

Dạng 1: Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai**1.1. Dạng đặc biệt: Phương trình bậc hai có một nghiệm là 1 hoặc -1**

Ví dụ 1: Nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $3x^2 + 8x - 11 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

1.2. Cho phương trình bậc hai, có một hệ số chưa biết, cho trước một nghiệm, tìm nghiệm còn lại và chỉ ra hệ số chưa biết của phương trình:

Ví dụ 2:

a) Phương trình $x^2 - 2px + 5 = 0$ có một nghiệm bằng 2, tìm p và nghiệm còn lại của phương trình.

b) Phương trình $x^2 + 5x + q = 0$ có một nghiệm bằng 5, tìm q và nghiệm còn lại của phương trình

c) Phương trình $x^2 - 7x + q = 0$ biết hiệu hai nghiệm bằng 11. Tìm q và hai nghiệm của phương trình

d) Phương trình $x^2 - qx + 50 = 0$ có hai nghiệm trong đó một nghiệm gấp đôi nghiệm kia, tìm q và hai nghiệm đó.

*** Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Tìm nghiệm của phương trình:

a) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

b) $x^2 - (m + 5)x + m + 4 = 0$

Bài 2: Xác định m và tìm nghiệm còn lại của phương trình

a) $x^2 + mx - 35 = 0$ biết một nghiệm bằng -5

b) $2x^2 - (m + 4)x + m = 0$ biết một nghiệm bằng -3

c) $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ biết một nghiệm bằng 3

2. Dạng 2: Lập phương trình bậc hai**2.1. Lập phương trình bậc hai biết hai nghiệm**

Ví dụ 1: Lập một phương trình bậc hai chứa hai nghiệm là 3 và 2

Ví dụ 2: Cho $x_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$

Hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm: x_1 ; x_2 .

2.2. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn biểu thức chứa hai nghiệm của một phương trình cho trước.

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Ví dụ 3: Tìm các hệ số p và q của phương trình: $x^2 + px + q = 0$ sao cho hai nghiệm x_1 ; x_2 của phương trình thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$$

a) 8 và -3 b) 36 và -104

c) $1 + \sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Bài 6: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1^3 - x_2^3 = 26 \end{cases}$

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Bài tập áp dụng:**Bài 1:** Cho phương trình $8x^2 - 72x + 64 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ hãy tính

$$\text{a) } x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{b) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 14x + 29 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ hãy tính

$$\text{a) } x_1^3 + x_2^3 \qquad \text{b) } \frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2}$$

4.2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc tham số**Ví dụ 1:** Cho Phương trình $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$ (m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$
 b) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m

Ví dụ 2: Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ Chứng minh biểu thức $A = 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 - 8$ không phụ thuộc giá trị của m**Bài tập áp dụng:****Bài 1:** Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ sao cho chúng độc lập (không phụ thuộc) với m**Bài 2:** (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2008 – 2009)Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ (1)

- a) Giải phương trình (1) khi m = 7
 b) Tìm tất cả các giá trị m để (1) có nghiệm.
 c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm $x_1; x_2$ của (1) sao cho hệ thức đó không phụ thuộc tham số m

4.3. Tìm giá trị của tham số thỏa mãn biểu thức nghiệm cho trước.**Ví dụ 1:** Cho phương trình $mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-3) = 0$ Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_1x_2$ **Ví dụ 2:** Cho phương trình $mx^2 - 2(m-4)x + m + 7 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$ **Ví dụ 3:** Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ **Ví dụ 4:** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m.Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + (m-1)x + 5m - 6 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4x_1 + 3x_2 = 1$

Bài 2: Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 6$

Bài 4: Cho phương trình $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = 1$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

Bài 6: Cho phương trình $8x^2 - 8x + m^2 + 1 = 0$ (*) (x là ẩn số)

Định m để phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện:

$$x_1^4 - x_2^4 = x_1^3 - x_2^3$$

Bài 7: Cho phương trình: $3x^2 - (3m-2)x - (3m+1) = 0$.

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $3x_1 - 5x_2 = 6$

Bài 8: Cho phương trình: $x^2 - (m+1)x + m - 5 = 0$.

Xác định tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 32 \end{cases}$

Bài 9: Định m để phương trình $x^2 - (m-1)x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5.

Bài 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + m)(x_2 + m) = 3m^2 + 12$

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ (1) (x là ẩn).

Tìm các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} = 3\sqrt{3}.$$

Bài 12: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + 2mx_2 = 9$

Bài 13: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

4.4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức nghiệm

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$

Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1 và x_2 . Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$ (1) trong đó m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt GTLN.

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 + 2x - m = 0$ (1). (x là ẩn, m là tham số)

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (có thể bằng nhau) của phương trình (1). Tính biểu thức $P = x_1^4 + x_2^4$ theo m , tìm m để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là 3 số thực thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{a} \\ a + b + c = abc \end{cases} \quad \text{Tìm GTNN của } a \text{ (Xác định } b, c \text{ khi } a \text{ min)}$$

Ví dụ 5: Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-4)x + m^2 - 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b) $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 2: Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Tìm m để $A = (x_1 - x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 3: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT 2004 – 2005)

Cho phương trình $(m^4 + 1)x^2 - m^2x - (m^2 - 2m + 2) = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của $x_1 + x_2$

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2008 – 2009)

Cho phương trình $x^2 - (3m-1)x + 2(m^2-1) = 0$ (1), (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

b) Chứng minh (1) luôn có nghiệm với mọi m

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$. Tìm m để hai nghiệm x_1, x_2

thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$, với m là tham số.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức

$Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4)$ có giá trị lớn nhất.

Bài 7: Cho phương trình $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$

Tìm m để phương trình x_1, x_2 thỏa mãn :

$A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$ đạt GTNN.

$B = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ đạt GTNN.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (x là ẩn, m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho tổng

$P = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Dạng 5: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Không giải phương trình hãy cho biết dấu của các nghiệm?

a) $5x^2 + 7x + 1 = 0$

b) $x^2 - 13x + 40 = 0$

c) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 - (m-1)x + m^2 - m + 2 = 0$ (m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu với $\forall m$

Ví dụ 3: Xác định m để phương trình $2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0$

có hai nghiệm trái dấu.

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$ (1)

a) Chứng minh (1) luôn có nghiệm với mọi m

b) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

Bài 2: (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm học 2007 – 2008)

Cho phương trình $x^2 - 5x + m = 0$

a) Giải phương trình với $m = 6$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 4m - 1 = 0$

- a) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm dương
- b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Bài 4: Xác định m để phương trình

- a) $mx^2 - 2(m+2)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu
- b) $(m-1)x^2 - 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm

Chúc các con ôn tập tốt !