{m}$. Người ta dùng xe cải tiến để chở đồng cát đó đi 10 chuyến thì hết. Biết mỗi chuyến chở được 250dm^3 . Tính chiều cao của đồng cát (làm tròn đến dm).

Hướng dẫn giải

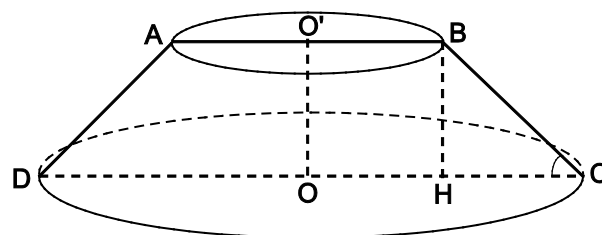
Gọi R là bán kính đáy đồng cát và h là chiều cao của đồng cát.

Vì chu vi đáy đồng cát là $12,56\text{m}$ nên $2\pi R = 12,56 \Rightarrow R = \frac{12,56}{2\pi} \approx 2,0(\text{m})$

Thể tích của đồng cát là: $V = 250 \times 20 = 5000 (\text{dm}^3) = 5 (\text{m}^3)$.

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi R^2} \approx \frac{3 \cdot 5}{\pi \cdot 2^2} \approx 1,2(\text{m})$$

Bài 14: Một chao đèn có dạng mặt xung quanh của một hình nón cụt. Các bán kính đáy lần lượt là $R_1 = 5\text{cm}$; $R_2 = 13\text{cm}$. Biết diện tích xung quanh của chao đèn là $306\pi \text{ cm}^2$. Tính chiều cao của chao đèn.



Hướng dẫn giải

Gọi mặt cắt chứa trục của chao đèn là hình thang cân ABCD.

Chiều cao $OO' = h$ và đường sinh $BC = l$.

Vì diện tích xung quanh của chao đèn là $306\pi \text{ cm}^2$ nên ta có

$$\pi(R_1 + R_2).l = 306\pi \Rightarrow \pi(5 + 13).l = 306\pi$$

$$\Rightarrow l = 17(\text{cm}).$$

Trong mặt phẳng ABCD ta vẽ $BH \perp CD$.

Ta có $BH = OO' = h$; $OH = O'B = R_1$, do đó $HC = R_2 - R_1 = 8\text{cm}$.

Xét $\triangle BHC$ vuông tại C, ta có $BH^2 = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15(\text{cm})$.

Vậy chiều cao của chao đèn là 15cm.

Bài 15: Một hình nón có mặt cắt chứa trục là một tam giác đều. Chứng minh rằng diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính đáy hình nón là R và đường sinh hình nón là l.

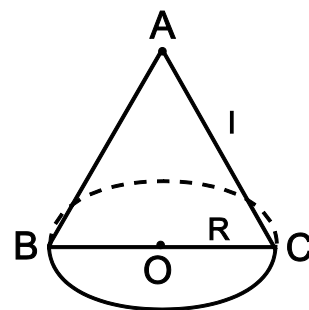
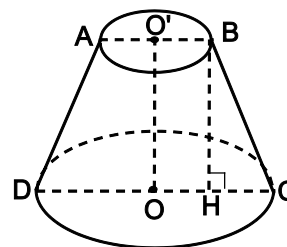
Vì mặt cắt chứa trục là tam giác đều ABC nên

$AB = BC = CA$ suy ra $l = 2R$.

$$\text{Ta có } S_{\text{đáy}} = \pi R^2. \quad (1)$$

$$S_{\text{xq}} = \pi Rl = \pi R.2R = 2\pi R^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{\text{xq}} = 2S_{\text{đáy}}$.

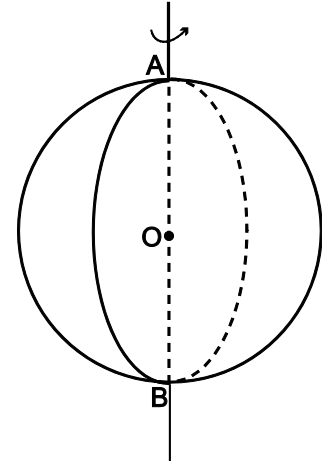


📁. HÌNH CẦU

📁. Lý thuyết

1. Hình cầu

- Khi quay nửa hình tròn (O; R) một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu tâm O, bán kính R.
- Nửa đường tròn khi quay tạo nên mặt cầu.



