

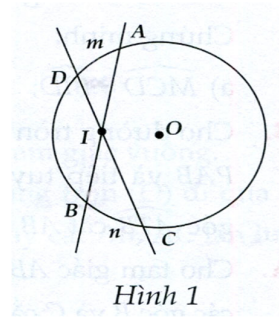
GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN

GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

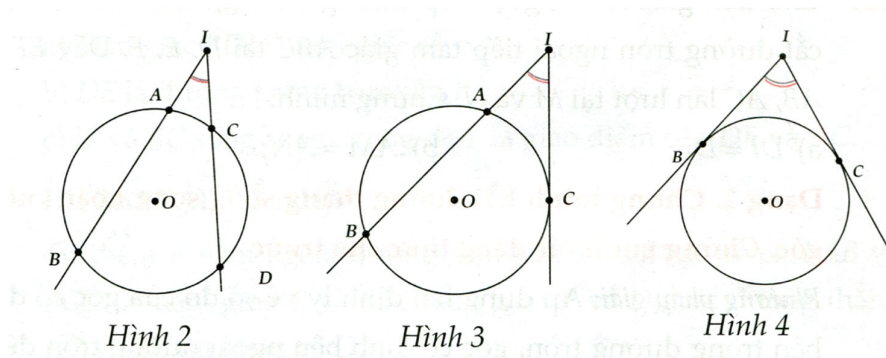
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Ví dụ 1. Trong Hình 1, góc $\widehat{BIC}$ nằm bên trong đường tròn (O) được gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.



Hình 1

Ví dụ 2. Trong các Hình 2, 3, 4 các góc ở đỉnh I có đặc điểm chung là: đỉnh nằm bên ngoài đường tròn, các cạnh đều có điểm chung với đường tròn. Mỗi góc đó được gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.



Hình 2

Hình 3

Hình 4

Định lý 1. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Định lý 2. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

II. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Chứng minh hai góc hoặc hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Sử dụng hai định lý về số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

1.1. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ tiếp tuyến MC tại C và cát tuyến MAB (A nằm giữa M và B) và $A, B, C \in (O)$. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB không chứa C, CD cắt AB tại I. Chứng minh:

a) $\widehat{MCD} = \widehat{BID}$;

b) $MI = MC$.

1.2. Cho đường tròn (O) và một điểm p nằm ngoài (O) . Kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT với $A, B, T \in (O)$. Đường phân giác của góc ATB cắt AB tại D . Chứng minh $PT = PD$.

2.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I và cắt (O) lần lượt tại D và E . Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng minh:

a) Các tam giác AMN , EAI và DAI là những tam giác cân;

b) Tứ giác $AMIN$ là hình thoi.

2.2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Các tia AI , BI , CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D , E , F . Dây EF cắt AB , AC lần lượt tại M và N . Chứng minh: a) $DI = DB$;

b) $AM = AN$;

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc. Chứng minh các đẳng thức cho trước

Phương pháp giải: Áp dụng hai định lý về số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn để có được các góc bằng nhau, cạnh bằng nhau. Từ đó, ta suy điều cần chứng minh.

3.1. Từ điểm P ở ngoài (O) , vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn và cát tuyến PBC với $P, B, C \in (O)$.

a) Biết $PC = 25cm$; $PB = 49cm$. Đường kính (O) là $50cm$. Tính PO .

b) Đường phân giác trong của góc A cắt PB ở I và cắt (O) ở D . Chứng minh DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIB$.

3.2. Cho (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CF đi qua E . Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt CD tại M , vẽ dây AI cắt CD tại N . Chứng minh:

a) Tia CF là tia phân giác của góc BCD ;

b) MF và AC song song;

c) MN , OD , OM là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

4.1. Cho tam giác ABC phân giác AD . Vẽ đường tròn (O) đi qua A , D và tiếp xúc với BC tại D . Đường tròn này cắt AB , AC lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) EF song song BC ;

b) $AD^2 = AE.AC$;

c) $AE.AC = AB.AF$.

4.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E . Chứng minh:

- a) Tam giác BDI là tam giác cân;
- b) DE là đường trung trực của IC ;
- c) IF và BC song song, trong đó F là giao điểm của DE và AC .

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai cát tuyến PAB và PCD (A nằm giữa P và B , C nằm giữa P và D), các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại Q .

- a) Cho biết $\widehat{P} = 60^\circ$ và $\widehat{AQC} = 80^\circ$. Tính góc $\widehat{BCD}$.
- b) Chứng minh $PA.PB = PC.PD$.

6. Từ một điểm A bên ngoài (O) , vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD . Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC và BD lần lượt tại M và N . Vẽ dây BF vuông góc với MN , cắt MN tại H , cắt CD tại E . Chứng minh:

- a) Tam giác BMN cân;
- b) $FD^2 = FE.FB$.

7. Cho tam giác đều MNP nội tiếp đường tròn tâm (O) . Điểm D di chuyển trên $\widehat{MP}$. Gọi E là giao điểm của MP và ND , gọi F là giao điểm của MD và NP . Chứng minh $\widehat{MFN} = \widehat{MND}$.

8. Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B và C . Gọi M, N và P theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB, BC và AC . BP cắt AN tại I , NM cắt AB tại E . Gọi D là giao điểm của AN và BC . Chứng minh:

- a) Tam giác BNI cân;
- b) $AE.BN = EB.AN$;
- c) EI song song BC ;
- d) $\frac{AN}{BN} = \frac{AB}{BD}$.

9. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) , vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MCB với $A, B, C \in (O)$. Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D , cắt (O) tại N . Chứng minh:

- a) $MA = MD$;
- b) Cho cát tuyến MCB quay quanh M và luôn cắt đường tròn. Chứng minh $MB.MC$ không đổi.
- c) $NB^2 = NA.ND$.

10. Tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm (O) , các điểm I, K, H là điểm chính giữa của các cung MN, NP, PM . Gọi J là giao điểm của IK và MN , G là giao điểm của HK và MP . Chứng minh JG song song với NP .

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

1.1. a) $\widehat{MCD} = \widehat{BID} = \frac{1}{2}sd\widehat{CD}$

b) Sử dụng kết quả câu a).

1.2. Tương tự 1A. HS tự làm.

2.1. a) $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \frac{1}{2}sd\widehat{ED}$

Suy ra ΔAMN cân tại A. Kéo dài AI cắt đường tròn (o) tại K. Chứng minh tương tự, ta có ΔAIE và ΔDIA lần lượt cân tại E và D.

b) Xét $\triangle AMN$ cân tại A có AI là phân giác. Suy ra $AI \perp MN$ tại F và $MF = FN$. Tương tự với $\triangle EAI$ cân tại E, ta có: $AF = IF$. Vậy tứ giác AMIN là hình hình hành. Mà $AI \perp MN \Rightarrow$ ĐPCM.

2.2. Tương tự 2.1. HS tự làm.

3.1. a) Chứng minh được $PA^2 = PC.PB$ và $PA^2 = PO^2 = OA^2$
 $\Rightarrow$ tính được PO.

b) Chứng minh được $\widehat{DBC} = \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{CAB} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$

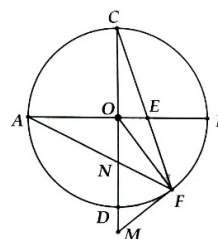
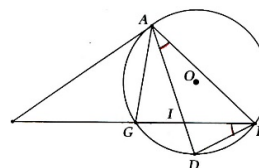
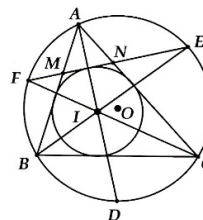
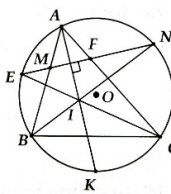
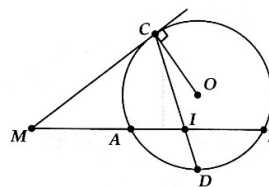
3.2. a) Học sinh tự chứng minh.

b) Chứng minh $\widehat{AFM} = \widehat{CAF} (= \widehat{ACF}) \Rightarrow MF \parallel AC$.

c) Chứng minh: $\widehat{MFN} = \widehat{MNF} \Rightarrow \Delta MNF$ cân tại $M \Rightarrow MN = MF$

Mặt khác: $OD = OF = R$.

Ta có MF là tiếp tuyến nên ΔOFM vuông $\Rightarrow$ ĐPCM.

