

CHUYÊN ĐỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ ĐỐI XỨNG

Phương pháp giải:

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^2 , rồi đặt ẩn phụ

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

HD:

Thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình: Chia hai vế cho x^2 ta được:

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, Thay vào phương trình ta có:

$$y^2 - 2 + 3y + 4 = 0$$

Bài 2: Giải phương trình: $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

HD:

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế của PT $x^2 \neq 0$ ta được:

$$6x^2 + 25x + 12 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

Đặt: $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$, Thay vào phương trình ta được:

$$6(t^2 + 2) + 25t + 12 = 0 \Leftrightarrow 6t^2 + 25t + 24 = 0$$

Bài 3: Giải phương trình: $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$

HD:

Nhận thấy $x=0$ không phải nghiệm của PT, chia cả hai vế của PT cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

Đặt: $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, Thay vào phương trình ta được:

$$t^2 + 5t - 14 = 0 \Leftrightarrow (t+7)(t-2)$$

Bài 4: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$

Bài 5: Giải phương trình: $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

HD:

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của PT, chia cả hai vế của PT cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t$, Phương trình tương đương với: $t^2 - 3t - 4 = 0$

Bài 6: Giải phương trình: $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

HD:

Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế của PT cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

Đặt: $x + \frac{1}{x} = t$, phương trình trở thành: $2t^2 - 9t + 10 = 0$

Bài 7: Giải phương trình: $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

Bài 8: Giải phương trình: $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$

Bài 9: Giải phương trình: $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

Bài 10: Giải phương trình: $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

Bài 11: Giải phương trình: $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$

Bài 12: Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

Bài 13: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$

Bài 14: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

HD:

Nhân hai vế của phương trình với $x-1$ ta được:

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Cách 2: Đặt $y = x + \frac{1}{x}$

Bài 15: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$$

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$

Phương pháp:

Nhận xét về tích $a+d=b+c$, rồi nhóm hợp lý tạo ra biểu thức chung để đặt ẩn phụ
Đôi khi ta phải nhân thêm với các hệ số để có được biểu thức chung

Bài 1: Giải phương trình: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2)=72$

HD:

Phương trình tương đương với

$$(x-7)(x-2)(x-5)(x-4)=72 \Leftrightarrow (x^2-9x+14)(x^2-9x+20)-72=0$$

Đặt $x^2-9x+14=t$, khi đó phương trình trở thành:

$$t(t+6)-72=0 \Rightarrow (t+12)(t-6)=0$$

$$\text{Với } t=-12 \Rightarrow x^2-9x+14=-12 \Rightarrow \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0$$

$$\text{Với } t=6 \Rightarrow x^2-9x+14=6 \Rightarrow (x-1)(x-8)=0$$

Bài 2: Giải phương trình: $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$

HD:

Phương trình tương đương với:

$$(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)-297=0 \Leftrightarrow (x^2+4x-21)(x^2+4x-5)-297=0$$

Đặt $x^2+4x-5=t$ khi đó phương trình trở thành:

$$(t-16)t-297=0 \Rightarrow (t-8)^2-19^2=0 \Rightarrow (t-27)(t+11)=0$$

$$\text{Với } t=27 \Rightarrow x^2+4x-5=27 \Rightarrow (x+8)(x-4)=0$$

$$\text{Với } t=-11 \Rightarrow x^2+4x-5=-11 \Rightarrow (x+2)^2+2=0$$

Bài 3: Giải phương trình sau: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2)=72$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } (x^2+x)(x^2+x-2)=24$$

Đặt $x^2+x-1=y$, Khi đó phương trình trở thành:

$$(y+1)(y-1)=24 \Leftrightarrow y^2-1=24 \Leftrightarrow y^2=25$$

Bài 4: Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40$

Bài 5: Giải phương trình: $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$

Bài 6: Giải phương trình: $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$

Bài 7: Giải phương trình: $x(x-1)(x+1)(x+2)=24$

Bài 8: Giải phương trình: $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$

Bài 9: Giải phương trình: $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

Bài 10: Giải phương trình: $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$

HD:

Đặt $x^2 - 4 = y$. Phương trình trở thành:
 $y(y - 6) = 72 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 = 81 \Leftrightarrow (y - 3)^2 - 9^2 = 0$

Bài 11: Giải phương trình: $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$

HD:

Nhân 8 vào hai vế ta được: $8x(8x - 1)^2(8x - 2) = 72$

Đặt $8x - 1 = y$, ta được: $(y + 1)y^2(y - 1) = 72 \Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0$

Bài 12: Giải phương trình: $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) = 3$

HD:

Nhân hai vế với 24 ta được: $(12x + 7)^2(12x + 8)(12x + 6) = 72$

Đặt $12x + 7 = y$

Bài 13: Giải phương trình: $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18$

HD:

Nhân hai vế với 4 ta được: $(2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 0$, Đặt $2x + 2 = y$

Bài 14: Giải phương trình: $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 6$

HD:

Nhân hai vế với 12 ta được: $(6x + 7)^2(6x + 8)(6x + 6) = 72$

Đặt $y = 6x + 7$

Bài 15: Giải phương trình: $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4 = 0$

HD :

Phương trình

$$\Leftrightarrow (4x + 1)(3x + 2)(12x - 1)(x + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) - 4 = 0$$

Đặt $12x^2 + 11x - 1 = t$ khi đó phương trình trở thành:

$$(t + 3)t - 4 = 0 \Rightarrow (t + 4)(t - 1) = 0$$

$$\text{Với } t = -4 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 1 = -4 \Rightarrow 12x^2 + 11x + 3 = 0$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 1 = 1 \Rightarrow (3x - 2)(4x + 1) = 0$$

Bài 16: Giải phương trình: $(x + 1)^2(4x^2 + 8x + 3) = 18$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$(x + 1)^2[4(x^2 + 2x + 1) - 1] = 18 \Leftrightarrow (x + 1)^2[4(x + 1)^2 - 1] = 18$$

Đặt $(x + 1)^2 = t, (t \geq 0)$, Thay vào phương trình ta được:

$$t(4t - 1) = 18 \Leftrightarrow 4t^2 - t - 18 = 0$$

Bài 17: Giải phương trình: $(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x - 6) + 6x^2 = 0$

HD:

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x - \frac{12}{x} - 4\right)\left(x - \frac{12}{x} + 1\right) + 6 = 0. \text{ Đặt } t = x - \frac{12}{x}, \text{ ta có:}$$

$$(t-4)(t+1)+6=0 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1 \Leftrightarrow x - \frac{12}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{13}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x = -3; x = 4; x = 1 \pm \sqrt{13}$

DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$$

Bài 1: Giải phương trình: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 82$

HD:

$$\text{Đặt } y = x + 2, \text{ ta có: } (y+1)^4 + (y-1)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0$$

Bài 2: Giải phương trình: $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

HD:

$$\text{Đặt } x - 7 = y, \text{ phương trình trở thành: } (y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$$

$$\text{Rút gọn ta được: } 2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0$$

Bài 3: Giải phương trình: $(x-2)^4 + (x-6)^4 = 82$

Bài 4: Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$

Bài 5: Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$

Bài 6: Giải phương trình: $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$

Bài 7: Giải phương trình: $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 82$

Bài 8: Giải phương trình: $(x-2,5)^4 + (x-1,5)^4 = 1$

Bài 9: Giải phương trình: $(4-x)^4 + (x-2)^4 = 32$

Bài 10: Giải phương trình: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1: Giải phương trình: $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$

Bài 2: Giải phương trình: $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

Bài 3: Giải phương trình: $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$

HD :

Đặt : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = t, (t \geq 0)$, Thay vào phương trình ta được :

$$t^2 - 15(t + 1) = 1 \Leftrightarrow t^2 - 15t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 16) = 0$$

Bài 4: Giải phương trình: $(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$

HD :

Biến đổi phương trình : $(x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x + 4) = 43$. Đặt $x^2 + 4x = y$

Bài 5: Giải phương trình: $(2x^2 - 3)^2 - 16(x + 3)^2 = 0$

HD :

Ta có: $PT \Leftrightarrow (2x^2 - 3)^2 - (4x + 12)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3 - 4x - 12)(2x^2 - 3 + 4x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 4x - 15)(2x^2 + 4x + 9) = 0$$

Bài 6: Giải phương trình sau: $x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 8x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0$$

Bài 7: Giải phương trình: $(3 - x)^4 + (2 - x)^4 = (5 - 2x)^4$

HD:

Đặt $\begin{cases} 3 - x = y \\ 2 - x = z \end{cases} \Rightarrow 5 - 2x = y + z$, phương trình trở thành:

$$y^4 + z^4 + (y + z)^4 \Leftrightarrow yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = 0$$

Bài 8: Giải phương trình: $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$

HD:

Đặt $x - 7 = a, x - 8 = b \Rightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0 \Leftrightarrow 4ab\left(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2\right) = 0$

Bài 9: Giải phương trình: $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 = (2x - 1)^3$

HD:

Đặt $\begin{cases} x + 1 = y \\ x - 2 = z \end{cases} \Rightarrow 1 - 2x = t$ thì ta có: $x + y + z = 0$

Phương trình trở thành: $y^3 + z^3 + t^3 = 0$ vậy $yzt = 0$ $(x + 1)(x - 2)(1 - 2x) = 0$

Bài 10: Giải phương trình: $(x+1)^3 + (x-2)^3 = (2x-1)^3$

HD:

$$\text{Đặt } x+1=a, x-2=b, 1-2x=c \Rightarrow a+b+c=0$$

$$\text{Phương trình tương đương với } (x+1)^3 + (x-2)^3 + (1-2x)^3 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 0$$

