

CHUYÊN ĐỀ: GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Lý thuyết :

+ ĐN: Khoảng cách từ điểm a đến điểm 0 trên trục số là giá trị tuyệt đối của một số a (a là số thực)

- Giá trị tuyệt đối của số không âm là chính nó, giá trị tuyệt đối của số âm là số đối của nó.

TQ: Nếu $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$ Nếu $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Nếu $x - a \geq 0 \Rightarrow |x-a| = x - a$ Nếu $x - a \leq 0 \Rightarrow |x-a| = a - x$

+Tính chất: Giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm: $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

- Hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau, và ngược lại hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì chúng là hai số bằng nhau hoặc đối nhau. $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$

- Mọi số đều lớn hơn hoặc bằng đối của giá trị tuyệt đối của nó và đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của nó: $-|a| \leq a \leq |a|$ và $-|a| = a \Leftrightarrow a \leq 0; a = |a| \Leftrightarrow a \geq 0$

- Trong hai số âm số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối lớn hơn: Nếu $a < b < 0 \Rightarrow |a| > |b|$

- Trong hai số dương số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn: Nếu $0 < a < b \Rightarrow |a| < |b|$

- Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối: $|a.b| = |a|.|b|$

- Giá trị tuyệt đối của một thương bằng thương hai giá trị tuyệt đối: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

- Bình phương của giá trị tuyệt đối của một số bằng bình phương số đó: $|a|^2 = a^2$

- Tổng hai giá trị tuyệt đối của hai số luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của hai số, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai số cùng dấu: $|a| + |b| \geq |a + b|$ và $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$

DẠNG 1: PHÁ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1: Phá giá trị tuyệt đối:

a, $|2x+3|$

b, $|4x-2|$

c, $|3x-5|$

d, $|2-x|$

HD :

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } |2x+3| &= \begin{cases} 2x+3 & \left(x \geq -\frac{3}{2}\right) \\ -2x-3 & \left(x < -\frac{3}{2}\right) \end{cases} & \text{b, } |4x-2| &= \begin{cases} 4x-2 & \left(x \geq \frac{1}{2}\right) \\ 2-4x & \left(x < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \\ \text{c, } |3x-5| &= \begin{cases} 3x-5 & \left(x \geq \frac{5}{3}\right) \\ 5-3x & \left(x < \frac{5}{3}\right) \end{cases} & \text{d, } |2-x| &= \begin{cases} 2-x & (x \leq 2) \\ x-2 & (x > 2) \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2: Phá giá trị tuyệt đối:

a, $|2x-4|+|x-3|$

b, $|x-5|+|x+6|$

HD :

a, Ta có bảng sau :

x	2	3
2x-4	-	0
x-3	-	0

Khi đó ta có :

Nếu $x < 2 \Rightarrow |2x-4|+|x-3| = (4-2x)+(3-x) = -3x+7$

Nếu $2 \leq x < 3 \Rightarrow |2x-4|+|x-3| = 2x-4+3-x = x-1$

Nếu $x \geq 3 \Rightarrow |2x-4|+|x-3| = 2x-4+x-3 = 3x-7$

b,

Ta có bảng sau :

x	-6	5
x-5	-	0
x+6	-	0

Khi đó ta có :

Nếu $x < -6 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = 5-x-x-6 = -2x-1$

Nếu $-6 \leq x < 5 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = 5-x+x+6 = 11$

Nếu $x \geq 5 \Rightarrow |x-5|+|x+6| = x-5+x+6 = 2x+1$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a, $3(2x-1)-|x-5|$

b, $|2x+3|+x+2$

HD:

a, Nếu $x \geq 5 \Rightarrow 3(2x-1)-|x-5| = 6x-3-(x-5) = 5x+2$

Nếu $x < 5 \Rightarrow 3(2x-1)-|x-5| = 6x-3-(5-x) = 7x-8$

b, Nếu $x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow |2x+3|+x+2 = 2x+3+x+2 = 3x+5$

Nếu $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow |2x+3|+x+2 = -2x-3+x+2 = -x-1$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a, $3x-1+|1-3x|$

b, $3(x-1)-2|x+3|$

HD:

$$\text{a, Nếu } x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 + |1 - 3x| = 3x - 1 + 1 - 3x = 0$$

$$\text{Nếu } x > \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 + |1 - 3x| = 3x - 1 + (3x - 1) = 6x - 2$$

$$\text{b, Nếu } x \geq -3 \Rightarrow 3(x - 1) - 2|x + 3| = 3x - 3 - 2(x + 3) = x - 9$$

$$\text{Nếu } x < -3 \Rightarrow 3(x - 1) - 2|x + 3| = 3x - 3 + 2(x + 3) = 5x + 3$$

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a, } A = 3x^2 - 2x + 1, \text{ Với } |x| = 0,5$$

$$\text{b, } B = |3x - 1| + x - 3 \text{ với } |x| = \frac{1}{3}$$

HD:

$$\text{a, Vì } |x| = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } x = 0,5 \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$\text{TH2 : } x = -0,5 \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

$$\text{b, Vì } |x| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } x = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \left|3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right| + \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$$

$$\text{TH2 : } x = \frac{-1}{3} \Rightarrow B = \left|3 \cdot \frac{-1}{3}\right| + \frac{-1}{3} - 3 = 1 + \frac{-10}{3} = \frac{-7}{3}$$

Bài 6: Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a, } A = 6x^3 - 3x^2 + 2|x| + 4 \text{ với } x = \frac{-2}{3}$$

$$\text{b, } 2|x| - 3|y| \text{ với } x = \frac{1}{2}; y = -3$$

HD:

$$\text{a, Với } x = \frac{-2}{3} \Rightarrow |x| = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{52}{9}$$

$$\text{b, Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{2}, y = -3 \Rightarrow |y| = 3 \Rightarrow B = 2|x| - 3|y| = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 3 = 1 - 9 = -8$$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a, } 2|x - 2| - 3|1 - x| \text{ với } x = 4$$

$$\text{b, } D = \frac{5x^2 - 7x + 1}{3x - 1} \text{ với } |x| = \frac{1}{2}$$

HD:

$$\text{a, Với } x = 4 \Rightarrow A = 2|x - 2| - 3|1 - x| = 2 \cdot |2| - 3 \cdot |-3| = 4 - 9 = -5$$

$$\text{b, Với } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = -1/2 \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } x = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} - 7 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{TH2 : } x = \frac{-1}{2} \Rightarrow D = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 \cdot \frac{-1}{2} - 1} = \frac{-23}{10}$$

DẠNG 2: $|A(x)| = k (k \geq 0)$

Bài 1: Tìm x biết:

a, $2|3x-1|+1=5$

b, $\left|3x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{35}+2\frac{4}{7}$

c, $||x+5|-4|=3$

HD:

a, $2|3x-1|+1=5 \Rightarrow 2|3x-1|=4 \Rightarrow |3x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \\ 3x-1=-2 \end{cases}$

b, $\left|3x-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{35}+2\frac{4}{7} \Rightarrow \left|3x-\frac{2}{5}\right|=\frac{13}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3x-\frac{2}{5}=\frac{13}{5} \\ 3x-\frac{2}{5}=-\frac{13}{5} \end{cases}$

c, $||x+5|-4|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x+5|-4=3 \\ |x+5|-4=-3 \end{cases}$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $||3x+1|-11|=3$

b, $||x+3|-8|=20$

HD :

a, Ta có : $||3x+1|-11|=3 \Rightarrow \begin{cases} |3x+1|-11=3 \\ |3x+1|-11=-3 \end{cases}$

b, Ta có : $||x+3|-8|=20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|-8=20 \\ |x+3|-8=-20 \end{cases}$

Bài 3: Tìm x nguyên biết :

a, $|5(2x+3)|+|2(2x+3)|+|2x+3|=16$

b, $|x^2+|6x-2||=x^2+4$

HD :

a, VT $=5|2x+3|+2|2x+3|+|2x+3|=16 \Rightarrow 8|2x+3|=16 \Rightarrow |2x+3|=2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=2 \\ 2x+3=-2 \end{cases}$

b, Vì $x^2+4 \geq 0 \Rightarrow |x^2+|6x-2||=x^2+4 \Rightarrow \begin{cases} x^2+|6x-2|=x^2+4 \\ x^2+|6x-2|=-x^2-4 \end{cases}$

Bài 4: Tìm x biết:

a, $3\frac{1}{2}:|2x-1|=\frac{21}{22}$

b, $2|2x-3|=\frac{1}{2}$

c, $7,5-3|5-2x|=-4,5$

Bài 5: Tìm x biết:

a, $||x-1|+2|=3$

b, $|2x-5|=4$

c, $\frac{1}{3}-\left|\frac{5}{4}-2x\right|=\frac{1}{4}$

Bài 6: Tìm x, y biết:

a, $\left|x+\frac{1}{5}-4\right|=-2$

b, $\frac{1}{2}-\left|x+\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{3}$

c, $\frac{3}{4}-|2x+1|=\frac{7}{8}$

Bài 7: Tìm x biết:

a, $\left|2x-1+\frac{1}{2}\right|=\frac{4}{5}$

b, $x^2+2\left|x-\frac{1}{2}\right|=x^2+2$

c, $\left|x^2\right|x+\frac{3}{4}\left|=x^2\right|$

Bài 8: Tìm x biết:

$$a, \left| 2x - 1 \right| - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$b, \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| - \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

$$c, \left| x \right| \left| x^2 + \frac{3}{4} \right| = x$$

Bài 9: Tìm x biết:

$$a, \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) \right| \left| 2x - \frac{3}{4} \right| = 2x - \frac{3}{4}$$

$$b, \left| x - \frac{1}{2} \right| \left| 2x - \frac{3}{4} \right| = 2x - \frac{3}{4}$$

$$c, \left| 2x - 3 \right| - x + 1 = 4x - 1$$

Bài 10: Tìm x biết:

$$a, \left| x - 1 \right| - 1 = 2$$

$$b, \left| 3x + 1 \right| - 5 = 2$$

$$c, \left| 5 - 3 \right| \left| 2x - 1 \right| = 7$$

Bài 11: Tìm x biết:

$$a, \left| x + \frac{4}{15} \right| - \left| -3,75 \right| = -\left| -2,15 \right|$$

$$b, 2 \left| 3x - 1 \right| + 1 = 5$$

$$c, \left| \frac{x}{2} - 1 \right| = 3$$

Bài 12: Tìm x biết:

$$a, \left| -x + \frac{2}{5} \right| + \frac{1}{2} = 3,5$$

$$b) \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2\frac{1}{5}$$

$$c, 2 - \left| \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{-5}{4} \right|$$

Bài 13: Tìm x biết:

$$a, \frac{3}{2} + \frac{4}{5} \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{7}{4}$$

$$b, 4,5 - \frac{3}{4} \left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{3} \right| = \frac{5}{6}$$

$$c, \left| x + \frac{1}{4} \right| - \frac{3}{4} = 5\%$$

Bài 14: Tìm x biết:

$$a, 6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2$$

$$b, \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2}$$

$$c, \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3$$

Bài 15: Tìm x biết:

$$a, \frac{21}{5} + 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = 6$$

$$b, \left| \frac{-2}{3} : x + \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{12}$$

$$c, \frac{9}{4} : \frac{9}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right| = \frac{3}{4}$$

DẠNG 3: $|A(x)| = B(x)$

Phương pháp: Chia khoảng phá GTTĐ

Bài 1: Tìm x biết:

a, $|2x+3| = x+2$

b, $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

HD:

a, TH 1 : $x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow 2x+3 = x+2 \Rightarrow x = -1(t/m)$

TH2 : $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow -2x-3 = x+2 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}(t/m)$

b, $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = \frac{14}{5} - \frac{4}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases}$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $|4-x| + 2x = 3$

b, $|x-7| + 2x+5 = 6$

c, $3x - |2x+1| = 2$

HD:

a, TH1 : $x \leq 4 \Rightarrow (4-x) + 2x = 3 \Rightarrow x = -1(t/m)$

TH2 : $x > 4 \Rightarrow (x-4) + 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{3}(l)$

b, TH1 : $x \geq 7 \Rightarrow x-7+2x+5 = 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3}(\text{loại})$

