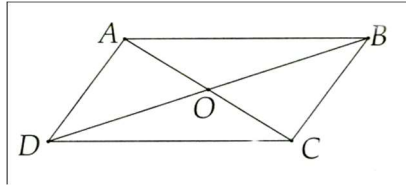


HÌNH BÌNH HÀNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- *Định nghĩa:* Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.



Tứ giác $ABCD$ là
hình bình hành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$$

* *Tính chất:* Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

* *Dấu hiệu nhận biết:*

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình bình hành.

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh rằng $AF // CE$.
- Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD với AF, CE . Chứng minh rằng:
 $DM = MN = NB$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo, E và F theo thứ tự là trung điểm của OD và OB .

- Chứng minh rằng $AE // CF$.
- Gọi K là giao điểm của AE và DC . Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{2} KC$.

Dạng 2. Chứng minh tứ giác là hình bình hành

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BD, AB, AC, CD .

- Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.
- Cho $AD = a, BC = b$. Tính chu vi của hình bình hành $EFGH$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, trực tâm H . Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau tại D . CMR:

- $BDCH$ là hình bình hành.
- $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$
- H, M, D thẳng hàng (M là trung điểm của BC).

Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F lần lượt là trung điểm AB, CD .

- CMR: $AF \parallel EC$.
- CMR: $ED = BF$.
- Gọi O là giao điểm của AC và BD . CMR: E, O, F thẳng hàng.
- AF cắt ED tại G, BF cắt EC tại H . CMR: G, O, H thẳng hàng.
- CMR: $GH \parallel CD$.
- Giả sử $AB = 4cm$. Tìm GH ?

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy $N \in AB, M \in CD$ sao cho $AN = CM$.

- CMR: $AM \parallel CN$.
- CMR: $DN = BM$.
- CMR: AC, BD, MN đồng quy.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh rằng $AF \parallel CE$.
- Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD với AF, CE . Chứng minh rằng: $DM = MN = NB$.

Hướng dẫn giải

a)

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên

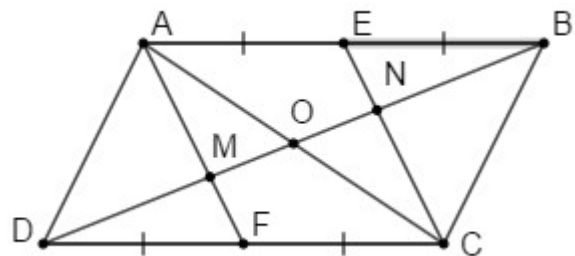
$$AB = CD \text{ (tc hbh).}$$

Mà E, F là trung điểm của AB và CD

$$\Rightarrow AE = CF = BE = DF.$$

Xét tứ giác $AECF$, có $\begin{cases} AE = CF \\ AE \parallel CF \text{ (do } AB \parallel CD) \end{cases}$

$AECF$ là hình bình hành $\Rightarrow AF \parallel EC$.



b) Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Xét $\triangle ADC$ có DO ; AF là trung tuyến; $AF \cap DO = \{M\}$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm của $\triangle ADC$

$$\Rightarrow \begin{cases} DM = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}BO(1) \\ OM = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{3}BO(2) \end{cases} \quad (\text{do } DO = BO)$$

Xét $\triangle ABC$ có: BO ; CE là trung tuyến, $BO \cap CE = \{N\}$

$\Rightarrow N$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} BN = \frac{2}{3}BO(3) \\ ON = \frac{1}{3}BO(4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) và (4)} \Rightarrow MN = OM + ON = \frac{1}{3}BO + \frac{1}{3}BO = \frac{2}{3}BO(5)$$

Từ (1); (3) và (5)

$$\Rightarrow DM = BN = MN \text{ (đpcm).}$$

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo, E và F theo thứ tự là trung điểm của OD và OB .

a) Chứng minh rằng $AE \parallel CF$.

b) Gọi K là giao điểm của AE và DC . Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{2}KC$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow DO = BO$$

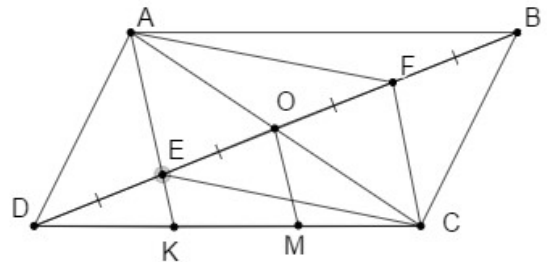
E, F là trung điểm của DO và BO nên:

$$DE = EO = OF = FB$$

Xét tứ giác $AFCE$, có:

$$\begin{cases} AC \cap EF = \{O\} \\ OA = OC \\ OE = OF \end{cases}$$

$\Rightarrow AFCE$ là hình bình hành (đhnb)