Bài 11 : Giải phương trình: $(x^2+1)^2 + 3x(x^2+1) + 2x^2 = 0$

HD:

$$\text{Đặt } x^2+1=y \Rightarrow y^2+3xy+2x^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(y+2x=0)$$

Bài 12: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2(2x-1) - 12(2x-1)^2 = 0$

HD :

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 = a \\ (2x-1) = b \end{cases} . \text{ Khi đó phương trình trở thành:}$$

$$a^2 - 4ab - 12b^2 = 0 \Rightarrow (a-6b)(a+2b) = 0$$

$$\text{Với } a=6b \Rightarrow x^2 = 6(2x-1) \Rightarrow x^2 - 12x + 6 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = \sqrt{30}$$

$$\text{Với } a=-2b \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = (\sqrt{6})^2$$

Bài 13: Giải phương trình: $(3x^2 - 8x + 4)(x^2 - 4) + 12x^4 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với: } \Leftrightarrow (3x-2)(x-2)(x-2)(x+2) + 12x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 4x - 4)(x-2)^2 + 12x^4 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - x^2 + 4x - 4)(x-2)^2 + 12x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - (x-2)^2](x-2)^2 + 12x^4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-2)^2 - (x-2)^2 + 12x^4 = 0$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x^2 = a \\ (x-2)^2 = b \end{cases} , \text{ Khi đó phương trình trở thành:}$$

$$12a^2 + 4ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow 12a^2 + 6ab - 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow 6a(2a+b) - b(2a+b) = 0 \Leftrightarrow (6a-b)(2a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=b \\ a=b=0(l) \end{cases} \Leftrightarrow 6x^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\text{Giải pt trên ta được: } x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{5}$$

Bài 14: Giải phương trình: $(x^2-1)(x^2+4x+3)=192$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$(x^2-1)(x+1)(x+3)=192 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x+3)=192$$

$$\text{Đặt } x+1=y \Rightarrow \text{Phương trình trở thành: } (y-2)y^2(y+2)=192 \Leftrightarrow y^2(y^2-4)=192$$

$$\text{Đặt } y^2-2=z, \text{ Phương trình trở thành: } (z+2)(z-2)=192 \Rightarrow z=\pm 14$$

Bài 15: Giải phương trình: $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$

HD:

Đặt $x = y + 3$, Phương trình trở thành: $(y + 3)^3 + (y + 4)^3 + (y + 5)^3 = (y + 6)^3$
 $\Leftrightarrow 2y(y^2 + 9y + 21) = 0$

Bài 16: Giải phương trình: $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$

HD :

Vì $x = -1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x^3 + 1$ ta được:

$$3 \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - 2 \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \text{Đặt}$$
$$t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \Rightarrow 3t - \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = -\frac{1}{3}$$
$$t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$
$$t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm}$$

Bài 17: Giải phương trình: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)^2(x + 4)(x + 5) = 360$

HD:

Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$
Đặt $t = x^2 + 6x$, ta có phương trình: $(y + 5)(y + 8)(y + 9) = 360$
 $\Leftrightarrow y(y^2 + 22y + 157) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$
Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 0; x = -6$.

Bài 18: Giải phương trình: $(x^3 + 5x + 5)^3 + 5x^3 + 24x + 30 = 0$

HD:

Ta có: $x^3 + 5x + 30 = 5(x^3 + 5x + 5) - x + 5$ nên phương trình tương đương
 $(x^3 + 5x + 5)^3 + 5(x^3 + 24x + 5)x^3 + 24x + 30 = 0$. Đặt $u = x^3 + 5x + 5$. Ta được hệ:
$$\begin{cases} u^3 + 5u + 5 = x \\ x^3 + 5x + 5 = u \end{cases} \Rightarrow (u - x)(u^2 + ux + x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow u = x.$$

 $\Leftrightarrow x^3 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$
Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 19: Giải phương trình: $(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 6$

HD:

Đặt $x^2 + x + 2 = t$. Phương trình đã cho thành $t(t + 1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$.
Với $t = 2$ thì $x^2 + x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.
Với $t = -3$ thì $x^2 + x + 2 = -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; 0; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right\}$.

Bài 20: Giải phương trình: $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 1$

HD:

Biến đổi phương trình thành $(36x^2 + 84x + 49)(36x^2 + 84x + 48) = 12$.

Đặt $t = 36x^2 + 84x + 48$ thì phương trình trên thành $t(t+1) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$.

Với $t = 3$ thì $36x^2 + 84x + 48 = 3 \Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 45 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ hoặc $x = -\frac{5}{6}$.

Với $t = -4$ thì $36x^2 + 84x + 48 = -4 \Leftrightarrow 36x^2 + 84x + 52 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{5}{6}; -\frac{3}{2}\right\}$.

Bài 21: Giải phương trình: $(x-1)^4 + (x+3)^4 = 82$

HD:

Đặt $y = x+1$ thì phương trình đã cho thành $24y^4 + 48y^2 + 216 = 82 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 0\}$.

Bài 22: Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 10$

HD:

Đặt $y = \frac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4} = x+3$ thì phương trình trở thành:

$$(y^2 - 4)(y^2 - 1) = 10 \Leftrightarrow y^4 - 5y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} - 3 \\ x = \sqrt{6} - 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-\sqrt{6} - 3; \sqrt{6} - 3\}$.

Bài 23: Giải phương trình: $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$

HD:

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2 ta được:

$\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{2}{x} + 2\right) = 2$. Đặt $y = x + \frac{2}{x}$ thì phương trình trở thành.

$$(y+1)(y+2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{x} = 0 \\ x + \frac{2}{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 24: Giải phương trình: $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4) = 4x^2$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$((x-2)(x-4))((x-1)(x-8)) = 4x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9x + 8) = 4x^2.$$

Do $x = 2$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x + \frac{8}{x} - 6\right)\left(x + \frac{8}{x} - 9\right) = 4$. Đặt $y = x + \frac{8}{x}$ thì phương trình trở thành

$$(y-6)(y-9) = 4 \Leftrightarrow y^2 - 15y + 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = 10 \end{cases}.$$

Với $y = 5$ thì $x + \frac{8}{x} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 = 0$ (vô nghiệm).

Với $y = 10$ thì $x + \frac{8}{x} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \sqrt{17} \\ x = 5 + \sqrt{17} \end{cases}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = (5 - \sqrt{17}; 5 + \sqrt{17})$.

Bài 25: Giải phương trình: $3(x^2 + 2x - 1)^2 - 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 5x^2 = 0$

HD:

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được

$3\left(x - \frac{1}{x} + 2\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x} + 3\right)^2 + 5 = 0$. Đặt $y = x - \frac{1}{x}$, phương trình trở thành:

$$3(y+2)^2 - 2(y+3)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 1 \\ x - \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài 26: Giải phương trình: $3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4x + 3 = 0$

HD:

Phương trình không nhận $x = 0$ là nghiệm, chia hai vế cho x^2 được :

$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì phương trình trở thành

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{3}.$$

Với $t = 1$ thì $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Với $t = \frac{1}{3}$ thì $x - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$ hoặc $x_4 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{37}}{2}; \frac{1 - \sqrt{37}}{2} \right\}$.

Bài 27: Giải phương trình: $2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0$ (1)

HD:

Ta thấy $k = \frac{105}{-21} = -5$ và $k^2 = \frac{50}{2} = 25$ nên phương trình là phương trình bậc bốn có

hệ số đối xứng tỉ lệ. (1) $\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x - \frac{5}{x}\right) + 34 = 0$. Đặt $t = x - \frac{5}{x}$ suy ra

$t^2 = x^2 + \frac{25}{x^2} - 10$. Phương trình trở thành $2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ hoặc $t = \frac{9}{2}$.

Với $t = 6$ thì $x - \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{14}$; $x_2 = 3 - \sqrt{14}$.

Với $x = \frac{9}{2}$ thì $x - \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 10 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_3 = \frac{9 + \sqrt{161}}{4}$; $x_4 = \frac{9 - \sqrt{161}}{4}$.

Vậy PT (1) có tập nghiệm $S = \left\{ 3 + \sqrt{14}; 3 - \sqrt{14}; \frac{9 + \sqrt{161}}{4}; \frac{9 - \sqrt{161}}{4} \right\}$.

Bài 28: Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$

HD:

Điều kiện $x \notin \{-1; -2; -3; -4; 0\}$. Ta biến đổi phương trình thành:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{x^2+4x} + \frac{2(x+2)}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4x} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{2(x^2+4x+4)} = 0. \text{ Đặt } u = x^2 + 4x, \text{ phương trình trở thành}$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u+3} + \frac{1}{2(u+4)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5u^2 + 25u + 24}{2u(u+3)(u+4)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-25 + \sqrt{145}}{10} \\ u = \frac{-25 - \sqrt{145}}{10} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x^2 + 4x = \frac{-25 + \sqrt{145}}{10} \\ x^2 + 4x = \frac{-25 - \sqrt{145}}{10} \end{cases}. \text{ Tìm được tập nghiệm của phương trình là}$$

$$S = \left\{ -2 - \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10}}; -2 + \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10}}; -2 + \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}}; -2 - \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10}} \right\}.$$

Bài 29: Giải phương trình: $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} - \frac{x+8}{x-2} - \frac{x-8}{x+2} = -\frac{8}{3}$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành } \frac{5}{x-1} + \frac{-5}{x+1} - \frac{10}{x-2} + \frac{10}{x+2} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{x^2-1} - \frac{40}{x^2-4} = -\frac{8}{3}$$

.
Đặt $u = x^2$ ($u \neq 1, u \neq 4; u \geq 0$) dẫn đến phương trình

$$4u^2 - 65u + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 16 \\ u = \frac{1}{4} \end{cases} . \text{ b) Tìm được tập nghiệm của phương trình là}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; -4; \frac{1}{2}; 4 \right\}.$$

Bài 30: Giải phương trình: $\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}$

HD:

Điều kiện $x \notin \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x+6}{(x+5)(x+7)} &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} + \frac{x+5}{(x+4)(x+6)} \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{x+6}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\ &= \frac{x+2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{x+5}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} \right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} \right) &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right) \\ \Leftrightarrow (2x+7) \left(\frac{1}{x^2+7} + \frac{1}{x^2+7x+10} - \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+7x+6} - \frac{1}{x^2+7x+12} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $u = x^2 + 7x$ thì phương trình (*) có dạng

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} + \frac{1}{u+10} + \frac{1}{u+6} + \frac{1}{u+12} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+6} \right) + \left(\frac{1}{u+10} - \frac{1}{u+12} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow u^2 + 18u + 90 = 0. \end{aligned}$$

Mặt khác $u^2 + 18u + 90 = (u+9)^2 + 9 > 0$ với mọi u . Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\frac{7}{2}$.

