

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## A. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### MỤC LỤC

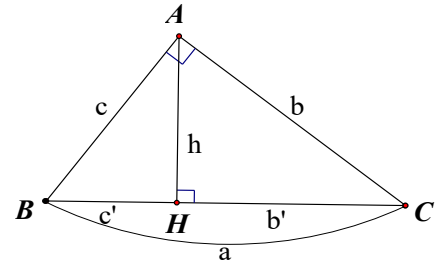
|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| A. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG .....                  | 1  |
| 📁. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG .....   | 2  |
| 📁. Lý thuyết .....                                           | 2  |
| 📁. Bài tập .....                                             | 2  |
| 📁. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN .....                       | 10 |
| 📁. Lý thuyết .....                                           | 10 |
| 📁. Bài tập .....                                             | 11 |
| 📁. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG .....  | 16 |
| 📁. Lý thuyết .....                                           | 16 |
| 📁. Bài tập .....                                             | 16 |
| 📁. GIẢI BÀI TOÁN HỆ THỨC LƯỢNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ ..... | 18 |
| 📁. Lý thuyết .....                                           | 18 |
| 📁. Bài tập .....                                             | 18 |
| 📁. MỘT SỐ BÀI TẬP SÚU TẦM .....                              | 21 |

## 📁. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### 📁. Lý thuyết

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có các hệ thức sau:

1.  $AB^2 = BH.BC$  hay  $c^2 = ac'$   
 $AC^2 = CH.BC$  hay  $b^2 = ab'$
2.  $HA^2 = HB.HC$  hay  $h^2 = c'b'$
3.  $AB.AC = BC.AH$  hay  $cb = ah$
4.  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  hay  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$ .
5.  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lý Pitago)



### 📁. Bài tập

#### Vận dụng hệ thức 1:

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = 20\text{cm}$ . Biết tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền là  $9 : 16$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

#### Hướng dẫn giải

Vẽ đường cao  $AH$ .

$$\text{Ta có } \frac{HB}{HC} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{HB}{9} = \frac{HC}{16} = \frac{HB+HC}{9+16} = \frac{20}{25}$$

$$\text{Suy ra } HB = \frac{9 \cdot 20}{25} = 7,2 (\text{cm}); \quad HC = \frac{16 \cdot 20}{25} = 12,8 (\text{cm})$$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  ta có:

$$AB^2 = BC.BH = 20 \cdot 7,2 = 144 \Rightarrow AB = 12 (\text{cm});$$

$$AC^2 = BC.CH = 20 \cdot 12,8 = 256 \Rightarrow AC = 16 (\text{cm}).$$

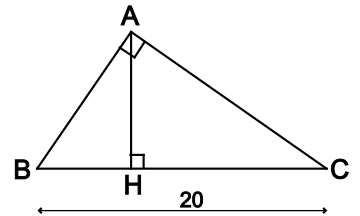
$$\text{Vậy diện tích } \triangle ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 (\text{cm}^2).$$

#### Cách giải khác:

Sau khi tính được  $HB$  và  $HC$ , ta tính  $AH$  theo công thức:  $AH^2 = HB.HC$  (hệ thức 2).

$$AH^2 = 7,2 \cdot 12,8 = 92,16 \Rightarrow AH = 9,6 (\text{cm}).$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9,6 = 96 (\text{cm}^2).$$



**Bài 2:** Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 cm và 4 cm, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và các đoạn thẳng mà nó chia ra trên cạnh huyền.

### Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC có các cạnh góc vuông  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ , AH là đường cao.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ABC:

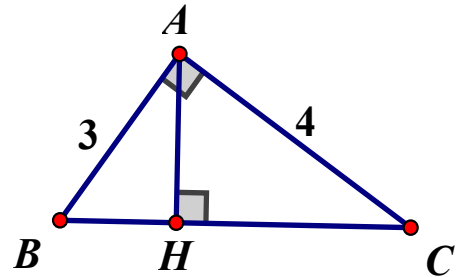
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5\text{ cm}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$BA^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} \Rightarrow BH = \frac{3^2}{5} \Rightarrow BH = \frac{9}{5} (\text{cm})$$

$$CA^2 = CH \cdot CB \Rightarrow CH = \frac{CA^2}{CB} \Rightarrow CH = \frac{4^2}{5} \Rightarrow CH = \frac{16}{5} (\text{cm})$$

$$AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5} \Rightarrow AH = \frac{12}{5} (\text{cm})$$



(Có thể tính đường cao AH bởi công thức  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ )

**Bài 3:** Cho tam giác ABC cân tại A. Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại O. Biết  $OA = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ ,  $OB = 2\text{cm}$ , tính độ dài AB.

### Hướng dẫn giải

Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt tia BO tại D.

$$\text{Ta có } \widehat{D} + \widehat{B}_1 = 90^\circ \quad \widehat{AOD} + \widehat{B}_2 = 90^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \text{ nên } \widehat{AOD} = \widehat{D}$$

Do đó  $\triangle AOD$  cân tại A. Suy ra  $AD = AO = 2\sqrt{3} (\text{cm})$ .

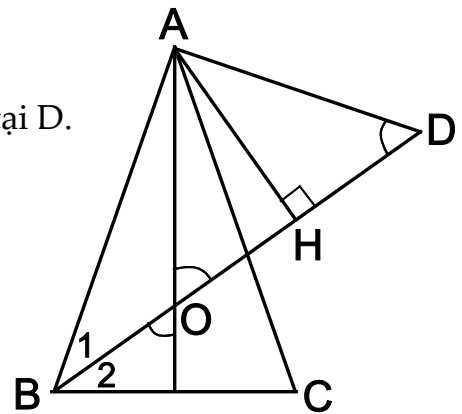
Vẽ  $AH \perp OD$  thì  $HO = HD$ .

Ta đặt  $HO = HD = x$  thì  $BD = 2x + 2$ .

Xét  $\triangle ABD$  vuông tại A, đường cao AH, ta có  $AD^2 = BD \cdot HD$ .

Suy ra  $(2\sqrt{3})^2 = x(2x + 2)$  Từ đó ta được phương trình:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -3.$$



Giá trị  $x = 2$  được chọn, giá trị  $x = -3$  bị loại.

Do đó  $BD = 2 + 2 + 2 = 6$  (cm). Suy ra  $AB = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$  (cm).

### Vận dụng hệ thức 2:

**Bài 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết diện tích các tam giác ABH và ACH lần lượt là  $54\text{cm}^2$  và  $96\text{cm}^2$ . Tính độ dài BC.