TH2 : $x < 7 \Rightarrow 7-x+2x+5 = 6 \Rightarrow x = -6(t/m)$

c, TH1 : $x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 3x - (2x+1) = 2 \Rightarrow x = 3(t/m)$

TH2 : $x < \frac{-1}{2} \Rightarrow 3x + (2x+1) = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(\text{loại})$

Bài 3: Tìm x biết:

a, $|2x-3| = x-3$

b, $|5x-3| - x = 7$

c, $|3x-2| = x+7$

HD :

a, TH1: $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3 = x-3 \Rightarrow x = 0(l)$

TH2: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow 3-2x = x-3 \Rightarrow x = 2(l)$

b, TH1: $x \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 5x-3-x = 7 \Rightarrow x = \frac{5}{2}(t/m)$

TH2: $x < \frac{3}{5} \Rightarrow 3-5x-x = 7 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}(t/m)$

c, TH1: $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x-2 = x+7 \Rightarrow x = \frac{9}{2}(t/m)$

TH2: $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2-3x = x+7 \Rightarrow x = \frac{-5}{4}(t/m)$

Bài 4 : Tìm x biết :

a, $|4x+3|-x=15$

b, $2|5x-3|-2x=14$

c, $|3x-2|+5x=4x-10$

HD:

a, TH1: $x \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow 4x+3-x=15 \Rightarrow x=...$

TH2: $x < \frac{-3}{4} \Rightarrow -4x-3-x=15 \Rightarrow x=...$

b, TH1: $x \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 2(5x-3)-2x=14 \Rightarrow x=...$

TH2: $x < \frac{3}{5} \Rightarrow 2(3-5x)-2x=14 \Rightarrow x=...$

c, TH1: $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x-2+5x=4x-10 \Rightarrow x=...$

TH2: $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2-3x+5x=4x-10 \Rightarrow x=...$

Bài 5: Tìm x biết:

a, $|x-2016|=x-2012$

b, $|x+1|-5=0$

c, $|x+4|=7$

HD:

a, TH1: $x \geq 2016 \Rightarrow x-2016=x-2012 \Rightarrow x=...$

TH2: $x < 2016 \Rightarrow 2016-x=x-2012 \Rightarrow x=...$

b, $|x+1|=5 \Rightarrow x+1=\pm 5 \Rightarrow x=...$

c, $|x+4|=7 \Rightarrow x+4=\pm 7 \Rightarrow x=...$

Bài 6: Tìm x biết:

a, $|x-20|=11$

b, $|x-5|=x-5$

c, $|x-6|=6-x$

HD:

a, $|x-20|=11 \Rightarrow x-20=\pm 11$

b, $|x-5|=x-5 \Rightarrow x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

c, $|x-6|=6-x \Rightarrow x-6 \leq 0 \Rightarrow x \leq 6$

Bài 7: Tìm x biết:

a, $|x-7|+x-7=0$

b, $17-x+|x-4|=0$

c, $|x-3|+x-3=0$

HD:

a, $|x-7|+x-7=0 \Rightarrow |x-7|=7-x \Rightarrow x-7 \leq 0 \Rightarrow x \leq 7$

b, $17-x+|x-4|=0 \Rightarrow \begin{cases} 17-x+(x-4)=0 & (x \geq 4) \\ 17-x+(4-x)=0 & (x < 4) \end{cases}$

c, $|x-3|+x-3=0 \Rightarrow |x-3|=3-x \Rightarrow x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$

Bài 8: Tìm x biết:

a, $|x+2|-x=2$

b, $|x-3|=21$

c, $|2x+3|-|x-3|=0$

HD:

a, $|x+2|-x=2 \Rightarrow |x+2|=x+2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

b, $|x-3|=21 \Rightarrow \begin{cases} x-3=21 \\ x-3=-21 \end{cases}$

c, $|2x+3|-|x-3|=0 \Rightarrow |2x+3|=|x-3| \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=x-3 \\ 2x+3=3-x \end{cases}$

Bài 9: Tìm x biết:

a, $|2x+3|=x+2$

b, $|x-7|+2x+5=6$

HD:

a, $|2x+3|=x+2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=x+2 & (x \geq \frac{-3}{2}) \\ -2x-3=x+2 & (x < \frac{-3}{2}) \end{cases}$

b, $|x-7|+2x+5=6 \Rightarrow \begin{cases} x-7+2x+5=6 & (x \geq 7) \\ 7-x+2x+5=6 & (x < 7) \end{cases}$

Bài 10: Tìm x biết:

a, $|5x|=x-12$

b, $|9+x|=2x$

c, $|5x|-3x=2$

d, $|x+6|-9=2x$

Bài 11: Tìm x biết:

a, $|x-5|+5=x$

b, $|x+7|-x=7$

c, $|3x-4|+4=3x$

d, $|7-2x|+7=2x$

Bài 12: Tìm x biết:

a, $|\frac{1}{2}x|=3-2x$

b, $|x-1|=3x+2$

c, $|7-x|=5x+1$

d, $|2x-3|+x=21$

Bài 13: Tìm x biết:

a, $|4+2x|=-4x$

b, $|3x-1|+2=x$

c, $|x+15|+1=3x$

d, $|2x-5|=x+2$

Bài 14: Tìm x biết:

a, $|2x-5|=x+1$

b, $|3x-2|-1=x$

c, $|3x-7|=2x+1$

d, $|2x-1|+1=x$

Bài 15: Tìm x biết:

a, $|4-x|+2x=3$

b, $|3x-4|+4=3x$

c, $|7-2x|+7=2x$

d, $||6x-2|-5|=2016x-2017$

Bài 16: Tìm x biết:

a, $|2x-5|=x+1$

b, $|6x-2|=3x-4$

c, $|3x-2|=x-2$

d, $|2x-3|=3x+2$

Bài 17: Tìm x biết:

a, $|2x-3|=x-5$

b, $|3x+2|=x+1$

c, $|2x+1|=7-x$

d, $|2x+3|=1$

Bài 18: Tìm x biết:

a, $|2-x|=2x-1$

b, $|2x-1|=x-3$

c, $2|x-1|=x+2$

d, $|x-1|=2x-1$

Bài 19: Tìm x biết:

a, $|x-2|=2-x$

DẠNG 4: $|A(x)| = |B(x)|$

Phương pháp:

Cách 1: Tách 2 TH:

TH1: $A(x) = B(x)$

TH2: $A(x) = -B(x)$

Cách 2: Xét khoảng bằng cách lập bảng xét dấu:

Bài 1: Tìm x biết: $|x-2| - |2x+3| - x = -2$

HD:

Lập bảng xét dấu ta có:

x	-3/2	2
x-2	- / -	0 +
2x+3	- 0 +	/ +

Khi đó ta có : TH1 : $x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow (2-x) - (-2x-3) - x = -2$

TH2 : $-\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2-x) - (2x+3) - x = -2$

TH3 : $x \geq 2 \Rightarrow (x-2) - (2x+3) - x = -2$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $|2x-3| - x = |2-x|$

b, $2|x-3| - |4x-1| = 0$

HD :

a, Ta có bảng xét dấu :

x	3/2	2
2x - 3	- 0 +	/ +
2 - x	+ / +	0 -

Khi đó ta có : TH1: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow (3-2x) - x = 2-x$

TH2: $\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2x-3) - x = (2-x)$

TH3: $x \geq 2 \Rightarrow (2x-3) - x = x-2$

b, $2|x-3| - |4x-1| = 0 \Rightarrow 2|x-3| = |4x-1| \Rightarrow \begin{cases} 2(x-3) = 4x-1 \\ 2(x-3) = 1-4x \end{cases}$

Bài 3: Tìm x biết:

a, $|3x-5| + |2x+3| = 7$

b, $|x| + |x+2| = 3$

c, $|3x-5| = |x+2|$

HD :

a, Ta có bảng xét dấu :

x	-3/2	5/3
3x - 5	- / -	0 +
2x + 3	- 0 +	/ +

Khi đó ta có : TH1: $x < -\frac{3}{2} \Rightarrow (5-3x) + (-2x+3) = 7$

$$TH2: -\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{3} \Rightarrow (5-3x) + (2x+3) = 7$$

$$TH3: x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x-5+2x+3=7$$

b, Ta có bảng xét dấu :

x	-2	0
x	- / -	0 +
x + 2	- 0 +	/ +

Khi đó ta có : $TH1: x < -2 \Rightarrow (-x) + (-x-2) = 3$

$$TH2: -2 \leq x < 0 \Rightarrow (-x) + (x+2) = 3$$

$$TH3: 2 \leq x \Rightarrow x + (x+2) = 3$$

$$c, \text{ Ta có : } |3x-5| = |x+2| \Rightarrow \begin{cases} 3x-5 = x+2 \\ 3x-5 = -x-2 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm x biết:

$$a, |x-1| + |x+3| = 4$$

$$b, |2x+3| - 2|4-x| = 5$$

HD :

a, Ta có bảng sau :

x	-3	1
x - 1	- / -	0 +
x + 3	- 0 +	/ +

Khi đó ta có : $TH1: x < -3 \Rightarrow (1-x) + (-x-3) = 4$

$$TH2: -3 \leq x < 1 \Rightarrow (1-x) + x+3 = 4$$

$$TH3: x \geq 1 \Rightarrow (x-1) + x(x+3) = 4$$

b, Ta có bảng sau :

x	-3/2	4
2x+3	- 0 +	/ +
4-x	- / -	0 +

Khi đó ta có : $TH1: x < -\frac{3}{2} \Rightarrow (-2x-3) - 2(x-4) = 5$

$$TH2: -\frac{3}{2} \leq x < 4 \Rightarrow (2x+3) - 2(x-4) = 5$$

$$TH3: x \geq 4 \Rightarrow (2x+3) - 2(4-x) = 5$$

Bài 5: Tìm x biết:

$$a, |x| + |8-x| = 0$$

$$b, |x| + |-x| = 3-x$$

$$c, |2x-3| - x = |2-x|$$

HD :

a, Ta có bảng xét dấu :

x	0	8
x	- 0 +	/ +
8-x	+ / +	0 -

Khi đó ta có : $TH1: x < 0 \Rightarrow (-x) + (8-x) = 0$

$$TH2: 0 \leq x < 8 \Rightarrow x+8-x=0$$

$$TH3: x \geq 8 \Rightarrow x + (x-8) = 0$$

b, Ta có $|-x| = |x| \Rightarrow |x| + |-x| = 3-x \Rightarrow 2|x| = 3-x$

$$TH1: x \geq 0 \Rightarrow 2.x = 3-x$$

$$TH2: x < 0 \Rightarrow 2(-x) = 3-x$$

c, Ta có bảng xét dấu ta có :

x	3/2		2	
2x - 3	-	0	+	+
2 - x	+	/	+	-

Khi đó ta có : TH1: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow (3-2x) - x = 2 - x$

TH2: $\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2x-3) - x = (2-x)$

TH3: $x \geq 2 \Rightarrow (2x-3) - x = x-2$

Bài 6: Tìm x biết: $|x-2011| + |x-2010| = 2012$

HD :

Ta có bảng xét dấu :

x	2010		2011	
x - 2011	-	/	-	0
x - 2010	-	0	+	/

Khi đó ta có : TH1: $x < 2010 \Rightarrow (2011-x) + (2010-x) = 2012$

TH2: $2010 \leq x < 2011 \Rightarrow (2011-x) + (x-2010) = 2012$

TH3: $(x-2011) + (x-2010) = 2012$

Bài 7: Tìm x biết: $|x-1,5| + |2,5-x| = 0$

HD:

$$\forall \begin{cases} |x-1,5| \geq 0 \\ |2,5-x| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-1,5| + |2,5-x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1,5 = 0 \\ 2,5-x = 0 \end{cases}$$

Bài 8: Tìm x, y biết :

a, $|x| + |x+2| = 0$

b, $|x-1,38| + |2y+4,2| = 0$

c, $|5x-4| = |x+2|$

HD:

a, $\forall \begin{cases} |x| \geq 0 \\ |x+2| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x| + |x+2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases}$

b, $\forall \begin{cases} |x-1,38| \geq 0 \\ |2y+4,2| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-1,38| + |2y+4,2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1,38 = 0 \\ 2y+4,2 = 0 \end{cases}$

c, $|5x-4| = |x+2| \Rightarrow \begin{cases} 5x-4 = x+2 \\ 5x-4 = -x-2 \end{cases}$