Bài 31: Giải phương trình: $\frac{x^2+x+1}{x+1} + \frac{x^2+2x+2}{x+2} - \frac{x^2+3x+3}{x+3} - \frac{x^2+4x+4}{x+4} = 0$

HD:

Điều kiện $x \notin \{-4; -3; -2; -1\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+4} \right) + \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x \left(\frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+5x+6} \right) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $u = x^2 + 5x$ thì phương trình (*) trở thành $\frac{3}{u+4} + \frac{1}{u+6} = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{11}{2}$.

Từ đó ta có $2x^2 + 10x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 0; \frac{-5-\sqrt{3}}{2}; \frac{-5+\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Bài 32: Giải phương trình: $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$

HD:

Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái của phương trình cho x , rồi đặt $y = 4x + \frac{7}{x}$ ta được

$$\frac{4}{y-8} + \frac{3}{y-10} = 1.$$

Phương trình trên có 2 nghiệm $y = 16, y = 9$.

Với $y = 9$ thì $4x + \frac{7}{x} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 7 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $y = 16$ thì $4x + \frac{7}{x} = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{7}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\}$.

Bài 33: Giải phương trình: $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

HD:

Đặt $t = 2x^2 + x + 1$, phương trình (1) thành

$$(t - 4x)(t + 4x) = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 - 16x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 = 25x^2 \Leftrightarrow t = -5x \text{ hoặc } t = 5x.$$

$$\text{Với } t = -5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = -5x \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Với } t = 5x \text{ thì } 2x^2 + x + 1 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}; \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$

Bài 34: Giải phương trình: $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$

HD:

Đặt $u = x - 1$ đưa phương trình (2) về dạng tổng quát $(u^2 - 7u - 3)(u^2 - 2u - 3) = 6u^2$.

Bạn đọc giải tiếp theo phương pháp đã nêu. Ta có thể giải bằng cách khác như sau

Viết phương trình đã cho về dạng $(x^2 - 4 - 5x + 5)(x^2 - 4) - 6(x - 1)^2 = 0$.

Đặt $t = x^2 - 4$, Phương trình thành

$$t^2 + (-5x + 5)t + (-6x + 6)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 6x + 6)(t + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6x - 6 \\ t = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 6x - 6 \\ x^2 - 4 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{7} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của PT(2) là $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; 3 - \sqrt{7}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; 3 + \sqrt{7} \right\}.$

Bài 35: Giải phương trình: $x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 18x + 4 = 0$

HD:

PT tương đương với $x^4 - 9x(x^2 - 2) + 16x^2 + 4 = 0$

Đặt $t = x^2 - 2$ thì $t^2 = x^4 - 4x^2 + 4$, PT trên thành:

$$t^2 - 9xt + 20x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - 4x)(t - 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4x \\ t = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 4x \\ x^2 - 2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0 \\ x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{6} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{ 2 - \sqrt{6}; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}; 2 + \sqrt{6}; \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right\}.$

Bài 36: Giải phương trình: $\frac{x^2 - 12}{(x + 2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$

HD:

Điều kiện $x \neq -2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương:

$$3x^4 + 6x^3 - 16x^2 - 36x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 6x(x^2 - 6) - 16x^2 - 12 = 0.$$

Đặt $t = x^2 - 6$ thì $t^2 = x^4 - 12x^2 + 36$, suy ra $3x^4 = 3t^2 + 36x^2 - 108$,

PT trên thành: $3t^2 + 6xt + 20t = 0 \Leftrightarrow t(3t + 6x + 20) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $3t = -6x - 20$.

Với $t = 0$ thì $x^2 - 6 = 0$, suy ra $x = \pm\sqrt{6}$ (thỏa mãn đk).

Với $3t = -6x - 20$ ta có $3x^2 - 18 = -6x - 20$ hay $3x^2 + 6x + 2 = 0$ suy ra $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

(thỏa mãn). Vậy tập nghiệm của PT(4) là $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{3}}{3}; -\sqrt{6}; \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}; \sqrt{6} \right\}.$

Bài 37: Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$

HD:

Đặt $t = 3x^2 + 2$ PT(5) trở thành $\frac{2x}{t - 5x} + \frac{13x}{t + x} = 6$. ĐK: $t \neq 5x, t \neq -x$.

Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$$2t^2 - 13tx + 11x^2 = 0 \Leftrightarrow (t - x)(2t - 11x) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = x \text{ hoặc } t = \frac{11}{2}x \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Với $t = x$ thì $3x^2 + 2 = x \Leftrightarrow 3x^2 - x + 2 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

Với $t = \frac{11}{2}x$ thì $3x^2 + 2 = \frac{11}{2}x \Leftrightarrow 6x - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{4}{3}$. Vậy tập

nghiệm của PT(5) là $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right\}.$

Bài 38: Giải phương trình: $x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 = 0$

HD:

$$\text{Lời giải: PT} \Leftrightarrow x^2(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT là

$$\left\{ -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right\}.$$

Bài 39: Giải phương trình: $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 20\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$

HD:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Đặt $\frac{x-2}{x+1} = y; \frac{x+2}{x-1} = z$, PT có dạng:

$$20y^2 + 5z^2 - 20yz = 0 \Leftrightarrow 5(2y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow 2y = z$$

$$\text{Đến đến } 2 \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2(x-2)(x-1) = (x+2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{9 - \sqrt{73}}{2}$$

$$(\text{thỏa mãn}). \text{ Vậy tập nghiệm của PT(2) là } \left\{ \frac{9 - \sqrt{73}}{2}; \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \right\}.$$

Bài 40: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

Bài 41: Giải phương trình: $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 15 = 0$

Bài 42: Giải phương trình: $x^4 = 8x + 7$

HD :

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2)^2 + 2x^2 + 1^2 = 2(x^2 + 4x^2 + 2^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x + 2)^2 \Leftrightarrow |x^2 + 1| = \sqrt{2}|x + 2|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{2}|x + 2| \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + 1 = \sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2} \cdot x = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4\sqrt{2} - 1}{2}$$

Bài 43: Giải phương trình: $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$

Bài 44: Giải phương trình: $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

HD:

Thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$2x^2 - x - 5 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

Đặt: $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$, Thay vào phương trình ta được:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0$$

Bài 45: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0$

Bài 46: Giải phương trình: $(x - 4)^3 - x(x - 2)(x + 8) + 96 = 0$

Bài 47: Giải phương trình: $x^4 + (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } x^4 + (x - 1)\left[(x - 1)^2 + 1\right] = 0$$

Đặt: $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$, Thay vào phương trình ta được:

$$(y + 1)^4 + y(y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0$$

Thấy $y = 0$ không phải là nghiệm nên chia cả hai vế cho $y^2 \neq 0$, ta được:

$$y^2 + 5y + 6 + \frac{5}{y} + \frac{1}{y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + 5\left(y + \frac{1}{y}\right) - 2 = 0$$

Bài 48: Giải phương trình: $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{Chia hai vế cho } x^2 + x + 1, \text{ ta được: } 2 - 7\left(\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)^2 = \frac{13(x - 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Đặt: } \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = y, \text{ phương trình trở thành: } 2 - 7y^2 - 13y \Leftrightarrow (y + 2)(1 - 7y) = 0$$

Bài 49: Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - (3x - 2)^3$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình thành: } (x^2 - 3x + 2)^3 + (3x - 2)^3 = (x^2)^3$$

Để thấy: $x^2 - 3x + 2 + 3x - 2 = x^2$, Thay vào phương trình trên ta được:

$$(x^2 - 3x + 2)^3 + (3x - 2)^3 = \left[(x^2 - 3x + 2) + (3x - 2)\right]^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)^3 + (3x - 2)^3 = (x^2 - 3x + 2)^3 + (3x - 2)^3 + 3(x^2 - 3x + 2)(3x - 2)(x^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 3x + 2)(3x - 2)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Bài 50: Giải phương trình: $(x^2 + 9)(x^2 + 9x) = 22(x - 1)^2$

HD:

Đặt $y = x - 1$, Phương trình trở thành: $(y^2 + 2y + 10)(y^2 + 11y + 10) = 22y^2$

Vì $y = 0$ không phải là nghiệm của PT nên chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$

Phương trình trở thành: $\left(y + 2 + \frac{10}{y}\right)\left(y + 11 + \frac{10}{y}\right) = 22$

Đặt: $y + \frac{10}{y} + 2 = t$, Phương trình: $t(t + 9) = 22 \Leftrightarrow t^2 + 9t - 22 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -11 \end{cases}$