$\Rightarrow AE \parallel CF$ (tc hhh).

b) Từ O kẻ $OM \parallel EK$

Xét $\triangle DOM$ có

$OM \parallel EK$

Và E là trung điểm của DO

$\Rightarrow K$ là trung điểm của DM

$\Rightarrow DK = KM(1)$

Xét $\triangle CDK$, có

$OM \parallel AK$ và O là trung điểm của AC

$\Rightarrow M$ là trung điểm của KC

$\Rightarrow CM = KM(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DK = KM = CM$

Mà $KM + CM = KC$

$\Rightarrow DK = \frac{1}{2} KC$ (đpcm).

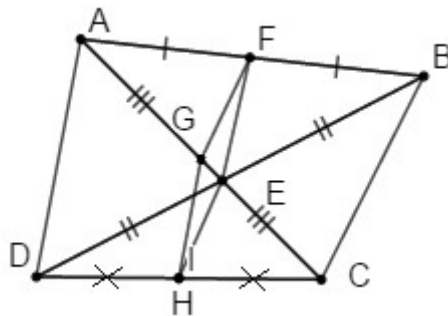
Dạng 2. Chứng minh tứ giác là hình bình hành

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BD, AB, AC, CD .

a) Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.

b) Cho $AD = a, BC = b$. Tính chu vi của hình bình hành $EFGH$.

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle ABD$ có $F; E$ lần lượt là trung điểm của $AB; BD$

$\Rightarrow EF$ Là đường trung bình của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow \begin{cases} EF \parallel AD(1) \\ EF = \frac{1}{2} AD(2) \end{cases}$$

Tương tự, ta có GH là đường trung bình của $\triangle ACD$

$$\Rightarrow \begin{cases} GH \parallel AD(3) \\ GH = \frac{1}{2} AD(4) \end{cases}$$

$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ và } (3) \Rightarrow EF \parallel GH \\ (2) \text{ và } (4) \Rightarrow EF = GH \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tứ giác } GFEH \text{ là hình bình hành.}$

b) Ta có: $GH = EF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} a$

Tương tự: $FG = HE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} b$

$\Rightarrow$ Chu vi của tứ giác $GFEH$ là: $\left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \right) \cdot 2 = a + b$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, trực tâm H. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau tại D. CMR:

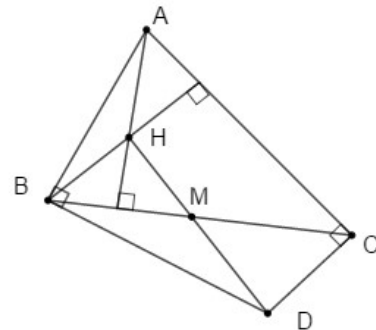
- $BDCH$ là hình bình hành.
- $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$
- H, M, D thẳng hàng (M là trung điểm của BC).

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BD(1)$

Lại có $\begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CD(2)$

Từ (1) và (2) $BHCD$ là hình bình hành.



b) Tứ giác $ABCD$ có:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABD} + \widehat{BDC} + \widehat{ACD} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + 90^\circ + \widehat{BDC} + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ (\text{dpcm}).$$

c) Vì $BHCD$ là hình bình hành nên BC cắt HD tại trung điểm của mỗi đường

ta có: M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HD

$\Rightarrow H; M; D$ thẳng hàng.

Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F lần lượt là trung điểm AB, CD .

- CMR: $AF \parallel EC$.
- CMR: $ED = BF$.
- Gọi O là giao điểm của AC và BD . CMR: E, O, F thẳng hàng.
- AF cắt ED tại G , BF cắt EC tại H . CMR: G, O, H thẳng hàng.
- CMR: $GH \parallel CD$.
- Giả sử $AB = 4cm$. Tìm GH ?