Bài 9: Tìm x biết: $|x| + |x-1| = 1$

HD :

Ta có bảng xét dấu :

x	0		1	
x	-	0	+	+
x - 1	-	/	-	0

Khi đó ta có : TH1: $x < 0 \Rightarrow (-x) + (1-x) = 1$

TH2: $0 \leq x < 1 \Rightarrow x + (1-x) = 1$

TH3: $x \geq 1 \Rightarrow x + (x-1) = 1$

Bài 10: Tìm x, y biết: $|4x+3|-|x-1|=7$

HD :

a, Ta có bảng xét dấu :

x	-3/4	1
4x + 3	- 0 + / +	
x - 1	- / - 0 +	

Khi đó ta có : TH1: $x < -\frac{3}{4} \Rightarrow (-4x-3)-(1-x)=7$

TH2: $-\frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow (4x+3)-(1-x)=7$

TH3: $x \geq 1 \Rightarrow (4x+3)-(x-1)=7$

Bài 11: Tìm x biết : $|2x-3|-x=|2-x|$

HD :

Ta có bảng xét dấu :

x	3/2	2
2x - 3	- 0 + / +	
2 - x	+ / + 0 -	

Khi đó ta có :

TH1: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow (3-2x)-x=2-x$

TH2: $\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2x-3)-x=(2-x)$

TH3: $x \geq 2 \Rightarrow (2x-3)-x=x-2$

Bài 12: Tìm x biết:

a, $|2x-3|-|3x+2|=0$

b, $|7x+1|-|5x+6|=0$

c, $\left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|-\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|=0$

Bài 13: Tìm x biết:

a, $\left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{1}{2}x+5\right|=0$

b, $|2+3x|=|4x-3|$

c, $\left|\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|=|4x-1|$

Bài 14: Tìm x biết: $\left|\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\right|$

Bài 15: Tìm x biết :

a, $|x-1|-|x-3|=2x-1$

b, $4|3x-1|+|x|-2|x-5|+7|x-3|=12$

Bài 16: Tìm x biết:

a, $\left|2\frac{1}{5}-x\right|+\left|x-\frac{1}{5}\right|+8\frac{1}{5}=1,2$

b, $3|x+4|-|2x+1|-5|x+3|+|x-9|=5$

Bài 17: Tìm x biết:

a, $2\left|x+3\frac{1}{2}\right|+|x|-3\frac{1}{2}=2\frac{1}{5}-x$

b, $|2x-6|+|x+3|=8$

Bài 18: Tìm x biết:

a, $|x+5|+|x-3|=9$

b, $|x+1|+|x-2|+|x+3|=6$

Bài 19: Tìm x biết:

a, $|x-2|+|x-3|+|x-4|=2$

b, $2|x+2|+|4-x|=11$

Bài 20: Tìm x biết:

a, $|x+5|+|3-x|=8$

b, $|x-2|+|x-5|=3$

c, $|3x-5|+|3x+1|=6$

Bài 21: Tìm x biết:

a, $2|x-3|+|2x+5|=11$

b, $|x+1|+|2x-3|=|3x-2|$

c, $|x-3|+|5-x|+2|x-4|=2$

Bài 22: Tìm x biết:

a, $|x-4|+|x-6|=2$

b, $|x+1|+|x+5|=4$

c, $|3x+7|+3|2-x|=13$

Bài 23: Tìm x biết:

a, $|5x+1|+|3-2x|=|4-3x|$

b, $|x+2|+|3x-1|+|x-1|=3$

c, $|x-2|+|x-7|=4$

Bài 24: Tìm x biết:

a, $|5x-4|=|x+2|$

b, $|2x-3|-|3x+2|=0$

c, $|2+3x|=|4x-3|$

Bài 25: Tìm x biết:

a, $|7x+1|-|5x+6|=0$

b, $\left|\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|=|4x-1|$

c, $\left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|-\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|=0$

Bài 26: Tìm x biết:

a, $\left|\frac{7}{5}x+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\right|$

b, $\left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{1}{2}x+5\right|=0$

DẠNG 5: BIỂU THỨC CÓ NHIỀU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp: Lập bảng xét dấu

Bài 1: Tìm x biết:

a, $4|3x-1|+|x|-2|x-5|+7|x-3|=12$

b, $3|x+4|-|2x+1|-5|x+3|+|x-9|=5$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $\left|2\frac{1}{5}-x\right|+\left|x-\frac{1}{5}\right|+8\frac{1}{5}=1,2$

b, $2\left|x+3\frac{1}{2}\right|+|x|-3\frac{1}{2}=\left|2\frac{1}{5}-x\right|$

Bài 3: Tìm x biết:

a, $|2x-6|+|x+3|=8$

b, $|x+5|+|x-3|=9$

Bài 4: Tìm x biết:

a, $|x-2|+|x-3|+|x-4|=2$

b, $|x+1|+|x-2|+|x+3|=6$

Bài 5: Tìm x biết:

a, $2|x+2|+|4-x|=11$

b, $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$

Bài 6: Tìm x biết:

a, $3x|x+1|-2x|x+2|=12$

b, $|x-1|+3|x-3|-2|x-2|=4$

Bài 7: Tìm x biết:

a, $|x+5|-|1-2x|=x$

b, $|x|-|2x+3|=x-1$

Bài 8: Tìm x biết:

a, $|x|+|1-x|=x+|x-3|$

b, $|x-2|+|x-5|=3$

Bài 9: Tìm x biết:

a, $|x-3|+|x+5|=8$

b, $|2x-1|+|2x-5|=4$

Bài 10: Tìm x biết:

a, $|x-3|+|3x+4|=|2x+1|$

Bài 11: Tìm x biết:

a, $|x|-|2x+3|=x-1$

b, $3x|x+1|-2x|x+2|=12$

Bài 12: Tìm x biết:

a, $|x+5|-|1-2x|=x$

b, $|x|+|1-x|=x+|x-3|$

DẠNG 6: $|A(x)| < a$ hoặc $|A(x)| > a$

Phương pháp:

Với $|A(x)| < a \Rightarrow -a < A(x) < a$

Với $|A(x)| > a \Rightarrow \begin{cases} A(x) > a \\ A(x) < -a \end{cases}$

Bài 1: Tìm x biết:

a, $|x-2| < 4$

b, $|5x-3| < 2$

c, $|3x+1| > 4$

HD :

a, $|x-2| < 4 \Rightarrow -4 < x-2 < 4$

b, $|5x-3| < 2 \Rightarrow -2 < 5x-3 < 2$

c, $|3x+1| > 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 > 4 \\ 3x+1 < -4 \end{cases}$

Bài 2: Tìm x biết:

a, $|3x-2| - x > 1$

b, $|3x-2| > x+1$

c, $|2x+3| \leq 5$

HD:

a, TH1: $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x-2-x > 1$

TH2: $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2-3x-x > 1$

b, TH1: $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x-2 > x+1$

TH2: $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2-3x > x+1$

c, $|2x+3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x+3 \leq 5$

Bài 3: Tìm x biết:

a, $|2x-3| > 5$

b, $|3x-1| \leq 7$

c, $3+|2x+5| > 13$

HD:

a, $|2x-3| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 > 5 \\ 2x-3 < -5 \end{cases}$

b, $|3x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 3x-1 \leq 7$

c, $\Rightarrow |2x+5| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5 > 10 \\ 2x+5 < -10 \end{cases}$

Bài 4: Tìm x biết:

a, $|2x+3| - 4x < 9$

b, $|x-1| \leq 4$

c, $|x-2001| \geq 2002$

HD:

a, TH1: $x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow (2x+3) - 4x < 9$

TH2: $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow -2x-3-4x < 9$

DẠNG 7: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT: $|A|+|B| \geq |A+B|$

Bài 1: Tìm x nguyên biết:

a, $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|=8$

b, $|x-2010|+|x-2012|+|x-2014|=2$

HD :

a, Ta có : $\Rightarrow (|x-1|+|x-7|)+(|x-3|+|x-5|)=|x-1|+|7-x|+|x-3|+|5-x|$
 $\geq |x-1+7-x|+|x-3+5-x|=|6|+|2|=8$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} (x-1)(7-x) \geq 0 \\ (x-3)(5-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$

b, ta có :

$VT \Rightarrow |x-2010|+|2014-x|+|x-2012| \geq |x-2010+2014-x|+|x-2012|=2+|x-2012| \geq 2$

Vì $|x-2012| \geq 0$, dấu bằng khi $\begin{cases} (x-2010)(2014-x) \geq 0 \\ x-2012 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2012$

Bài 2: Tìm x nguyên biết: $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-100|=2500$

HD :

Ta có : $VT = (|x-1|+|100-x|)+(|x-2|+|99-x|)+\dots+(|x-50|+|51-x|)$

$VT \geq (x-1+100-x)+(x-2+99-x)+\dots+(x-50+51-x)$
 $=99+97+95+\dots+1=2500$

Dấu bằng xảy ra khi : $(x-1)(100-x) \geq 0, (x-2)(99-x) \geq 0, \dots, (x-50)(51-x) \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=50 \\ x=51 \end{cases}$

Bài 3: Tìm x nguyên biết:

a, $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3$

HD :

a, Ta có : Đặt $A=|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|$

Ta có : $|x-1|+|x-4|=|x-1|+|4-x| \geq 3$ Nên $A=3$ khi và chỉ khi

$|x-2|=|y-3|=0$ và $(x-1)(4-x) \geq 0 \Rightarrow x=2, y=3$

Bài 4: Tìm x nguyên biết:

a, $2004=|x-4|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|$

HD :

a, Ta có $VP=|4-x|+|x+1000|+|10-x|+|x+990|+|x+101|$

$VP \geq 1004+1000+|x+101| \geq 2004$

Dấu bằng khi $\begin{cases} (4-x)(x+1000) \geq 0 \\ (10-x)(x+990) \geq 0 \\ x+101=0 \end{cases} \Rightarrow x=-101$

Bài 5: Tìm x nguyên biết: $|x-2005|+|x-2006|+|y-2007|+|x-2008|=3$

HD :

Đặt $A=|x-2005|+|x-2006|+|y-2007|+|x-2008|$

Khi đó ta có : $A=|x-2005|+|2008-x|+|x-2006|+|y-2007| \geq 3+|x-2006|+|y-2007|$

Dấu bằng xảy ra khi : $\begin{cases} (x-2005)(2008-x) \geq 0 \\ |x-2006|=|y-2007|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2006 \\ y=2007 \end{cases}$

Bài 6: Tìm x biết: $|2x-3|+|2x+4|=7$

HD :

Ta có: $|3-2x|+|2x+4|\geq 3-2x+2x+4=7$ dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 3-2x\geq 0 \\ 2x+4\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq \frac{3}{2} \\ x\geq -2 \end{cases}$

Bài 7: Tìm x biết: $|x+2,5|+|x+6,5|+|x+9,5|=7$

HD:

$$|x+2,5|\geq -x-2,5, |x+6,5|\geq 0 \text{ và } |x+9,5|\geq x+9,5$$

Nên: $VT\geq -x-2,5+x+9,5=7$, dấu bằng xảy ra khi $x=-6,5$

Bài 8: Tìm x nguyên biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+100|=605x$

HD :

$$\text{Vì } |x+1|\geq 0, |x+2|\geq 0, \dots, |x+100|\geq 0 \Rightarrow VT\geq 0 \Rightarrow 605x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$$

$$\text{Với } x\geq 0 \Rightarrow VT=(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+100)=605x$$

$$\Rightarrow 100x+5050=605x$$

Bài 9: Tìm biết: $|x+3|+|x+1|=3x$

HD :

$$\text{Vì } |x+3|\geq 0, |x+1|\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$$

$$\text{Với } x\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|=x+3 \\ |x+1|=x+1 \end{cases} \Rightarrow (x+3)+(x+1)=3x$$

Bài 10: Tìm x, biết $|x+1|+|x+3|+\dots+|x+2019|=2020x$.