#### Hướng dẫn giải

Ta có  $S_{ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = 54$

Suy ra  $AH \cdot BH = 108$ . (1)

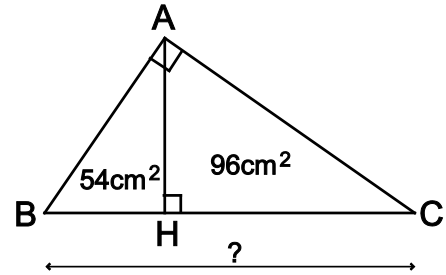
$S_{ACH} = \frac{1}{2} AH \cdot CH = 96$  Suy ra  $AH \cdot CH = 192$ . (2)

Từ (1) và (2) ta được:  $AH^2 \cdot BH \cdot CH = 108 \cdot 192$ .

Mặt khác  $AH^2 = BH \cdot CH$  (hệ thức 2). Suy ra  $AH^4 = 12^4 \Rightarrow AH = 12$  (cm).

Ta có  $S_{ABC} = 54 + 96 = 150$  ( $\text{cm}^2$ ) mà  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$  nên  $\frac{1}{2} BC \cdot AH = 150$

Suy ra  $BC = \frac{150 \cdot 2}{12} = 25$  (cm).



**Bài 2:** Cho hình thang ABCD,  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$  Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết  $OB = 5,4\text{cm}$ ;  $OD = 15\text{cm}$ .

a) Tính diện tích hình thang;

b) Qua O vẽ một đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Tính độ dài MN.

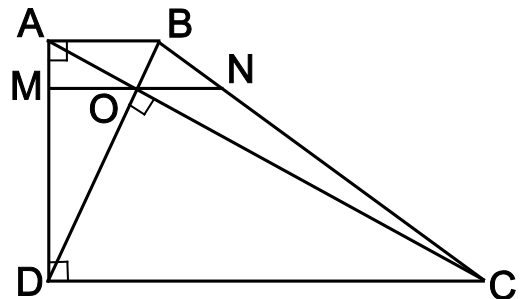
#### Hướng dẫn giải

##### \* Tìm cách giải

Đã biết đường chéo BD nên cần tìm đường chéo AC là có thể tính được diện tích hình thang. Muốn vậy phải tính OA và OC.

##### \* Trình bày lời giải

a) • Xét  $\triangle ABD$  vuông tại A có  $AO \perp BD$  nên  $OA^2 = OB \cdot OD$  (hệ thức 2).



Do đó  $OA^2 = 5,4.15 = 81 \Rightarrow OA = 9$  (cm).

• Xét  $\triangle ACD$  vuông tại D có  $OD \perp AC$  nên  $OD^2 = OA.OC$  (hệ thức 2).

$$\Rightarrow OC = \frac{OD^2}{OA} = \frac{15^2}{9} = 25 \text{ (cm)}.$$

Do đó  $AC = 25 + 9 = 34$  (cm);  $BD = 5,4 + 15 = 20,4$  (cm).

Diện tích hình thang ABCD là:  $S = \frac{ACBD}{2} = \frac{34.20,4}{2} = 346,8$  (cm<sup>2</sup>).

b) Xét  $\triangle ADC$  có  $OM \parallel CD$  nên  $\frac{OM}{CD} = \frac{AO}{AC}$  (hệ quả của định lý Ta-lét). (1)

Xét  $\triangle BDC$  có  $ON \parallel CD$  nên  $\frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC}$  (hệ quả của định lý Ta-lét). (2)

Xét  $\triangle ABC$  có  $ON \parallel AB$  nên  $\frac{AO}{AC} = \frac{BN}{BC}$  (định lý Ta-lét). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$

Do đó  $OM = ON$ .

Xét  $\triangle AOD$  vuông tại O,  $OM \perp AD$  nên  $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2}$  (hệ thức 4).

Do đó  $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} \Rightarrow OM \approx 7,7$  (cm).

Suy ra  $MN \approx 7,7.2 = 15,4$  (cm).

#### Vận dụng hệ thức 4:

**Bài 1:** Cho hình vuông ABCD cạnh 1. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

#### Hướng dẫn giải

\* *Tìm cách giải*

Biểu thức  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$  gợi ý cho ta vận dụng hệ thức (4)  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  để giải. Muốn vậy phải tạo ra một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng AM, AN.

\* *Trình bày lời giải*

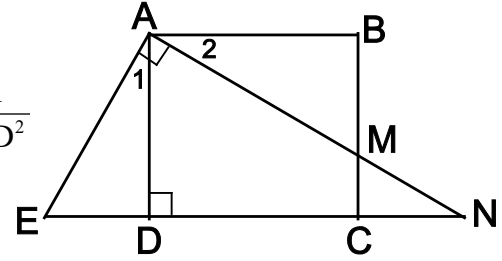
Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt đường thẳng CD tại E.

$\triangle ADE$  và  $\triangle ABM$  có  $\widehat{D} = \widehat{B} = 90^\circ$   $AD = AB$ ;  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  (cùng phụ với  $\widehat{DAM}$ ).

Do đó  $\triangle ADE = \triangle ABM$  (g.c.g). Suy ra  $AE = AM$ .

Xét  $\triangle AEN$  vuông tại A có  $AD \perp EN$  nên  $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$

Mặt khác  $AE = AM$ ;  $AD = 1$  nên  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = 1$



**Bài 2:** Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK. Chứng minh

rằng:  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$

### Hướng dẫn giải

\* *Tìm cách giải:* Để chứng minh đẳng thức trên người ta thường nghĩ ngay đến hệ thức lượng trong tam giác vuông “ Hệ thức  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  ”. Một thủ thuật để nhận ra tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền là vẽ đường phụ để tạo ra tam giác vuông tại B có đường cao là BK, cạnh góc vuông là BC. Khi đó ta nghĩ ngay đường phụ cần vẽ cạnh góc vuông còn lại.

\* *Trình bày lời giải*

Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia đối của tia AC tại D.

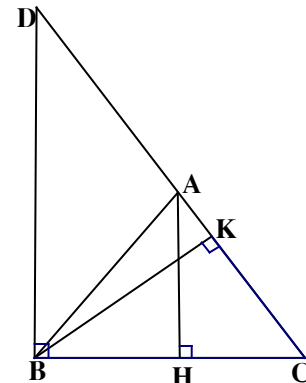
Vì  $\triangle ABC$  cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến  $\Rightarrow BH = HC$ .

Xét  $\triangle BCD$  có  $BH = HC$  (c/m trên);  $AH \parallel BD$  ( $\perp BC$ )

$\Rightarrow CA = AD$  (t/c đường trung bình của tam giác).

Nên AH là đường trung bình của  $\triangle BCD$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BD \Rightarrow BD = 2AH. (1)$



Xét  $\triangle BCD$  có  $\widehat{DBC} = 90^\circ$ ;  $BK \perp CD$  ( $K \in CD$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2} \quad (\text{đpcm})$$

### Vận dụng nhiều hệ thức

**Bài 1:** Cho hình thang ABCD,  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$  = hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Cho biết AD = 12cm; CD = 16cm. Tính các độ dài OA, OB, OC, OD.