2. Cắt hình cầu

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn;
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn:
 - Có bán kính R (gọi là đường kính lớn) nếu mặt cắt đi qua tâm;
 - Có bán kính nhỏ hơn R nếu mặt cắt không đi qua tâm.

3. Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2 \quad (R \text{ là bán kính; } d \text{ là đường kính mặt cầu}).$$

4. Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

📁. Bài tập

Bài 1. Hai hình cầu có hiệu các bán kính bằng 3cm và hiệu các thể tích bằng $1332\pi \text{ cm}^3$. Tính hiệu các diện tích của hai mặt cầu.

Hướng dẫn giải

* Tìm hướng giải

Để tính được hiệu diện tích của hai mặt cầu ta cần biết các bán kính của hai mặt cầu.

* Trình bày lời giải

Gọi bán kính của hình cầu lớn là R và bán kính của hình cầu nhỏ là r.

Ta có $R - r = 3$ hay $R = r + 3$.

Thể tích hình cầu lớn là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ Thể tích hình cầu nhỏ là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Vì $V_1 - V_2 = 1332\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ nên $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = 1332\pi \Leftrightarrow R^3 - r^3 = 999$

Do đó $(r + 3)^3 - r^3 = 999 \Leftrightarrow r^2 + 3r - 108 = 0$.

Giải ra được $r_1 = -12$ (loại); $r_2 = 9$ (chọn).

Vậy bán kính hình cầu nhỏ là 9cm. Bán kính hình cầu lớn là 12cm.

Diện tích mặt cầu lớn là: $S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích mặt cầu nhỏ là: $S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Hiệu các diện tích của hai mặt cầu là: $S = S_1 - S_2 = 576\pi - 324\pi = 252\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Bài 2. Một hình cầu nội tiếp một hình nón bán kính đáy bằng 6cm và đường sinh bằng 10cm. Chứng minh rằng diện tích đáy hình nón bằng diện tích mặt cầu.

Hướng dẫn giải

Vì hình cầu nội tiếp hình nón nên $OH \perp BC$, $OD \perp AB$.

Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm})$

Gọi bán kính đáy hình nón là R , bán kính hình cầu là r .

Ta có $BH = BD = R = 6\text{cm}$; $OH = OD = r$.

$AD = AB - BD = 10 - 6 = 4\text{cm}$.

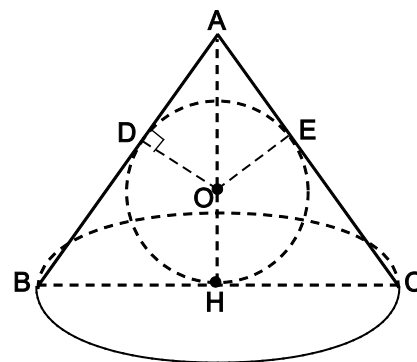
$\triangle AOD \sim \triangle ABH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OD}{BH} = \frac{AD}{AH}$

Do đó $\frac{r}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow r = 3(\text{cm})$ $\frac{r}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow r = 3(\text{cm})$.

Diện tích đáy hình nón là: $S_1 = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Vậy diện tích đáy hình nón bằng diện tích mặt cầu.



Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi H là giao điểm của AD và BC. Quay hình vẽ một vòng quanh đường kính AD cố định ta được hai hình nón nội tiếp một hình cầu. Biết $AH = 24\text{cm}$; $DH = 6\text{cm}$, hãy tính:

- a) Thể tích của hình cầu được tạo thành;
 b) Thể tích hình nón đỉnh A đáy là hình tròn đường kính BC.

Hướng dẫn giải

a) Tam giác ABC cân tại A, AD là đường kính nên $AD \perp BC$.

Ta có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (vì AD là đường kính).

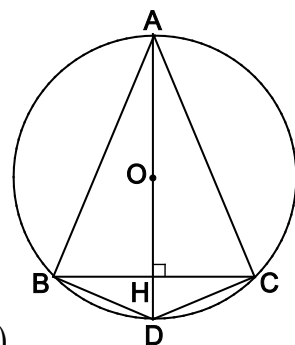
Xét $\triangle ABD$ vuông tại B ta có:

$$BH^2 = HA \cdot HD = 24 \cdot 6 = 144. \text{ Suy ra } BH = 12(\text{cm}).$$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R = (24 + 6) : 2 = 15(\text{cm})$.