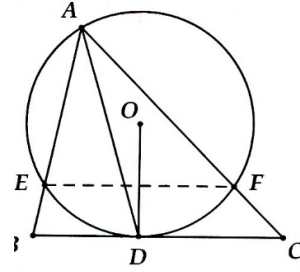


4.1. a) HS tự chứng minh.

b) $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ (g-g)

$$\Rightarrow AD^2 = AE.AC$$

c) Tương tự: $\triangle ADF \sim \triangle ABD \Rightarrow AD^2 = AB.AF \Rightarrow \text{ĐPCM.}$



4.2. a) $\widehat{BID} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DE} = \widehat{DBE} \Rightarrow \triangle BID \text{ cân ở D.}$

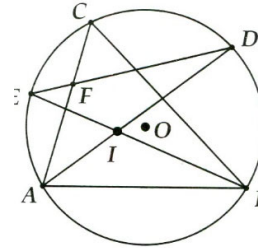
b) Chứng minh tương tự: $\triangle IEC$ cân tại E, $\triangle DIC$ cân tại D.

$$\Rightarrow EI = EC \text{ và } DI = DC$$

$\Rightarrow DE$ là trung trực của CI .

c) $F \in DE$ nên $FI = FC$

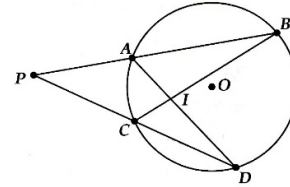
$$\Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{FCI} = \widehat{ICB} \Rightarrow IF \parallel BC$$



5. a) Ta có: $\widehat{BPD} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BD} - \text{sđ } \widehat{AC})$, $\widehat{AQC} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{BD} + \text{sđ } \widehat{AC})$

$$\Rightarrow \widehat{BPD} + \widehat{AQC} = \text{sđ } \widehat{BD} = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 70^\circ$$



b) HS tự chứng minh

6. a) HS tự chứng minh $\triangle BMN$ cân ở B.

b) $\triangle EDF \sim \triangle DBF$ (g.g)

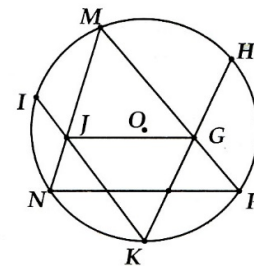
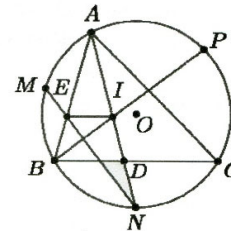
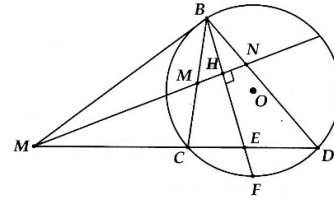
$$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{EF}{DF}$$

$$\Leftrightarrow DF^2 = EF.BF$$

7. HS tự chứng minh

8. a) Chứng minh tương tự 4B ý a).

b) M chính giữa $\widehat{AB}$



$\Rightarrow \widehat{NE}$ là phân giác $\widehat{BNA}$

$\Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{EB}{EA}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow BN.AE =$

NA.BE

c) Chứng minh tương tự 4B

d) Chứng minh $\triangle ABN \sim \triangle DBN \Rightarrow \text{ĐPCM/}$

9. HS tự chứng minh

10. KG là đường phân giác của $\widehat{MKP} \Rightarrow \frac{MG}{GP} = \frac{MK}{KP}$ (1)

KJ là đường phân giác của $\widehat{MKN} \Rightarrow \frac{MJ}{JN} = \frac{MK}{KN}$ (2)

Chứng minh được: $KN = KP$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \frac{MG}{GP} = \frac{MJ}{JN} \Rightarrow \text{ĐPCM}$

B.NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại D, M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt đường tròn (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh O, N, O' thẳng hàng.

Bài 2. Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{19}, A_{20}$ được sắp xếp theo thứ tự đó trên cùn một đường tròn (O). Chúng chia đường tròn thành 20 cung bằng nhau. Chứng minh rằng dây A_1A_8 vuông góc với dây A_3A_{16} .

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại B. Qua B kẻ đường thẳng xy song song với AC. Gọi O là một điểm trên xy. Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AC ở D, cắt các cạnh AB và BC ở E và F. Chứng minh rằng số đo cung $\widehat{EF}$ không đổi khi O di chuyển trên xy.

Bài 4. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một cát tuyến qua M, cắt (O) tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D).

a) Chứng minh $AC.DB = AD.CB$

b) Tia phân giác góc CAD cắt CD tại I. Chứng minh BI là tia phân giác góc CBD.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của AC và BD. Biết đường tròn (K) ngoại tiếp $\triangle IAD$ cắt các cạnh AB, CD của tứ giác lần lượt tại E và F ($E \neq A; F \neq D$). Đường thẳng EF cắt AC, BD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AME} = \widehat{ADI}$.

b) Chứng minh $KI \perp BC$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$ biết rằng $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Vẽ đường tròn tâm I đường kính BC, cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng: $MN = R$.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Biết rằng $\widehat{BAC} = 2\widehat{BMC}$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

Bài 8. Cho đường tròn $(O; R)$ có dây $AB = R\sqrt{3}$; Trên cung lớn AB lấy dây $CD = R$ (C thuộc cung BD). Chứng minh rằng $AC \perp BD$.

Bài 9. Từ điểm A ở bên ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác góc BAC tại H cắt CD tại E. Chứng minh BM là tia phân giác góc CBD.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Bài 1. Xét (O') có: $\widehat{AEB} = \frac{sđ \widehat{AD} + sđ \widehat{CM}}{2}$

(Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).

$$\widehat{BAM} = \frac{sđ \widehat{ADM}}{2} = \frac{sđ \widehat{AD} + sđ \widehat{MD}}{2}$$

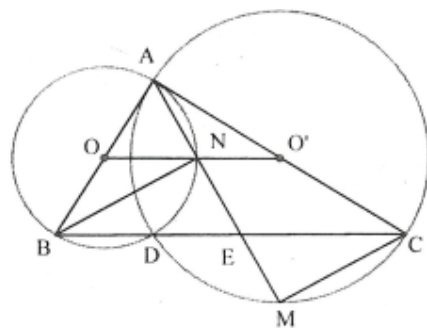
(Góc tại bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow$ tam giác ABE cân tại B nên BN vừa là đường cao vừa là trung tuyến.

$\Rightarrow NA = NE$ và $OA = OB, O'A = O'C$

$\Rightarrow NO, NO'$ là đường trung bình của tam giác ACE, ABE nên $O'N \parallel CE, NO \parallel EB$



Do đó O, N, O' thẳng hàng.

Bài 2. Số đo mỗi cung nhỏ là $360^\circ : 20 = 18^\circ$

+ Số đo cung nhỏ A_1A_3 là: $sđ \widehat{A_1A_3} = 2.18 = 36^\circ$

+ Số đo cung nhỏ A_8A_{16} là: $sđ \widehat{A_8A_{16}} = 8.18 = 144^\circ$

Gọi M là giao điểm A_1A_3 và A_3A_{16}

$$\text{Ta có } \widehat{A_1MA_3} = \frac{sđ \widehat{A_1A_3} + sđ \widehat{A_8A_{16}}}{2} = \frac{36^\circ + 144^\circ}{2} = 90^\circ$$

Suy ra A_1A_8 vuông góc với A_3A_{16} .

Bài 3. Gọi AB, CB cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F', E'

Kẻ đường cao BK của tam giác ABC, gọi I là giao điểm của tia đối tia BK với đường tròn, ta có:

$$\widehat{ABK} = \widehat{CBK} = \widehat{E'BI}; \widehat{E'Bx} = \widehat{EBx}$$

Suy ra E và E' đối xứng nhau qua xy, tương tự E, F' đối xứng nhau qua xy $\Rightarrow \widehat{EF} = \widehat{E'F'}$

Theo tính chất góc có đỉnh bên trong đường tròn, ta có:

$$\widehat{ABC} = \frac{sđ \widehat{EF} + sđ \widehat{E'F'}}{2} = sđ \widehat{EF}$$

Vậy số đo cung EF không đổi khi O di chuyển trên đường thẳng BC.

Bài 4.

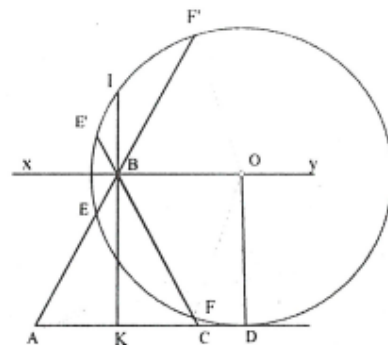
$$\text{a) } \triangle MAC \sim \triangle MDA \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\triangle MBC \sim \triangle MDB \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{CB}{DB}$$

$$\text{Mà } MA = MB \text{ nên } \frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB} \text{ hay } AC.DB = AD.CB$$

b) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với (O).

$$\text{Ta có: } \widehat{MAI} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AE} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AC} + sđ \widehat{CE})$$



$$\widehat{MIA} = \frac{1}{2} \left(s\widehat{d} AC + s\widehat{d} ED \right) \text{ mà } \widehat{ED} = \widehat{CE}.$$

Nên $\widehat{MAI} = \widehat{MIA}$ suy ra $\triangle AMI$ cân.

Do đó $MA = MI$.

Mà $MA = MB$ nên $MB = MI$

Vậy $\triangle BMI$ cân $\Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{MBI}$,

Do đó: $\widehat{CBI} = \widehat{MBI} - \widehat{MBC} = \widehat{MIB} - \widehat{MDB} = \widehat{DBI}$.

Vậy BI là tia phân giác của góc CBD.

Bài 5.

a) Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn cung BC của (O)).

Xét đường tròn (K) có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} s\widehat{d} IE$;

$$\widehat{BDC} = \frac{1}{2} s\widehat{d} IF \Rightarrow \widehat{IE} = \widehat{IF}$$

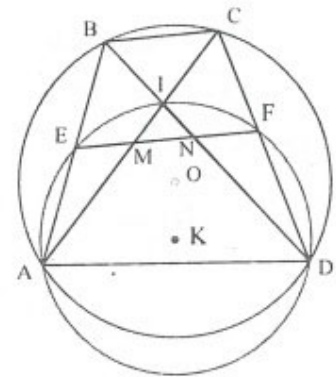
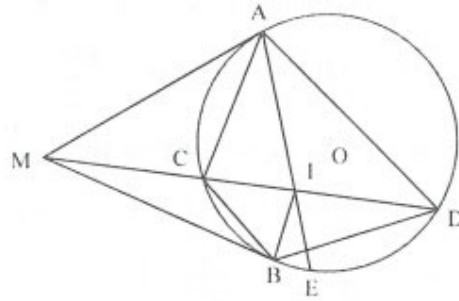
$$\begin{aligned} \widehat{AME} &= \frac{1}{2} \left(s\widehat{d} AE + s\widehat{d} IF \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(s\widehat{d} AE + s\widehat{d} IE \right) = \frac{1}{2} s\widehat{d} AI = \widehat{ADI} \end{aligned}$$

b) $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB của (O) mà $\widehat{AME} = \widehat{ADB}$

$$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF \parallel BC \quad (1)$$

Lại có $\widehat{IE} = \widehat{IF} \Rightarrow KI \perp EF \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $KI \perp BC$.