Hướng dẫn giải

- a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên
 $AB = CD$

$E; F$ Là trung điểm của $AB; CD$

$$\Rightarrow AE = CF = BE = DF$$

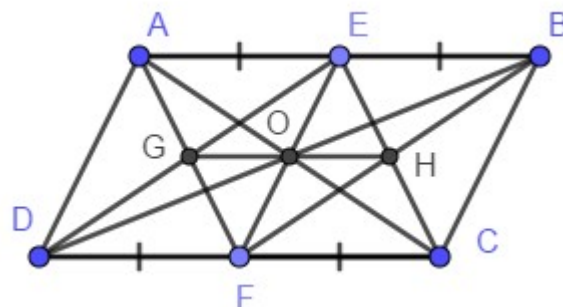
Xét tứ giác $AECF$ có:

$$AE \parallel FC (\text{do } AB \parallel CD)$$

$$AE = FC$$

$\Rightarrow AECF$ Là hình bình hành (dnhb)

$$\Rightarrow AF \parallel CE$$



- b) Chứng minh tương tự ta có $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow ED = BF$.

- c) Có $AC \cap BD = \{O\}$

O Là trung điểm của AC và BD (t/c hbh)

Ta có: EO là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow EO \parallel BC$

OF Là đường trung bình của $\triangle DBC \Rightarrow OF \parallel BC$

$\Rightarrow E; O; F$ Thẳng hàng (tiền đề o'clit)

- d) Chứng minh được OG ; là đường trung bình của $\triangle EDF \Rightarrow GO \parallel DF \Rightarrow GO \parallel DC(1)$

OH là đường trung bình của $\triangle EFC \Rightarrow OH \parallel FC \Rightarrow OH \parallel DC(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \equiv GO$ (tiền đề o'clit)

$\Rightarrow O; H; G$ thẳng hàng.

e) $AB = CD = 4cm$

Chứng minh được GH là đường trung bình của $\triangle DEC$

$$\Rightarrow GH = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}.4 = 2cm$$

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy $N \in AB$, $M \in CD$ sao cho $AN = CM$.

- a) CMR: $AM \parallel CN$.
- b) CMR: $DN = BM$.
- c) CMR: AC, BD, MN đồng quy.

Hướng dẫn giải

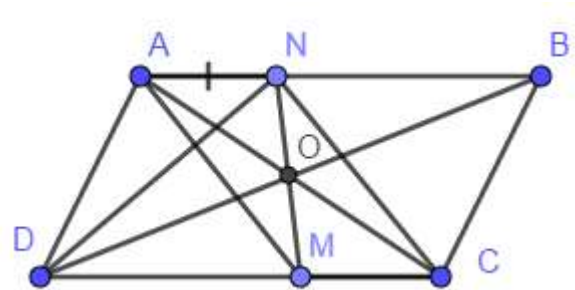
a) Xét tứ giác $ABCD$, có

$$AN = CM$$

$$AN \parallel CM \text{ (do } AB \parallel CD)$$

$\Rightarrow ANCM$ Là hình bình hành

$$\Rightarrow AM \parallel CN$$



b) Ta có:

$$BN = AB - AN$$

$$DM = DC - CM$$

$$\text{Mà } AB = DC, AN = CM$$

$$\Rightarrow BN = DM$$

$$\text{Mà } BN \parallel DM \text{ (do } AB \parallel CD)$$

$\Rightarrow BNDM$ là hình bình hành

$$\Rightarrow DN = BM$$

c) Gọi $AC \cap BD = \{O\}$ (1)

$\Rightarrow O$ Là trung điểm của AC và BD

Ta có $ANCM$ là hình bình hành; O là trung điểm của đường chéo AC

$\Rightarrow O$ Là trung điểm của MN

$$\Rightarrow O \in MN \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC, BD, MN$ đồng quy.

C. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CB-NC

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD , F là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$;

b) $BE \parallel DF$.

2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của AI và CK với BD . Chứng minh:

a) $\triangle ADM = \triangle CBN$;

b) $\widehat{MAC} = \widehat{NCA}$ và $IM \parallel CN$;

c) $DM = MN = NB$.

Dạng 2. Chứng minh tứ giác là hình bình hành

Phương pháp giải: Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành.

3. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD . Kẻ AH và CK vuông góc với BD ở H và ở K . Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Qua điểm O , vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F . Qua O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H . Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành.

5. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC . Chứng minh rằng các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng quy.

6. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên AB lấy điểm K , trên CD lấy điểm I sao cho $AK = CI$. Chứng minh ba điểm K, O, I thẳng hàng.