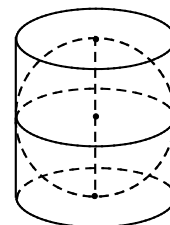
Thể tích của hình cầu tạo thành là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 15^3 = 4500\pi (\text{cm}^3)$

b) Thể tích của hình nón đỉnh A là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 12^2 \cdot 24 = 1152\pi (\text{cm}^3)$



Bài 4. Cho một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Chứng minh rằng:

- a) Thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ;
 b) Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần hình trụ.



Hướng dẫn giải

* *Tìm hướng giải*

Cần tìm mối quan hệ giữa bán kính hình cầu với bán kính đáy hình trụ và chiều cao hình trụ.

* *Trình bày lời giải*

Gọi bán kính hình cầu là R thì bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao của hình trụ là 2R.

a) Thể tích hình cầu là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích hình trụ là: $V_2 = \pi R^2 h = 2\pi R^3$.

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

b) Diện tích mặt cầu là: $S_1 = 4\pi R^2$.

Diện tích hình trụ là: $S_2 = 2\pi R(h + R) = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2$.

Ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$

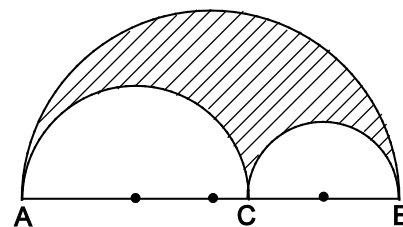
Bài 5. Cho đoạn thẳng $AB = 24\text{cm}$. Lấy điểm C nằm giữa A và B . Vẽ về cùng một phía của AB ba nửa đường tròn đường kính AB , AC và BC . Quay toàn bộ hình vẽ một vòng quanh đường kính AB cố định ta được ba hình cầu. Tìm thể tích lớn nhất của phần không gian được giới hạn bởi ba hình cầu.

Hướng dẫn giải

* *Tìm hướng giải*

Cần tìm mối quan hệ giữa các bán kính của ba nửa hình tròn, từ đó tìm được quan hệ giữa thể tích của ba hình cầu.

* *Trình bày lời giải*



Đặt $AC = 2x$ thì $BC = 24 - 2x$.

Bán kính của nửa đường tròn đường kính AB là 12cm .

Bán kính của nửa đường tròn đường kính AC là x .

Bán kính của nửa đường tròn đường kính BC là $12 - x$.

Thể tích của ba hình cầu đường kính AB , AC và BC lần lượt là:

$$\frac{4}{3}\pi 12^3; \quad \frac{4}{3}\pi x^3 \quad \text{và} \quad \frac{4}{3}\pi (12 - x)^3$$

Thể tích phần không gian giới hạn bởi ba hình cầu là:

$$\begin{aligned} V &= 2304\pi - \frac{4}{3}\pi [x^3 + (12 - x)^3] \\ &= 2304\pi - \frac{4}{3}\pi (x^3 + 1728 - 432x + 36x^2 - x^3) = 2304\pi - 48\pi (x^2 - 12x + 48) \end{aligned}$$

$$V_{\max} \Leftrightarrow (x^2 - 12x + 48) \min \Leftrightarrow (x - 6)^2 + 12 \min \Leftrightarrow x = 6.$$

Khi đó $\max V = 1728\pi \text{ cm}^3$ khi $AC = 12\text{cm}$ hay khi C là trung điểm của AB .

Bài 6: Cắt hình cầu tâm O bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn tâm K , đường kính AB . Biết $OK = 9\text{cm}$ và diện tích hình tròn tâm K bằng 16% diện tích mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu.

Hướng dẫn giải

Xét $\triangle AOB$ cân tại O có $KA = KB$ nên $OK \perp AB$.

Gọi R là bán kính hình cầu, r là bán kính hình tròn (K).

Xét $\triangle KOA$ vuông tại K ta có: $r^2 = R^2 - OK^2 = R^2 - 81$.

Diện tích hình tròn (K) là: $S_1 = \pi r^2 = \pi(R^2 - 81)$.

Diện tích mặt cầu là: $S_2 = 4\pi R^2$.