Bài 6. Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 45^\circ \text{ (hệ quả góc nội tiếp)}$$

$$\text{Xét đường tròn (1) có: } \widehat{BAC} = \frac{180^\circ - s\widehat{d}MN}{2}$$

(Góc có đỉnh ngoài đường tròn)

$$\text{Hay } 45^\circ = \frac{180^\circ - s\widehat{d}MN}{2} \Rightarrow s\widehat{d}MN = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ .$$

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$MN^2 = MI^2 + NI^2 = 2.MI^2 = \frac{BC^2}{2} \Rightarrow BC = MN.\sqrt{2}$$

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 = 2R^2 \Rightarrow BC = R.\sqrt{2} . \text{ Suy ra } MN = R .$$

Bài 7. Đặt $s\widehat{d}BAC = x; s\widehat{d}BC = y$ ta có $x + y = 360^\circ$ (1)

$$\text{Ta có } \widehat{BAC} = \frac{s\widehat{d}BC}{2} = \frac{y}{2} \text{ (góc nội tiếp).}$$

$$\widehat{BMC} = \frac{s\widehat{d}BAC - s\widehat{d}BC}{2} = \frac{x - y}{2}$$

(góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$$\text{Mà } \widehat{BAC} = 2\widehat{BMC} \text{ nên } y = 2(x - y)$$

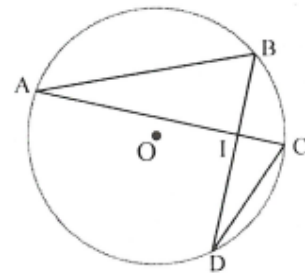
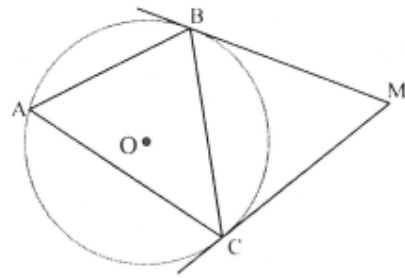
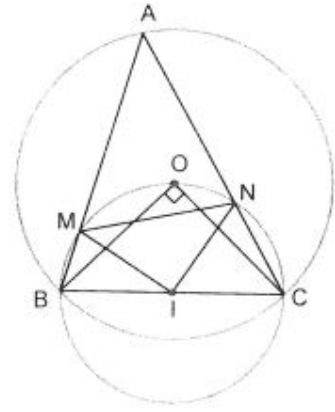
$$\text{Hay } 2x = 3y \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} x + y = 360 \\ 2x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 216^\circ \\ y = 144^\circ \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{BAC} = \frac{s\widehat{d}BC}{2} = 72^\circ .$$

Bài 8. $AB = R\sqrt{3}$ nên $s\widehat{d}AB = 120^\circ$;

$$AB = R \text{ nên } s\widehat{d}CD = 60^\circ$$



Gọi AC cắt BD tại I ta có: $\widehat{AIB} = \frac{sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{CD}}{2} = 90^\circ$ nên $AC \perp BD$.

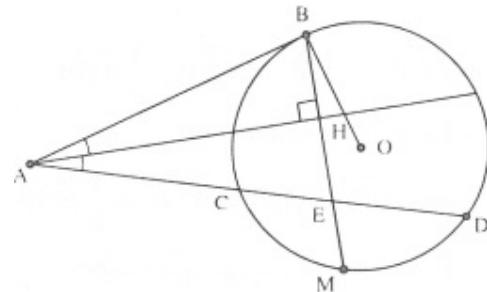
Bài 9. Tam giác ABE có AH là đường phân giác, đồng thời là đường cao, nên tam giác ABE cân tại đỉnh A.

Do đó $\widehat{ABE} = \widehat{AEB}$

$$\text{Mà } \widehat{ABE} = \frac{sđ\widehat{BM}}{2} = \frac{sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{CM}}{2}$$

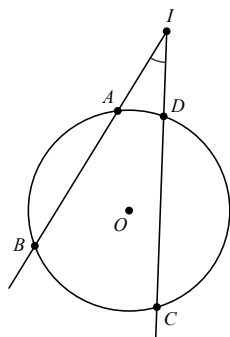
$$\widehat{AEB} = \frac{sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{MD}}{2}$$

Suy ra $sđ\widehat{CM} = sđ\widehat{MD}$ vậy $\widehat{CBM} = \widehat{MBD}$



C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1: Cho hình vẽ dưới đây, góc BIC có số đo bằng:

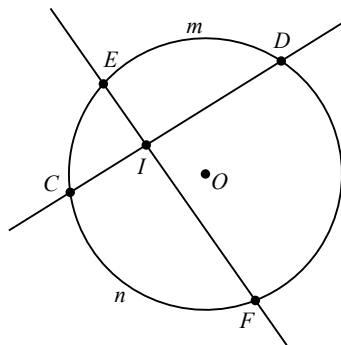


- A.** $\frac{1}{2}(sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{AD})$. **B.** $\frac{1}{2}(sđ\widehat{BC} - sđ\widehat{AD})$. **C.** $\frac{1}{2}(sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{CD})$. **D.** $\frac{1}{2}(sđ\widehat{AB} - sđ\widehat{CD})$.

Câu 2: Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn có số đo:

- A.** Bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn. **B.** Bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.
C. Bằng số đo cung lớn bị chắn. **D.** Bằng số đo cung nhỏ bị chắn.

Câu 3: Cho hình vẽ dưới đây, góc DIE có số đo bằng:



- A.** $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DmE} + \text{sđ}\widehat{CnF})$. **B.** $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DmE} - \text{sđ}\widehat{CnF})$. **C.** $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DF} + \text{sđ}\widehat{CE})$. **D.** $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DF} - \text{sđ}\widehat{CE})$.

Câu 4: Góc có đỉnh bên trong đường tròn có số đo

- A.** Bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn. **B.** Bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.
C. Bằng số đo cung lớn bị chắn. **D.** Bằng số đo cung nhỏ bị chắn.

Câu 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm trên cung nhỏ AB (cung CB nhỏ hơn cung CA). Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt đường thẳng AB tại D . Biết tam giác ADC cân tại C . Tính góc ADC .

- A.** 40° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Câu 6: Cho đường tròn (O) và điểm E nằm ngoài đường tròn. Vẽ cát tuyến EAB và ECD với đường tròn (A nằm giữa E và B , C nằm giữa E và D). Gọi F là một điểm trên đường tròn sao cho B nằm chính giữa cung DF , I là giao điểm của FA và BC . Biết $\widehat{E} = 25^\circ$, số đo góc $\widehat{AIC}$ là:

- A.** 20° . **B.** 50° . **C.** 25° . **D.** 30° .

Câu 7: Trên (O) lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự sao cho $\text{sđ}\widehat{AB} = \text{sđ}\widehat{BC} = \text{sđ}\widehat{CD}$. Gọi I là giao điểm của BD và AC , biết $\widehat{BIC} = 70^\circ$. Tính $\widehat{ABD}$.

- A.** 20° . **B.** 15° . **C.** 35° . **D.** 30° .

Câu 8: Cho $(O; R)$ và dây AB bất kỳ. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB , E, F là hai điểm bất kỳ trên dây AB . Gọi C, D lần lượt là giao điểm của $ME; MF$ với (O) . Khi đó $\widehat{EFD} + \widehat{ECD}$ bằng

- A.** 180° . **B.** 150° . **C.** 135° . **D.** 120° .

Câu 9: Cho $(O; R)$ và dây AB bất kỳ. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB , $E; F$ là hai điểm bất kỳ trên dây AB . Gọi C, D lần lượt là giao điểm của $ME; MF$ với (O) . Khi đó $\widehat{CEF} + \widehat{CDF}$ bằng

A. 120° . B. 150° . C. 145° . D. 180° .

Cho $(O; R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm chính giữa cung BC . Dây AM cắt OC tại E , dây CM cắt đường thẳng AB tại N .

Câu 10: Tam giác MCE là tam giác gì?

A. $\triangle MEC$ cân tại E . B. $\triangle MEC$ cân tại M . C. $\triangle MEC$ cân tại C . D. $\triangle MEC$ đều.

Câu 11: Hai đoạn thẳng nào sau đây bằng nhau?

A. $BN; BC$. B. $BN; NC$. C. $BC; NC$. D. $BC; OC$.

Câu 12: Tính diện tích tam giác CBN theo R .

A. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. D. $R^2\sqrt{2}$.

Câu 13: Số đo góc MEC bằng:

A. 68° . B. 70° . C. 60° . D. $67,5^\circ$.

Câu 14: Số đo góc CNA bằng:

A. 45° . B. 30° . C. $22,5^\circ$. D. $67,5^\circ$.

Câu 15: Tính diện tích tam giác CON theo R .

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R^2$. B. $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{R^2}{2}$. D. $R^2(\sqrt{2}+1)$.

Từ A ở ngoài (O) vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD . Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC, BD lần lượt tại M, N . Vẽ dây BF vuông góc với MN tại H và cắt CD tại E .

Câu 16: Tam giác BMN là tam giác gì?

A. $\triangle BMN$ cân tại N . B. $\triangle BMN$ cân tại M . C. $\triangle BMN$ cân tại B . D. $\triangle BMN$ đều.

Câu 17: Tích $FE.FB$ bằng:

A. BE^2 . B. BF^2 . C. DB^2 . D. FD^2 .

Trên đường tròn $(O; R)$ vẽ ba dây liên tiếp bằng nhau $AB = BC = CD$, mỗi dây có độ dài nhỏ hơn R . Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại I , các tiếp tuyến của (O) tại B và D cắt nhau tại K .