Dạng 4. Tổng hợp

7. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E , tia phân giác của góc B cắt CD ở F .

a) Chứng minh $DE \parallel BE$.

b) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

8. Cho tam giác ABC . Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D . Giả sử $AE = BF$, chứng minh:

a) Tam giác AED cân;

b) AD là phân giác của góc A .

9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD . Chứng minh:

a) Các tứ giác $MNPQ, INKQ$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng quy.

10. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B , vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D .

a) Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

b) Tính số đo góc $\widehat{BDC}$, biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

11. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB . Nối E với trung điểm M của AD . Từ M vẽ MF vuông góc với CE cắt BC tại N .

a) Tứ giác $MNCD$ là hình gì?

b) Tam giác EMC là tam giác gì?

c) Chứng minh $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

HƯỚNG DẪN

1.

a) Ta chứng minh được $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = DF$ và $\widehat{EBF} = \widehat{CDF}$.

Cách khác: $\triangle AEB = \triangle CFD$ (c.g.c) suy ra $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.

b) Vì $BEDF$ hình bình hành $\Rightarrow \triangle PCM$.

2.a) Chứng minh được $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \triangle ADI = \triangle CBK$ (c-c-c) $\Rightarrow \triangle ADM = \triangle CBN$ (g-c-g)

b) Vì $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \triangle PCM$.

c) Từ câu a) $\Rightarrow DM = NB$. Mặt khác $MN = NB$ (định lý 1 của đường trung bình), từ đó suy ra $\triangle PCM$.

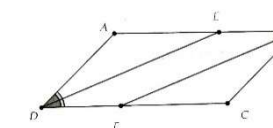
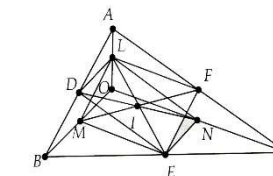
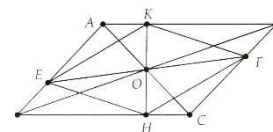
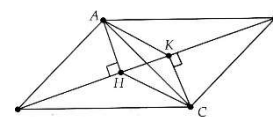
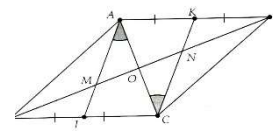
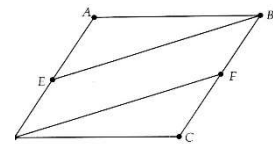
3. Ta chứng minh $AH \parallel CK$, $AH = CK$ ($\triangle AHD = \triangle CKB$) $\Rightarrow AHCK$ là hình bình hành (cặp cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Ta có $\triangle AOK = \triangle COH \Rightarrow OK = OH$, $\triangle DOE = \triangle BOF \Rightarrow OE = OF \Rightarrow EHFK$ là hình bình hành.

5. Gọi I trung điểm LE . Ta có $DL \parallel EN \parallel OB$ và $DL = EN = \frac{1}{2}OB \Rightarrow$

$DENL$ là hình bình hành. Tương tự chứng minh $LMEF$ là hình bình hành. Từ đó suy ra EL, FM, DN đồng quy tại I .

6. Chứng minh được $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow \triangle PCM$.



7.a) Ta có $\widehat{AED} = \widehat{EDC}$ và $\widehat{ABF} = \widehat{EDC} \Rightarrow DE \parallel BF$ (có góc ở vị trí đồng vị bằng nhau).

b) Từ câu a) suy ra DEBF là hình bình hành.

8.a) Chứng minh BDEF là hình bình hành $\Rightarrow ED = BF = AE \Rightarrow \Delta AED$ cân ở E.

b) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (vì cùng bằng $\widehat{ADE}$) $\Rightarrow AD$ là phân giác $\hat{A}$.

9. Tương tự bài 5.

10. a) Vì BHCD có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

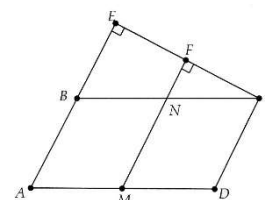
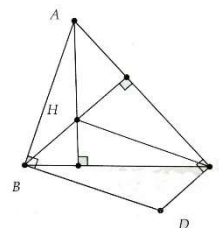
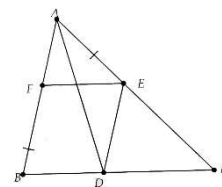
b) Tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{BDC} = 120^\circ$

11.

a) Ta có MNCD là hình bình hành.

b) Chứng minh được F trung điểm CE $\Rightarrow \Delta EMC$ cân tại M.

c) Chứng minh được $\widehat{AEM} = \widehat{FME} = \widehat{FMC} = \widehat{CMD} = \widehat{DCM} = \widehat{MCB}$ mà $AE \parallel MF$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{FMD} = 2\widehat{CMD} = 2\widehat{AEM}$.