### Hướng dẫn giải

$\triangle ADC$  vuông tại D, theo định lý Py-ta-go ta có:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 12^2 + 16^2 = 400.$$

Suy ra  $AC = 20$  (cm).

$\triangle ADC$  vuông tại D, DO là đường cao nên

$$AD \cdot DC = AC \cdot DO \quad (\text{hệ thức 3}).$$

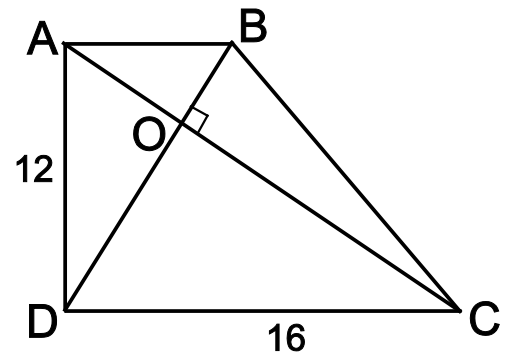
$$\text{Suy ra } OD = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Ta lại có } AD^2 = AC \cdot AO \quad (\text{hệ thức 1}) \text{ nên } OA = \frac{AD^2}{AC} = \frac{12^2}{20} = 7,2 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } OC = 20 - 7,2 = 12,8 \text{ (cm)}.$$

Xét  $\triangle ABD$  vuông tại A, AO là đường cao nên  $AO^2 = OB \cdot OD$  (hệ thức 2).

$$\Rightarrow OB = \frac{AO^2}{OD} = \frac{7,2^2}{9,6} = 5,4 \text{ (cm)}.$$



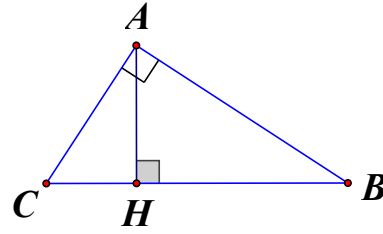
**Bài 2:** (Hãy giải bằng nhiều cách khác nhau) Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết AB=8cm, AC=6cm. Tính độ dài AH. )

### Hướng dẫn giải

**\*Cách 1:** Ta có  $\triangle ABC$  vuông tại A nên :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm}) \text{ (Định lý Pytago)}$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A, } AH \perp BC, \text{ nên } AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 4,8(\text{cm})$$



**\*Cách 2:**  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AH \perp BC$ , nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{64 \cdot 36}{100}} = 4,8(\text{cm})$$

**\*Cách 3:** Tam giác ABC vuông tại A, Theo định lý Pytago ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \text{ nên suy ra } BC = 10\text{cm.}$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A nên: } BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = 6,4(\text{cm}). \text{ Mà } HC = BC - BH = 3,6 \text{ (cm)}$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại A, } AH \perp BC, \text{ nên: } AH^2 = BH \cdot HC = 4,8^2 \Rightarrow AH = 4,8(\text{cm})$$

**\*Cách 4:** Gọi M là trung điểm BC.

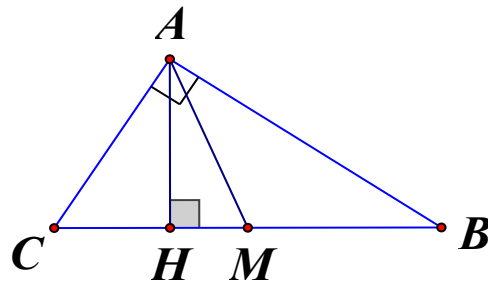
$$\text{Ta có : } BM = AM = \frac{1}{2}BC = 5\text{cm}$$

$$+ \text{ Tính được } BH = 6,4\text{cm}$$

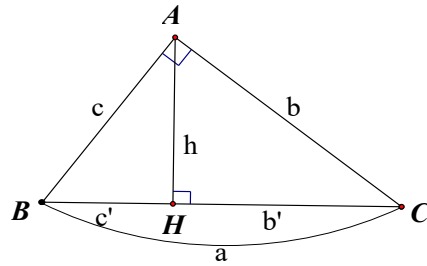
$$+ \text{ Nên } MH = BH - BM = 6,4 - 5 = 1(\text{cm})$$

Áp dụng định lý Pitago vào  $\triangle HAM$  vuông tại H:

$$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4,8(\text{cm})$$





**Hệ thống phương pháp giải toán thường gặp.****Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông**

*Phương pháp giải:* Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng  $AB, AC, BC, HA, HB, HC$  thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại bằng việc vận dụng các hệ thức (1)  $\rightarrow$  (5)

**Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông**

*Phương pháp giải:* Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo hướng:

*Bước 1.* Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

*Bước 2.* Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

*Bước 3.* Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

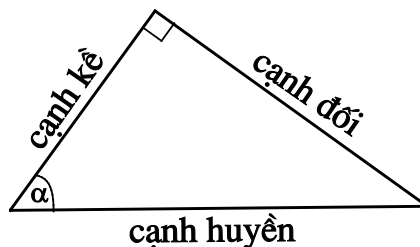
**Chú ý:** Có thể vẽ thêm hình phụ để tạo thành tam giác vuông hoặc tạo thành đường cao trong tam giác vuông từ đó vận dụng các hệ thức.

## 📁. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

### 📁. Lý thuyết

#### 1. Định nghĩa

$$\begin{aligned} \bullet \sin \alpha &= \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} & \bullet \cos \alpha &= \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} \\ \bullet \tan \alpha &= \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} & \bullet \cot \alpha &= \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} \end{aligned}$$



Từ định nghĩa ta có cả bốn tỉ số lượng giác đều dương và  $\sin \alpha < 1$ ;  $\cos \alpha < 1$ .

#### 2. Định lí

Nếu hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng cosin của góc kia, tang của góc này bằng cotang của góc kia.

#### 3. Một số hệ thức cơ bản

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2);$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (3); \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (4).$$

#### 4. So sánh các tỉ số lượng giác

Cho  $\alpha, \beta$  là hai góc nhọn. Nếu  $\alpha < \beta$  thì

- $\sin \alpha < \sin \beta$ ;  $\tan \alpha < \tan \beta$ ;
- $\cos \alpha > \cos \beta$ ;  $\cot \alpha > \cot \beta$ .