Câu 18: Góc BIC bằng góc nào dưới đây?

- A. $\widehat{DKC}$. B. $\widehat{DKB}$. C. $\widehat{BKC}$. D. $\widehat{ICB}$.

Câu 19: BC là tia phân giác của góc nào dưới đây?

- A. $\widehat{KBD}$. B. $\widehat{KBO}$. C. $\widehat{IBD}$. D. $\widehat{IBO}$.

Câu 20: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) . Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại M . Biết $\widehat{BAC} = 2\widehat{BMC}$. Tính $\widehat{BAC}$.

- A. 45° . B. 50° . C. 72° . D. 120° .

Câu 21: Cho đường tròn (O) và một dây AB . Vẽ đường kính $CD \perp AB$ (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M . Các đường thẳng CM, DM cắt đường thẳng AB lần lượt tại E và F . Tiếp tuyến của đường tròn tại E và F . Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt đường thẳng AB tại N . Hai đoạn thẳng nào dưới đây **không bằng nhau**?

- A. $NM; NE$. B. $NM; NF$. C. $NE; NF$. D. $EN; AE$.

Câu 22: Cho $(O; R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CF đi qua E . Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt đường thẳng CD tại M , dây AF cắt CD tại N . Chọn khẳng định **sai**.

- A. $AC \parallel MF$. B. $\triangle ACE$ cân tại A . C. $\triangle ABC$ cân tại C . D. $AC \parallel FD$.

Câu 23: Cho $(O; R)$ có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CF đi qua E . Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt đường thẳng CD tại M , dây AF cắt CD tại N . Tính độ dài ON theo R .

- A. $\frac{R}{2}$. B. $\sqrt{2}R - 1$. C. $(\sqrt{2} - 1)R$. D. $(\sqrt{2} + 1)R$.

Câu 24: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ phân giác trong AD của góc A ($D \neq O$). Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC . Nối BE cắt AD và AC lần lượt tại I và tại K , nối DE cắt AC tại J . Kết luận nào đúng?

- A. $\widehat{BID} = \widehat{AJE}$. B. $\widehat{BID} = 2\widehat{AJE}$. C. $2\widehat{BID} = \widehat{AJE}$. D. Các đáp án trên đều sai.

Câu 25: Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp (O) . Trên cung nhỏ AC , lấy điểm D . Gọi S là giao điểm của AD và BC , I là giao điểm của AC và BD . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{ASC} = \widehat{DCA}$. B. $\widehat{ASC} = 2\widehat{DCA}$. C. $2\widehat{ASC} = \widehat{DCA}$. D. Các đáp án trên sai.

Câu 26: Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M nằm ngoài (O) , vẽ các cát tuyến MCA và MBD sao cho góc $\widehat{CMD} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC . Biết $\widehat{AEB} = 70^\circ$, số đo cung lớn AB là:

- A. 200° . B. 240° . C. 290° . D. 250° .

Câu 27: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên các cung nhỏ AB và AC lần lượt lấy các điểm I, K sao cho cung $AI =$ cung AK . Dây IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E .

- A. $\widehat{ADK} = \widehat{ACB}$. B. $\widehat{ADI} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{CB})$. C. $\widehat{AEI} = \widehat{ABC}$. D. Tất cả các câu đều đúng.

Câu 28: Cho đường tròn (O) và một dây AB . Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N . Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt các đường thẳng AB tại E và F . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt các đường thẳng AB tại I . Chọn đáp án đúng.

- A. Các tam giác FNI, INE cân. B. $\widehat{IEN} = 2\widehat{NDC}$.
C. $\widehat{DNI} = 3\widehat{DCN}$. D. Tất cả các câu đều sai.

HƯỚNG DẪN

1. Lời giải:

Số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn:

$$\widehat{BIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BC} - \text{sđ}\widehat{AD})$$

Đáp án cần chọn là B.

2. Lời giải:

Số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Đáp án cần chọn là A.

3. Lời giải:

Số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{DIE} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DmE} + \text{sđ}\widehat{CnF}).$$

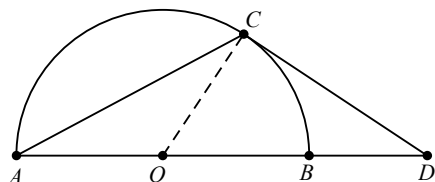
Đáp án cần chọn là A.

4. Lời giải:

Số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Đáp án cần chọn là B.

5. Lời giải:



Xét nửa đường tròn có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}$ và $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{BC})$

Mà $\triangle ADC$ cân tại C nên $\widehat{DAC} = \widehat{CDA} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{BC} = \text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{BC}$.

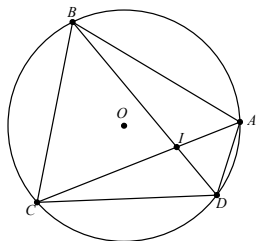
Suy ra $\text{sđ}\widehat{AC} = 2.\text{sđ}\widehat{BC}$.

Mà $\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BC} = 180^\circ$ nên $\text{sđ}\widehat{AC} = 120^\circ; \text{sđ}\widehat{BC} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{ADC} = 30^\circ$.

Đáp án cần chọn là D.

6. Lời giải:



B nằm chính giữa cung DF nên $\text{sđ}\widehat{BD} = \text{sđ}\widehat{BF}$

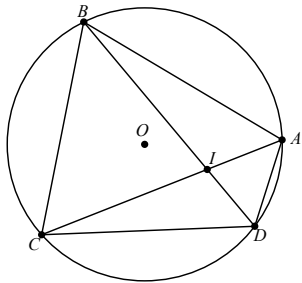
Mặt khác góc tại E và I là hai góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên

$$\widehat{E} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BD} - \text{sđ}\widehat{AC}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BF} - \text{sđ}\widehat{AC}) = \widehat{I}$$

Theo đề bài ta có: $\widehat{E} = \widehat{I} = 25^\circ$.

Đáp án cần chọn là C.

7. Lời giải:



Vì $\text{sđ}\widehat{AB} = \text{sđ}\widehat{BC} = \text{sđ}\widehat{CD}$ nên gọi số đo mỗi cung là a độ. Ta có số đo cung AD là $360^\circ - 3a$

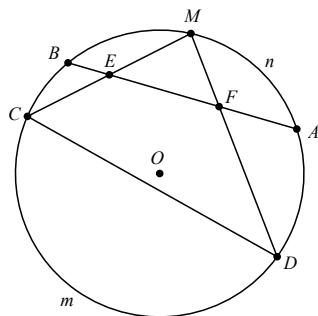
Vì $\widehat{BIC}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên

$$\widehat{BIC} = \frac{a + 360^\circ - 3a}{2} = 70^\circ \Rightarrow a = 110 \Rightarrow \text{số đo cung } AD \text{ là } 360^\circ - 3.110^\circ = 30^\circ,$$

$\widehat{ABD}$ là góc nội tiếp chắn cung AD nên $\widehat{ABD} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Đáp án cần chọn là B.

8. Lời giải:



Ta có $\widehat{EFD}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên: $\widehat{EFD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MnA} + \text{sđ}\widehat{BmD})$

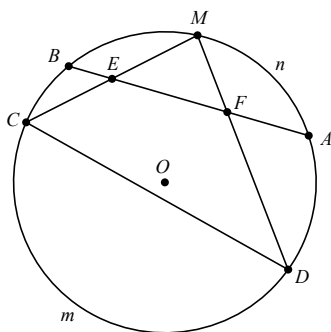
$$\text{Và } \widehat{ECD} = \widehat{MCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MnD}$$

$$\text{Từ đó } \widehat{EFD} + \widehat{ECD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MnA} + \text{sđ}\widehat{BmD} + \text{sđ}\widehat{MnD})$$

$$\text{Mà } \text{sđ}\widehat{AnM} = \text{sđ}\widehat{MB} \text{ nên } \widehat{EFD} + \widehat{ECD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MB} + \text{sđ}\widehat{BmD} + \text{sđ}\widehat{MnA} + \text{sđ}\widehat{AD}) = \frac{1}{2}.360^\circ = 180^\circ.$$

Đáp án cần chọn là A.

9. Lời giải:



$$\text{Ta có } \widehat{CEF} \text{ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên: } \widehat{CEF} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmC} + \text{sđ}\widehat{BM})$$

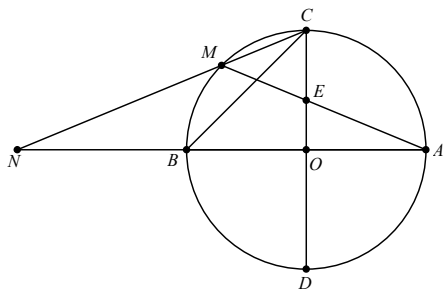
$$\text{Và } \widehat{MDC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MC} \text{ (góc nội tiếp chắn cung MC)}$$

$$\text{Từ đó } \widehat{CEF} + \widehat{CDF} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmC} + \text{sđ}\widehat{BM} + \text{sđ}\widehat{MC})$$

$$\text{Mà } \text{sđ}\widehat{AnM} = \text{sđ}\widehat{MB} \text{ nên } \widehat{EFD} + \widehat{ECD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmC} + \text{sđ}\widehat{AnM} + \text{sđ}\widehat{MC}) = \frac{1}{2}.360^\circ = 180^\circ.$$

Đáp án cần chọn là D.

10. Lời giải:



$$\text{Xét (O) có } \widehat{MEC} \text{ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên } \widehat{MEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} + \text{sđ}\widehat{MC})$$

$$\text{Và } \widehat{MCE} = \widehat{MCD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BD} + \text{sđ}\widehat{BM})$$

$$\text{Mà } \widehat{MB} = \widehat{MC}; \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

Từ đó $\widehat{MEC} = \widehat{MCE} \Rightarrow \Delta MEC$ cân tại M .