Với $t = 2$, ta được: $y + \frac{10}{y} + 2 = 2 \Rightarrow \frac{y^2 + 10}{y} = 0$ (Vô lý)

Với $t = -11$, ta được: $y + \frac{10}{y} + 2 = -11 \Leftrightarrow y^2 + 13y + 10 = 0$

Bài 51: Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$

HD:

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$\left(x + \frac{3}{x} - 3\right)\left(x + \frac{3}{x} - 2\right) = 2$, Đặt: $x + \frac{3}{x} = t$, phương trình trở thành:
 $(t - 3)(t - 2) = 2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

Bài 52: Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$

HD:

Đặt $x^2 + 1 = t, (t \geq 1)$, Khi đó phương trình trở thành:

$t^2 + 3xt + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (t + x)(t + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ t = -2x \end{cases}$

Với $t = -x \Rightarrow -x = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ (Vô nghiệm)

Với $t = -2x \Leftrightarrow -2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Bài 53: Giải phương trình: $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$

HD:

Cộng cả hai vế với $36x^2$ ta được:

$(x^2 - 9)^2 + 36x^2 = 36x^2 + 12x + 1 \Leftrightarrow (x^2)^2 + 18x^2 + 81 + 36x^2 = (6x + 1)^2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x^2)^2 + 18x^2 + 81 &= (6x+1)^2 \Leftrightarrow (x^2+9)^2 - (6x+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+9-6x-1)(x^2+9+6x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Bài 54: Giải phương trình: $(x-7)^2 + (x-8)^2 = (15-2x)^2$

HD:

Nhận thấy: $(x-7) + (x-8) = 2x-15$, Thay vào phương trình ta được:

$$\begin{aligned} (x-7)^2 + (x-8)^2 &= (7-x+8-x)^2 \\ \Leftrightarrow (x-7)^2 + (x-8)^2 &= (7-x)^2 + (8-x)^2 + 2(7-x)(8-x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2(7-x)(8-x) &= 0 \end{aligned}$$

Bài 55: Giải phương trình: $x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$

Bài 56: Giải phương trình: $4x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

Bài 57: Giải phương trình: $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$

HD:

Cộng thêm $36x^2$ vào hai vế ta được: $(x^2 - 9)^2 + 36x^2 = 36x^3 + 12x + 1$

Bài 58: Giải phương trình: $6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$

HD :

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 3^x &= 2^{3x} - 3^{3(x-1)} - 1 \\ \text{Đặt } \begin{cases} 2^x = a \\ 3^{x-1} = b \end{cases}, &\text{Phương trình trở thành: } a^3 + (-b)^3 + (-1)^3 = 3a(-b)(-1) \\ \text{Vì } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx), \\ \text{Khi đó: } 2^x &= 3^{x-1} + 1 \end{aligned}$$

Bài 59: Giải phương trình: $(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1)$

HD:

Nhận thấy $x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình

Với $x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với $\frac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Ta có:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 4}{4(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{4(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3}{4} + \frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (1)

$$\text{Lại có: } \frac{8x - 4x^2 - 1}{4} = \frac{3 - 4(x^2 - 2x + 1)}{4} = \frac{3}{4} - (x-1)^2 \leq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình có nghiệm khi $x = 1$

Bài 60: Giải các phương trình sau: $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 16x^2 = 0$

HD:

Đặt $x^2 + x + 4 = t$, ta có: $t^2 + 8xt + 16x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+4x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 + 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x+4) = 0$$

Bài 61: Giải các phương trình sau: $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

HD:

Đặt $y = x^2 + x$, Phương trình trở thành: $y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0$

Bài 62: Tìm x biết: $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

HD:

Đặt $x^2 + x = t$, Phương trình trở thành: $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t+6)(t-2) = 0$

DẠNG 5 : NHĂM NGHIỆM ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương pháp :

+ Nếu phương trình có tổng các hệ số bằng 0 thì phương trình có một nhân tử là :

$$(x - 1)$$

+ Nếu phương trình có hiệu hệ số bậc chẵn với bậc lẻ bằng 0 thì có một nhân tử là :

$$(x + 1)$$

+ Nếu phương trình có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của hệ số tự do

+ Nếu phương trình có nghiệm phân số, thì tử là ước của hệ số tự do, mẫu là ước của hệ số bậc cao nhất

+ Sử dụng phương pháp đồng nhất để tách phương trình bậc 4 thành hai phương trình bậc 2

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với } (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 6) = 0$$

Bài 2: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với: } (x - 2)(x + 3)(x^2 + x + 1) = 0$$

Bài 3: Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với } (x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 4) = 0$$

Bài 4: Giải phương trình: $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với: } (x^2 - 1)(2x - 1)(3x + 1) = 0$$

Bài 5: Giải phương trình: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với } (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$$

Bài 6: Giải phương trình: $2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 6x + 5 = 0$

HD :

$$\text{Phương trình tương đương với } (x^2 + x + 1)(2x^2 + x + 5) = 0$$

Bài 7: Giải phương trình sau: $(x^2 - 4)^2 = 8x + 1$

HD :

Thêm $16x^2$ vào hai vế ta được :

$$(x^2 + 4)^2 = (4x + 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

Bài 8: Giải phương trình sau: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình } x^4 - (2x - 3)^2 = 0$$

Bài 9: Giải phương trình: $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $\Leftrightarrow (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ và $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

Bài 10: Giải phương trình: $x^4 - 22x^2 - 8x + 77 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 7)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{2} \\ x = 1 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

Bài 11: Giải phương trình: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

Bài 12: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 3)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Bài 13: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3$

Bài 14: Giải phương trình: $x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành: $\Leftrightarrow (x^4 - 4x^2 + 4) - (9x^2 - 18x + 9) = 0$

Bài 15: Giải phương trình: $2x^4 - 10x^3 + 11x^2 + x - 1 = 0$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Bài 16: Giải phương trình: $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$

HD:

Phương trình $\Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$

Bài 17: Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

GV: Ngô Thế Hoàng _ THCS Hợp Đức

HD:

$$\begin{aligned}x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0 &\Leftrightarrow x^4 + x - 30(x^2 - x + 1) = 0 \\&\Leftrightarrow x(x^3 + 1) - 30(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x + 1) - 30(x^2 - x + 1) = 0 \\&\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 30) = 0, \\ \forall x^2 - x + 1 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-5) = 0\end{aligned}$$

Bài 18: Cho đa thức: $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 - 40x + m - 1979$

- a) Tìm m sao cho P(x) chia hết cho x-2
- b) Với m tìm được, hãy giải phương trình P(x)=0

HD:

$$\begin{aligned}\text{a, } P(x) &= (x-2)(x^3 + 3x^2 + 12x - 16) + m - 2011, \text{ Do } p(x) \text{ chia hết cho } x-2 \text{ nên} \\ m - 2011 &= 0 \Leftrightarrow m = 2011 \\ \text{b, Với } m=2011 &\Rightarrow P(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 12x - 16)\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + 3x^2 + 12x - 16) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x^2 + 4x + 16) = 0 \\&\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \quad \forall (x^2 + 4x + 16 > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Bài 19: Giải bất phương trình: $(2x^2 + 3x + 4)^2 - (x^2 + x + 4)^2 > 0$

HD:

$$\text{Biến đổi phương trình về dạng: } x(x+2)(3x^2 + 4x + 8) > 0$$

$$\text{Nhận thấy: } 3x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 2x^2 + 4 > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ hoặc}$$

$$x > 0$$

Bài 21: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn bất phương trình:

$$10x^2 + 20y^2 + 24xy + 8x - 24y + 51 < 0$$

HD:

$$\text{Biến đổi thành: } (3x + 4y)^2 + (x + 4)^2 + (2y - 6)^2 - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x + 4 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

DẠNG 6 : PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Bài 1: Giải phương trình: $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$

HD:

Nhận thấy $x = -1$ là 1 nghiệm của phương trình ta có:

$$(x+1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)^2 - x(x^2 + 1) = 0$$

Bài 2: Giải phương trình: $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$

HD:

Phương trình tương đương với

$$(x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Ta thấy phương trình $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ vô nghiệm

Bài 3: Giải phương trình sau: $x^5 + x^3 + 3x = 2(x^4 + x^2 + 3)$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với } 2(x-2)(x^4 + x^2 + 3) = 0$$

Bài 4: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

HD:

Nhân hai vế với $x-1$ ta được: $x^7 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Bài 5: Giải phương trình: $x^5 + x^2 + 2x = -2$

HD :

$$\text{Ta có: } PT \Leftrightarrow x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^5 + x^2) + (2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^3 + 1) + 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(x^2 - x + 1) + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2(x^2 - x + 1) + 2] = 0$$

Ta thấy $x^2 > 0, x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow x^2(x^2 - x + 1) + 2 > 2$ vậy PT có 1 nghiệm $x = -1$

Bài 6: Giải phương trình: $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$

HD:

Phương trình có 1 nghiệm $x = -1$

Bài 7: Giải phương trình: $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 21x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

HD :

Đây là phương trình bậc 6 và ta thấy các hệ số đối xứng do đó ta có thể áp dụng cách giải mà ta đã giải đối với phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế của phương trình cho x^3 ta được:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 21 = 0. \text{ Đặt } t = x + \frac{1}{x}, |t| \geq 2. \text{ Ta có:}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = t(t^2 - 3) \text{ nên phương trình trở thành:}$$

$$t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t+3)^2(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-3 \end{cases}$$

$$t=3 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy phương trình có bốn nghiệm :}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bài 8: Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

HD:

$$\text{Đặt } x^3 = t, \text{ phương trình trở thành: } t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-8) = 0$$