Vì $S_1 = 16\% S_2$ nên $\pi(R^2 - 81) = \frac{16}{100} \cdot 4\pi R^2$

Thu gọn phương trình này ta được $36R^2 = 8100$. Suy ra $R^2 = 225$.

Do đó diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi$ (cm²).

Bài 7: Người ta cắt một quả địa cầu cũ bằng một mặt phẳng theo một vĩ tuyến và được một phần có dạng hình chỏm, đường kính miệng chỏm là 24cm và độ sâu nhất của chỏm là 8cm. Tính diện tích bề mặt của quả địa cầu.

Hướng dẫn giải

Mặt cắt qua tâm là hình tròn tâm O với AB là đường kính miệng chỏm.

Vẽ bán kính $OC \perp AB$ tại K. Ta có $KA = KB = 24 : 2 = 12$ (cm).

Gọi R là bán kính quả địa cầu.

Xét $\triangle KOA$ vuông tại K ta có:

$$OA^2 = OK^2 + AK^2 \Rightarrow R^2 = (R - 8)^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow R^2 = R^2 - 16R + 64 + 144 \Rightarrow 16R = 208$$

$$\Rightarrow R = 13 \text{ (cm)}.$$

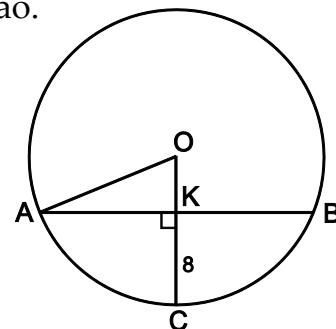
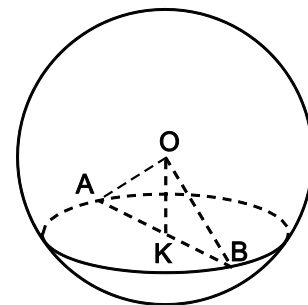
Diện tích bề mặt quả địa cầu là:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 13^2 = 676\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 8: Một hình cầu nội tiếp một hình lập phương cạnh 12cm. Tính thể tích phần không gian bên ngoài hình cầu và bên trong hình lập phương.

Hướng dẫn giải

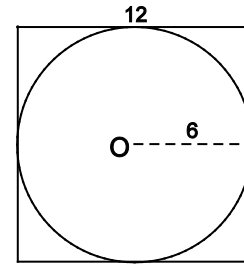
Vì độ dài cạnh của hình lập phương là 12cm nên bán kính hình cầu nội tiếp là 6cm.



Thể tích hình lập phương là: $V_1 = 12^3 = 1728 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích của hình cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích phần không gian bên ngoài hình cầu và bên trong hình lập phương là: $V = V_1 - V_2 = 1728 - 288\pi \approx 824 \text{ (cm}^3\text{)}$.



Nhận xét: Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{288\pi}{1728} = \frac{\pi}{6}$

Tổng quát, ta có thể chứng minh được rằng nếu một hình cầu nội tiếp một hình lập phương thì tỉ số thể tích của chúng là $\frac{\pi}{6}$

Bài 9: Một hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của một hình nón. Biết đường sinh của hình nón bằng 12cm và diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích mặt cầu. Tính thể tích hình cầu.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính hình cầu cũng như bán kính đáy hình nón là R .

Diện tích xung quanh hình nón là: $\pi Rl = 12\pi R$.

Diện tích mặt cầu là: $4\pi R^2$.

Vì diện tích xung quanh hình nón bằng diện tích mặt cầu nên: $12\pi R = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3 \text{ (cm)}$.

Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 10: Một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Biết diện tích toàn phần hình trụ là $384\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hình cầu.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính hình cầu là R thì bán kính đáy hình trụ là R và chiều cao hình trụ là $2R$.

Vì diện tích toàn phần hình trụ là $384\pi \text{ cm}^2$ nên ta có:

$$2\pi R(2R + R) = 384\pi \Rightarrow 6\pi R^2 = 384\pi \Rightarrow R = 8 \text{ (cm)}.$$

Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 8^3 = \frac{2048\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 11: Một chiếc thuyền thúng có dạng nửa hình cầu, có khối lượng 45kg, người chèo thuyền khối lượng 65kg. Biết đường kính của thuyền là 1,2m và trên thuyền có thêm 2,4 tạ cá, hỏi nước có ngập đến mép thuyền không? Biết khối lượng riêng của nước là 1 kg/dm^3

Hướng dẫn giải

Bán kính của thuyền thúng là: $1,2 : 2 = 0,6 \text{ (m)} = 6 \text{ (dm)}$.