Đáp án cần chọn là B.

11. Lời giải:

Xét (O) có $\widehat{CNA}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên $\widehat{CNB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{MB})$

$$\text{Mà } \text{sđ}\widehat{MB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC} \text{ nên } \widehat{CNA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MB}.$$

Lại có $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MB}$ (góc nội tiếp) nên $\widehat{MCB} = \widehat{BNC} \Rightarrow \Delta BNC$ cân tại $B \Rightarrow BN = BC$.

Đáp án cần chọn là A.

12. Lời giải:

Xét ΔCOB vuông cân tại O ta có: $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = R\sqrt{2}$

$$\text{Nên } BN = R\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } S_{BNC} = \frac{1}{2}NB.CO = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$$

Đáp án cần chọn là B.

13. Lời giải:

Vì đường kính AB và CD vuông góc với nhau nên $\text{sđ}\widehat{AC} = \text{sđ}\widehat{AD} = \text{sđ}\widehat{BD} = \text{sđ}\widehat{BC} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

Vì M là điểm chính giữa cung BC nên $\text{sđ}\widehat{MC} = \text{sđ}\widehat{MB} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Xét (O) có $\widehat{MEC}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên

$$\widehat{MEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} + \text{sđ}\widehat{MC}) = \frac{90^\circ + 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

Đáp án cần chọn là D.

14. Lời giải:

Xét (O) có $\widehat{CNA}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên $\widehat{CNB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{MB})$

$$= \frac{1}{2}(90^\circ - 45^\circ) = 22,5^\circ.$$

Đáp án cần chọn là C.

15. Lời giải:

Xét (O) có $\widehat{CNA}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên $\widehat{CNB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{MB})$

Mà $\text{sđ}\widehat{MB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}$ nên $\widehat{CNA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MB}$.

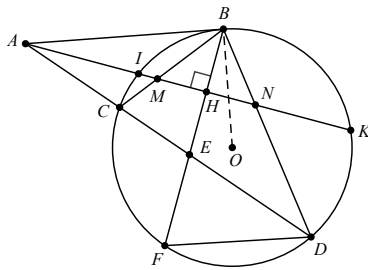
Lại có $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MB}$ (góc nội tiếp) nên $\widehat{MCB} = \widehat{BNC} \Rightarrow \triangle BNC$ cân tại $B \Rightarrow BN = BC$.

Xét $\triangle COB$ vuông cân tại O ta có $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = R\sqrt{2}$ nên $BN = R\sqrt{2}$.

Suy ra $NO = NB + OB = R + \sqrt{2}R = R(1 + \sqrt{2})$.

Khi đó $S_{ONC} = \frac{1}{2}NO.CO = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})R.R = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}R^2$.

Đáp án cần chọn là A.

16. Lời giải:

Xét (O) có đường thẳng AM cắt đường tròn tại $I; K$.

Khi đó $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BK} - \text{sđ}\widehat{BI})$

$\widehat{CAK} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DK} - \text{sđ}\widehat{CI})$

$$\text{Mà } \widehat{BAK} = \widehat{CAK} \Rightarrow \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BK} - \text{sđ}\widehat{BI}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DK} - \text{sđ}\widehat{CI})$$

$$\text{Nên } \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BK} + \text{sđ}\widehat{CI}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DK} + \text{sđ}\widehat{BI})$$

Hay $\widehat{BMN} = \widehat{BNM} \Rightarrow \triangle BMN$ cân tại B .

Đáp án cần chọn là C.

17. Lời giải:

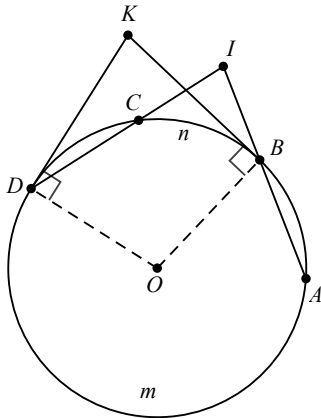
Vì tam giác BMN cân tại B có BH là đường cao nên BH cũng là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{DBF}$

$$\Rightarrow \widehat{CF} = \widehat{DF} \Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{CDF} \text{ (hệ quả góc nội tiếp)} \Rightarrow \triangle FED \triangle FDB \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{FD} = \frac{FD}{FB} \Rightarrow FE.FB = FD^2.$$

Đáp án cần chọn là D.

18. Lời giải:



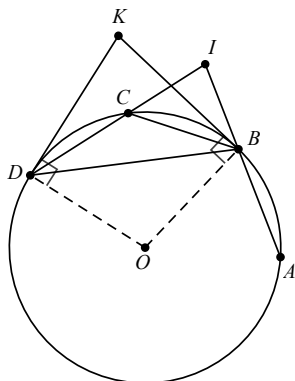
Vì ba dây $AB = BC = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{DC}$

$$\text{Xét } (O) \text{ có: } \widehat{BIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmD} - \text{sđ}\widehat{BC})$$

$$\widehat{DKB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BmD} - \text{sđ}\widehat{BnD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmD} + \text{sđ}\widehat{BA} - 2.\text{sđ}\widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AmD} - \text{sđ}\widehat{BC}) = \widehat{BIC}.$$

Đáp án cần chọn là B.

19. Lời giải:



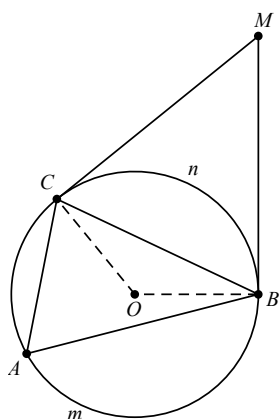
Xét (O) có $\widehat{KBC} = \widehat{CBD}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Lại có $\widehat{CDB} = \widehat{CBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Nên $\widehat{CBD} = \widehat{KBC} \Rightarrow BC$ là tia phân giác góc KBD .

Đáp án cần chọn là A.

20. Lời giải:



Xét (O) có $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BmC} - \text{sđ}\widehat{BnC})$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

Và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BnC}$

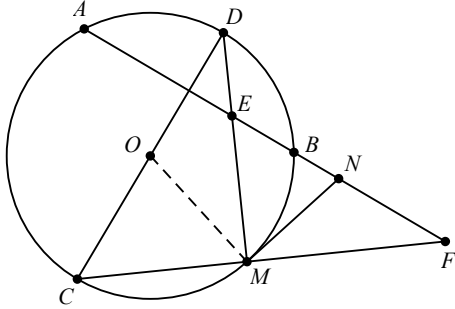
Mà $\widehat{BAC} = 2\widehat{BMC}$ nên $(\text{sđ}\widehat{BmC} - \text{sđ}\widehat{BnC}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BnC} \Rightarrow \text{sđ}\widehat{BmC} = \frac{3}{2}.\text{sđ}\widehat{BnC}$

Mà $\text{sđ}\widehat{BmC} + \text{sđ}\widehat{BnC} = 360^\circ$

Nên $\widehat{sđBnC} = \frac{2.360^\circ}{5} = 144^\circ$, do đó $\widehat{BAC} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$.

Đáp án cần chọn là C.

21. Lời giải:



Xét (O) có D là điểm chính giữa cung AB (Vì đường kính $CD \perp AB$ nên đi qua điểm chính giữa cung AB).

$$\widehat{NMD} = \frac{1}{2} \widehat{\text{sd}DM} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)}$$

$$\widehat{MEN} = \frac{1}{2}(\widehat{\text{s}\mathfrak{d}MB} + \widehat{\text{s}\mathfrak{d}AD}) = \frac{1}{2}(\widehat{\text{s}\mathfrak{d}MB} + \widehat{\text{s}\mathfrak{d}BD}) = \widehat{NMD}.$$

Suy ra ΔMNE cân tại $N \Rightarrow NE = NM$ (*)

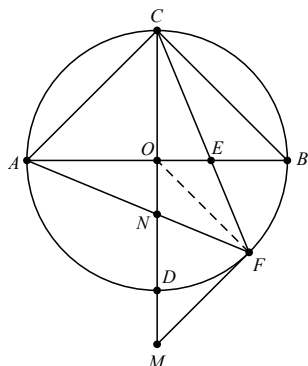
Lại có $\widehat{NFM} = \widehat{NMF}$ (vì $\widehat{NFM} + \widehat{FEM} = 90^\circ = \widehat{NMF} + \widehat{NME}$ và $\widehat{NME} = \widehat{NEM}$)

Nên ΔNMF cân tại $N \Rightarrow NF = NM$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $NE = NF = NM$.

Đáp án cần chọn là D.

22. Lời giải:



Xét $\triangle AOC$ vuông cân tại O có $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC = AE$ nên $\triangle AEC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC}$

Hay $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} + \text{sđ}\widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BF})$

Mà $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ nên $\widehat{DF} = \widehat{BF}$.

Ta có $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AD}$; $\widehat{FMC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{FC} - \text{sđ}\widehat{DF})$

Mà $\widehat{DF} = \widehat{BF}$

Nên $\widehat{FMC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AD} = \widehat{ACD}$

Mà hai góc ở vị trí so le trong nên $AC \parallel MF$.

Xét tam giác CAB có CO là đường trung trực của AB

nên $\triangle ACB$ cân tại C .

Phương án A, B, C đúng.

Đáp án cần chọn là D.

23. Lời giải:

Xét $\triangle AOC$ vuông cân tại O có $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow AO = AE$ nên $\triangle AEC$ cân tại

$A \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC}$

Hay $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} + \text{sđ}\widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BF})$

Mà $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ nên $\widehat{DF} = \widehat{BF}$.