C. DẠNG BÀI NÂNG CAO

• Tính chất hình bình hành

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác ABD và tam giác ACE vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MA và BC vuông góc với nhau.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM vuông cân tại A, tam giác BCN vuông cân tại C. Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $\frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) và một điểm O ở trong hình này. Chứng minh rằng có một tứ giác mà bốn cạnh lần lượt bằng OA, OB, OC, OD và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình thang cân.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không cắt các cạnh của hình bình hành. Qua các đỉnh A, B, C, D vẽ các đường thẳng vuông góc với xy, cắt xy lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD ($AD < AB$). Vẽ ra ngoài hình bình hành tam giác ABM cân tại B và tam giác ADN cân tại D sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ADN}$.

a) Chứng minh rằng $CM = CN$;

b) Trên AC lấy một điểm O. Hãy so sánh OM với ON.

• **Nhận biết hình bình hành**

Bài 7. Cho đoạn thẳng PQ và một điểm A ở ngoài đường thẳng PQ. Vẽ hình bình hành ABCD có đường chéo $BD \parallel PQ$ và $BD = PQ$. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng BC và CD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 8. Trong tất cả các tứ giác với hai đường chéo có độ dài m và n cho trước và góc xen giữa hai đường chéo có độ lớn α cho trước hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

• **Dựng hình bình hành**

Bài 9. Cho tam giác ABC. Dựng điểm $M \in AB$, điểm $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$ và $BM = AN$.

Bài 10. Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí các điểm A và vị trí các trung điểm M, N của BC và CD.

Hướng dẫn giải

Bài 1. (h.4.6)

Vẽ hình bình hành DAEF. Khi đó AF đi qua M.

Gọi H là giao điểm của MA với BC.

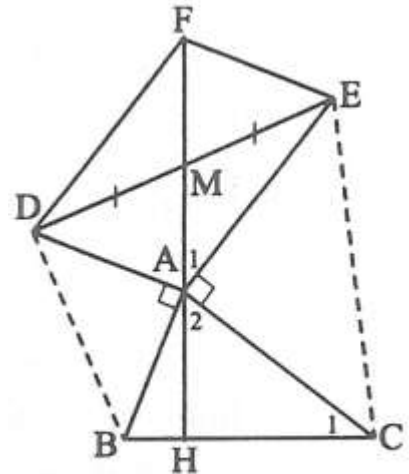
Ta có: $EF = AD = AB$.

$\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 180^\circ$ mà $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$ nên

$\widehat{AEF} = \widehat{BAC}$.

$\triangle AEF = \triangle CAB (g.c.g) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ$.



Hình 4.6

Do đó: $MA \perp BC$.

Bài 2. (h.4.7)

Ta đặt $\widehat{ADC} = \alpha$ thì $\widehat{DAM} = 90^\circ + \alpha$; $\widehat{NCD} = 90^\circ + \alpha$.

$\triangle DAM$ và $\triangle NCD$ có:

$$AM = CD (= AB); \widehat{DAM} = \widehat{NCD} (= 90^\circ + \alpha);$$

$$AD = CN (= BC).$$

Do đó $\triangle DAM = \triangle NCD (c.g.c)$

$$\Rightarrow DM = DN \quad (1)$$

$$\text{và } \widehat{DMA} = \widehat{NDC}.$$

Kéo dài MA cắt CD tại H . Ta có:

$$MA \perp AB \Rightarrow MH \perp CD.$$

$$\text{Xét } \triangle MDH \text{ có } \widehat{DMA} + \widehat{ADM} + \alpha = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NDC} + \widehat{ADM} + \alpha = 90^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{MDN} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DMN$ vuông cân tại D

Bài 3. (H.4.8)

Vẽ $HM \parallel AC (M \in AB)$, $HN \parallel AB (N \in AC)$.