Thể tích của thuyền là: $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 144\pi \text{ (dm}^3) \approx 425 \text{ dm}^3$.

Tổng Khối lượng của thuyền, người và cá là : $45 + 65 + 240 = 350 \text{ (kg)}$

Khối lượng riêng của thuyền là : $350 : 452 = 0,8 \text{ (kg/dm}^3)$

Khối lượng riêng của nước là : 1 kg/dm^3

Vậy khối lượng riêng của thuyền nhỏ hơn khối lượng riêng của nước nên nước không ngập đến mép thuyền.

Nhận xét: Học sinh cần ghi nhớ công thức $d = \frac{m}{V}$ (m là hổi lượng riêng, m khối lượng, V là thể tích)

Bài 12: Cho hình cầu tâm O, bán kính $OA = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. Cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng vuông góc với OA tại trung điểm M của OA ta được một đường tròn. Tính độ dài của đường tròn này.

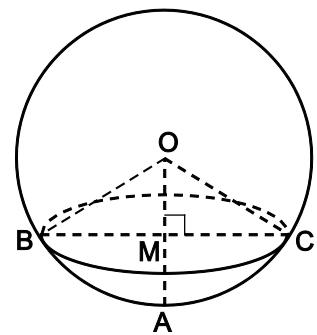
Hướng dẫn giải

Xét $\triangle OBC$ có $OB = OC$ và $OM \perp BC$ nên $MB = MC$.

Ta có: $MC^2 = OC^2 - OM^2 = (10\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{3})^2 = 225$

Suy ra $MC = 15 \text{ (cm)}$.

Độ dài của đường tròn (M) là: $2\pi \cdot 15 = 30\pi \text{ (cm)}$.



Bài 13: Một bình thủy tinh hình trụ chứa nước. Trong bình có một vật rắn hình cầu ngập hoàn toàn trong nước. Khi người ta lấy vật rắn đó ra khỏi bình thì mực nước trong bình giảm đi 48,6mm. Biết đường kính bên trong của đáy bình là 50mm, tính bán kính của vật hình cầu.

Hướng dẫn giải

Gọi r là bán kính của vật hình cầu.

Thể tích của vật hình cầu là: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Thể tích khối nước rút xuống là: $V_2 = \pi \cdot 50^2 \cdot 48,6 = 121500\pi \text{ (mm}^3\text{)}.$

Ta có phương trình: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 121500\pi \Rightarrow r^3 = 91125$

Do đó $r = \sqrt[3]{91125} = 45 \text{ (mm)}.$

Bài 14: Vĩ độ của Thanh Hoá là 20° Bắc. Tính độ dài vĩ tuyến qua Thanh Hoá biết bán kính Trái Đất là 6370km.

Hướng dẫn giải

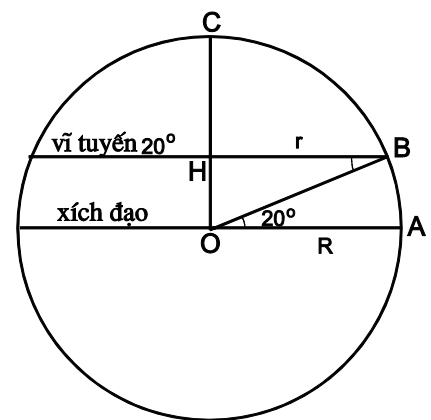
Gọi R là bán kính Trái Đất, gọi r là bán kính của vĩ tuyến 20° qua Thanh Hoá.

Ta có $\widehat{HBO} = \widehat{AOB} = 20^\circ$

Xét $\triangle HBO$ vuông tại H có: $r = HB = OB \cos 20^\circ = R \cos 20^\circ$.

Do đó độ dài của vĩ tuyến 20° là:

$$2\pi r = 2\pi R \cos 20^\circ = 2\pi \cdot 6370 \cdot \cos 20^\circ \approx 37590 \text{ (km)}.$$



Bài 15: Một hình cầu có số đo thể tích (tính bằng m^3) bằng số đo diện tích mặt cầu (tính bằng m^2). Tính độ dài của đường tròn lớn.