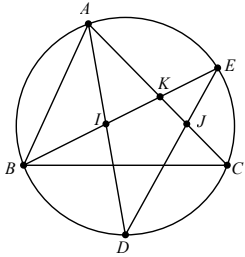
Lại có $\widehat{DF} = \widehat{BF}$ nên $\widehat{NOF} = \widehat{EOF} \Rightarrow \widehat{AOF} = \widehat{COF}$

Suy ra $\triangle OAF = \triangle OCF (c - g - c) \Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{OFN}$

Suy ra $\triangle OEF = \triangle ONF (g - c - g) \Rightarrow OE = (\sqrt{2} - 1)R$.

Đáp án cần chọn là C.

24. Lời giải:



Ta có $\widehat{BID}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn (O) chắn hai cung BD và AE

$$\Rightarrow \widehat{BID} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BD} + \text{sđ}\widehat{AE})$$

$\widehat{AJE}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn (O) chắn hai cung CD và AE

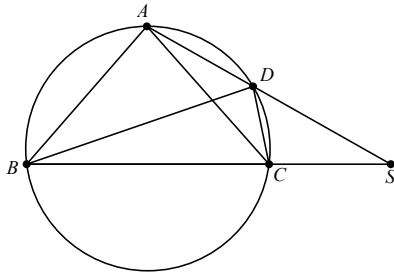
$$\Rightarrow \widehat{AJE} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AE} + \text{sđ}\widehat{DC})$$

Mà AD là phân giác của góc A nên $\text{sđ}\widehat{BD} = \text{sđ}\widehat{CD}$

Suy ra $\widehat{BID} = \widehat{AJE}$.

Đáp án cần chọn là A.

25. Lời giải:

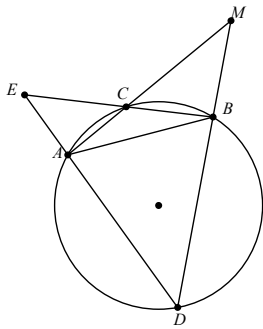


Ta có $\widehat{ASC}$ là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn nên

$$\widehat{ASC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{CD}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AD} = \widehat{ABD} = \widehat{DCA}.$$

Đáp án cần chọn là A.

26. Lời giải:



$$\widehat{DEB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DB} - \text{sđ}\widehat{AC}) = 70^\circ \Rightarrow \text{sđ}\widehat{DB} - \text{sđ}\widehat{AC} = 140^\circ \quad (1)$$

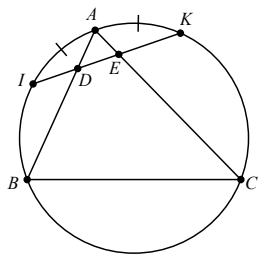
$$\widehat{AMD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AD} - \text{sđ}\widehat{BC}) = 40^\circ \Rightarrow \text{sđ}\widehat{AD} - \text{sđ}\widehat{BC} = 80^\circ \quad (2)$$

$$\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{CB} + \text{sđ}\widehat{DB} + \text{sđ}\widehat{AD} = 360^\circ \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2(\text{sđ}\widehat{DB} + \text{sđ}\widehat{AD}) = 580^\circ \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{DB} + \text{sđ}\widehat{AD} = 290^\circ \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{AB} = 290^\circ.$$

Đáp án cần chọn là C.

27. Lời giải:



Ta có $\widehat{ADK}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn nên

$$\widehat{ADK} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AK} + \text{sđ}\widehat{IB}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AI} + \text{sđ}\widehat{IB}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB} = \widehat{ACB}$$

Ta có $\widehat{ADI}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn nên:

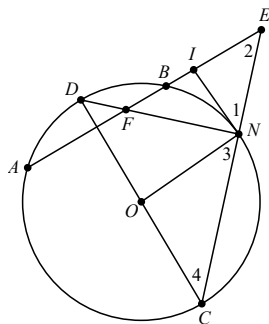
$$\widehat{ADI} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{KB} + \text{sđ}\widehat{IA}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{KB} + \text{sđ}\widehat{IA}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{KB} + \text{sđ}\widehat{AK}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{CB}).$$

Ta có $\widehat{AEI}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn nên

$$\widehat{AEI} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AI} + \text{sđ}\widehat{KC}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AK} + \text{sđ}\widehat{KC}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC} = \widehat{ABC}.$$

Đáp án cần chọn là D.

28. Lời giải:



Ta có tam giác AOB cân tại O nên dễ dàng chỉ ra được $\text{sđ}\widehat{ACD} = \text{sđ}\widehat{DB}$.

$$\widehat{IFN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BN} + \text{sđ}\widehat{AD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BN} + \text{sđ}\widehat{BD}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{DN} = \widehat{INF}$$

Suy ra tam giác FIN cân tại I

Ta có: $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{N}_1 + \widehat{C}_4 = 90^\circ$

$$\widehat{E_1} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} - \text{sđ}\widehat{BN}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BC} - \text{sđ}\widehat{CN}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NC}$$

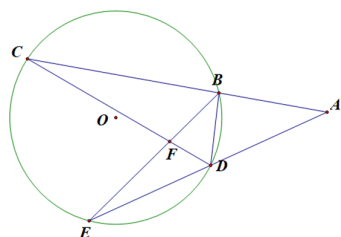
$$\Rightarrow \widehat{C_4} + \widehat{E_1} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{DN} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{DC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{N_1},$$

Do đó $\triangle INE$ cân tại I .

Đáp án cần chọn là A.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Quan sát hình 1 và trả lời câu hỏi 1, 2, 3, 4.



Câu 1. Góc có đỉnh bên trong đường tròn là góc:

Câu 2. Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn là góc:

Câu 3. Nếu $\widehat{CAE} = 30^\circ$ thì:

A. $\text{sđ}\widehat{CE} = 30^\circ$

C. $\text{sđ}\widehat{BD} = 15^\circ$

B. $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CE} + \text{sđ}\widehat{BD}) = 30^\circ$

D. $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CE} - \text{sđ}\widehat{BD}) = 30^\circ$

Câu 4. Nếu $\widehat{CFE} = 30^\circ$ thì:

A. $\text{sđ}\widehat{CE} = 30^\circ$

C. $\text{sđ}\widehat{BD} = 15^\circ$

B. $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CE} + \text{sđ}\widehat{BD}) = 30^\circ$

D. $\frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CE} - \text{sđ}\widehat{BD}) = 30^\circ$

Câu 5. Cho tam giác đều $\triangle ABC$ nội tiếp (O), tia CO kéo dài cắt (O) tại E. Gọi F là giao điểm của AB và CE, tia CO kéo dài cắt (O) tại E, tia AE cắt tia CB tại G.

a) Tính số đo các cung $\widehat{AC}$, $\widehat{BE}$.

b) Tính số đo các góc $\widehat{BFE}$, $\widehat{AGC}$.

Câu 6. Qua điểm I nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến IM, cát tuyến IPQ. Gọi T là điểm chính giữa của cung nhỏ PQ, K là giao điểm của MT và PQ. Chứng minh: $\widehat{IKM} = \widehat{IMK}$.

Câu 7. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi E là một điểm thuộc cung nhỏ $\widehat{BD}$ (E không trùng với hai mút của cung). Tiếp tuyến với (O) tại điểm E cắt CD ở điểm F (với D nằm giữa hai điểm C và F). Gọi G là giao điểm của AE và CD. Chứng minh rằng: $\widehat{FEG} = \widehat{AGC}$.

Câu 8. Từ điểm R nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến RST và RUV với đường tròn đó (với S nằm giữa hai điểm R và T ; U nằm giữa hai điểm R và V). Gọi X là giao điểm của UT và SV . Chứng minh rằng: $\widehat{URS} + \widehat{VXT} = \widehat{VUT} + \widehat{VST}$.

Câu 9. Gọi $(O; R)$ là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC . Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . OM cắt cung nhỏ BC tại D , ON cắt cung nhỏ CA tại E , OP cắt cung nhỏ AB tại F . Gọi I là giao điểm của AD và CF .

a) Chứng minh rằng hai dây AD và EF vuông góc với nhau.

b) Chứng minh rằng: $DC = DI$.

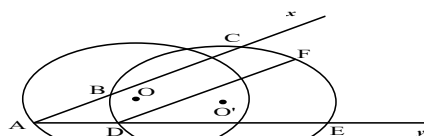
Câu 10. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây cung AD và BC song song với nhau, hơn nữa, hai dây cung AC và BD cắt nhau tại điểm E . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{DBC} = \widehat{ACB}$

b) $EB = EC$

c) $\widehat{AOB} = \widehat{ADB} + \widehat{DAC}$

Câu 11. Cho hình vẽ sau có $BD = CF$.



Chứng minh rằng: $AC \parallel DF$.

Câu 12. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) , dựng hai cát tuyến ABC và AMN . Hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại S .

Chứng minh rằng: $\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

Câu 13. Cho AB và AC là hai dây cung trong đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của cung AB và N là trung điểm của cung AC . Đường thẳng MN cắt dây AB tại D và cắt dây AC tại E .

Chứng minh $AD = AE$.

Câu 14. Cho đường tròn (O) , các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó ở trên đường tròn. Điểm M ở trên cung AB và $MA = MB$. Giao điểm của MC và MD với dây AB là E và K .

Chứng minh: $\widehat{KEC} + \widehat{KDC} = 180^\circ$

Câu 15. Trên đường tròn (O) , lấy ba điểm A, B, C . Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung AB, BC và AC . Gọi I là giao điểm của AB và MN , K là giao điểm của AN và BP .