Vì $CH \perp AB$ nên $CH \perp HN$. Vì $BH \perp AC$ nên $BH \perp HM$.

$$\text{Xét } \triangle HBM \text{ vuông tại H có } BM > HB. \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle HCN \text{ vuông tại H có } CN > HC. \quad (2)$$

Xét hình bình hành $ANHM$ có

$$AM + AN = AM + MH > HA. \quad (3)$$

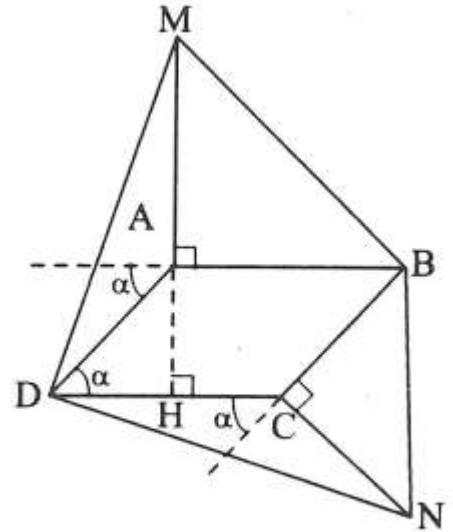
Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BM + CN + AM + AN > HB + HC + HA$$

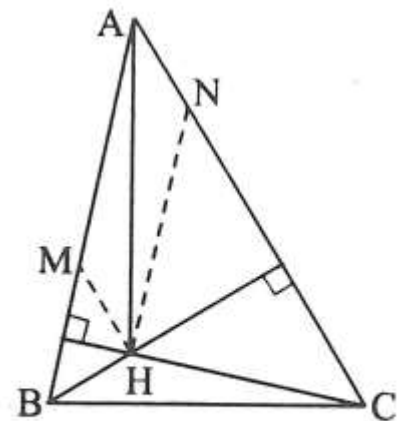
$$\text{do đó } (MB + AM) + (CN + AN) > HA + HB + HC$$

$$\text{hay } AB + AC > HA + HB + HC.$$

Chúng minh tương tự, ta được: $BC + BA > HA + HB + HC$



Hình 4.7



Hình 4.8

$$CA + CB > HA + HB + HC.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(AB + BC + CA) > 3(HA + HB + HC)$$

$$\text{Do đó } AB + BC + CA > \frac{3}{2}(HA + HB + HC).$$

Bài 4. (h.4.9)

Qua O dựng một đường thẳng song song với BC cắt AB và CD lần lượt tại E và G. Qua O dựng một đường thẳng song song với AD cắt AD tại H.

Qua E dựng một đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Khi đó tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.

Thật vậy, các tứ giác AEOH, HOGD là những hình thang cân.

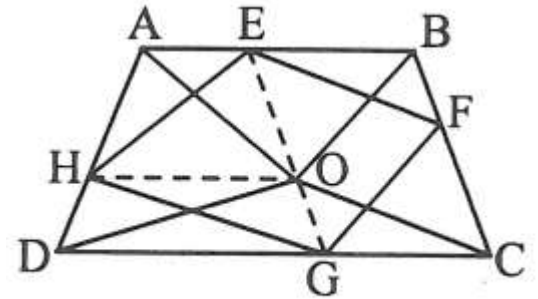
$$\Rightarrow OA = EH; OD = HG. \quad (1)$$

$$\text{Tứ giác EFCO là hình bình hành} \Rightarrow OC = EF \quad (2)$$

$$\text{và } OE = CF. \text{ Suy ra } OG = BF$$

$$\text{Vậy tứ giác OBFG là hình bình hành} \Rightarrow OB = GF. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.



Hình 4.9

Bài 5. (h.4.10)

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ $OO' \perp xy$.

Ta có: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel OO'$.

Xét hình thang $AA'C'C$ có $OA = OC$

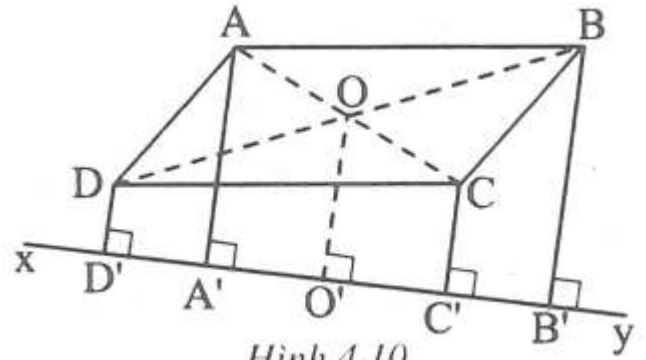
và $OO' \parallel AA'$ nên $O'A' = O'C'$.