Bài 11: Tìm x biết: $\left|x+\frac{11}{17}\right|+\left|x+\frac{2}{17}\right|+\left|x+\frac{4}{17}\right|=4x$

HD :

$$\text{Vì } \left|x+\frac{11}{17}\right|\geq 0, \left|x+\frac{2}{17}\right|\geq 0, \left|x+\frac{4}{17}\right|\geq 0 \Rightarrow VT\geq 0 \Rightarrow 4x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$$

$$\text{Khi đó: } \left(x+\frac{11}{17}\right)+\left(x+\frac{2}{17}\right)+\left(x+\frac{4}{17}\right)=4x$$

Bài 12 : Tìm x biết :

$$\text{a, } |x+0,8|+|x+5,2|+|x+9,7|=4x$$

HD:

$$\text{a, Vì } |x+0,8|\geq 0, |x+5,2|\geq 0, |x+9,7|\geq 0 \Rightarrow 4x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$$

$$\text{Khi đó: } (x+0,8)+(x+5,2)+(x+9,7)=4x$$

Bài 13: Tìm x biết :

$$\text{a, } |x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$$

$$\text{b, } |x-1|+3|x-3|-2|x-2|=4$$

Bài 14: Tìm x biết:

$$\text{a, } |x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$$

$$\text{b, } |x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=5x-1$$

Bài 15: Tìm x biết:

$$\text{a, } \left|x+2\right|+\left|x+\frac{3}{5}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=4x$$

$$\text{b, } |x+1,1|+|x+1,2|+|x+1,3|+|x+1,4|=5x$$

Bài 16: Tìm x biết:

$$\text{a, } \left|x+\frac{1}{101}\right|+\left|x+\frac{2}{101}\right|+\left|x+\frac{3}{101}\right|+\dots+\left|x+\frac{100}{101}\right|=101x$$

Bài 17: Tìm x biết: $\left|x+\frac{1}{1.2}\right|+\left|x+\frac{1}{2.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.4}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{99.100}\right|=100x$

Bài 18: Tìm x biết:

a, $|x-2|+|x-5|=3$

b, $|2x-1|+|2x-5|=4$

Bài 19: Tìm x biết:

a, $|x+5|+|3-x|=8$

b, $|x-2|+|x-5|=3$

c, $|3x-5|+|3x+1|=6$

Bài 20: Tìm x biết:

a, $2|x-3|+|2x+5|=11$

b, $|x+1|+|2x-3|=|3x-2|$

c, $|x-3|+|5-x|+2|x-4|=2$

Bài 21: Tìm x biết:

a, $|x-4|+|x-6|=2$

b, $|x+1|+|x+5|=4$

c, $|3x+7|+3|2-x|=13$

Bài 22: Tìm x biết:

a, $|5x+1|+|3-2x|=|4+3x|$

b, $|x+2|+|3x-1|+|x-1|=3$

c, $|x-2|+|x-7|=4$

Bài 23: Tìm x, y thoả mãn :

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$

Bài 24: Tìm x, y thoả mãn:

a) $|x-2007|+|y-2008|\leq 0$

Bài 25: Tìm x thoả mãn:

a) $|x+5|+|3-x|=8$

Bài 26: Tìm x biết: $\left|x+\frac{1}{1.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.5}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{97.99}\right|=50x$

Bài 27: Tìm x biết: $\left|x+\frac{1}{1.5}\right|+\left|x+\frac{1}{5.9}\right|+\dots+\left|x+\frac{1}{397.401}\right|=101x$

Bài 28: Tìm x biết: $|x+5|+|x+3|+|x-2|=8(x-3)$

Bài 29: Tìm x biết c, $|2x+5|+|2x-3|=8$

Bài 30: Tìm x nguyên biết:

a, $|x-1|+|4-x|=3$

b, $|x+2|+|x-3|=5$

c, $|x+1|+|x-6|=7$

Bài 31: Tìm số nguyên x, y biết:

a, $x+y=4$ và $|x+2|+|y|=6$

b, $x+y=4$ và $|2x+1|+|y-x|=5$

Bài 32: Tìm số nguyên x, y biết:

a, $x-y=3$ và $|x|+|y|=3$

b, $x-2y=5$ và $|x|+|2y-1|=6$

Bài 33: Tìm số nguyên x, y biết:

a, $x+y=5$ và $|x+1|+|y-2|=4$

b, $x-y=3$ và $|x-6|+|y-1|=4$

Bài 34: Tìm số nguyên x, y biết:

a, $x-y=2$ và $|2x+1|+|2y+1|=4$

b, $2x+y=3$ và $|2x+3|+|y+2|=8$

Bài 35: Tìm x biết : $|x-2014|+|x-2015|+|x-2016|=2$

DẠNG 8: Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức : $|A| + |B| = m$

Phương pháp :

$$+ \text{ Nếu } m = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

 $+ \text{ Nếu } m > 0 \dots\dots \text{ Do } |A| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |B| \leq m \Rightarrow \text{ Tìm B rồi suy ra tìm A}$

Bài 1: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn :

$$\text{a, } |x - 2007| + |x - 2008| = 0 \quad \text{b, } |x - y - 2| + |y + 3| = 0 \quad \text{c, } (x + 2)^2 + 2|y - 1| = 0$$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn :

$$\text{a, } |x - 3y|^5 + |y + 4| = 0 \quad \text{b, } |x - y - 5| + (y - 3)^4 = 0 \quad \text{c, } |x + 3y - 1| + 3|y + 2| = 0$$

Bài 3: Tìm cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn :

$$\text{a, } |x + 4| + |y - 1| = 3 \quad \text{b, } |2x + 1| + |y - 1| = 4 \quad \text{c, } |3x| + |y + 5| = 5$$

HD :

$$\text{a, Do } |x + 4| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |y - 1| \leq 3 \Rightarrow |y - 1| \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Bài 4: Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn :

$$\text{a, } |5x| + |2y + 3| = 7 \quad \text{b, } 3|x - 5| + |y + 4| = 5 \quad \text{c, } |x + 6| + 4|2y - 1| = 12$$

Bài 5: Tìm cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn :

$$\text{a, } 2|3x| + |y + 3| = 10 \quad \text{b, } 3|4x| + |y + 3| = 21 \quad \text{c, } y^2 = 5 - |x - 1|$$

Bài 6: Tìm cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn :

$$\text{a, } y^2 = 3 - |2x - 3| \quad \text{b, } 2y^2 = 3 - |x + 4| \quad \text{c, } 3y^2 = 12 - |x - 2|$$

Bài 7: Tìm x, y biết :

$$\text{a, } |3x - 4| + |5y + 5| = 0 \quad \text{b, } |3x - 4| + |3y + 5| = 0$$

HD:

$$\text{a, Vì } \begin{cases} |3x - 4| \geq 0 \\ |5y + 5| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |3x - 4| + |5y + 5| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 0 \\ 5y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b, Vì } \begin{cases} |x - 1,5| \geq 0 \\ |3y + 5| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |3x - 4| + |3y + 5| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1,5 = 0 \\ 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

Bài 8: Tìm x, y biết :

$$\text{a, } |x - 1006y| + |x - 2012| \leq 0 \quad \text{b, } |x + 5| + (3y - 4)^{2012} = 0$$

HD :

$$\text{a, } |x - 1006y| + |x - 2012| \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1006y = 0 \\ x - 2012 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b, Vì } \begin{cases} |x + 5| \geq 0 \\ (3y - 4)^{2012} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x + 5| + (3y - 4)^{2012} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm x nguyên biết:

$$\text{a, } (2x - 1)^2 + |2y - x| - 8 = 12 - 5 \cdot 2^2 \quad \text{b, } |x - 2011y| + (y - 1)^{2012} = 0$$

HD:

$$\text{a, } (2x - 1)^2 + |2y - x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b, } |x - 2011y| + (y - 1)^{2012} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2011y \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 10: Tìm x, y biết:

a, $|3x - 4| + |3y + 5| = 0$

b, $|x - y| + \left|y + \frac{9}{25}\right| = 0$

c, $|3 - 2x| + |4y + 5| = 0$

Bài 11: Tìm x, y biết:

a, $\left|5 - \frac{3}{4}x\right| + \left|\frac{2}{7}y - 3\right| = 0$

b, $\left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x\right| + \left|1,5 - \frac{11}{17} + \frac{23}{13}y\right| = 0$

c, $|x - 2007| + |y - 2008| = 0$

Bài 12: Tìm x, y biết:

a, $|5x + 1| + |6y - 8| \leq 0$

b, $|x + 2y| + |4y - 3| \leq 0$

c, $|x - y + 2| + |2y + 1| \leq 0$

Bài 13: Tìm x, y biết:

a, $|12x + 8| + |11y - 5| \leq 0$

b, $|3x + 2y| + |4y - 1| \leq 0$

c, $|x + y - 7| + |xy - 10| \leq 0$

Bài 14: Tìm x, y biết:

a, $|x - y - 2| + |y + 3| = 0$

b, $|x - 3y|^{2007} + |y + 4|^{2008} = 0$

Bài 15: Tìm x, y biết:

a, $(x + y)^{2006} + 2007|y - 1| = 0$

b, $|x - y - 5| + 2007(y - 3)^{2008} = 0$

Bài 16: Tìm x, y biết:

a, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$

b, $2(x - 5)^4 + 5|2y - 7|^5 = 0$

Bài 17: Tìm x, y biết:

a, $3(x - 2y)^{2004} + 4\left|y + \frac{1}{2}\right| = 0$

b, $|x + 3y - 1| + \left(2y - \frac{1}{2}\right)^{2000} = 0$

Bài 18: Tìm x, y biết:

a, $|x - 2007| + |y - 2008| \leq 0$

b, $3|x - y|^5 + 10\left|y + \frac{2}{3}\right|^7 \leq 0$

Bài 19: Tìm x, y biết:

a, $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^{2006} + \frac{2007}{2008}\left|\frac{4}{5}y + \frac{6}{25}\right| \leq 0$

b, $2007|2x - y|^{2008} + 2008|y - 4|^{2007} \leq 0$

DẠNG 9: $|A| + |B| < m, (m > 0)$

Phương pháp : Vì $\begin{cases} |A| + |B| \geq 0 \\ |A| \geq 0 \\ |B| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |A| + |B| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |A| + |B| < m$, Đưa về dạng 4

Bài 1: Tìm x y nguyên thỏa mãn :

a, $|x| + |y| \leq 3$

b, $|x+5| + |y-2| \leq 4$

c, $|2x+1| + |y-4| \leq 3$

HD :

a, Vì $\begin{cases} |x| + |y| \leq 3 \\ |x| \geq 0 \\ |y| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x| + |y| = 0 \Rightarrow 0 \leq |x| + |y| \leq 3$

TH1 : $|x| + |y| = 0$ TH2 : $|x| + |y| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \\ 0 \leq |y| \leq 1 \end{cases}$ TH3 : $|x| + |y| = 2$

Bài 2: Tìm x, y nguyên sao cho :

a, $|3x| + |y+5| \leq 4$

b, $5|x+1| + |y-2| \leq 7$

c, $4|2x+5| + |y+3| \leq 5$

Bài 3 : Tìm x, y nguyên sao cho :

a, $3|x+5| + 2|y-1| \leq 3$

b, $3|2x+1| + 4|2y-1| \leq 7$

DẠNG 10: $A(x).B(x) = |C(y)|$

Phương pháp :

Vì $|A(y)| \geq 0 \Rightarrow A(x).B(x) \geq 0 \Rightarrow n \leq x \leq m \Rightarrow$ Tìm được x

Bài 1: Tìm các số cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn :

a, $(2-x)(x+1) = |y+1|$ b, $(x+3)(1-x) = |y|$ c, $(x-2)(5-x) = |2y+1| + 2$

HD :

a, $|y+1| \geq 0 \Rightarrow (2-x)(x+1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = \dots$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

a, $(x+1)(3-x) = 2|y| + 1$ b, $(x-2)(5-x) - |y+1| = 1$ c, $(x-3)(x-5) + |y-2| = 0$

Bài 3: Tìm các số nguyên x thỏa mãn:

a, $(x+2)(x-3) < 0$ b, $(2x-1)(2x-5) < 0$ c, $(3-2x)(x+2) > 0$

Bài 4: Tìm các số nguyên x thỏa mãn:

a) $(2-x)(x+1) = |y+1|$ b, $(x+3)(1-x) = |y|$ c, $(x-2)(5-x) = |2y+1| + 2$

Bài 5: Tìm các số nguyên x thỏa mãn:

a) $(x+1)(3-x) = 2|y| + 1$ b, $(x-2)(5-x) - |y+1| = 1$ c, $(x-3)(x-5) + |y-2| = 0$