Chứng minh rằng:

a) Tam giác BNK cân

b) $AI \cdot BN = IB \cdot AN$

c) $IK \parallel BC$

Câu 16. Cho đường tròn (O) . Trên đường tròn lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng: nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$.

b) Chứng minh rằng: nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là đường phân giác của $A_1B_1C_1$.

Câu 17. Cho đường tròn (O) . Một dây AB , lấy C thuộc tia đối của BA từ C kẻ các tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (M thuộc cung nhỏ AB , N thuộc cung lớn AB) lấy D là điểm chính giữa của cung lớn AB . DM cắt AB tại E .

a) Chứng minh $CM = CE$

b) Chứng minh $EA.NB = NA.EB$

c) Gọi I là trung điểm của dây AB . Chứng minh rằng năm điểm M, C, N, O, I cũng thuộc một đường tròn.

Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ tù.

Chứng minh rằng $AC < BD$.

Câu 19. Cho tam giác ABC . Giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC lần lượt cắt BC tại D, E có $AD = AE$.

Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 20. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC . A là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$. D là điểm di động trên cung AC . AD cắt BC tại E .

Xác định vị trí điểm D để $2AD + AE$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. $\widehat{CFE}, \widehat{BFD}, \widehat{CFB}, \widehat{DFE}$

Câu 2. $\widehat{CAE}$

Câu 3. D

Câu 4. B

Câu 5.

a) Tính số đo các cung $\widehat{AC}, \widehat{BE}$.

ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$.

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} \Rightarrow \text{sđ} \widehat{AC} = 120^\circ = \text{sđ} \widehat{AB}.$$

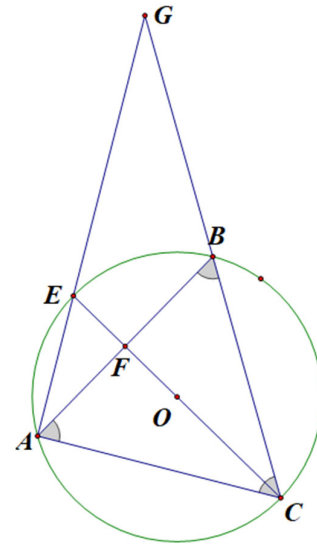
CF là trung tuyến trong ΔABC nên E là điểm chính giữa của cung

$$\widehat{AB}. \Rightarrow \text{sđ} \widehat{BE} = 60^\circ.$$

b) Tính số đo các góc $\widehat{BFE}, \widehat{AGC}$.

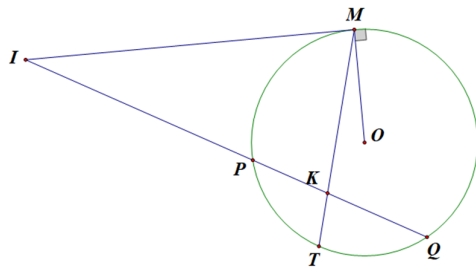
$$\widehat{BFE} = 90^\circ.$$

$$\widehat{AGC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{AC} - \text{sđ} \widehat{BE}) = 30^\circ$$



nhỏ

Câu 6.



$$\widehat{IKM} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{PM} + \text{sđ} \widehat{QT}) = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{PM} + \text{sđ} \widehat{PT}) = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{TM} = \widehat{IMT}.$$

Câu 7.

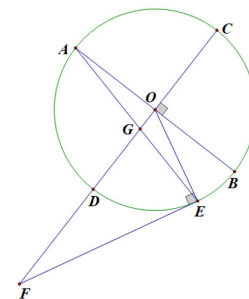
$\widehat{FEG}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung nên: $\widehat{FEG} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AE}$

$\widehat{AGC}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên:

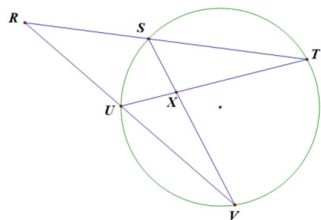
$$\widehat{AGC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{AC} + \text{sđ} \widehat{DE})$$

$$\text{Mà } \widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AGC} = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{AD} + \text{sđ} \widehat{DE}) = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AE}$$

$$\Rightarrow \widehat{FEG} = \widehat{AGC}$$



Câu 8.



$\widehat{URS}$ là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn nên: $\widehat{URS} = \frac{1}{2}(\widehat{sđTV} - \widehat{sđSU})$

$\widehat{VXT}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên: $\widehat{VXT} = \frac{1}{2}(\widehat{sđTV} + \widehat{sđSU})$

Do đó: $\widehat{URS} + \widehat{VXT} = \frac{1}{2}(\widehat{sđTV} + \widehat{sđSU}) + \frac{1}{2}(\widehat{sđTV} - \widehat{sđSU})$

$$\widehat{URS} + \widehat{VXT} = \widehat{sđTV} \quad (1)$$

$\widehat{VUT}, \widehat{VST}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{VT}$ nên $\widehat{VUT} + \widehat{VST} = \widehat{sđVT} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 9.

a) Gọi H là giao điểm của hai dây AD và EF.

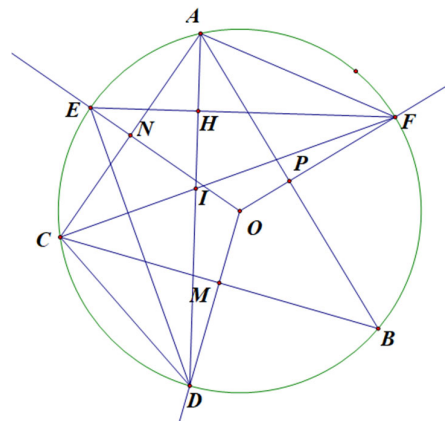
$\widehat{AHE}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên:

$$\begin{aligned} \widehat{AHE} &= \frac{1}{2}(\widehat{sđFD} + \widehat{sđAE}) = \frac{1}{2}\widehat{sđFD} + \frac{1}{2}\widehat{sđAE} \\ &= \widehat{DEF} + \widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{AHE} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = 90^\circ$$

b) Xét $\triangle DCI$:

$$\begin{aligned} \widehat{DIC} &= \frac{1}{2}(\widehat{sđAF} + \widehat{sđCD}) = \frac{1}{2}(\widehat{sđBF} + \widehat{sđBD}) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{sđDF} = \widehat{DCF} \end{aligned}$$



Câu 10.

a) Hai dây cung $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{sđBD} = \widehat{sđAC}$ hay $BD = AC$.

Do đó ABCD là hình thang cân.

$$CD = AB \Rightarrow sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ACB}$$

$$b) \widehat{EBC} = \widehat{EDA} \text{ (đồng vị)}$$

$$\widehat{ECB} = \widehat{EAD} \text{ (đồng vị)}$$

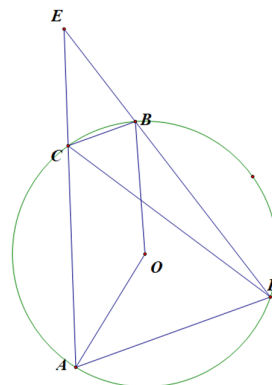
Mà $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$ (hai góc ở đáy hình thang cân)

$$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{ECB}$$

$$\Rightarrow \Delta EBC \text{ cân tại E hay } EB = EC$$

c) Vì $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$ (hai góc ở đáy hình thang cân)

$$\Rightarrow \widehat{ADB} + \widehat{DAC} = 2\widehat{ADB} = sđ\widehat{AB} = \widehat{AOB}$$



Câu 11. $\widehat{CAE} = \frac{sđ\widehat{CE} - sđ\widehat{BD}}{2}$ (góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$$\widehat{FDE} = \frac{sđ\widehat{FE}}{2} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$BD = CF \text{ (gt)} \Rightarrow sđ\widehat{CE} - sđ\widehat{BD} = sđ\widehat{CE} - sđ\widehat{CF} = sđ\widehat{EF}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{CAE} = \widehat{FDE} \Rightarrow AC \parallel DF$$

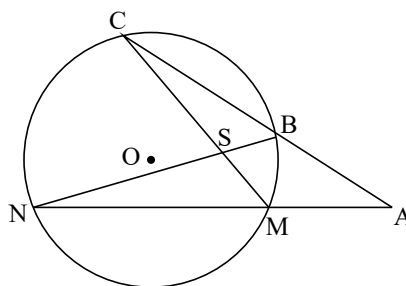
Câu 12. $sđ\widehat{A} = \frac{sđ\widehat{CN} - sđ\widehat{BM}}{2}$

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$$sđ\widehat{BSM} = \frac{sđ\widehat{CN} - sđ\widehat{BM}}{2}$$

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

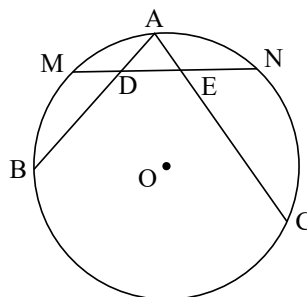
$$\text{Do đó: } \widehat{A} + \widehat{BSM} = 2sđ\frac{\widehat{CN}}{2} = 2\widehat{CMD}$$



Câu 13.

$$\widehat{AM} = \widehat{MB} \text{ (gt), } \widehat{AN} = \widehat{NC} \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ADE} = \frac{sđ\widehat{AN} + sđ\widehat{MB}}{2}$$



(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$$\widehat{AED} = \frac{sđ\widehat{NC} + sđ\widehat{AM}}{2}$$

(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Do đó: $\widehat{ADE} = \widehat{AED} \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

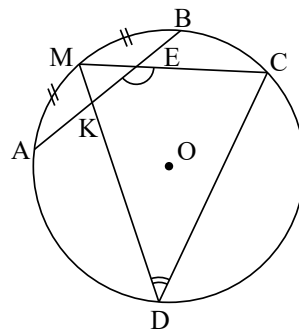
$$\Rightarrow AD = AE$$

Câu 14.