Do đó OO' là đường trung bình của

$$\text{hình thang } AA'C'C \Rightarrow OO' = \frac{AA' + CC'}{2} \text{ hay } AA' + CC' = 2OO'.$$

Xét hình thang $DD'B'B$, cũng chứng minh tương tự, ta có: $BB' + DD' = 2OO'$.

Từ đó suy ra: $AA' + CC' = BB' + DD'$.



Hình 4.10

Bài 6. (h.4.11)

a) Vì ABCD là hình bình hành nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

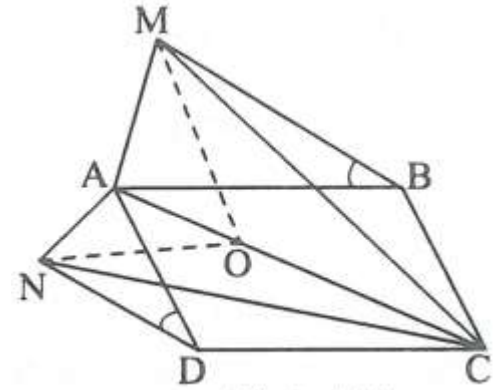
Ta đặt $\widehat{ABC} = m^\circ, \widehat{ABM} = n^\circ$, khi đó

$$\widehat{MBC} = \widehat{CDN} = m^\circ + n^\circ$$

$\triangle MBC$ và $\triangle CDN$ có:

$$MB = CD (= AB); \widehat{MBC} = \widehat{CDN} \text{ (chứng minh trên);}$$

$$BC = DN (= AD). \text{ Vậy } \triangle MBC = \triangle CDN (c.g.c) \Rightarrow CM = CN.$$



Hình 4.11

b) Các $\triangle ABM$ và $\triangle AND$ là những tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau mà $AB > AD$ nên $AM > AN$ (bạn đọc tự chứng minh)

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle CAN$ có $CM = CN$; CA chung và $AM > AN$ nên $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$.

Xét $\triangle OCM$ và $\triangle OCN$ có $CM = CN$; CO chung và $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$ nên $OM > ON$.

Bài 7. (h.4.15)

Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel PQ$.

Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = PQ$.

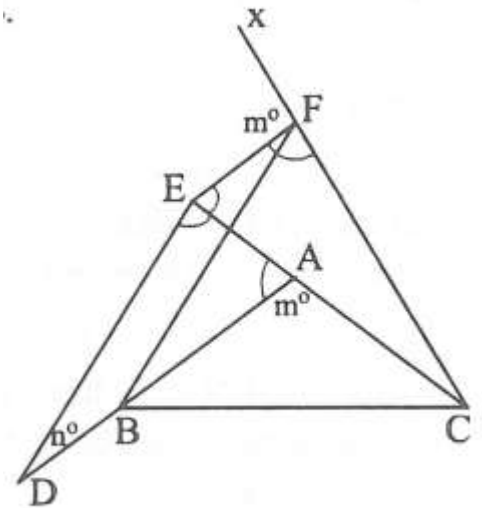
Như vậy các điểm M và N cố định.

Tứ giác AMBD có hai cạnh đối diện song song và bằng nhau nên là hình bình hành $\Rightarrow BM \parallel AD$.

Mặt khác, $BC \parallel AD$ nên ba điểm B, M, C thẳng hàng (tiên đề O-clit)

Do đó đường thẳng BC đi qua điểm cố định M.

Chứng minh tương tự, ta được đường thẳng CD đi qua điểm cố định N.



Hình 4.12

Bài 8. (h.4.16)

Xét tứ giác ABCD có $AC = m, BD = n$ và $\widehat{BOC} = \alpha$.

Vẽ hình bình hành ADBE và vẽ hình bình hành CAEF.

Khi đó: $EF = AC = m; CF = AE = BD = n$;

$$\widehat{EAC} = \widehat{BOC} = \alpha.$$

Như vậy hình bình hành CAEF hoàn toàn được xác định, do đó hai đường chéo AF và CE không đổi.

Dễ thấy tứ giác BFCD là hình bình hành $\Rightarrow BF = CD$.

Chu vi tứ giác ABCD là:

$$(AB + CD) + (BC + AD) = (AB + BF) + (BC + BE) \geq AF + CE.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} A, B, F & \text{thẳng hàng} \\ C, B, E & \text{thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Vậy chu vi của tứ giác ABCD nhỏ nhất khi và chỉ khi ABCD là hình bình hành.

Bài 9. (h.4.17)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được $MN \parallel BC$ sao cho $BM = AN$.