Bảng lượng giác một số góc đặc biệt

|     | $0^0$ | $30^0$               | $45^0$               | $60^0$               | $90^0$ |
|-----|-------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|
| sin | 0     | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1      |
| cos | 1     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0      |
| tan | 0     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |        |
| cot |       | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0      |

**Ví dụ minh họa:** Cho tam giác vuông tại A, trong đó  $AC = 0,9\text{m}$ ;  $AB = 1,2\text{ m}$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

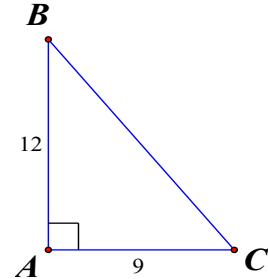
### Hướng dẫn giải

Ta có  $AC = 9\text{ dm}$ ,  $AB = 12\text{ dm}$ . Theo định lí Pitago, ta có

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ (dm)}$$

$$\text{Vậy } \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \quad \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}; \quad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$



Vì góc B và góc C là hai góc phụ nhau nên:

$$\sin B = \cos C = \frac{3}{5}; \quad \cos B = \sin C = \frac{4}{5}; \quad \tan B = \cot C = \frac{3}{4}; \quad \cot B = \tan C = \frac{4}{3}$$

### Bài tập

**Bài 1:** Chứng minh các hệ thức:

$$\text{a) } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{b) } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

### Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{a) Ta có } 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

**Nhận xét:** Trong cách giải trên ta đã biến đổi vế trái thành vế phải. Ta cũng có thể biến đổi vế phải thành vế trái theo chiều ngược lại.

Hai hệ thức trên cũng là hệ thức cơ bản, nên nhớ để sau này vận dụng.

**Bài 2:** Cho  $\alpha$  là một góc nhọn. Chứng minh rằng:

a)  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ;

b)  $\cos \alpha < \cot \alpha$  .

## Hướng dẫn giải

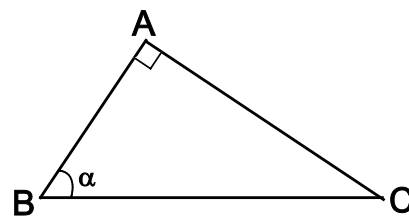
a) Ta có  $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$   $\tan \alpha = \frac{AC}{AB}$  mà  $BC > AB$  nên  $\frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB}$

Do đó  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ;

b) Ta có  $\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$   $\cot \alpha = \frac{AB}{AC}$  mà  $BC > AC$  nên  $\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC}$

Do đó  $\cos \alpha < \cot \alpha$

**Nhận xét:** Phương pháp giải ví dụ này là dùng định nghĩa của tỉ số lượng giác.



**Bài 3:** Chứng minh định lí sin: Trong một tam giác nhọn, độ dài các cạnh tỉ lệ

với sin của các góc đối diện:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

## Hướng dẫn giải

\* *Tìm cách giải:*

Để có  $\sin A$  (hoặc  $\sin B$ ,  $\sin C$ ) thì phải xét tam giác vuông với  $A$  là một góc nhọn. Do đó phải vẽ thêm đường cao.

\* Trình bày lời giải:

Vẽ đường cao CH.

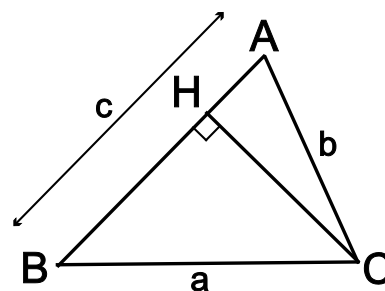
Xét  $\triangle ACH$  vuông tại H ta có:  $\sin A = \frac{CH}{AC}$  (1)

Xét  $\triangle BCH$  vuông tại H ta có:  $\sin B = \frac{CH}{BC}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CH}{AC} : \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$ . Do đó  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Chúng minh tương tự ta được  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Vậy  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



*Lưu ý:* Nếu  $\Delta ABC$  có  $\hat{C} \geq 90^\circ$  thì ta vẫn có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

**Bài 4:** Tìm góc  $x$ , biết rằng:

a)  $\tan x = 3 \cot x$ ;                      b)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

### Hướng dẫn giải

a)  $\tan x = 3 \cot x$ ; . Suy ra  $\tan x = \frac{3}{\tan x}$  (vì  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ).

Do đó  $\tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$  Vậy  $x = 60^\circ$ .

b)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  Bình phương hai vế ta được:  $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$

$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 1 = 2$  (vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ )

$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 0$  . Do đó  $\sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin (90^\circ - x)$  (vì  $\cos x = \sin (90^\circ - x)$ )

Dẫn tới  $x = 90^\circ - x \Leftrightarrow 2x = 90^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ$ .

**Nhận xét:** Phương pháp chung để giải ví dụ này là tìm cách đưa phương trình có hai tỉ số lượng giác về dạng còn một tỉ số lượng giác bằng cách vận dụng quan hệ giữa các tỉ số lượng giác đó

**Bài 5:** Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính giá trị của các biểu thức sau bằng cách hợp lí:

a)  $P = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

b)  $Q = \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ \cdot \tan 35^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 55^\circ \cdot \tan 65^\circ \cdot \tan 75^\circ$

c) Biết  $\cos \alpha = \frac{20}{29}$  Tính  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$ .

### Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí nếu hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng cosin góc kia, tang của góc này bằng cotang góc kia, ta có:

a)  $P = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

$= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ$

$= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ$

$$= 1+1+1+\dots+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 44,5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q &= \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ \cdot \tan 35^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 55^\circ \cdot \tan 65^\circ \cdot \tan 75^\circ \\ &= (\tan 15^\circ \cdot \tan 75^\circ) \cdot (\tan 25^\circ \cdot \tan 65^\circ) \cdot (\tan 35^\circ \cdot \tan 55^\circ) \cdot \tan 45^\circ \\ &= (\tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ) \cdot (\tan 25^\circ \cdot \cot 65^\circ) \cdot (\tan 35^\circ \cdot \cot 35^\circ) \cdot \tan 45^\circ \\ &= 1.1.1.1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441}{841}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{21}{29} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{21}{29} : \frac{20}{29} = \frac{21}{20} \quad \cos \alpha = \frac{20}{21}$$

**Bài 6:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính  $\sin B$ ,  $\sin C$  biết rằng:

a)  $AB = 13$  và  $BH = 5$ ;

b)  $BH = 3$  và  $CH = 4$ .