$$AM = MB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \text{ (định lý liên hệ giữa cung và dây)}$$

$$\widehat{KEC} = \frac{sđ\widehat{MB} + sđ\widehat{AC}}{2}$$



(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$$\widehat{KDC} + \frac{sđ\widehat{MC}}{2} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{KEC} + \widehat{KDC} = \frac{sđ\widehat{MB} + sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{MC}}{2}$$

$$= \frac{sđ\widehat{MA} + sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{MC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Câu 15.

a) Ta có:

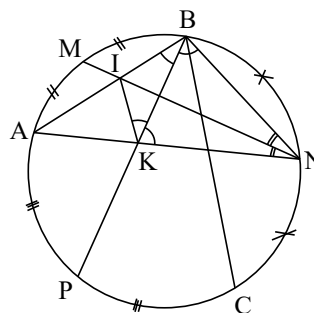
$$sđ\widehat{PBN} = \frac{1}{2}(sđ\widehat{PC} + sđ\widehat{CN})$$

(góc nội tiếp chắn cung $\widehat{PN}$)

$$sđ\widehat{BCN} = \frac{1}{2}(sđ\widehat{AP} + sđ\widehat{BN})$$

(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

Mà $PC = AP$ và $CN = BN$ (giả thiết)



Suy ra: $\widehat{PBN} = \widehat{BCN}$

Do đó: $\triangle BKN$ cân tại N .

b) Dễ thấy $\widehat{ANM} = \widehat{BNM}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau AM và BM) nên NI là tia phân giác ANB .

Ta có: $\frac{AI}{IB} = \frac{AN}{BN} \Rightarrow AI \cdot BN = IB \cdot AN$

c) Theo chứng minh trên (câu a,b) $\triangle BKN$ cân có NI là đường phân giác
Do đó IN cũng đồng thời là đường trung trực của cạnh BK .

$\Rightarrow IB = IK$ hay $\triangle BIK$ cân $\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{IKB}$

Hay $\widehat{ABP} = \widehat{IKB}$ (1)

Mà $\widehat{APB} = \widehat{CBP}$ (2) (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau AP và CP)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{CBP} = \widehat{IKB}$. Do đó $IK \parallel BC$.

Câu 16.

a) Gọi I là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 ta có:

$$s\widehat{AIB_1} = \frac{1}{2} (s\widehat{AB_1} + s\widehat{A_1B} + s\widehat{BC_1})$$

$$= \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{ACC_1}$$

(góc nội tiếp và cung bị chắn)

$$= \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}) = 90^\circ$$

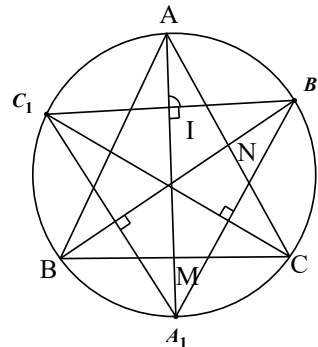
Vậy $AA_1 \perp B_1C_1$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $BB_1 \perp A_1C_1$; $CC_1 \perp A_1B_1$

b) Gọi giao điểm của đoạn thẳng AA_1 và BC là M , của BB_1 và AC là N ta có:

$$s\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (s\widehat{AB} + s\widehat{A_1C})$$

$$= \widehat{ACB} + \widehat{A_1C_1C} \text{ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)}$$



$$\text{Mà } \widehat{ANB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{B_1C}) = \widehat{ACB} + \widehat{A_1C_1C}$$

Do $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ nên A_1C_1C hay CC_1 là tia phân giác của góc $\widehat{A_1C_1B_1}$

Chứng minh tương tự ta có:

BB_1 là tia phân giác của góc $\widehat{A_1C_1B_1}$ và

AA_1 là tia phân giác của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$.

Câu 17.

$$\text{a) } \widehat{MEC} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BM})$$

(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$$\widehat{DMC} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{BM})$$

(góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Mà $DA = DB$ (giả thiết)

Suy ra: $\widehat{MEC} = \widehat{EMC} \Rightarrow \triangle MEC$ cân tại $C \Rightarrow CM = CE$

b) Ta có: $CM = CN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm)

Theo chứng minh trên $CM = CE \Rightarrow CE = CN$.

Do đó $\triangle ECN$ cân $\Rightarrow \widehat{CEN} = \widehat{CNE}$ (1)

Mà $\widehat{CEN} = \widehat{BAN} + \widehat{ANE}$ (2) (góc ngoài của tam giác)

Lại có: $\widehat{CEN} = \widehat{BAN} + \widehat{BNE}$ (3)

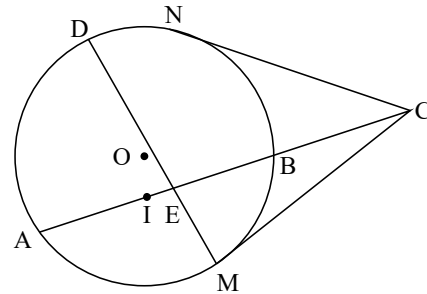
Mà $\widehat{BAN} = \widehat{CNB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung)

Từ 1), (2) và (3) ta có:

$\widehat{ANE} = \widehat{BNE}$ hay NE là tia phân giác của góc $\widehat{ANB}$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{NA}{NB} \text{ (tính chất đường phân giác } \triangle ANB)$$

$$\Rightarrow EA \cdot NB = NA \cdot EB$$



c) Ta có: M, N thuộc đường tròn đường kính OC

($\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = 90^\circ$ theo tính chất của tiếp tuyến)

Mặt khác do I là trung điểm của dây $\widehat{AB}$

Nên $\widehat{IOB} = 90^\circ$ hay $\widehat{OIC} = 90^\circ$.

Vậy điểm I thuộc đường tròn đường kính OC

Vậy năm điểm M, C, N, O, I cùng thuộc một đường tròn đường kính OC .

Câu 18.

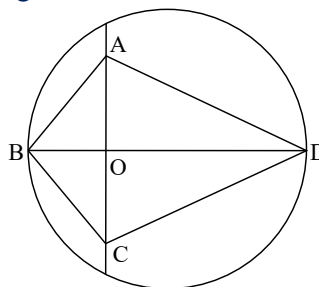
Vẽ đường tròn (O) đường kính DB

Vì $\widehat{DAB}, \widehat{DCB}$ tù nên A, C nằm trong đường tròn (O)

BD là đường kính nên là dây cung lớn nhất của (O)

AC nhỏ hơn dây cung chứa nó

Do đó: $AC < BD$.



Câu 19.

Gọi F là giao điểm của AD và

đường tròn (O) (F khác A),

Ax là tia đối của tia AC

Vẽ đường kính AG của đường

tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có: $\widehat{ABG} = 90^\circ$ (góc nội tiếp

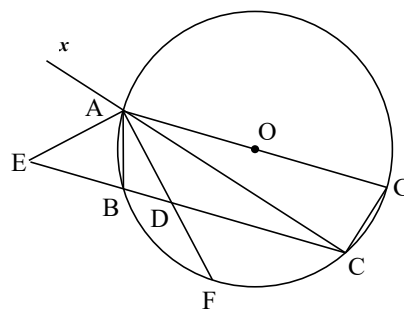
chắn nửa đường tròn)

$$\text{sđ}\widehat{GC} + \text{sđ}\widehat{FC} + \text{sđ}\widehat{AE} + \text{sđ}\widehat{BF}$$

$$= \text{sđ}\widehat{ACG} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{FAC} \quad (AD \text{ là đường phân giác}) \Rightarrow \text{sđ}\widehat{BF} = \text{sđ}\widehat{FC} \quad (2)$$

AD, AE là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{BAC}$ và $\widehat{Bax}$ nên $\widehat{DAE} = 90^\circ$.



$\triangle DAE$ vuông có $AD = AE$ (gt) nên là tam giác vuông cân

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$$

$$\text{sđ} \frac{\widehat{AB} + \widehat{CF}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CF} = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có: $GC = AB \Rightarrow GC = AE$

$\triangle CAG$ vuông tại C nên:

$$AC^2 + GC^2 = AG^2 \quad (\text{Áp dụng định lí Py-ta-go})$$

$$\text{Do đó: } AB^2 + AC^2 = (2R)^2$$

$$\text{Vậy } AB^2 + AC^2 = 4R^2$$

Câu 20.

$$\text{sđ} \widehat{AEC} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$$\text{sđ} \widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CD}}{2}$$

Mà $AB = AC$ (gt)

$$\text{Do đó: } \widehat{AEC} = \widehat{ACD}$$

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle AEC$ có: $\widehat{CAD}$ chung; $\widehat{ACD} = \widehat{AEC}$

$$\text{Do đó } \triangle ACD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC^2$$

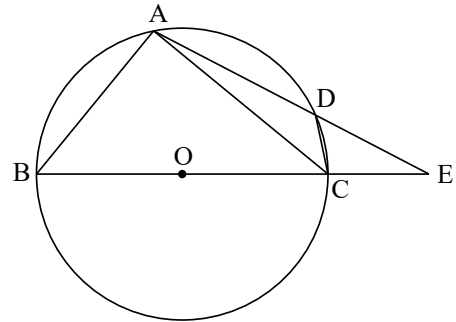
$$\text{Mà } AB = AC = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}R \quad (\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A).$$

$$\text{Nên } AD \cdot AE = 2R^2$$

Vận dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương,

$$\text{Ta có: } 2AD + AE \geq 2\sqrt{2AD \cdot AE}$$

$$2AD + AE \geq 4R$$



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 2AD = AE = 2R$

Vậy khi D trên cung AC sao cho $AD = R$ thì $2AD + AE$ nhỏ nhất.

-----**Toán Học Sơ Đồ**-----