

CHUYÊN ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

Xét biểu thức $A(x)$

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị lớn nhất là M , nếu

$A(x) \leq M \forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0) = M$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị nhỏ nhất là m , nếu

$A(x) \geq m \forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0) = m$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

Như vậy :

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A , ta cần :

- Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A , ta cần :

- Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Ký hiệu: $\min A$ là giá trị nhỏ nhất của A và $\max A$ là giá trị lớn nhất của A

Ví dụ: Sai lầm

$$A(x) = 2x^2 - 2x + 3 = x^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow GTNN = 2 \text{ (Không chỉ ra được dấu =)}$$

$$\text{Đáp án đúng là : } A(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow GTNN = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

B. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$

Phương pháp: Áp dụng hằng đẳng thức số 1 và số 2

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = x^2 - 4x + 24$

b. $B(x) = 2x^2 - 8x + 1$

c. $C(x) = 3x^2 + x - 1$

Lời giải

a. $A(x) = x^2 - 4x + 24 = (x-2)^2 + 20 \geq 20 \forall x \Rightarrow \min A(x) = 20 \Leftrightarrow x = 2$

b. $B(x) = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \geq -7 \Rightarrow \min B = -7 \Leftrightarrow x = 2$

c. $C(x) = 3x^2 + x - 1 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} \geq \frac{-13}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{6}$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A(x) = -5x^2 - 4x + 1$

b. $B(x) = -3x^2 + x + 1$

Lời giải

a. $A(x) = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}\right) = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{5}$

b. $B(x) = -3x^2 + x + 1 = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12} \leq \frac{13}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của đa thức có bậc cao hơn 2

Phương pháp: Ta đưa về dạng tổng bình phương

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

b. $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$

c. $C(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2017$

d. $D(x) = x^4 - x^2 + 2x + 7$

e. $E(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22$

f. $F(x) = x(x-3)(x-4)(x-7)$

g. $G(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) - 2006$

Lời giải

a. $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \forall x$

$$\Rightarrow \min A(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

b. $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30 = (x^2 - 5x)^2 + (x-5)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$

c. $C(x) = x^2(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) + 2015 = (x^2 + 2)(x-1)^2 + 2015 \geq 2015 \Leftrightarrow x = 1$

d. $D(x) = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 + 2x + 1 + 5 = (x^2 - 1)^2 + (x+1)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow x = -1$

e. $E(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 5(x^2 - 4x + 4) + 2 = (x^2 - 2x)^2 + 5(x-2)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

f. $F(x) = x(x-3)(x-4)(x-7) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12) = y^2 - 36 \geq -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

g. $G(x) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) - 2006 = (x^2 + 5x)^2 - 2042 \geq -2042 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

Dạng 3 : Đa thức có từ 2 biến trở lên

Phương pháp: Đa số các biểu thức có dạng $F(x; y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + h (a.b.c \neq 0) \quad (1)$

- Ta đưa dần các biến vào trong hằng đẳng thức $(a^2 \pm 2ab + b^2) = (a \pm b)^2$ như sau

$$F(x; y) = mK[x; y]^2 + nG[y]^2 + r(2) \text{ hoặc } F(x; y) = mK[x; y]^2 + nH[x]^2 + r(3)$$

Trong đó $G[y], H[x]$ là biểu thức bậc nhất đối với biến, còn $K[x; y] = px + qy + k$ cũng là biểu thức bậc nhất đối với cả hai biến x và y

Cụ thể:

Ta biến đổi (1) để chuyển về dạng (2) như sau với $a \neq 0; 4ac - b^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4a.F(x; y) &= 4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 + 4adx + 4aey + 4ah = 4a^2x^2 + b^2y^2 + d^2 + 4abxy + 4adx + 2bdy \\ &\quad (4ac - b^2)y^2 + 2y(2ae - bd) + 4ah - d^2 \end{aligned}$$

$$= (2ax + by + d)^2 + (4ac - b^2) \left(y + \frac{2ae - bd}{4ac - b^2} \right) + 4ah - d^2 - \left(\frac{2ae - bd}{4ac - b^2} \right)^2$$

Vậy có (2) với

$$m = \frac{1}{4a}, F(x; y) = 2ax + by + d; n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; G(y) = y + \frac{2ae - bd}{4ac - b^2}; r = h - \frac{d^2}{4a} - \frac{(2ae - bd)^2}{4a(4ac - b^2)}$$

+) Nếu $a > 0; 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow m > 0, n > 0 \Rightarrow (2): F(x; y) \geq r(*)$

+) Nếu $a < 0; 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow m < 0, n < 0 \Rightarrow (2): F(x; y) \leq r(**)$