### Hướng dẫn giải

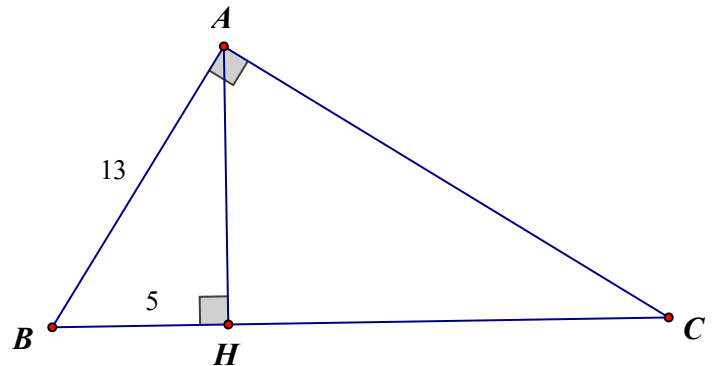
a) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{13^2}{5} = 33,8$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có:  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 31,2$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{31,2}{33,8} = \frac{12}{13}$$

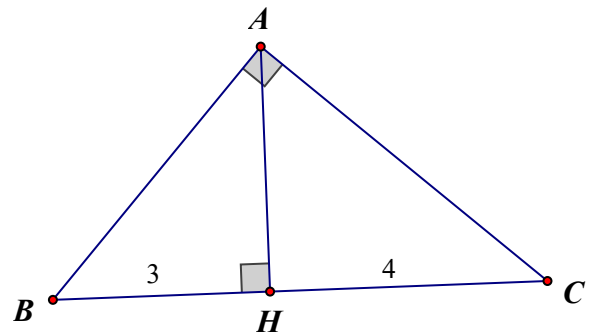
$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{33,8} = \frac{5}{13}$$



b) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ta có  $AH^2 = BH \cdot CH = 3 \cdot 4 \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$

Tam giác ABH vuông. Theo định lý Pytago ta có  $AB = \sqrt{HB^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + 12} = \sqrt{21}$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$



Tam giác ABC vuông,  $BC = BH + HC = 3 + 4 = 7$

Theo định lý Pytago ta có  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{49 - 21} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

**Cách 2:** Tam giác AHC vuông tại H; Theo định lý Pytago có

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

**Nhận xét:** Học sinh vận dụng các hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông từ đó tính ra tỉ số lượng giác của các góc nhọn trong tam giác vuông.

**Bài 7:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng  $\tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

### Hướng dẫn giải

Vẽ đường phân giác BD của  $\Delta ABC$  ( $D \in AC$ ).

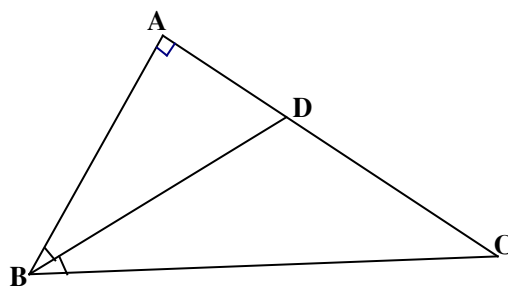
Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD + DC}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

Xét  $\Delta ABD$  có  $\widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB}$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$$

$$\text{Vậy } \tan \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$$



## 📁. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### 📁. Lý thuyết

#### 1. Định lí

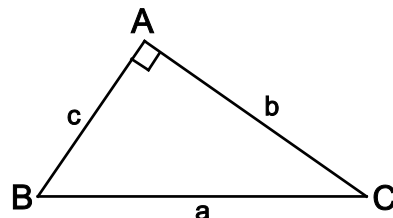
Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

- Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề;
- Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

Trong hình vẽ bên thì:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C ; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B ;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C ; \quad c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B ;$$



#### 2. Giải tam giác vuông

Là tìm tất cả các cạnh và góc của tam giác vuông khi biết hai yếu tố của nó (trong đó ít nhất có một yếu tố về độ dài).

### 📁. Bài tập

**Bài 1:** Giải tam giác ABC biết  $\hat{B} = 35^\circ$  ;  $\hat{C} = 50^\circ$  và đường cao AH = 5,0cm.

#### Hướng dẫn giải

Ta phải tìm  $\hat{A}$  AB, AC và BC.

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 95^\circ$$

- Xét  $\triangle ABH$  vuông tại H ta có:

$$AH = AB \cdot \sin B \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = \frac{5,0}{\sin 35^\circ} \approx 8,7(\text{cm})$$

$$BH = AH \cdot \cot B \approx 5,0 \cdot \cot 35^\circ \approx 7,1 (\text{cm}).$$

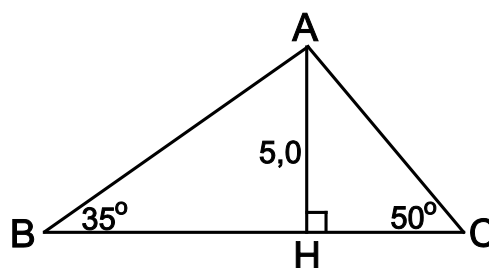
- Xét  $\triangle ACH$  vuông tại H ta có

$$AH = AC \cdot \sin C \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{5,0}{\sin 50^\circ} \approx 6,5(\text{cm})$$

$$CH = AH \cdot \cot C \approx 5,0 \cdot \cot 50^\circ \approx 4,2 (\text{cm}).$$

$$\text{Do đó } BC = BH + CH = 7,1 + 4,2 = 11,3 (\text{cm}).$$

Vậy  $\hat{A} = 95^\circ$  ; AB = 8,7cm; AC = 6,5cm và BC = 11,3cm.





**Lưu ý:** Sau khi tính được AB và AC, có thể tính BH và CH theo AB và AC:

$$BH = AB.\cos B ; CH = AC.\cos C.$$

Tuy nhiên, ta nên tính BH và CH theo các số đo đã cho trong đề bài để kết quả được chính xác hơn.

**Bài 2:** Cho tam giác ABC, AB = 14cm, AC = 11cm và  $\hat{B} = 40^\circ$ . Tính độ dài BC.

### Hướng dẫn giải

\* *Tìm cách giải*

Vẽ đường cao AH để vận dụng các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông. Tính HB và HC từ đó tính được BC.

\* *Trình bày lời giải*

Vẽ đường cao AH. Xét  $\triangle ABH$  vuông tại H có:

$$AH = AB.\sin B = 14.\sin 40^\circ \approx 9,0 \text{ (cm)}.$$

$$BH = AB.\cos B = 14.\cos 40^\circ \approx 10,7 \text{ (cm)}.$$

Xét  $\triangle AHC$  vuông tại H có:  $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} \approx 6,3 \text{ (cm)}.$

- Nếu H nằm giữa B và C thì  $BC = BH + HC \approx 10,7 + 6,3 = 17 \text{ (cm)}.$
- Nếu C' nằm giữa B và H thì  $BC' = BH - HC' \approx 10,7 - 6,3 = 4,4 \text{ (cm)}.$

**Lưu ý:** Học sinh có thể chỉ giải một nghiệm hình là chưa đủ. Bài toán có 2 nghiệm hình

**Bài 3:** Cho tam giác ABC, AB = 3,2cm; AC = 5,0cm và  $\hat{B} = 70^\circ$  Tính độ dài BC.

### Hướng dẫn giải

Vẽ đường cao AH. Xét  $\triangle ABH$  vuông tại H có:

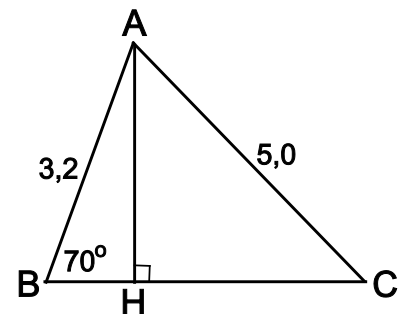
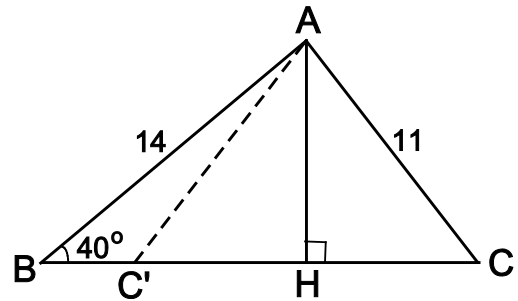
$$AH = AB.\sin B = 3,2.\sin 70^\circ \approx 3,0 \text{ (cm)}.$$

$$BH = AB.\cos B = 3,2.\cos 70^\circ \approx 1,1 \text{ (cm)}.$$

Xét  $\triangle AHC$  vuông tại H có:

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} \approx \sqrt{5,0^2 - 3,0^2} = 4,0 \text{ (cm)}.$$

Điểm C không thể nằm giữa H và B vì trên tia HB có  $HC > HB$ . Chỉ còn trường hợp điểm H nằm giữa B và C. Ta có  $BC = BH + HC \approx 1,1 + 4,0 = 5,1 \text{ (cm)}.$



## 📁. GIẢI BÀI TOÁN HỆ THỨC LƯỢNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

### 📁. Lý thuyết

- Thường gọi độ dài một cạnh cần tìm là ẩn, từ đó thiết lập phương trình, giải phương trình tính ra kết quả

### 📁. Bài tập

**Bài 1:** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết  $AB = 20\text{cm}$ ,  $HC = 9\text{cm}$ . Tính độ dài AH.

#### Hướng dẫn giải

Đặt  $BH = x$ . Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông ở A, có đường cao AH. Ta được:  $AB^2 = BH \cdot BC$  hay  $20^2 = x(x + 9)$ .

Thu gọn ta được phương trình:  $x^2 + 9x - 400 = 0$

Giải phương trình này ta được  $x_1 = 16$ ;  $x_2 = -25$  (loại)

Dùng định lý Pitago tính được  $AH = 12\text{ cm}$

*Lưu ý:* Giải PT bậc 2 nên dùng máy tính để giải cho nhanh.

Thuộc một số bộ ba số Pitago càng tốt để mau chóng ghi kết quả

**Bài 2:** Cho tam giác ABC,  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $BC = 8\text{cm}$ ;  $AB + AC = 12\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh AB.

#### Hướng dẫn giải

Kẻ  $AH \perp BC$ . Đặt  $AB = 2x$ . Từ đó tính được  $BH = x$  và  $AH = x\sqrt{3}$ ;  $HC = 8 - x$

Áp dụng định lý Pitago ta cho tam giác AHC vuông tại H

Ta có:  $AC = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + (8-x)^2} = \sqrt{4x^2 - 16x + 64}$

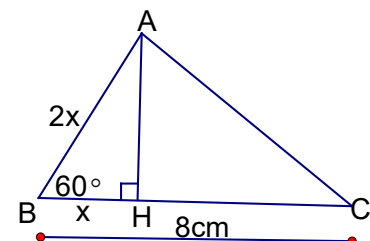
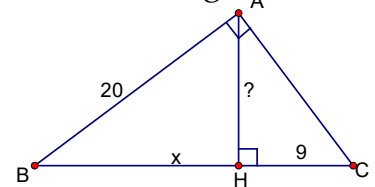
Do  $AB + AC = 12$  nên  $2x + \sqrt{4x^2 - 16x + 64} = 12$

Giải PT trên ta được:  $x = 2,5$

$AB = 2 \cdot 2,5 = 5\text{cm}$

Chú ý: Ta cũng tính được chu vi tam giác ABC = 20cm.

Diện tích tam giác ABC =  $10\sqrt{3}\text{ cm}$ .



**Bài 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác. Biết rằng  $AD = 1\text{cm}$ ;  $BD = \sqrt{10}\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh BC (nhập kết quả dưới dạng số thập phân)

**Bài giải sơ lược**

Áp dụng định lý Pitago tính được  $AB = 3\text{cm}$ .

Đặt  $BC = x$ , dùng Pitago tính được  $AC^2 = x^2 - 9$ .

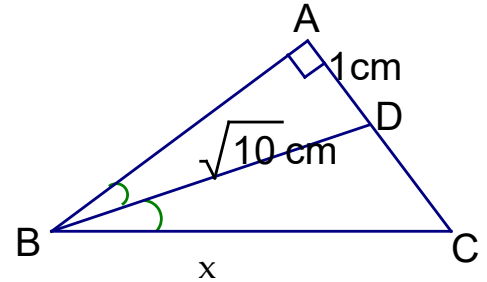
Do  $AD = 1$  nên  $DC = \sqrt{x^2 - 9} - 1$

Tam giác ABC có BD là phân giác góc ABC nên :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \text{ hay } \frac{3}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9} - 1}. \text{ Từ đó ta được phương trình } 8x^2 - 6x - 90 = 0$$

Giải phương trình tìm được  $x = 3,75\text{cm}$

Trả lời : **BC = 3,75cm**



**Bài 4:** Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn  $CD = 10\text{cm}$ , đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

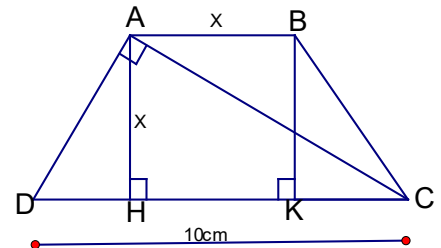
**Hướng dẫn giải**

Kẻ  $AH \perp CD$ ;  $BK \perp CD$ . Đặt  $AH = AB = x \Rightarrow HK = x$

$\triangle AHD = \triangle BKC$  (cạnh huyền- góc nhọn)

$$\text{Suy ra : } DH = CK = \frac{10 - x}{2}.$$

$$\text{Vậy } HC = HK + CK = x + \frac{10 - x}{2} = \frac{x + 10}{2}$$



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ADC vuông ở A có đường cao AH

$$\text{Ta có : } AH^2 = DH \cdot CH \text{ hay } x^2 = \frac{10 - x}{2} \cdot \frac{10 + x}{2} \Leftrightarrow 5x^2 = 100$$

Giải phương trình trên ta được  $x = 2\sqrt{5}$  và  $x = -2\sqrt{5}$  (loại)

$$\text{Vậy : } AH = 2\sqrt{5}$$

**Bài 5:** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh đáy có độ dài 15,6cm, đường cao ứng với cạnh bên dài 12cm. Tính độ dài cạnh đáy BC.