Bài 6: Tìm các số nguyên x thỏa mãn:

a, $(3x+1)(5-2x) > 0$

DẠNG 11: Sử dụng phương pháp đối lập 2 vế của đẳng thức:

$$A = B, \text{ trong đó: } \begin{cases} A \geq m \\ B \leq m \end{cases} \Rightarrow A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = m \\ B = m \end{cases}$$

Bài 1: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

$$\text{a, } |x+2| + |x-1| = 3 - (y+2)^2 \quad \text{b, } |x-5| + |1-x| = \frac{12}{|y+1|+3} \quad \text{c, } |y+3| + 5 = \frac{10}{(2x-6)^2+2}$$

HD:

$$\text{a, Vì } |x+2| + |1-x| \geq |x+2+1-x| = 3$$

$$\text{Mặt khác: } 3 - (y+2)^2 \leq 3, \text{ Để } |x+2| + |x-1| = 3 - (y+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| + |x-1| = 3 \\ 3 - (y+2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

$$\text{a, } |x-1| + |3-x| = \frac{6}{|y+3|+3} \quad \text{b, } |2x+3| + |2x-1| = \frac{8}{2(y-5)^2+2}$$

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:

$$\text{a, } |3x+1| + |3x-5| = \frac{12}{(y+3)^2+2} \quad \text{b, } |x+3| + |x-1| = \frac{16}{|y-2|+|y+2|}$$

$$\text{Bài 4: Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: } |x-2y-1| + 5 = \frac{10}{|y-4|+2}$$

DẠNG 12: TÌM MIN MAX CỦA BIỂU THỨC GTTD

Bài 1: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = 2|3x-1| - 4$

b, $B = 1,5 - |2-x|$

c, $C = |x-3|$

HD :

a, Ta có: $|3x-1| \geq 0 \Rightarrow 2|3x-1| - 4 \geq -4 \Rightarrow A \geq -4$

Khi đó A đạt GTNN bằng -4 khi $3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

b, Ta có: $|2-x| \geq 0 \Rightarrow -|2-x| \leq 0 \Rightarrow B = 1,5 - |2-x| \leq 1,5$

Khi đó B đạt GTLN bằng 1,5 khi $x=2$

c, Ta có: $C = |x-3| \geq 0$ khi đó đạt GTNN bằng 0 khi $x=3$

Bài 2: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = 0,5 - |x-3,5|$

b, $E = -|1,4-x| - 2$

c, $F = 5,5 - |2x-1,5|$

HD :

a, Ta có: $A = 0,5 - |x-3,5| \leq 0,5 \Rightarrow \text{Max}A = 0,5$ khi $x=3,5$

b, $B = -|1,4-x| - 2 \leq -2 \Rightarrow \text{Max}B = -2$ khi $x=1,4$

c, $F = 5,5 - |2x-1,5| \leq 5,5 \Rightarrow \text{Max}F = 5,5$ khi $x = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$

Bài 3: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $G = -|10,2-3x| - 14$

b, $A = -|2,5-x| - 5,8$

c, $K = 10 - 4|x-2|$

HD :

a, Ta có: $G = -|10,2-3x| - 14 \leq -14 \Rightarrow \text{Max}G = -14$ khi $10,2-3x=0$

b, $A = -|2,5-x| - 5,8 \leq -5,8 \Rightarrow \text{Max}A = -5,8$ khi $2,5-x=0$

c, $K = 10 - 4|x-2| \leq 10 \Rightarrow \text{Max}K = 10$ khi $x-2=0$

Bài 4: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $H = 4 - |5x-2| - |3y+12|$

b, $M = 5 - |2x-1|$

c, $A = 1,7 + |3,4-x|$

HD:

a, $H = 4 - (|5x-2| + |3y+12|) \leq 4 \Rightarrow \text{Max}H = 4$ khi $\begin{cases} 5x-2=0 \\ 3y+12=0 \end{cases}$

b, $M = 5 - |2x-1| \leq 5 \Rightarrow \text{Max}M = 5$ khi $2x-1=0$

c, $A = 1,7 + |3,4-x| \geq 1,7 \Rightarrow \text{Min}A = 1,7$ khi $3,4-x=0$

Bài 5: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = |x+2,8| - 3,5$

b, $A = 3,7 + |4,3-x|$

c, $N = |2,5-x| + 5,8$

HD:

a, $A = |x+2,8| - 3,5 \geq -3,5 \Rightarrow \text{Min}A = -3,5$ khi $x+2,8=0$

b, $A = 3,7 + |4,3-x| \geq 3,7 \Rightarrow \text{Min}A = 3,7$ khi $4,3-x=0$

c, $N = |2,5-x| + 5,8 \geq 5,8 \Rightarrow \text{Min}N = 5,8$ khi $2,5-x=0$

Bài 6: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $B = |4x-3| + |5y+7,5| + 12,5$

b, $A = |4,9+x| - 2,8$

c, $A = -4 + 2|3x-1|$

HD:

a, $B = |4x-3| + |5y+7,5| + 12,5 \geq 12,5 \Rightarrow \text{Min}B = 12,5$ khi $\begin{cases} 4x-3=0 \\ 5y+7,5=0 \end{cases}$

b, $A = |4,9+x| - 2,8 \geq -2,8 \Rightarrow \text{Min}A = -2,8$ khi $4,9+x=0$

c, $A = -4 + 2|3x-1| \geq -4 \Rightarrow \text{Min}A = -4$ khi $3x-1=0$

Bài 7: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = 2|3x-2|+1$

b, $A = |2x+4,5|+|x-2,7|$

c, $B = -|2x-3|-|4y-5|-17$

HD:

a, $A = 2|3x-2|+1 \geq 1 \Rightarrow \text{Min}A = 1$ khi $3x-2=0$

b, $A = |2x+4,5|+|x-2,7| \geq 0$ Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} 2x+4,5=0 \\ x-2,7=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Không tồn tại x để xảy ra dấu bằng

Bài 8: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = x^2 + 1$

b, $B = 3x^4 - 5$

c, $C = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 7$

HD:

a, $A = x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \text{Min}A = 1$ khi $x=0$

b, $B = 3x^4 - 5 \geq -5 \Rightarrow \text{Min}B = -5$ khi $x=0$

c, $C = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 7 \geq -7 \Rightarrow \text{Min}C = -7$ khi $x = -\frac{1}{2}$

Bài 9: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = |x+5|-12$

b, $B = |x+2|+|x+y+5|-17$

c, $C = (x+1)^2 + |2x-3-y|+30$

HD:

a, $A = |x+5|-12 \geq -12 \Rightarrow \text{Min}A = -12$ khi $x+5=0$

b, $B = |x+2|+|x+y+5|-17 \geq -17 \Rightarrow \text{Min}B = -17$ dấu bằng khi: $\begin{cases} x+2=0 \\ x+y+5=0 \end{cases}$

c, $C = (x+1)^2 + |2x-3-y|+30 \geq 30 \Rightarrow \text{Min}C = 30$

Dấu bằng khi $\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-3-y=0 \end{cases}$

Bài 10: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $A = 100 - x^2$

b, $B = \frac{4}{|x+4|+2}$

c, $A = x^2 + 3|y-2|-1$

HD:

a, $A = 100 - x^2 \leq 100 \Rightarrow \text{Max}A = 100$, Dấu bằng khi $x = 0$

b, Ta có: $|x+4|+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{4}{|x+4|+2} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow B \leq 2 \Rightarrow \text{Max}B = 2$

Dấu bằng khi: $x+4=0$

c, $A = x^2 + 3|y-2|-1 \geq -1 \Rightarrow \text{Min}A = -1$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x=0 \\ y-2=0 \end{cases}$

Bài 11: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $B = x+|x|$

b, $C = x-|x|$

c, $D = -10 - (x-3)^2 - |y-5|$

HD:

a, Xét: $x \geq 0 \Rightarrow B = x+x+2x \geq 0$

với $x < 0 \Rightarrow B = x-x=0 \Rightarrow B \geq 0 \Rightarrow \text{Min}B = 0$, dấu bằng khi $x \leq 0$

b, Xét $x < 0 \Rightarrow C = x-(-x) = 2x < 0$

Xét $x \geq 0 \Rightarrow C = x-x=0 \Rightarrow C \leq 0 \Rightarrow \text{Max}C = 0$ dấu bằng khi $x \geq 0$

c, $D = -10 - (x-3)^2 - |y-5| \leq -10 \Rightarrow \text{Max}D = -10$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x-3=0 \\ y-5=0 \end{cases}$

Bài 12: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $E = (2x+1)^4 - 3$ b, $M = (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - 8$ c, $N = (x^2 - 9)^2 + |y-2| + 10$

HD:

a, $E = (2x+1)^4 - 3 \geq -3 \Rightarrow \text{Min}E = -3$, dấu bằng khi $2x+1=0$

b, $M = (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 - 8 \geq -8 \Rightarrow \text{Min}M = -8$, dấu bằng khi $\begin{cases} x+2=0 \\ y-\frac{1}{5}=0 \end{cases}$

c, $N = (x^2 - 9)^2 + |y-2| + 10 \geq 10 \Rightarrow \text{Min}N = 10$ Dấu bằng khi $\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

Bài 13: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $P = y^2 + |x-10| + 9$ b, $P = (x-2y)^2 + (y-2002)^{2012}$

HD:

a, $P = y^2 + |x-10| + 9 \geq 9 \Rightarrow \text{Min}P = 9$, dấu bằng khi $\begin{cases} x-10=0 \\ y=0 \end{cases}$

b, $P = (x-2y)^2 + (y-2002)^{2012} \geq 0 \Rightarrow \text{Min}P = 0$ dấu bằng khi: $\begin{cases} x-2y=0 \\ y-2002=0 \end{cases}$

Bài 14: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $Q = (x+y-3)^4 + (x-2y)^2 + 2012$ b, $A = (x-2)^2 + |y-x| + 3$

HD:

a, $Q = (x+y-3)^4 + (x-2y)^2 + 2012 \geq 2012 \Rightarrow \text{Min}Q = 2012$, dấu bằng khi: $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

b, $A = (x-2)^2 + |y-x| + 3 \geq 3 \Rightarrow \text{Min}A = 3$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x-2=0 \\ y-x=0 \end{cases}$

Bài 15: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $B = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1$ b, $A = |x+5| - 12$

HD:

a, $B = (x+1)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \text{Min}B = 1$, dấu bằng khi $\begin{cases} x+1=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

b, $A = |x+5| - 12 \geq -12 \Rightarrow \text{Min}A = -12$ dấu bằng khi $x+5=0$

Bài 16: Tìm GTNN hoặc GTLN của :

a, $B = -|2x+20| - 18$ b, $C = |x+2| + |x+y-5| - 17$

HD :

a, Ta có: $B = -|2x+20| - 18 \leq -18 \Rightarrow \text{Max}B = -18$ Dấu bằng khi $2x+20=0$

b, Ta có : $C = |x+2| + |x+y-5| - 17 \geq -17 \Rightarrow \text{Min}C = -17$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x+2=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$

Bài 17: Tìm GTNN hoặc GTLN của : $D = (x+1)^2 + |2x-3-y| + 30$

HD :

$D = (x+1)^2 + |2x-3-y| + 30 \geq 30 \Rightarrow \text{Min}D = 30$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-3-y=0 \end{cases}$

Bài 18: Tìm GTNN của :

a, $A = \frac{6}{|x|-3}$ b, $A = \frac{1}{|x-2|+3}$ c, $B = \frac{5,8}{|2,5-x|+5,8}$

HD :

- a, Ta có : $|x| - 3 \geq -3 \Rightarrow \frac{6}{|x| - 3} \leq \frac{6}{-3} = -2 \Rightarrow A \leq -2 \Rightarrow \text{Max}A = -2$, Dấu bằng khi $x = 0$
- b, Ta có : $|x - 2| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x - 2| + 3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow A \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Max}A = \frac{1}{3}$, Dấu bằng khi $x = 2$
- c, Ta có : $|2,5 - x| + 5,8 \geq 5,8 \Rightarrow \frac{5,8}{|2,5 - x| + 5,8} \leq 1 \Rightarrow B \leq 1 \Rightarrow \text{Max}B = 1$, Dấu = khi $x = 2,5$