Bài 9: Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

HD :

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 + y^2 - 4y + 4 + 4z^2 - 4xz + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 + (y-2)^2 + (2z-x)^2 = 0$$

$$\text{Do đó : } 3x+1=0 \text{ và } y-2=0 \text{ và } 2z-x=0$$

Bài 10: Tìm x, y, z biết: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$

HD:

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0,$$

DẠNG 7: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Bài 1: Tìm x biết:

$$a, \frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} = \frac{x-3}{15} + \frac{x-3}{16}$$

$$b, \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59}$$

HD:

$$\begin{aligned} a, \quad & \Rightarrow \frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} - \frac{x-3}{15} - \frac{x-3}{16} = 0 \Rightarrow (x-3) \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} \right) = 0 \\ & \Rightarrow x = 3 \text{ vì } \frac{1}{13} - \frac{1}{15} > 0 \text{ và } \frac{1}{14} - \frac{1}{16} > 0 \text{ nên } \frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} > 0 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left(\frac{x+1}{65} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{63} + 1 \right) = \left(\frac{x+5}{61} + 1 \right) + \left(\frac{x+7}{59} + 1 \right) \Rightarrow \frac{x+66}{65} + \frac{x+66}{63} = \frac{x+66}{61} + \frac{x+66}{59} \\ & \Rightarrow (x+66) \left(\frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59} \right) = 0 \Rightarrow x = -61 \text{ vì } \frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59} < 0 \end{aligned}$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a, \frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$$

b,

$$\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

HD:

$$\begin{aligned} a, \quad & \Rightarrow \left(\frac{29-x}{21} + 1 \right) + \left(\frac{27-x}{23} + 1 \right) + \left(\frac{25-x}{25} + 1 \right) + \left(\frac{23-x}{27} + 1 \right) + \left(\frac{21-x}{29} + 1 \right) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{50-x}{21} + \frac{50-x}{23} + \frac{50-x}{25} + \frac{50-x}{27} + \frac{50-x}{29} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(50-x) \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} b, \quad & \Rightarrow \left(\frac{x-10}{30} - 3 \right) + \left(\frac{x-14}{43} - 2 \right) + \left(\frac{x-5}{95} - 1 \right) + \left(\frac{x-148}{8} + 6 \right) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(x-100) \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0$$

Bài 3: Tìm x, biết:

$$a, \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

$$b, \frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$$

HD:

$$\begin{aligned} a, \quad & \Rightarrow \left(\frac{x-5}{100} - 1 \right) + \left(\frac{x-4}{101} - 1 \right) + \left(\frac{x-3}{102} - 1 \right) = \left(\frac{x-100}{5} - 1 \right) + \left(\frac{x-101}{4} - 1 \right) + \left(\frac{x-102}{3} - 1 \right) \\ & \Rightarrow \frac{x-105}{100} + \frac{x-105}{101} + \frac{x-105}{102} = \frac{x-105}{5} + \frac{x-105}{4} + \frac{x-105}{3} \\ & \Rightarrow x-105 = 0 \Rightarrow x = 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b,} \quad & \Rightarrow \\ \left(\frac{x-2}{7}-1\right) + \left(\frac{x-1}{8}-1\right) &= \left(\frac{x-4}{5}-1\right) + \left(\frac{x-3}{6}-1\right) \Rightarrow \frac{x-9}{7} + \frac{x-9}{8} = \frac{x-9}{5} + \frac{x-9}{6} \\ & \Rightarrow x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{aligned}$$

Bài 4: Tìm x, biết:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \frac{x+1}{94} + \frac{x+2}{93} + \frac{x+3}{92} = \frac{x+4}{91} + \frac{x+5}{90} + \frac{x+6}{89} \\ & \frac{2x+19}{21} - \frac{2x+17}{23} = \frac{2x+7}{33} - \frac{2x+5}{35} \end{aligned} \quad \text{b,}$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{x+1}{94}+1\right) + \left(\frac{x+2}{93}+1\right) + \left(\frac{x+3}{92}+1\right) = \left(\frac{x+4}{91}+1\right) + \left(\frac{x+5}{90}+1\right) + \left(\frac{x+6}{89}+1\right) \\ & \Rightarrow \frac{x+95}{94} + \frac{x+95}{93} + \frac{x+95}{92} = \frac{x+95}{91} + \frac{x+95}{90} + \frac{x+95}{89} \\ & \Rightarrow x+95=0 \Rightarrow x=-95 \\ \text{b,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{2x+19}{21}+1\right) - \left(\frac{2x+17}{23}+1\right) = \left(\frac{2x+7}{33}+1\right) - \left(\frac{2x+5}{35}+1\right) \\ & \Rightarrow \frac{2x+40}{21} + \frac{2x+40}{35} = \frac{2x+40}{33} + \frac{2x+40}{23} \\ & \Rightarrow 2x+40=0 \Rightarrow x=-20 \end{aligned}$$

Bài 5: Tìm x, biết:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \frac{x-1}{59} + \frac{x-2}{58} + \frac{x-3}{57} = \frac{x-4}{56} + \frac{x-5}{55} + \frac{x-6}{54} \\ \text{b,} \quad & \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{12} \end{aligned}$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{x-1}{59}-1\right) + \left(\frac{x-2}{58}-1\right) + \left(\frac{x-3}{57}-1\right) = \left(\frac{x-4}{56}-1\right) + \left(\frac{x-5}{55}-1\right) + \left(\frac{x-6}{54}-1\right) \\ & \Rightarrow \frac{x-60}{59} + \frac{x-60}{58} + \frac{x-60}{57} = \frac{x-60}{56} + \frac{x-60}{55} + \frac{x-60}{54} \\ & \Rightarrow x-60=0 \Rightarrow x=60 \\ \text{b,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{x+1}{15}+1\right) + \left(\frac{x+2}{14}+1\right) = \left(\frac{x+3}{13}+1\right) + \left(\frac{x+4}{12}+1\right) \\ & \Rightarrow \frac{x+16}{15} + \frac{x+16}{14} = \frac{x+16}{13} + \frac{x+16}{12} \\ & \Rightarrow x+16=0 \Rightarrow x=-16 \end{aligned}$$

Bài 6, Tìm x, biết:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15} \\ \text{b,} \quad & \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009} \end{aligned}$$

HD:

$$\begin{aligned} \text{a,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{x-5}{1990}-1\right) + \left(\frac{x-15}{1980}-1\right) = \left(\frac{x-1990}{5}-1\right) + \left(\frac{x-1980}{15}-1\right) \\ & \Rightarrow \frac{x-1995}{1990} + \frac{x-1995}{1980} = \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1995}{15} \\ & \Rightarrow x-1995=0 \Rightarrow x=1995 \\ \text{b,} \quad & \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2015}-1\right) + \left(\frac{x-3}{2013}-1\right) = \left(\frac{x-5}{2011}-1\right) + \left(\frac{x-7}{2009}-1\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2013} = \frac{x-2016}{2011} + \frac{x-2016}{2009} \Rightarrow x-2016=0 \Rightarrow x=2016$$

Bài 7, Tìm x, biết:

$$a, \frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14} \quad b,$$

$$\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$$

HD:

$$a, \Rightarrow (x+1) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$b, \Rightarrow \left(\frac{315-x}{101} + 1 \right) + \left(\frac{313-x}{103} + 1 \right) + \left(\frac{311-x}{105} + 1 \right) + \left(\frac{309-x}{107} + 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0 \Rightarrow 416-x=0 \Rightarrow x=416$$

$$\text{Bài 8: Giải phương trình: } \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + \frac{307-x}{109} + 5 = 0$$

HD:

Phương trình tương đương với :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{315-x}{101} + 1 \right) + \left(\frac{313-x}{103} + 1 \right) + \left(\frac{311-x}{105} + 1 \right) + \left(\frac{309-x}{107} + 1 \right) + \left(\frac{307-x}{109} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} + \frac{416-x}{109} = 0$$

$$\Leftrightarrow (416-x) \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} + \frac{1}{109} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 416-x=0 \Leftrightarrow x=416$$

$$\text{Bài 9: Giải phương trình: } \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

$$\text{Bài 10: Giải phương trình: } \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} + \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59} = \frac{x+9}{57} + \frac{x+11}{55} + \frac{x+13}{53} + \frac{x+15}{51}$$

$$\text{Bài 11: Giải phương trình: } \frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} + \frac{307-x}{109} + 5 = 0$$

$$\text{Bài 12: Giải phương trình: } x + \frac{x}{x+2} + \frac{x+3}{x^2+5x+6} + \frac{x+4}{x^2+6x+8} = 1$$

$$\text{Bài 13: Giải phương trình: } \frac{1}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+11x+28} + \frac{1}{x^2+17x+70} = \frac{3}{4x-2}$$

HD:

Phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+10)} = \frac{3}{(4x-2)}$$

$$\text{Bài 14: Giải phương trình: } \frac{1}{2008x+1} - \frac{1}{2009x+2} = \frac{1}{2010x+4} - \frac{1}{2011x+5}$$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với: } \frac{1}{2008x+1} + \frac{1}{2011x+5} = \frac{1}{2010x+4} + \frac{1}{2009x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)} = \frac{4019x+6}{(2010x+4)(2009x+2)}$$

TH1: $4019x+6=0$

TH2: $(2008x+1)(2011x+5) = (2010x+4)(2009x+2) \Leftrightarrow 2x^2+5x+3=0$

Bài 15: Giải phương trình: $\frac{2}{3x^2-4x+1} + \frac{13}{3x^2+2x+1} = \frac{6}{x}$

HD:

Điều kiện: $x \neq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{3}$

Biến đổi phương trình thành: $\frac{2}{3x-4+\frac{1}{x}} + \frac{13}{3x+2+\frac{1}{x}} = \frac{6}{x}$

Đặt: $3x + \frac{1}{x} - 4 = t$, Khi đó phương trình trở thành: $\frac{2}{t} + \frac{13}{t+6} = 6 \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 4 = 0$

Bài 16: Giải phương trình: $\frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3$

HD:

Phương trình tương đương với:

$$\frac{x-b-c-a}{a} + \frac{x-a-b-c}{b} + \frac{x-a-b-c}{c} = 0 \Leftrightarrow (x-a-b-c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0,$$

TH1: Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0 \Rightarrow x = a+b+c$

TH2: Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, phương trình có nghiệm với mọi x

Bài 17: Giải phương trình: $\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

HD:

Phân tích $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Bài 18: Giải phương trình: $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$

HD:

Vì $\begin{cases} x^2+2x+2 > 0, \forall x \\ x^2+2x+3 > 0, \forall x \end{cases}$, đặt $x^2+2x+2 = y$, Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{y-1}{y} + \frac{y}{y+1} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow 5y^2 - 7y - 6 = 0$$

Bài 19: Giải phương trình: $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$

HD:

Biến đổi phương trình thành:

$$(x+1) + \frac{1}{x+1} + (x+4) + \frac{4}{x+4} = (x+2) + \frac{2}{x+2} + (x+3) + \frac{3}{x+3}$$

Bài 20: Giải phương trình: $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

HD:

Điều kiện: $x^2 - 4x + 10 \neq 0$

Đặt $x^2 - 4x + 10 = t$ khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{21}{t} - t + 4 = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 21 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 21 = 0 \Rightarrow (t - 7)(t + 3) = 0$$

$$\text{Với } t = 7 \Rightarrow x^2 - 4x + 10 = 7 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\text{Với } t = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 10 = -3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 9 = 0$$

Bài 21: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}$

HD:

Đặt $x^2 + 2x + 1 = t$, Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{1}{t - 4} + \frac{18}{t + 1} = \frac{18}{t} \Rightarrow t(t + 1) + 18t(t - 4) = 18(t - 4)(t + 1)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \Leftrightarrow (t - 12)(t - 6) = 0$$

$$\text{Với } t = 12 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 12 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$\text{Với } t = 6 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 6 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 6 = (\sqrt{6})^2$$

Bài 22: Giải phương trình sau: $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

HD:

Điều kiện $x \neq 0$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x + 4)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 16$$

Bài 23: Giải phương trình: $\frac{x-1}{a-1} + \frac{1-x}{1+a} - \frac{2x-1}{1-a^4} = \frac{2a^2(x-1)}{(a^4-1)}$

Bài 24: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x^2 + 6x + 8} + \frac{1}{x^2 + 10x + 24} = \frac{1}{9}$

Bài 25: Giải phương trình: $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

HD:

ĐK: $x \neq 0, x^2 + x - 5 \neq 0$

Đặt $t = \frac{x^2 + x - 5}{x} \Rightarrow \frac{3x}{x^2 + x - 5} = \frac{3}{t}$, Thay vào phương trình ta được:

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \Leftrightarrow (t + 3)(t + 1) = 0$$

Bài 26: Giải phương trình: $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0$

HD:

Nhận thấy: $\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+1}$, Đặt hai ẩn phụ: $\frac{x+2}{x+1} = a, \frac{x-2}{x-1} = b$. Thay vào phương trình:

$$a^2 - \frac{5}{2}ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(2a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a = b \end{cases}$$

Với

$$a = 2b \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} = \frac{2(x-2)}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 2(x-2)(x+1) \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 2 = 0$$

Với

$$2a = b \Rightarrow \frac{2(x+2)}{x+1} = \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow 2(x+2)(x-1) = (x-2)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$$

Bài 27: Giải phương trình: $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

HD:

Điều kiện $x \neq -5$

Ta viết lại phương trình thành $\left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + \frac{10x^2}{x+5} - 11 = 0$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+5}$ thì phương trình có dạng $t^2 + 10t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -11 \end{cases}$

Nếu $t = 1$ ta có: $\frac{x^2}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Nếu $t = -11 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+5} = -11 \Leftrightarrow x^2 + 11x + 55 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Bài 28: Giải phương trình: $x \left(\frac{5-x}{x+1} \right) \left(x + \frac{5-x}{x+1} \right) = 6$

HD:

ĐK: $x \neq -1$

Phương trình tương đương với: $x^2 \left(\frac{5-x}{x+1} \right) + x \left(\frac{5-x}{x+1} \right)^2 - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(5-x)(x+1) + x(5-x)^2 - 6(x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Bài 29: Giải phương trình: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 8$

HD:

ĐK: $x \neq -1$

Phương trình tương đương với:

$$x^2(x+1)^2 + x^2 = 8(x+1)^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 16x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 - 2x - 2) = 0$$

Bài 30: Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 90$

HD:

ĐK: $x \neq \pm 1$

Phương trình tương đương với: $\frac{x^2(x-1)^2 + x^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = 90$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x^4 + 2x^2 + x^2}{(x^2 - 1)^2} = 90 \Leftrightarrow 2x^4 + 2x^2 = 90(x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 44x^4 - 91x^2 + 45 = 0$$

Bài 31: Giải phương trình: $(x+1)^2 + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = 8$

HD:

Phương trình tương đương với:

$$\left(x+1 - \frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 2(x+1) \cdot \frac{x+1}{x+2} = 8 \Leftrightarrow \left[\frac{(x+1)^2}{x+2}\right]^2 + 2 \cdot \frac{(x+1)^2}{x+2} - 8 = 0$$

Đặt $\frac{(x+1)^2}{x+2} = y$, Phương trình trở thành: $y^2 + 2y - 8 = 0$

Bài 32: Giải phương trình: $\frac{12x}{x^2+4x+2} - \frac{3x}{x^2+2x+2} = 1$

HD:

Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x \neq 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số về trái cho x thì thu được: $\frac{12}{x+4+\frac{2}{x}} - \frac{3}{x+2+\frac{2}{x}} = 1$. Đặt $t = x + \frac{2}{x} + 2$ thì phương trình trở thành:

$$\frac{12}{t+2} - \frac{3}{t} = 1 \Leftrightarrow 12t - 3t - 6 = t^2 + 2t \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=6 \end{cases}$$

Với $t=1$ ta có: $x + \frac{2}{x} + 2 = 1 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = 0$ vô nghiệm.

Với $t=6$ ta có: $x + \frac{2}{x} + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Bài 33: Giải phương trình: $\frac{x^2}{(x+2)^2} = 3x^2 - 6x - 3$

HD:

Biến đổi phương trình:

$$\left(\frac{x}{x+2} - (x+2)\right)^2 - (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2} + x - 3\right)\left(\frac{x}{x+2} - 3x - 1\right) = 0$$

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x = \pm\sqrt{6}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Bài 34: Giải phương trình: $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$

HD:

Sử dụng HĐT $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{x}{x-1} \right]^3 - 3 \frac{x^2}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1} \right) + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \text{ hay}$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1} \right)^3 - 3 \left(\frac{x^2}{x-1} \right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 35: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

HD:

ĐKXĐ: $x \neq -4, x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$

Phương trình trở thành: $\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

DẠNG 8: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I, Phương trình dạng: $|f(x)| = |g(x)|$

Phương pháp: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$,

Bài 1: Giải phương trình sau: $|2x + 3| = |x - 3|$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\left| \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \right| - |x| = 0$

Bài 3: Giải phương trình sau: $|2x - 1| = |x - 1|$

Bài 4: Giải phương trình sau: $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$

HD:

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x + 1 = -(x^2 - 3x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Bài 5: Giải phương trình: $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| = 0$

HD:

Vì $|2x - 5| \geq 0, |2x^2 - 7x + 5| \geq 0$, Nên suy ra: $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| \geq 0$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ (x - 1)(2x + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Bài 6: Giải phương trình: $|x^3 - 1| = |x^2 - 3x + 2|$

HD:

$$\text{Phương trình tương đương với: } \begin{cases} x^3 - 1 = x^2 - 3x + 2 \\ x^3 - 1 = 3x - x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 7: Giải phương trình: $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$

HD:

$$|x - 6| = |x^2 - 5x + 9| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = x^2 - 5x + 9 \\ x - 6 = -x^2 + 5x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ Vậy: } x = 1; x = 3$$

Bài 8: Giải phương trình: $|x^2 - x| + |2x - 4| = 3 \quad (1)$

HD:

Lập bảng xét dấu. Từ đó ta có 3 trường hợp:

$$\text{TH 1: } \begin{cases} x \leq 0 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ ta có: } (1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Hai giá trị này đều không thuộc khoảng đang xét nên trường hợp này phương trình vô nghiệm.