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $BC = 2x$ , từ tính chất của tam giác cân ta suy ra  $CH = x$

Áp dụng định lý Pitago tính được  $AC = \sqrt{15,6^2 + x^2}$

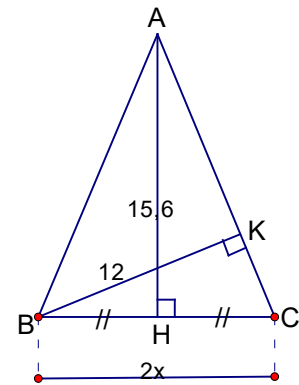
Từ hai tam giác vuông KBC và HAC đồng dạng ta được:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{KB}{AH} \text{ hay } \frac{2x}{\sqrt{15,6^2 + x^2}} = \frac{12}{15,6}$$

Đưa về phương trình  $15,6^2 + x^2 = 6,76x^2$

Giải phương trình trên ta được nghiệm dương  $x = 6,5$

Vậy  $BC = 2.6,5 = 13$  (cm)



**Bài 6:** Tính độ dài cạnh AB của tam giác ABC vuông tại A có hai đường trung tuyến AM và BN lần lượt bằng 6 cm và 9 cm.

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $AB = x$ ;  $AN = y \Rightarrow AC = 2y$ .

Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền ta được

$$BC = 2AM = 2.6 = 12 \text{ (cm)}$$

Dùng định lý Pitago cho hai tam giác vuông ABC và ABN vuông tại A

$$\text{Ta được: } x^2 + 4y^2 = 144 \quad (1)$$

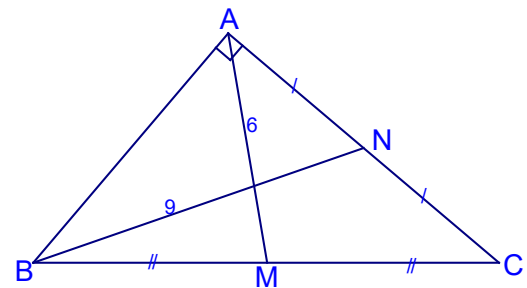
$$\text{và } x^2 + y^2 = 81 \Leftrightarrow y^2 = 81 - x^2 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình:  $x^2 + 4(81 - x^2) = 144$

Thu gọn phương trình trên ta được phương trình:  $3x^2 = 180$

Nghiệm dương của phương trình:  $x = 2\sqrt{5}$

Trả lời:  $AB = 2\sqrt{5}$  cm



## 📁. MỘT SỐ BÀI TẬP SƯU TẦM

### BÀI TẬP VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

#### PHẦN BÀI TẬP CƠ BẢN

**Bài 1:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$ . Đường cao  $AH = 15\text{cm}$ . Tính HB, HC.

**Bài 2:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB = 12\text{cm}$ ,  $AC = 16\text{cm}$ , phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

**Bài 3:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Kẻ đường cao AH, tính chu vi  $\triangle ABC$  biết  $AH = 14\text{cm}$ ,  $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$ .

**Bài 4:** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết  $AB = 20\text{cm}$ ,  $HC = 9\text{cm}$ . Tính độ dài AH.

**Bài 5:** Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác góc B. Biết rằng  $AD = 1\text{cm}$ ;  $BD = \sqrt{10}\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh BC.

**Bài 6:** Cho tam giác ABC,  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $BC = 8\text{cm}$ ;  $AB + AC = 12\text{cm}$ . Tính độ dài cạnh AB.

**Bài 7:** Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

**Bài 8:** a. Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 50^\circ$ ,  $AC = 35\text{cm}$ . Tính diện tích tam giác ABC.

b. Cho tứ giác ABCD có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $\hat{C} = 40^\circ$ ,  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AD = 3\text{cm}$ . Tính diện tích tứ giác.

c. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết  $AC = 4$ ,  $BD = 5$ ,  $\widehat{AOB} = 50^\circ$ . Tính diện tích tứ giác ABCD.

**Bài 9:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, kẻ đường cao AH, chu vi  $\triangle AHB$  bằng 30cm, chu vi  $\triangle ACH$  bằng 4dm. Tính BH, CH và chu vi  $\triangle ABC$ .

**Bài 10:** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

**Bài 11:** Cho tứ giác lồi ABCD có  $AB = AC = AD = 10\text{cm}$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  và  $\hat{A} = 90^\circ$

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ  $BE \perp DC$  kéo dài. Tính BE, CE và DC.

**Bài 12:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB = a$ ,  $AC = 3a$ . Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho  $AD = DE = EC$ .

a) Chứng minh  $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$ .      b) Chứng minh  $\triangle BDE$  đồng dạng  $\triangle CDB$ .

c) Tính tổng  $\widehat{AFB} + \widehat{BCD}$ .

**Bài 13:** Chình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết  $AD = 5a$ ,  $AC = 12a$ .

a) Tính  $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$       b) Tính diện tích hình thang ABCD.

**Bài 14:** Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$ . Từ trung điểm O của AB vẽ tia  $Ox \perp AB$ . Trên Ox lấy điểm D sao cho  $OD = \frac{a}{2}$ . Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD.

a) Tính AD, AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn  $OE = a$ . Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 15:** Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho  $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ . Chứng minh:  $AM = AN$ .

**Bài 16:** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$  và  $AH = 420$ . Tính chu vi tam giác ABC.

**Bài 17:** Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết  $AB = 2\sqrt{13}$ ;  $OA = 6$ . Tính diện tích hình thang ABCD.

**Bài 18:** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $BC = 3\sqrt{5}$  cm. Hình vuông ADEF cạnh bằng 2 cm có  $D \in AB$ ,  $E \in BC$ ,  $F \in AC$ . Biết  $AB > AC$  và  $S_{ADEF} = \frac{4}{9}S_{ABC}$ . Tính AB ; AC.

**Bài 19:** Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh:  $AH = 3HI$ .

**Bài 20:** Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ đường thẳng cắt BC ở E và cắt đường thẳng DC ở F. Chứng minh:  $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$

**Bài 21:** Cho hình thang ABCD có  $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết  $AB = 3\sqrt{5}$  cm,  $HA = 3$  cm. Chứng minh:

a)  $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$

b)  $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$

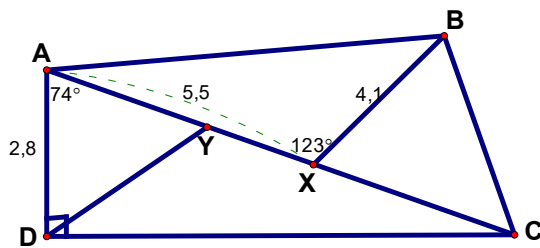
**Bài 22:** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. đường cao  $AD$  và  $BE$ . Gọi  $I \in AD$  và  $Q \in BE$  sao cho  $\hat{BIC} = \hat{AQC} = 90^\circ$ .