Bài 19: Tìm GTNN của :

a, $C = 2 + \frac{12}{3|x+5|+4}$ b, $D = \frac{3|x|+2}{4|x|-5}$ c, $E = \frac{2|x|+3}{3|x|-1}$

HD :

a, Ta có : $3|x+5|+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{12}{3|x+5|+4} \leq \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow C \leq 2+3=5 \Rightarrow \text{Max}C = 5$,

Dấu bằng khi $x = -5$

b, Ta có : $4D = \frac{12|x|+8}{4|x|-5} = \frac{12|x|-15+23}{4|x|-5} = 3 + \frac{23}{4|x|-5}$

Để D đạt min thì $\begin{cases} 4|x|-5 < 0 \\ 4|x|-5, \min \end{cases} \Rightarrow 4|x| < 5 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow |x| = 1$

Để D đạt max thì $\begin{cases} 4|x|-5 > 0 \\ 4|x|-5, \min \end{cases} \Rightarrow 4|x| > 5 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow |x| = 2$

Bài 20: Tìm GTNN của :

a, $F = \frac{2|7x+5|+11}{|7x+5|+4}$ b, $G = \frac{|2y+7|+13}{2|2y+7|+6}$ b, $A = \frac{15|x+1|+32}{6|x+1|+8}$

HD :

a, Ta có : $F = \frac{2|7x+5|+8+3}{|7x+5|+4} = 2 + \frac{3}{|7x+5|+4}$,

Mà $|7x+5|+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{3}{|7x+5|+4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow F \leq 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow \text{Max}F = \frac{11}{4}$, Dấu bằng khi $7x+5=0$

b, $2G = \frac{2|2y+7|+26}{2|2y+7|+6} = 1 + \frac{20}{2|2y+7|+6}$

Mà : $2|2y+7|+6 \geq 6 \Rightarrow \frac{20}{2|2y+7|+6} \leq \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \Rightarrow 2G \leq 1 + \frac{10}{3}$

$\text{Max}G = \frac{13}{20}$, Dấu bằng khi $2y+7=0$

c, $2A = \frac{30|x+1|+32}{6|x+1|+8} = \frac{30|x+1|+40-8}{6|x+1|+8} = 5 - \frac{8}{6|x+1|+8}$

Mà $6|x+1|+8 \geq 8 \Rightarrow \frac{8}{6|x+1|+8} \leq 1 \Rightarrow 5 - \frac{8}{6|x+1|+8} \geq 5-1=4 \Rightarrow 2A \geq 4 \Rightarrow A \geq 2$

$\Rightarrow \text{Min}A = 2$, khi $x+1=0$

Bài 21: Tìm GTNN của :

a, $B = 5 + \frac{-8}{4|5x+7|+24}$ b, $C = \frac{6}{5} - \frac{14}{5|6y-8|+35}$ c, $D = \frac{21|4x+6|+33}{3|4x+6|+5}$

HD:

$$a, \quad 4|5x+7|+24 \geq 24 \Rightarrow \frac{-8}{4|5x+7|+24} \geq \frac{-8}{24} = \frac{-1}{3} \Rightarrow B \geq 5 + \frac{-1}{3} = \frac{14}{3}$$

Khi đó : $MinB = \frac{14}{3}$, Dấu bằng khi $5x+7=0$

$$b, \quad 5|6y-8|+35 \geq 35 \Rightarrow -\frac{14}{5|6y-8|+35} \geq \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \Rightarrow C \geq \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Khi đó : $MinC = \frac{8}{5}$, Dấu bằng khi $6y-8=0$

$$d, \quad D = \frac{21|4x+6|+35-2}{3|4x+6|+5} = 7 + \frac{-2}{3|4x+6|+5}$$

$$\text{mà } 3|4x+6|+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{-2}{3|4x+6|+5} \geq \frac{-2}{5} \Rightarrow D \geq 7 + \frac{-2}{5} = \frac{33}{5}$$

Hay $MinD = \frac{33}{5}$, dấu bằng khi $4x+6=0$

Bài 22: Tìm GTNN của :

$$a, E = \frac{6|y+5|+14}{2|y+5|+14}$$

$$b, F = \frac{-15|x+7|-68}{3|x+7|+12}$$

HD :

$$a, \quad \text{Ta có: } E = \frac{6|y+5|+42-28}{2|y+5|+14} = 3 + \frac{-28}{2|y+5|+14}$$

$$\text{Mà } 2|y+5|+14 \geq 14 \Rightarrow \frac{-28}{2|y+5|+14} \geq \frac{-28}{14} = -2 \Rightarrow E \geq 3 + (-2) = 1$$

Hay $MinE = 1$, Dấu bằng khi $y+5=0$

$$b, \quad \text{Ta có: } F = \frac{-15|x+7|-60-8}{3|x+7|+12} = -5 + \frac{-8}{3|x+7|+12}$$

$$\text{Mà } 3|x+7|+12 \geq 12 \Rightarrow \frac{-8}{3|x+7|+12} \geq \frac{-8}{12} \Rightarrow F \geq -5 + \frac{-2}{3} = \frac{-17}{3}$$

Hay $MinF = \frac{-17}{3}$, Dấu bằng khi $x+7=0$

Bài 23: Tìm GTNN của :

$$a, C = \frac{15}{12} - \frac{28}{3|x-3y|+|2x+1|+35}$$

$$b, H = \frac{-3}{(x+2)^2+4}$$

HD :

$$a, \text{ Ta có: } 3|x-3y|+|2x+1|+35 \geq 35 \Rightarrow \frac{-28}{3|x-3y|+|2x+1|+35} \geq \frac{-28}{35} = \frac{-4}{5} \Rightarrow C \geq \frac{15}{12} + \frac{-4}{5} = \frac{9}{20}$$

Hay $MinC = \frac{9}{20}$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases}$

$$b, \text{ Ta có: } (x+2)^2+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{-3}{(x+2)^2+4} \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow H \geq \frac{-3}{4} \text{ hay } MinH = \frac{-3}{4},$$

Dấu bằng khi $x+2=0$

Bài 24: Tìm GTLN của:

$$a, A = 5 + \frac{15}{4|3x+7|+3}$$

$$b, B = \frac{-1}{3} + \frac{21}{8|15x-21|+7}$$

HD :

a, Ta có: $4|3x+7|+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{15}{4|3x+7|+3} \leq \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow A \leq 5+5=10$

Hay $MaxA=10$, Dấu bằng khi $3x+7=0$

b, Ta có: $8|15x-21|+7 \geq 7 \Rightarrow \frac{21}{8|15x-21|+7} \leq \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow B \leq \frac{-1}{3} + 3 = \frac{5}{3}$

Hay $MaxB = \frac{5}{3}$, Dấu bằng khi $15x-21=0$

Bài 25: Tìm GTLN của:

a, $C = \frac{4}{5} + \frac{20}{|3x+5|+|4y+5|+8}$ b, $D = -6 + \frac{24}{2|x-2y|+3|2x+1|+6}$

HD:

a, Ta có: $|3x+5|+|4y+5|+8 \geq 8 \Rightarrow \frac{20}{|3x+5|+|4y+5|+8} \leq \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow C \leq \frac{4}{5} + \frac{5}{2} = \frac{33}{10}$

Hay $MaxC = \frac{33}{10}$, Dấu bằng khi $\begin{cases} 3x+5=0 \\ 4y+5=0 \end{cases}$

b, Ta có: $2|x-2y|+3|2x+1|+6 \geq 6 \Rightarrow \frac{24}{2|x-2y|+3|2x+1|+6} \leq \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow D \leq -6+4 = -2$

Hay $MaxD = -2$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+1=0 \end{cases}$

Bài 26: Tìm GTLN của:

a, $E = \frac{2}{3} + \frac{21}{(x+3y)^2+5|x+5|+14}$ b, $F = \frac{1}{|x-1|+3}$

HD :

a, Ta có: $(x+3y)^2+5|x+5|+14 \geq 14 \Rightarrow \frac{21}{(x+3y)^2+5|x+5|+14} \leq \frac{21}{14} = \frac{3}{2} \Rightarrow E \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

Hay $MaxE = \frac{13}{6}$, Dấu bằng khi $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+5=0 \end{cases}$

b, Ta có: $|x-1|+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow F \leq \frac{1}{3}$

Hay $MaxF = \frac{1}{3}$, Dấu bằng khi $x-1=0$

Bài 27: Tìm GTLN của:

a, $A = \frac{3}{(x-2)^2+5}$ b, $B = \frac{1}{2x^2+5}$

HD :

a, Ta có: $(x-2)^2+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{3}{(x-2)^2+5} \leq \frac{3}{5} \Rightarrow A \leq \frac{3}{5}$

Hay $MaxA = \frac{3}{5}$, Dấu bằng khi $x-2=0$

b, Ta có: $2x^2+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{2x^2+5} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow B \leq \frac{1}{5}$

Hay $MaxB = \frac{1}{5}$, dấu bằng khi $x=0$

Bài 28: Tìm GTLN của: $A = \frac{2016}{(x-2)^2 + (x-y)^4 + 3}$

HD :

$$\text{Ta có: } (x-2)^2 + (x-y)^4 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{2016}{(x-2)^2 + (x-y)^4 + 3} \leq \frac{2016}{3} = 672 \Rightarrow A \leq 672$$

$$\text{Hay } \text{Max} A = 672, \text{ Dấu bằng khi } \begin{cases} x-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Bài 29: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a, $A = |x+5| + 2 - x$ b, $B = |x-7| + 6 - x$ c, $C = |2x-1| + 2x + 6$

HD:

a, với $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow A = x+5+2-x = 7$ (1)

Với $x < -5 \Rightarrow A = -x-5+2-x = -2x-3$

Mà $x < -5 \Rightarrow -2x > 10 \Rightarrow -2x-3 > 10-3 = 7 \Rightarrow A > 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $A \geq 7 \Rightarrow \text{Min} A = 7$, Dấu bằng khi $x \geq -5$

b, Với $x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow B = x-7+6-x = -1$ (1)

Với $x < 7 \Rightarrow B = 7-x+6-x = -2x+13$

mà $x < 7 \Rightarrow -2x > -14 \Rightarrow -2x+13 > -1 \Rightarrow B > -1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $B \geq -1 \Rightarrow \text{Min} B = -1$, Dấu bằng khi $x \geq 7$

c, Với $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow C = 2x-1+2x+6 = 4x+5$

Mà $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 4x+5 \geq 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 7 \Rightarrow C \geq 7$ (1)

Với $x < \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1-2x+2x+6 = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $C \geq 7 \Rightarrow \text{Min} C = 7$, Dấu bằng khi $x \leq \frac{1}{2}$

Bài 30: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a, $E = |4x+3| + 4x - 5$ b, $F = |5x-6| + 3 + 5x$ c, $G = |2x+7| + 5 - 2x$

HD:

a, Với $4x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow E = 4x+3+4x-5 = 8x-2$

Mà $x \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow 8x-2 \geq 8 \cdot \frac{-3}{4} - 2 = -8 \Rightarrow E \geq -8$ (1)

Với $x < \frac{-3}{4} \Rightarrow E = -4x-3+4x-5 = -8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $E \geq -8 \Rightarrow \text{Min} E = -8$, Dấu bằng khi $x \leq \frac{-3}{4}$

b, Với $5x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{6}{5} \Rightarrow F = 5x-6+3+5x = 10x-3$

Mà $x \geq \frac{6}{5} \Rightarrow 10x-3 \geq 10 \cdot \frac{6}{5} - 3 = 9 \Rightarrow F \geq 9$ (1)

Với $x < \frac{6}{5} \Rightarrow F = 6-5x+3+5x = 9$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $F \geq 9 \Rightarrow \text{Min} F = 9$, Dấu bằng khi $x \leq \frac{6}{5}$

c, Với $2x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-7}{2} \Rightarrow G = 2x+7+5-2x = 12$ (1)

$$\text{Với } x < \frac{-7}{2} \Rightarrow G = -2x - 7 + 5 - 2x = -4x - 2$$

$$\text{Mà } x < \frac{-7}{2} \Rightarrow -4x - 2 > -4 \cdot \frac{-7}{2} - 2 = 12 \Rightarrow G > 12 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } G \geq 12 \Rightarrow \text{Min}G = 12, \text{ Dấu bằng khi } x \geq \frac{-7}{2}$$