$$\text{TH 2: } 0 < x \leq 1 \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow -x^2 - x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (l) hoặc } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{TH 3: } x > 2 \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \text{ (l) hoặc } x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm } \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Bài 9: } |2x-1| + |2x+1| = 4 \quad (x = \pm 1)$$

$$\text{Bài 10: Giải phương trình: } |x-2| + |x-3| = 4 \quad (x = \frac{1}{2}; \frac{9}{2})$$

$$\text{Bài 11: Giải phương trình: } 2|x+2| + 2|x-1| = 5$$

$$\text{Bài 12: Giải phương trình: } |3x+4| = |x-2| \quad (x = -3; -\frac{1}{2})$$

$$\text{Bài 13: Giải phương trình: } |x^2-1| + |x| = 1 \quad (x = 0; \pm 1)$$

$$\text{Bài 14: Giải phương trình: } |x^2-x-2| = |x^2+2x| \quad (x = -\frac{2}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4})$$

$$\text{Bài 15: Giải phương trình: } |x^2-2x| = |2x^2-1| \quad (x = 1; -\frac{1}{3}; -1 \pm \sqrt{2})$$

$$\text{Bài 16: Giải phương trình: } |3x-5| = |2x+1|$$

$$\text{Bài 17: Giải phương trình: } |7x-4| = |3x-4|$$

$$\text{Bài 18: Giải phương trình: } |2x+1| = |x|$$

$$\text{Bài 19: Giải phương trình: } |3x+4| = |x-2|$$

$$\text{Bài 20: Giải phương trình: } |x-3| = |2x-1|$$

$$\text{Bài 21: Giải phương trình: } |2x+5| = |3x-2|$$

$$\text{Bài 22: Giải phương trình: } |x-3| = |2x-1|$$

$$\text{Bài 23: Giải phương trình: } \frac{|2x+7|}{x-1} = |3x-1|$$

$$\text{Bài 24: Giải phương trình: } \frac{|3x-1|}{x+2} = |x-3|$$

$$\text{Bài 25: Giải phương trình: } \frac{|5x-2|}{x+3} = |x-2|$$

$$\text{Bài 26: Giải phương trình: } |x^2-4| + |x| = 2$$

$$\text{Bài 27: Giải phương trình: } |x-1| + |2x+3| = 0$$

$$\text{Bài 28: Giải phương trình: } |x-1| + |x^2-1| = 0$$

Bài 29: Giải phương trình : $|x^2 - 1| + |x^2 - 3x + 2| = 0$

Bài 30: Giải phương trình : $|5x + 2| + |3x - 4| = 4x + 5$

II, PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $|f(x)| = g(x)$

Phương pháp:

Cách 1: Phá giá trị tuyệt đối

Cách 2: Điều kiện $g(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$,

Bài 1: Giải phương trình: $|2x+1| = x+2$

Bài 2: Giải phương trình sau: $|x+4| + 3x = 5$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2 + |x-1| = 1$

HD:

$$\begin{aligned} x^2 + |x-1| = 1 &\Leftrightarrow |x-1| = 1 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x-1 = \pm(1-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} x-1 = 1-x^2 \\ x-1 = -1+x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} x=0 \vee x=1 \\ x=1 \vee x=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x=1$; $x=0$

Bài 4: Giải phương trình sau: $|x-1| = x^3 + x + 1$

Bài 5: Giải phương trình sau: $|4x^2 - 2x| + 1 = 2x$

Bài 6: Giải phương trình sau: $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$

Bài 7: Giải phương trình: $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$

HD:

Với $4x - 17 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{17}{4}$, Khi đó: $VT \geq 0, VP < 0$, suy ra phương trình vô nghiệm

Với $x \geq \frac{17}{4}$, Khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 4x - 17 \\ x^2 - 4x - 5 = 17 - 4x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-6) = 0 \\ x = \pm\sqrt{22} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 8: Giải phương trình: $(|x|+1)^2 = 4|x|+9$

HD:

$(|x|+1)^2 = 4|x|+9$, Đặt $t = |x|, (t \geq 0)$, Phương trình trở thành:

$$(t+1)^2 = 4t+9 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2(l) \end{cases}$$

Bài 9: Giải phương trình sau: $(x+1)^2 - 3|x+1| + 2 = 0$

HD:

Đặt: $|x+1| = t, (t \geq 0)$, Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

Bài 10: Giải phương trình: $4x(x-1) = |2x-1| + 1$

HD:

Đặt: $|2x-1|=t, (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$, Thay vào phương trình ta được:

$$4x^2 - 4x - |2x-1| - 1 = 0 \text{ hay } t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 2 \end{cases}$$

Bài 11: Giải phương trình: $x^2 + \frac{9}{(x-1)^2} + 1 = 2x + 7 \left| \frac{x^2 - 2x - 2}{x-1} \right|$

HD:

ĐKXD: $x \neq 1$, Phương trình tương đương với: $(x-1)^2 + \frac{9}{(x-1)^2} = 7 \left| x-1 - \frac{3}{x-1} \right|$

Đặt: $\left| x-1 - \frac{3}{x-1} \right| = t, (t \geq 0)$, suy ra:

$$t^2 = (x-1)^2 + \frac{9}{(x-1)^2} - 6 \Rightarrow (x-1)^2 + \frac{9}{(x-1)^2} = t^2 + 6$$

Phương trình trở thành: $t^2 + 6 = 7t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 6 \end{cases}$

Bài 12: Giải phương trình: $|3x-2| = x^2 + 2x + 3$

HD:

Vì $x^2 + 2x + 3 > 0, \forall x$, Nên phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 = x^2 + 2x + 3 \\ 3x-2 = -(x^2 + 2x + 3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 5 = 0 \\ x^2 + 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Bài 13: Giải phương trình: $x^2 - |x| - 2 = 0$

Bài 14: Giải phương trình: $x^2 + 2x + |x+1| - 5 = 0$

Bài 15: Giải phương trình: $x^2 + 2x - 5|x+1| + 5 = 0$

Bài 16: Giải phương trình: $4x^2 - 20x + 4|2x-5| + 13 = 0$

Bài 17: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 2|x-2| + 1 = 0$

Bài 18: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 5|x-1| + 5 = 0$

Bài 19: Giải phương trình sau: $(2x-1)^2 - 3|2x-1| - 4 = 0$

HD:

Đặt: $t = |2x-1|, (t \geq 0)$, Phương trình trở thành: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 4 \end{cases}$

Bài 20: Giải phương trình: $\frac{x^4 - 6x^2 + 4}{x^2} = \left| \frac{x^2 - 2}{x} \right|$

HD:

ĐKXD: $x \neq 0$, đặt $t = \left| \frac{x^2 - 2}{x} \right|, (t \geq 0)$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

Bài 21: Giải phương trình: $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8$ $(x = \frac{9}{2})$

Bài 22: Giải phương trình: $|x^2 - 3x + 2| = 2x + 1$ $(x = 5 \pm \sqrt{21})$

Bài 23: Giải phương trình: $\frac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$ $(x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2})$

Bài 24: Giải phương trình: $\frac{|3 - 2x| - |x|}{|2 + 3x| + x - 2} = 5$ $(x = -\frac{23}{9}; \frac{3}{23})$

Bài 25: Giải phương trình: $\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2$ $(x = 5)$

Bài 26: Giải phương trình: $|x^2 + x - 12| = x^2 - x - 2$ $(x = 5; \pm \sqrt{7})$

Bài 27: Giải phương trình: $|x^2 - 3x + 2| - 2x = 1$ $(x = 5 \pm \sqrt{21})$

Bài 28: Giải phương trình: $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$ $(x = 0; 5)$

Bài 29: Giải phương trình: $|2x - 3| = \frac{1}{x}$ $(x = 1; \frac{1}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{4})$

Bài 30: Giải phương trình: $|x^2 - 1| = 1 - 4x$

Bài 31: Giải phương trình: $|4x + 1| = x^2 + 2x - 4$

Bài 32: Giải phương trình: $|3x - 5| = 2x^2 + x - 3$

Bài 33: Giải phương trình: $x^2 + 5x - |3x - 2| - 5 = 0$

Bài 34: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 8 = |x^2 - 1|$

Bài 35: Giải phương trình: $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$

Bài 36: Giải phương trình: $|3x^2 - 2| = |6 - x^2|$

Bài 37: Giải phương trình: $\frac{x - 1}{2x - 3} = \frac{-3x + 1}{|x + 1|}$

Bài 38: Giải phương trình: $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} = 2x$

Bài 39: Giải phương trình: $\frac{2x - 3}{|x + 2|} = \frac{3}{x - 1}$

Bài 40: Giải phương trình: $\frac{x + 2}{2x - 1} = \frac{-x + 3}{|2x + 1|}$

Bài 41: Giải phương trình: $\frac{2|x - 3|}{x^2 + 2x - 15} = 1$

HD:

Ta có: $\frac{2|x-3|}{x^2+2x-15} = 1 \Leftrightarrow \frac{2|x-3|}{(x+5)(x-3)} = 1$, ĐKXĐ: $x \neq -5, x \neq 3$

Xét $x > 3$, Phương trình $\Leftrightarrow \frac{2}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x = -3(1)$

Xét $x < 3$ và $x \neq -5$ phương trình $\Leftrightarrow \frac{-2}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x = -7$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -7$

Bài 42: Giải phương trình: $4x^2 - 4x - 5|2x-1| - 5 = 0$

HD:

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$, Phương trình trở thành: $2x(2x-7) = 0$

Nếu $x < \frac{1}{2}$ phương trình trở thành: $(2x+5)(x-1) = 0$

Bài 43: Giải phương trình: $||x|-3| = x+1$

HD:

Xét $x \geq 0$ phương trình đã cho trở thành: $|x-3| = x+1$

Với $x \geq 3 \Rightarrow x-3 = x+1$ vô nghiệm

Với $0 \leq x < 3 \Rightarrow x = 1$ thỏa mãn:

Xét $x < 0$ phương trình đã cho trở thành: $|x+3| = x+1$

Với $-3 \leq x < 0 \Rightarrow x+3 = x+1$ vô nghiệm

Với $x < -3 \Rightarrow x = -2$ không thỏa mãn:

III, PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $|f(x)| + |g(x)| + |h(x)| = t(x)$

Phương pháp:

Lập bảng xét dấu:

Sử dụng tính chất: $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a, b \geq 0$ hoặc: $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a-b) \geq 0$