- Chứng minh:  $CA.CE = CD.CB$
- Chứng minh:  $\triangle IQC$  là tam giác cân
- $BI$  cắt  $AQ$  tại  $K$ . Chứng minh:  $CK \perp IQ$

**Bài 23:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Đường cao  $AH$ . Biết  $AC = 12\text{cm}$ ,  $BC = 15\text{cm}$ .

- Tính  $HA$ ,  $HB$ ,  $HC$ .
- Gọi  $E$ ,  $F$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  lần lượt lên  $AB$ ,  $AC$ .  
Chứng minh:  $AE.AB = AF.AC$
- Chứng minh:  $HE^2 + HF^2 = HB.HC$

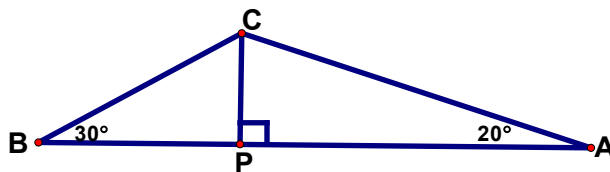
**Bài 24:** Cho hình vẽ:



- Tính  $AC$
- Gọi  $Y$  là điểm trên  $AX$  sao cho  $DY \parallel BX$ .  
Hãy tính  $XY$ .
- Tính diện tích tam giác  $BCX$ .

**Bài 25:** Cho hình vẽ dưới đây biết  $BC = 60\text{ cm}$ . Đường vuông góc kẻ từ  $C$  đến  $AB$  cắt  $AB$  tại  $P$ . Tính:

- $AP$ ;  $BP$
- $CP$  và diện tích tam giác  $ABC$ .



**Bài 26:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 24\text{cm}$ ;  $AC = 18\text{cm}$ ;  $BC = 30\text{cm}$

- Tính đường cao  $AH$ , số đo góc  $B$  và  $C$ .
- Phân giác của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Tính  $BD$ ,  $CD$ .
- Từ  $D$  kẻ  $DE$  và  $DF$  lần lượt vuông góc với  $AB$  và  $AC$ . Tứ giác  $AEDF$  là hình gì? Tính chu vi và diện tích tứ giác  $AEDF$ .

**Bài 27:** Tam giác ABC vuông tại A,  $AB = a$ ,  $AC = 3a$ . Trên AC lấy các điểm D và E sao cho  $AD = DE = EC$ .

a/ Chứng minh  $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$

b/ Chứng minh  $\triangle BDE$  đồng dạng với  $\triangle CDB$ .

c/ Tính tổng  $\widehat{AEB} + \widehat{BCD}$ .

**Bài 28:** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $\hat{C} = 30^\circ$ ;  $BC = 10 \text{ cm}$ .

a/ Tính AB, AC.

b/ Từ A kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc. Chứng minh  $MN \parallel BC$  và  $MN = AB$ .

c/ Chứng minh hai tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

**Bài 29:** Cho tam giác ABC cân,  $AB = AC = 10 \text{ cm}$ ;  $BC = 16 \text{ cm}$ . Trên đường cao AH lấy điểm I sao cho  $AI = \frac{1}{3}AH$ . Vẽ tia Cx song song với AH, Cx cắt tia BI tại D.

a/ Tính các góc của tam giác ABC.

b/ Tính diện tích tứ giác ABCD.

**Bài 30:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc AMB; AMC cắt đường thẳng d lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) Tứ giác BCED là hình thang

b)  $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

c) Giả sử  $AC = 2AB$ , chứng minh  $EC = BC$

**Bài 31:** Cho hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi và diện tích hình thang cân đó biết đáy nhỏ bằng 14 cm, đáy lớn bằng 50 cm.

**Bài 32:** Cho tam giác ABC có  $AB > AC$ , kẻ trung tuyến AM và đường cao AH. Chứng minh:

a)  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

b)  $AB^2 - AC^2 = 2BC \cdot MH$

**Bài 33:** Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = 3 \text{ cm}$ ;  $CD = 14 \text{ cm}$ ;  $AC = 15 \text{ cm}$ ;  $BD = 8 \text{ cm}$ .

a) Chứng minh AC vuông góc với BD.

b) Tính diện tích hình thang.



**Bài 34:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho  $HE = 2HA$ . Gọi I là hình chiếu của D trên HE.

- a) Tính AB, AC, HC, biết  $AH = 4\text{cm}$ ,  $HB = 3\text{cm}$ .      b) Tính  $\text{tg } IED$  và  $\text{tg } HCE$ .  
c) Chứng minh  $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$       d) Chứng minh:  $DE \perp EC$ .

**Bài 35:** Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh:

- a)  $\triangle ANL$  đồng dạng  $\triangle ABC$   
b)  $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

**Bài 36:** Giải tam giác ABC, biết:

- a)  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $BC = 10$ ,  $\hat{B} = 75^\circ$ .  
b)  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ,  $AB = AC = 6$ .  
c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , đường cao  $AH = 4$ .  
d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , một góc nhọn bằng  $47^\circ$ .

**Bài 37:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH,  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 6\text{cm}$ . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

- a) Giải tam giác vuông ABC.      b) Tính độ dài AH và chứng minh:  $EF = AH$ .  
c) Tính:  $EA \cdot EB + AF \cdot FC$ .

**Bài 38:** Cho hình thoi ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Cho biết khoảng cách từ O đến mỗi cạnh hình thoi là  $h$ ;  $AC = m$ ;  $BD = n$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2}$ .

**Bài 39:** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao  $AH = 33,6$ . Biết  $24 \cdot AB = 7 \cdot AC$ . Tìm độ dài các cạnh và số đo các góc của tam giác.

**Bài 40:** Cho hình thang cân ABCD ( $AB \parallel CD$ ),  $AB = 2$ ,  $CD = 6$  và chiều cao bằng 4. Tính số đo góc tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh bên.

**Bài 41:** Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 40^\circ$ ,  $\hat{C} = 60^\circ$ , đường trung tuyến AM. Tính số đo góc AMC.

**Bài 42:** Cho tam giác ABC nhọn,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Chứng minh rằng

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

**Bài 43:** Cho hình thang ABCD (  $AB \parallel CD$  ) có  $\hat{C} = 30^\circ, \hat{D} = 60^\circ, AD = 2, CD = 6$ .

- Tìm AD.
- Tính diện tích hình thang.

**Bài 44:** Cho tứ giác ABCD có  $\hat{C} + \hat{D} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng:  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

**Bài 45:** Cho tam giác ABC cân tại A,  $\hat{A} < 90^\circ, AB = AC = 2\sqrt{2} \text{ cm}, BC = \sqrt{2} \text{ cm}$ . Kẻ đường cao BH. Chứng minh rằng:  $AH = 7.HC$

----- HẾT -----

(Nguồn 45 bài tập tự luyện của thầy Bùi Anh Tuấn – VT – VP)