Hướng dẫn giải

Gọi bán kính của hình cầu là R .

Vì số đo thể tích bằng số đo diện tích mặt cầu nên ta có: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3 \text{ (m)}.$

Độ dài của đường tròn lớn là: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \text{ (m)}.$

📁. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Tính diện tích toàn phần của hình nón có chiều cao $h = 16$ cm và bán kính đường tròn đáy $r = 12$ cm.

Hướng dẫn giải

Độ dài đường sinh của hình nón:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20(\text{cm})$$

Diện tích toàn phần của hình nón:

$$S_{tp} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12^2 = 384\pi(\text{cm}^2)$$

Bài 2: Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$); $AB = 4$ cm; $AC = 3$ cm. Quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh AB cố định. Tính thể tích của hình nón được tạo thành?

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính thể tích của hình nón $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

Trong đó: $R = 3$ (cm); $h = 4$ (cm)

$$\text{Vậy: } V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 3: Một hình trụ có thể tích là $20\pi \text{ dm}^3$, chiều cao bằng 5 dm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

Hướng dẫn giải

Hình trụ có thể tích là $V = 20\pi \text{ dm}^3$, chiều cao $h = 5$ dm nên ta có:

$$V = \pi r^2 \cdot h = 20\pi \text{ hay } \pi r^2 \cdot 5 = 20\pi \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\text{Do đó: } S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 20\pi \text{ (dm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $20\pi \text{ (dm}^2\text{)}$

Bài 4: Một hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy, Nếu bán kính đáy bằng 6 cm. Hỏi diện tích xung quanh của hình trụ là bao nhiêu cm^2 ?

Hướng dẫn giải

Ta có $R = 6$ cm mà $h = d = 12$ cm

Khi đó

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 = 144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 5: Một hình trụ có diện tích xung quanh là 40m^2 và chiều cao của hình trụ bằng 5m . Thể tích của hình trụ đó bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Bán kính của hình trụ đó là:

$$\text{Ta có } S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow 40 = 2\pi R \cdot 5 \Rightarrow R = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Thể tích của hình trụ đó là: } V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 5 = \frac{80}{\pi} (\text{m}^3)$$

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Cạnh $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$. Quay $\triangle ABC$ một vòng quanh cạnh AC. Vẽ hình, tính diện tích xung quanh và thể tích của hình được sinh ra?

Hướng dẫn giải

Vẽ đúng hình: Hình sinh ra là hình nón

Tính được $BC = 5 \text{ cm}$

$$\text{Tính được } S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \approx 47,1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Tính được } V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \approx 37,68 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 7: Tính diện tích toàn phần của một hình nón có chiều cao $h = 16 \text{ cm}$ và bán kính đường tròn đáy là $r = 12 \text{ cm}$?

Hướng dẫn giải

Độ dài đường sinh của hình nón:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 (\text{cm})$$

Diện tích toàn phần của hình nón:

$$S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi \cdot 12 \cdot 20 + \pi \cdot 12^2 = 384\pi (\text{cm}^2)$$

Bài 8: Cho hình nón có đỉnh S, đường kính $2R$ chiều cao $SH = R\sqrt{3}$. Tính thể tích của hình nón

Hướng dẫn giải

Theo đề bài chiều cao của hình nón $SH = R\sqrt{3}$, đường kính $2R \Rightarrow$ bán kính đáy là R

$$\text{Thể tích hình nón } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$$

Bài 9: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh cạnh AB được một hình trụ. Tính thể tích hình trụ.

Hướng dẫn giải

Hình trụ nhận được có bán kính đáy là $BC = 5(\text{cm})$, chiều cao $AB = 4(\text{cm})$

$$\text{Thể tích hình trụ : } V = \pi \cdot AB \cdot BC^2 = 100\pi \text{ cm}^3$$

Bài 10: Một hình cầu có thể tích bằng $972\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích của mặt cầu đó?

Hướng dẫn giải

$$\text{Bán kính của mặt cầu đó là: } \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Rightarrow R = 9\text{cm}$$

$$\text{Diện tích của mặt cầu đó là: } S = 4\pi R^2 = 324\pi \text{ cm}^2.$$

Chúc các em học sinh ôn tập tốt!