Bài 31: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$\text{a, } H = 2|x-3| + 2x + 5 \quad \text{b, } I = 3|x-1| + 4 - 3x \quad \text{c, } J = 4|x+5| + 4x - 1$$

HD:

$$\text{a, Với } x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow H = 2(x-3) + 2x + 5 = 4x - 1$$

$$\text{Mà } x \geq 3 \Rightarrow 4x - 1 \geq 11 \Rightarrow H \geq 11 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < 3 \Rightarrow H = 2(3-x) + 2x + 5 = 11 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } H \geq 11 \Rightarrow \text{Min}H = 11, \text{ Dấu bằng khi } x \leq 3$$

$$\text{b, Với } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow I = 3(x-1) + 4 - 3x = 1 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < 1 \Rightarrow I = 3(1-x) + 4 - 3x = -6x + 7$$

$$\text{Mà } x < 1 \Rightarrow -6x + 7 > -6 \cdot 1 + 7 = 1 \Rightarrow I > 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } I \geq 1 \Rightarrow \text{Min}I = 1, \text{ Dấu bằng khi } x \geq 1$$

$$\text{c, Với } x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow J = 4(x+5) + 4x - 1 = 8x + 19$$

$$\text{Mà } x \geq -5 \Rightarrow 8x + 19 \geq 8 \cdot (-5) + 19 = -21 \Rightarrow J \geq -21 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < -5 \Rightarrow J = 4(-x-5) + 4x - 1 = -21 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } J \geq -21 \Rightarrow \text{Min}J = -21, \text{ Dấu bằng khi } x \leq -5$$

Bài 32: Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$\text{a, } D = |3x+5| + 8 - 3x \quad \text{b, } B = x + \frac{1}{2} - \left| x - \frac{2}{3} \right|$$

HD:

$$\text{a, Với } 3x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-5}{3} \Rightarrow D = 3x + 5 + 8 - 3x = 13 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < \frac{-5}{3} \Rightarrow D = -3x - 5 + 8 - 3x = -6x + 3$$

$$\text{Mà } x < \frac{-5}{3} \Rightarrow -6x + 3 > -6 \cdot \frac{-5}{3} + 3 = 13 \Rightarrow D > 13 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } D \geq 13 \Rightarrow \text{Min}D = 13, \text{ Dấu bằng khi } x \geq \frac{-5}{3}$$

$$\text{b, Với } x - \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow B = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{6} \quad (1)$$

$$\text{Với } x < \frac{2}{3} \Rightarrow B = x + \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} - x \right) = 2x + \frac{-1}{6}$$

$$\text{Mà } x < \frac{2}{3} \Rightarrow B = 2x + \frac{-1}{6} < 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{-1}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow B < \frac{7}{6} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow B \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \text{Max}B = \frac{7}{6}, \text{ Dấu bằng khi } x \geq \frac{2}{3}$$

Bài 33: Tìm GTLN của:

$$\text{a, } A = -|x-5| + x + 4 \quad \text{b, } B = -|2x+3| + 2x + 4 \quad \text{c, } C = -|3x-1| + 7 - 3x$$

HD:

$$\text{a, Với } x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow A = -(x-5) + x + 4 = 9 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < 5 \Rightarrow A = -(5-x) + x + 4 = 2x - 1$$

$$\text{Mà } x < 5 \Rightarrow A = 2x - 1 < 2.5 - 1 = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $A \leq 9 \Rightarrow \text{Max}A = 9$, Dấu bằng khi $x \geq 5$

$$\text{b, Với } 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow B = -(2x + 3) + 2x + 4 = 1 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < \frac{-3}{2} \Rightarrow B = -(-2x - 3) + 2x + 4 = 4x + 7$$

$$\text{Mà } x < \frac{-3}{2} \Rightarrow B = 4x + 7 < 4 \cdot \frac{-3}{2} + 7 = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $B \leq 1 \Rightarrow \text{Max}B = 1$, Dấu bằng khi $x \geq \frac{-3}{2}$

$$\text{c, Với } 3x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow C = -(3x - 1) + 7 - 3x = -6x + 8$$

$$\text{Mà } x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow -6x + 8 \leq -6 \cdot \frac{1}{3} + 8 = 6 \Rightarrow C \leq 6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < \frac{1}{3} \Rightarrow C = -(1 - 3x) + 7 - 3x = 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $C \leq 6 \Rightarrow \text{Max}C = 6$, Dấu bằng khi $x \leq \frac{1}{3}$

Bài 34: Tìm GTLN của:

$$\text{a, } D = -2|x - 5| + 2x + 6 \quad \text{b, } E = -3|x - 4| + 8 - 3x \quad \text{c, } F = -5|5 - x| + 5x + 7$$

HD:

$$\text{a, Với } x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D = -2(x - 5) + 2x + 6 = 16 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < 5 \Rightarrow D = -2(5 - x) + 2x + 6 = 4x - 4$$

$$\text{Mà } x < 5 \Rightarrow D = 4x - 4 < 16 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $D \leq 16 \Rightarrow \text{Max}D = 16$, Dấu bằng khi $x \geq 5$

$$\text{b, Với } x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow E = -3(x - 4) + 8 - 3x = -6x + 20$$

$$\text{Mà } x \geq 4 \Rightarrow E = -6x + 20 \leq -6 \cdot 4 + 20 = -4 \quad (1)$$

$$\text{Với } x < 4 \Rightarrow E = -3(4 - x) + 8 - 3x = -4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $E \leq -4 \Rightarrow \text{Max}E = -4$, Dấu bằng khi $x \leq 4$

$$\text{c, Với } 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow F = -5(5 - x) + 5x + 7 = 10x - 18$$

$$\text{Mà } x \leq 5 \Rightarrow F = 10x - 18 \leq 10 \cdot 5 - 18 = 32 \quad (1)$$

$$\text{Với } x > 5 \Rightarrow F = -5(x - 5) + 5x + 7 = 32 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $F \leq 32 \Rightarrow \text{Max}F = 32$, Dấu bằng khi $x \geq 5$

Bài 35: Tìm GTNN của biểu thức

$$\text{a, } A = |x + 1| + |x - 5| \quad \text{b, } B = |x - 2| + |x - 6| + 5 \quad \text{c, } C = |2x - 4| + |2x + 1|$$

HD

$$\text{a, Ta có : } A = |x + 1| + |x - 5| = |x + 1| + |5 - x| \geq |x + 1 + 5 - x| = |6| = 6$$

Hay $A \geq 6 = \text{Min}A = 6$, Dấu bằng khi $(x + 1)(5 - x) \geq 0$

$$\text{b, Ta có : } B = |x - 2| + |x - 6| + 5 = |x - 2| + |6 - x| + 5 \geq |x - 2 + 6 - x| + 5 = 9$$

Hay $B \geq 9 \Rightarrow \text{Min}B = 9$, Dấu bằng khi $(x - 2)(6 - x) \geq 0$

$$\text{c, Ta có : } C = |2x - 4| + |2x + 1| = |4 - 2x| + |2x + 1| \geq |4 - 2x + 2x + 1| = 5$$

Hay $C \geq 5 \Rightarrow \text{Min}C = 5$, Dấu bằng khi $(4 - 2x)(2x + 1) \geq 0$

Bài 36: Tìm GTNN của biểu thức

$$\text{a, } D = |x + 2| + |x - 3| \quad \text{b, } E = |2x - 4| + |2x + 5| \quad \text{c, } F = 3|x - 2| + |3x + 1|$$

HD :

$$\text{a, Ta có : } D = |x + 2| + |x - 3| = |x + 2| + |3 - x| \geq |x + 2 + 3 - x| = 5$$

Hay $D \geq 5 \Rightarrow \text{Min}D = 5$, Dấu bằng khi $(x+2)(3-x) \geq 0$

b, Ta có : $E = |2x-4| + |2x+5| = |4-2x| + |2x+5| \geq |4-2x+2x+5| = 9$

Hay $E \geq 9 \Rightarrow \text{Min}E = 9$, Dấu bằng khi $(4-2x)(2x+5) \geq 0$

c, Ta có : $F = 3|x-2| + |3x+1| = |3(x-2)| + |3x+1| = |6-3x| + |3x+1| \geq |6-3x+3x+1| = 7$

Hay $F \geq 7 \Rightarrow \text{Min}F = 7$, Dấu bằng khi $(6-3x)(3x+1) \geq 0$

Bài 37: Tìm GTNN của biểu thức

a, $G = |x+5| + |x+1| + 4$ b, $H = |3x-7| + |3x+2| + 8$ c, $I = 4|x+3| + |4x-5| + 12$

HD :

a, Ta có : $G = |x+5| + |x+1| + 4 = |x+5| + |-x-1| + 4 \geq |x+5-x-1| + 4 = 8$

Hay $G \geq 8 \Rightarrow \text{Min}G = 8$, Dấu bằng khi $(x+5)(-x-1) \geq 0$

b, Ta có : $H = |3x-7| + |3x+2| + 8 = |7-3x| + |3x+2| + 8 \geq |7-3x+3x+2| + 8 = 17$

Hay $H \geq 17 \Rightarrow \text{Min}H = 17$, Dấu bằng khi $(7-3x)(3x+2) \geq 0$

c, Ta có : $I = |4(x+3)| + |4x-5| + 12 = |4x+12| + |5-4x| + 12 \geq |4x+12+5-4x| + 12 = 29$

Hay $I \geq 29 \Rightarrow \text{Min}I = 29$, Dấu bằng khi $(4x+12)(5-4x) \geq 0$

Bài 38: Tìm GTNN của biểu thức

a, $M = |x-2002| + |x-2001|$ b, $N = |x-2006| + |2007-x|$

HD :

a, Ta có : $M = |x-2002| + |2001-x| \geq |x-2002+2001-x| = 1$

Hay $M \geq 1 \Rightarrow \text{Min}M = 1$, Dấu bằng khi $(x-2002)(2001-x) \geq 0$

b, Ta có : $N = |x-2006| + |2007-x| \geq |x-2006+2007-x| = 1$

Hay $N \geq 1 \Rightarrow \text{Min}N = 1$, Dấu bằng khi $(x-2006)(2007-x) \geq 0$

Bài 39: Tìm GTNN của biểu thức

a, $A = |x-2012| + |2011-x|$ b, $B = |x-456| + |x-789|$

HD :

a, Ta có : $A = |x-2012| + |2011-x| \geq |x-2012+2011-x| = 1 \Rightarrow A \geq 1$

Vậy $\text{Min}A = 1$, Dấu bằng khi $(x-2012)(2011-x) \geq 0$

b, Ta có : $B = |x-456| + |789-x| \geq |x-456+789-x| = 333 \Rightarrow B \geq 333$

Vậy $\text{Min}B = 333$ Dấu bằng khi $(x-456)(789-x) \geq 0$

Bài 40: Tìm GTNN của biểu thức:

a, $A = |x+3| + |2x-5| + |x-7|$ b, $B = |x+1| + |3x-4| + |x-1| + 5$

HD :

a, Ta có : $A = |x+3| + |x-7| + |2x-5| \geq |x+3+x-7| + |2x-5| = |2x-4| + |5-2x|$

$$A \geq |2x-4+5-2x| = 1 \text{ Dấu bằng khi : } \begin{cases} (x+3)(x-7) \geq 0 \\ (2x-4)(5-2x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow A \geq 1$$

b, Ta có : $B = |x+1| + |1-x| + |3x-4| + 5 \geq |x+1+1-x| + |3x-4| + 5 \geq 2+0+5 = 7$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (x+1)(1-x) \geq 0 \\ 3x-4=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ Vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất}$$

Bài 41: Tìm GTNN của biểu thức:

a, $C = |x+2| + 4|2x-5| + |x-3|$ b, $D = |x+3| + 5|6x+1| + |x-1| + 3$

HD :

a, Ta có : $C = |x+2| + |3-x| + 4|2x-5| \geq |x+2+3-x| + 4|2x-5| \geq 5+0 = 5 \Rightarrow C \geq 5$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (x+2)(3-x) \geq 0 \\ 2x-5=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ thỏa mãn :}$$

$$\text{b, } D = |x+3| + |1-x| + 5|6x+1| + 3 \geq |x+3+1-x| + 5|6x+1| + 3 \geq 4+0+3=7$$

$$\text{Dấu bằng khi } \begin{cases} (x+3)(1-x) \geq 0 \\ 6x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-1}{6} \text{ thỏa mãn :}$$