Vẽ $ND \parallel AB$ ($D \in BC$)

Tứ giác MNDB là hình bình hành

$$\Rightarrow DN = BM \text{ mà } BM = AN \text{ nên } DN = AN \Rightarrow$$

$$\triangle NAD \text{ cân} \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{D_1}.$$

Mặt khác, $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (so le trong) nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó AD là đường phân giác của góc A.

Điểm D dựng được suy ra các điểm N và M cũng dựng được.

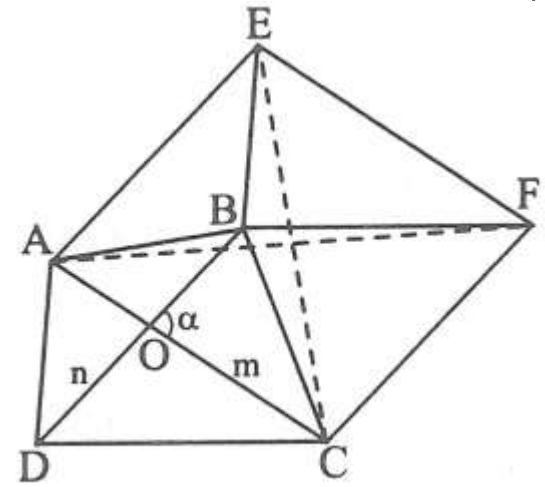
b) Cách dựng

- Dựng đường phân giác AD của tam giác ABC.

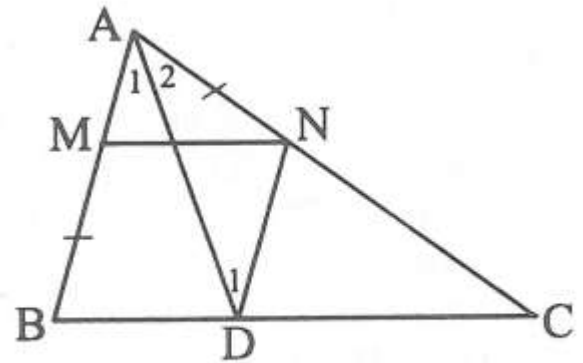
- Dựng $DN \parallel AB$ ($N \in AC$).

- Dựng $NM \parallel BC$ ($M \in AB$).

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.



Hình 4.16



Hình 4.17

Bài 10. (h.4.18)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình bình hành thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và K là giao điểm của MN và AC.

Xét $\triangle CBD$ có MN là đường trung bình, $MN \parallel BD$.

Xét $\triangle COB$ có $MB = MC$ và $MK \parallel OB$ nên $CK = KO$.

Vậy MK là đường trung bình nên $MK = \frac{1}{2}OB$.

Chứng minh tương tự, ta được $KN = \frac{1}{2}OD$.

Mặt khác, $OB = OD$ nên $KM = KN$.

Vậy điểm K là trung điểm của MN xác định được.

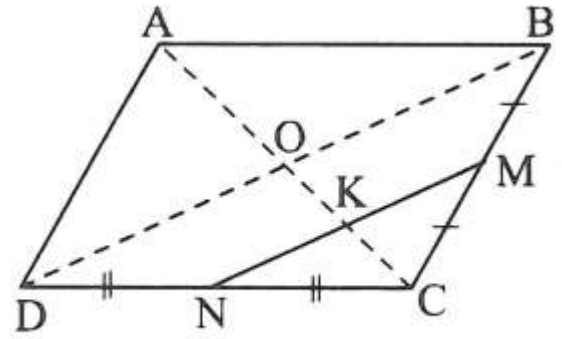
Dễ thấy $OK = KC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA \Rightarrow KC = \frac{1}{4}AC$ suy ra $KC = \frac{1}{3}KA$.

Điểm C nằm trên tia đối của tia KA và cách K một khoảng $\frac{1}{3}AK$.

Điểm C xác định được thì các điểm B và D cũng xác định được.

b) Cách dựng

- Dựng đoạn thẳng MN.
- Dựng trung điểm K của MN.
- Dựng tia AK.
- Trên tia đối của tia KA dựng điểm C sao cho $KC = \frac{1}{3}KA$.
- Dựng điểm B sao cho M là trung điểm của CB.
- Dựng điểm D sao cho N là trung điểm của CD.
- Dựng các đoạn thẳng AB, AD ta được hình bình hành phải dựng.



Hình 4.18

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====