Bài 1: Giải phương trình sau: $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2$

HD:

Điều kiện: $x \neq -1$

Đặt $|x+1| = t (t \geq 0)$, Phương trình trở thành: $\frac{3}{t} + \frac{t}{3} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

Bài 3: Giải phương trình sau: $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = 3$

HD:

Biến đổi phương trình về: $|(x-3)(x-1)| + |x(x-4)| = 3$

Bài 4: Giải phương trình sau: $|\sqrt{x-1}+1| - |\sqrt{x-1}-1| = 2$

HD:

Sử dụng tính chất $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a-b) \geq 0$

Phương trình tương đương với: $|\sqrt{x-1}+1| - (\sqrt{x-1}-1) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$,

Dấu bằng khi: $2(\sqrt{x-1}-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy phương trình có nghiệm $x \geq 2$

Bài 5: Giải phương trình sau: $|x+1| + 3|x-1| = x+2 + |x| + 2|x-2|$

Bài 6: Giải phương trình sau: $x + \frac{2a|x+a|}{x} = \frac{a^2}{x} (x \neq 0)$

HD:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^2 + 2a|x+a| - a^2 = 0$

TH1: $x < -a$, phương trình trở thành: $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-3a) = 0$

TH2: $x \geq -a$, phương trình trở thành: $x^2 + 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = -a$

Bài 7: Giải phương trình sau: $|x-3| + |x+2| = 7$

Bài 8: Giải phương trình sau: $|x| - |2x+3| = x-1$

Bài 9: Giải phương trình sau: $|x| + |1-x| = x + |x-3|, (1 < x < 3)$

Bài 10: Giải phương trình sau: $||x|-3| = x+1$

HD:

Xét $x \geq 0$, phương trình có dạng $|x-3| = x+1$, Giải phương trình bình thường

Xét $x < 0$, Phương trình tương đương với $|-x-3| = x+1$, Giải phương trình bình thường

Bài 11: Giải phương trình sau: $|x| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

Bài 12: Giải phương trình sau: $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 4$

Bài 13: Giải phương trình sau: $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| = 4x$

Bài 14: Giải phương trình sau: $x|x + 3| - |x^2 + x + 1| = 1$

Bài 15: Giải phương trình sau: $|x|^3 - 3|x| + 2 = 0$

Bài 16: Giải phương trình sau: $\frac{|x| - 1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{|x| - 5}{5} - \frac{14 - 2|x|}{5} \right) = \frac{|x| - 9}{2} - \frac{7}{8}$

Bài 17: Giải phương trình sau: $|x| + |x + 1| = |3 - 2x|$

Bài 18: Giải phương trình sau: $|5 - x| + |x - 1| = |x - 6|$

IV. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN

Bài 1: Giải và biện luận các phương trình sau: $|mx + 2m| = |mx + x + 1|$

HD:

$$\text{Phương trình : } |mx + 2m| = |mx + x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2m = mx + x + 1 \\ mx + 2m = -(mx + x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m - 1 \\ (2m + 1)x = -2m - 1(1) \end{cases}$$

Với (1):

Nếu $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$, Phương trình có nghiệm đúng với mọi x

Nếu $2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$, phương trình tương đương với $x = -1$

Kết luận:

Với $m = -\frac{1}{2}$, Phương trình có nghiệm đúng với mọi x

Với $m \neq -\frac{1}{2}$, Phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2m - 1$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình sau: $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$

HD:

$$\text{Ta có: } |mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x = 0(2) \\ (m + 3)x = 2(3) \end{cases}$$

Với phương trình (2) ta có:

Nếu $m = -1$, Thì phương trình (2) có nghiệm đúng với mọi x

Nếu $m \neq -1$, Thì phương trình có nghiệm $x = 0$

Với phương trình (3) ta có :

Nếu $m = -3$, thì phương trình (3) vô nghiệm

Nếu $m \neq -3$, thì phương trình (3) có nghiệm $x = \frac{2}{m + 3}$

Kết luận : Với $m = -1$, Phương trình có nghiệm đúng với mọi x

Với $m = -3$, Phương trình có nghiệm $x = 0$

Với $m \neq -1, m \neq -3$, Phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{2}{m + 3}$

Bài 3 : Tìm m để phương trình $|x^2 + x| = |mx^2 - (m + 1)x - 2m - 1|$, có 3 nghiệm phân biệt :

HD :

$$\text{Phương trình tương đương với : } |x(x + 1)| = |(x + 1)(mx - 2m - 1)|$$

$$\Leftrightarrow |x + 1|(|x| - |mx - 2m - 1|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -1 \\ |x| = |mx - 2m - 1| \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Với (4) tương đương với : } \begin{cases} mx - 2m - 1 = x \\ mx - 2m - 1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = 1 = 2m(1) \\ (m + 1)x = 1 + 2m(2) \end{cases}$$

Nếu $m = 1$, thì phương trình (1) vô nghiệm, Khi đó PT ban đầu không thể có ba nghiệm phân biệt

Nếu $m = -1$, thì phương trình (2) vô nghiệm, Khi đó PT ban đầu không có ba nghiệm phân biệt

$$\text{Nếu } m \neq \pm 1, \text{ thì (4) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+2m}{m-1} \\ x = \frac{1+2m}{m+1} \end{cases}$$

Để có ba nghiệm phân biệt thì: $\frac{1+2m}{m-1} \neq -1$ và $\frac{1+2m}{m+1} \neq -1$ và $\frac{1+2m}{m-1} \neq \frac{1+2m}{m+1}$

$$\text{Hay } m \notin \left\{0; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

Kết luận: Vậy với $m \notin \left\{-1; \frac{-1}{2}; \frac{-2}{3}; 0; 1\right\}$, thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt

Bài 4: Giải và biện luận $|x^2 - 2x + m| + x = 0$

HD:

$$\text{Ta có: } |x^2 - 2x + m| + x = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - 2x + m = \pm x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 & (1) \\ x^2 - x + m = 0 & (2) \end{cases} \end{cases} \quad \text{Ta có: } \Delta_1 = 9 - 4m \text{ và } \Delta_2 = 1 - 4m$$

Biện luận

$$+ m \leq 0 \quad x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

+ $m > 0$: Vô nghiệm

Bài 5: Cho phương trình: $x^2 - 2x - 2|x - 1| + m + 3 = 0$

a, Giải phương trình khi $m = -2$

b, Tìm m để phương trình sau có nghiệm

HD:

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| + m + 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = |x - 1|, (t \geq 0), \text{ ta có phương trình: } t^2 - 2t + m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{A, Khi } m = -2, \text{ ta có: } t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

B, Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm với

$$t \geq 0 \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t - 2 \text{ có nghiệm } t \geq 0 \Leftrightarrow \text{đồ thị hàm số } f(t) = -t^2 + 2t - 2,$$

với

$$t \in [0; +\infty), \text{ cắt trục hoành hay } m \leq -2$$

Bài 6: Giải và biện luận phương trình: $|mx + 2m| = |x + 1|$

HD:

$$\text{Ta có PT } \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2m = x + 1 \\ mx + 2m = -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)x = 1 - 2m & (1) \\ (m + 1)x = -2m - 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1):

Với $m = 1$, Phương trình trở thành: $0x = -1$, Vô nghiệm

Với $m \neq 1$, Phương trình tương đương với $x = \frac{1-2m}{m-1}$

Giải (2):

Với $m = -1$, Phương trình trở thành: $0x = 1$, phương trình vô nghiệm

Với $m \neq -1$, Phương trình tương đương với: $x = \frac{-2m-1}{m+1}$

Kết luận:

Với $m = \pm 1$, Phương trình có nghiệm là $x = \frac{-3}{2}$

Với $m \neq \pm 1$, Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{1-2m}{m-1}$ và $x = \frac{-2m-1}{m+1}$

Bài 7: giải và biện luận phương trình: $|mx + 2x| = |mx - 1|$

HD:

$$\text{Ta có: } |mx + 2x| = |mx - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x = mx - 1 \\ mx + 2x = -(mx - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ (2m + 2)x = 1 \end{cases}$$

Với phương trình: $(2m + 2)x = 1$ (*), ta có:

Nếu $m = -1$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $m \neq -1$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = \frac{1}{2m + 2}$

Kết luận:

$m = -1$, Phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{2}$

$m \neq -1$, Phương trình có nghiệm $x = \frac{-1}{2}$ và $x = \frac{1}{2m + 2}$

Bài 8: Giải và biện luận phương trình sau: $|3x + m| = |x - 1|$

Bài 9: Giải và biện luận phương trình sau: $x^2 + 4x - 2|x - m| + 2 - m = 0$

Bài 10: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|x^2 - 2x + m| = x^2 + 3x - m - 1$

Bài 11: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|4x - 3m| = 2x + m$

Bài 12: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|3x + 2m| = x - m$

Bài 13: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|2x + m| = |x - 2m + 2|$

Bài 14: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|x^2 - 2x + m| = x$

Bài 15: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|3mx - 1| = 5$

Bài 16: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|2x + m| = |2x + 2m - 1|$

Bài 17: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|3x - m| = |2x + m + 1|$

Bài 18: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|x - m| = |x + 1|$

Bài 19: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|3x + m| = |2x - 2m|$

Bài 20: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|3x + m| = |x - 1|$

Bài 21: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|x - m| = |x - 1|$

Bài 22: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x^2 + 2a|x + a| - a^2 = 0$

Bài 23: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|mx + 1| = |2x - m - 3|$

Bài 24: Cho phương trình: $|x-3|+2|x+1|=4$

a, Giải phương trình

b, Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của phương trình.