Bài 42: Cho $x + y = 5$. Tìm GTNN của $A = |x+1| + |y-2|$

HD :

$$\text{Từ } x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x \Rightarrow A = |x+1| + |5-x-2| = |x+1| + |3-x| \geq |x+1+3-x| = 4$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (x+1)(3-x) \geq 0 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Bài 43: Cho $x - y = 3$. Tìm GTNN của $B = |x-6| + |y+1|$

HD :

$$\text{Từ } x - y = 3 \Rightarrow x = y + 3 \Rightarrow B = |y+3-6| + |y+1| = |3-y| + |y+1| \geq |3-y+y+1| = 4$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (3-y)(y+1) \geq 0 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 3 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Bài 44: Cho $x - y = 2$. Tìm GTNN của $C = |2x+1| + |2y+1|$

HD :

$$\text{Ta có : } C = |2x+1| + |-2y-1| \geq |2x+1-2y-1| = |2(x-y)| = 4$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (2x+1)(-2y-1) \geq 0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

Bài 45: Cho $2x+y=3$. Tìm GTNN của $D = |2x+3| + |y+2| + 2$

HD :

$$\text{Ta có : } D = |2x+3| + |y+2| + 2 \geq |2x+3+y+2| + 2 = |3+5| + 2 = 10$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (2x+3)(y+2) \geq 0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

Bài 46: Cho $3x - 4y = 0$. Tìm GTNN của $M = x^2 + y^2$

HD :

$$\text{Ta có : } x = \frac{4}{3}y \Rightarrow M = \frac{16}{9}y^2 + y^2 = \frac{25y^2}{9} \geq 0. \text{ Dấu bằng khi } x = y = 0$$

Bài 47: Số giá trị của x thỏa mãn : $|x+1| + |x-1012| + |x+3| + |x+1003| = 2013$

HD :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } VT &= |x+1| + |1012-x| + |x+3| + |-1003-x| \geq |x+1+1012-x| + |x+3-1003-x| \\ &= 1013+1000 = 2013, \text{ Dấu bằng xảy ra khi : } \begin{cases} (x+1)(1012-x) \geq 0 \\ (x+3)(-1003-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1012 \\ -1003 \leq x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x

Bài 48: Cho $\frac{x}{2} = \frac{-y}{3} \Rightarrow \frac{|x+2|}{|3-y|} = ?$

HD :

$$\text{Ta có : } \frac{x}{2} = \frac{-y}{3} \Rightarrow \frac{x}{-y} = \frac{2}{3} = \frac{x+2}{3-y} \Rightarrow \frac{|x+2|}{|3-y|} = \frac{2}{3}$$

Bài 49: Tìm GTNN của: $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-100|$

HD :

$$\text{Ta có : } A = (|x-1| + |100-x|) + (|x-2| + |99-x|) + \dots + (|x-50| + |51-x|)$$

$$\Rightarrow A \geq 99 + 97 + \dots + 3 + 1 = 2500 \Rightarrow A \geq 2500, \text{ Dấu bằng khi : } \begin{cases} 1 \leq x \leq 100 \\ 2 \leq x \leq 99 \\ \dots \\ 50 \leq x \leq 51 \end{cases} \Rightarrow 50 \leq x \leq 51$$

Bài 50: Tìm GTNN của: $A = (x-2)^2 + |y-x| + 3$

HD :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ |y-x| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow A \geq 3, \text{ hay } \min A = 3 \text{ Dấu bằng khi } \begin{cases} x = 2 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

Bài 51: Tìm GTNN của: $B = \frac{2011}{2012 - |x-1010|}$

HD :

$$\text{Ta có : } |x-1010| \geq 0 \Rightarrow 2012 - |x-1010| \leq 2012 \Rightarrow B = \frac{2011}{2012 - |x-1010|} \geq \frac{2011}{2012}$$

Dấu bằng khi : $x = 1010$

Bài 52: Tìm GTLN của: $C(x) = \frac{\frac{7}{2}(2x-3) + \frac{21}{2} - 8}{2x-3}$ với x nguyên

HD :

$$\text{Ta có : } C(x) = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}, \text{ để } C(x) \text{ Đạt GTLN thì } \frac{5}{2(2x-3)} \text{ là số dương lớn nhất}$$

Hay $2(2x-3)$ là số dương nhỏ nhất mà x nguyên nên :

$$2(2x-3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(2x-3) = 1 \Rightarrow 4x-6=1 \Rightarrow x = \frac{7}{4} (l)$$

$$\text{Khi đó : } 2(2x-3) = 2 \Rightarrow 4x-6=2 \Rightarrow x = 2 (t/m)$$

Bài 53: Tìm GTNN của: $A = 3(x-5)^2 - 2|x-5| + 1$

HD :

$$\text{Ta có : } A = 3(5-x)^2 - 2|x-5| + 1, \text{ Đặt } |5-x| = t \Rightarrow A = 3t^2 - 2t + 1 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Dấu bằng khi : } t = \frac{1}{3} \Rightarrow |x-5| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-5 = \frac{1}{3} \\ x-5 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 54: Cho $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2}$. Rút gọn A và tìm x để A đạt GTLN

HD :

$$\text{Ta có : } A = \frac{xy^2 + y^4 - xy^2 + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} = \frac{y^4 + 1}{x^2(y^4 + 1) + 2(y^4 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$\text{Ta có : } x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow A = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \max A = \frac{1}{2}, \text{ Dấu bằng khi } x = 0$$

Bài 55: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, để biểu thức: $A = |x-2| + |x-4|$ đạt GTNN

HD :

$$\text{Ta có : } A = |x-2| + |x-4| = |x-2| + |4-x| \geq |x-2+4-x| = 2$$

$$\text{dấu bằng khi : } (x-2)(4-x) \geq 0$$

Bài 56: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, để biểu thức: $B = |x-2| + |x-3| + |x-4|$ đạt GTNN

HD :

$$\text{Ta có : } A = |x-2| + |x-4| + |x-3| \geq |x-2+4-x| + |x-3| \geq 2 + |x-3| = 2$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} (x-2)(4-x) \geq 0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=3$$

Bài 57: Tìm Min của: $A = |x+8| + |x+13| + |x+50|$

HD :

$$\text{Ta có: } A = |-x-8| + |x+13| + |x+50| \geq -x+8+0+x+50 = 42 \text{ dấu bằng xảy ra khi :}$$

$$\begin{cases} -x-8 \geq 0 \\ x+13 = 0 \\ x+50 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -13$$

Bài 58: Tìm Min của : $B = \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{1}{4}\right|$

HD :

$$B = \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{4} - x\right| + \left|x + \frac{1}{3}\right| \geq \left|x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - x\right| + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu bằng khi : } \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4} - x\right) \geq 0 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Bài 59: Tìm Min của các biểu thức:

$$\text{a, } A = (2x+1)^4 - 3$$

$$\text{b, } B = (x^2-9)^4 + |y-2| - 1 \quad \text{c, } C = (x-1)^2 + (y+5)^2 + 1$$

Bài 60: Tìm Min của :

$$\text{a, } A = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 20 \text{ (Min)}$$

$$\text{b, } B = -x^2 + 2x + 1 \text{ (Max)}$$

$$\text{c, } C = |x-1| + |x-2| \text{ (Min)}$$

Bài 61: Tìm Min của :

$$\text{a, } C = |x-2014| + |x-2015|$$

$$\text{b, } E = (x^2-9)^2 + |y-2| - 1$$

$$\text{c, } C = 9 - |x^2-5|$$

Bài 62: Tìm Min của :

$$\text{a, } D = |x-1| + |x-10| + |x-20| \text{ biết } x \in \mathbb{Z} \quad \text{b, } E = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}$$

$$\text{c, } K = \sqrt{421} - \sqrt{124-x}$$

Bài 63: Tìm GTNN của: $P = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007$

HD:

$$\text{Ta có: } (|x-3|+2) \geq 2, \forall x \Rightarrow (|x-3|+2)^2 \geq 4, \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x=3 \text{ và } |y+3| \geq 0, \forall y,$$

$$\text{“=” khi } y = -3, \text{ Vậy } P = (|x-3|+2)^2 + |y+3| + 2007 \geq 4 + 2007 = 2011, \text{ Dấu “=” khi } x=3 \text{ và } y=-3$$

Bài 64: Tìm GTNN của $A = |x-2010| + (y+2011)^{2010} + 2011$ và giá trị của x, y tương ứng

Bài 65: Tìm GTLN của $C = \frac{x+2}{|x|}$ với x là số nguyên

HD:

Xét các Th:

Xét $x \leq -2$ thì $C \leq 1$

Xét $x = -1$ thì $C = 1$

Xét $x \geq 1$ thì $A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$ và C lớn nhất khi $\frac{2}{x}$ lớn nhất, khi x nhỏ nhất tức là $x=1$ khi đó $C=3$

Vậy $\text{Max } C=3$ khi $x=1$

Bài 66: Cho $x+2y=1$, Tìm Min của: $A = x^2 + y^2 + xy$

Bài 67: Tìm Min của: $M = |x-2| + |x-9| + |x+1945|$

Bài 68: Tìm GTNN của: $D = |x-1| + |x-10| + |x-20|$ biết x là số nguyên

Bài 69: Tìm Min của: $A = |3x-2| + |5-3x|$

Bài 70: Tìm Max của:

a, $A = \frac{2009}{|2x+1|+2010}$

b, $B = \frac{(x^2-4)^2+2010}{-2009}$

Bài 71: Tìm min của:

a, $C = \frac{7}{2+4(x-2)^2}$

b, $D = \sqrt{(x-2)^2} + 12$

Bài 72: (17) Tìm min của: $P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017|$

Bài 73: Cho số tự nhiên n có hai chữ số, chữ số hàng chục là x , hàng đơn vị là y , Gọi $M = \frac{n}{x+y}$

a, Tìm n để $M=2$

b, Tìm n để M nhỏ nhất

HD:

a, Ta có: $\frac{10x+y}{x+y} = 2 \Rightarrow y = 8x$, Mà x, y là các chữ số nên $x=1$ và $y=8$

b, $M = \frac{x+y+9x}{x+y} = 1 + \frac{9x}{x+y} = 1 + \frac{9}{1+\frac{y}{x}}$ để M nhỏ nhất thì $1 + \frac{y}{x}$ lớn nhất hay y lớn nhất và x nhỏ

nhất

Bài 74: Tìm GTNN của: $D = \frac{3-4x}{x^2+1}$

Bài 75: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017|$

HD:

$$P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017| = (|x-2015| + |2017-x|) + |x-2016|$$

Ta có: $|x-2015| + |2017-x| \geq |x-2015+2017-x| = 2$ Dấu « = » xảy ra khi $2015 \leq x \leq 2017$

Lại có: $|x-2016| \geq 0$, Dấu '=' khi $x=2016$

Từ đó ta có: $\text{Min } P = 2$, Dấu bằng xảy ra khi $x=2016$

Bài 76: Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{|x-2016|+2017}{|x-2016|+2018}$

HD:

$$A = \frac{|x-2016|+2018-1}{|x-2016|+2018} = 1 - \frac{1}{|x-2016|+2018}$$

Do $|x-2016|+2018 \geq 2018, \forall x$ dấu bằng khi $x=2016$. Vậy B đạt GTNN bằng $\frac{2017}{2018}$

Bài 77: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2014-x| + |2015-x| + |2016-x|$

Bài 78: Tìm giá trị nhỏ nhất của A biết: $A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000|$

Bài 79: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |x-2012| + |x-2013|$

Bài 80 : Tìm GTLN của các biểu thức : $B = \sqrt{421} - \sqrt{124 - x}$

Bài 81: Cho $x+y=1$, với giá trị nào của x và y thì biểu thức $A = 5 + \frac{7}{(2-x+y)^2 + 8}$ đạt giá trị lớn nhất.

Tìm giá trị lớn nhất đó?