+) Nếu $m > 0, n > 0$ thì ta tìm được giá trị nhỏ nhất

+) Nếu $m < 0, n < 0$ thì ta tìm được giá trị lớn nhất

Để thấy rằng luôn tồn tại $(x; y)$ để có dấu của đẳng thức, như vậy ta sẽ tìm được cực trị của đa thức đã cho

Trong cả hai trường hợp trên:

- Nếu $r = 0$ thì phương trình $F(x; y) = 0$ có nghiệm

- Nếu $F(x; y) \geq r > 0$ hoặc $F(x; y) \leq r < 0$ thì không có $(x; y)$ nào thỏa mãn $F(x; y) = 0$

+) Nếu $a > 0; 4ac - b^2 < 0; r = 0 \Rightarrow (2): F(x; y)$ phân tích được tích của hai nhân tử, giúp ta giải được các bài toán khác

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a. $A = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5$

b. $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5$

Lời giải

a) Ta có $A(x) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5 = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 4y + 4) + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

$$\Rightarrow A \geq 1 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow "=" \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b) $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 5 = (x - 2y)^2 + (x + y)^2 + 5 \geq 5$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a. $A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

b. $B(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

c. $C(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

d. $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2$

e. $E(x) = 2x^2 + 8xy + 11y^2 - 4x - 2y + 6$

f. $F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$

$$g. G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y$$

$$h. H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$$

Lời giải

$$a. A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x = y = 1$$

$$b. B(x) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + x(y - 1) - (y - 1) - 3 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) - 3$$

$$= (x - 1)^2 + 2(x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y - 1) + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - 3 = \left[x - 1 + \frac{y - 1}{2}\right]^2 - \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + y^2 - 2y + 1 - 3$$

$$= \left[x - 1 + \frac{y - 1}{2}\right]^2 + \frac{3(y - 1)^2}{4} - 3 \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \frac{y - 1}{2} = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$c. C(x) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + y^2 - 8x - 2y + 18 = 2[(x + y)^2 - 2(x + y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$= 2(x + y - 2)^2 + (y + 3)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow y = -3; x = 5$$

$$d. D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2 = 2(x^2 - x) + (3y^2 - 2y) + (4z^2 - 2z) + 2$$

$$= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 3\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \left[(2z)^2 - 2z + \frac{1}{4}\right] + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{2} \geq \frac{11}{2} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$$

$$e. E(x) = 2(x^2 + 4xy + 4y^2) + 3y^2 - 4x - 2y + 6 = [2(x + 2y)^2 - 4(x + 2y) + 2] + 3y^2 + 6y + 4$$

$$= 2(x + 2y - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$f. F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2 \text{ (kho)}$$

$$F(x) = 2x^2 - 2x(3y + z) + 2\left(\frac{3y + z}{2}\right)^2 + 6y^2 + 5z^2 + 8yz - \left(\frac{3y + z}{2}\right)^2 + 2y + 4z + 2$$

$$= 2\left(x - \frac{3y+z}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y^2 + \frac{10}{3}yz + \frac{25}{9}z^2\right) + \frac{1}{3}z^2 + 2y + 4z + 2$$

$$= 2\left(x - \frac{3y+z}{2}\right)^2 + \left[\frac{3}{2}\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 + 2\left(y + \frac{5}{3}z\right) + \frac{2}{3}\right] + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}\right) + 1$$

$$= 2(\dots) + \frac{3}{2}\left(y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3y+z}{2} = 0 \\ y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \min A = 1$$

g. $G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+y-z)^2 - 5 \geq -5 \Leftrightarrow x=1; y=2; z=3$

h. $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1 \Rightarrow 4H(x) = (2x)^2 - 2.2x.y + y^2 + 3y^2 - 4x + 4y + 4$

$$= (2x - y)^2 - 2(2x - y) + 3y^2 + 2y + 3 + 1 = (2x - y - 1) + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + 1\right) = (2x - y - 1) + 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \min 4A = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{-1}{3} \Rightarrow \min A = \frac{2}{3}$$

Bài 3: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = -4x^2 - 5y^2 + 8xy + 10y + 12$

b. $-x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Lời giải

a. $A = -4x^2 - 5y^2 + 8xy + 10y + 12 = -4x^2 + 8xy - 4y^2 - y^2 + 10y - 25 + 37 = -4(x-y)^2 - (y-5)^2 + 37 \leq 37$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

b. $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y \Rightarrow 4A = -4x^2 - 4y^2 + 4xy + 8x + 8y$

$$A = -4x^2 + 4x(y+2) - (y+2)^2 + (y+2)^2 - 4y^2 + 8y$$

$$= -(2x - y - 2)^2 - 3(y^2 - 4y) + 4 = -(2x - y - 2)^2 - 3(y - 2)^2 + 16 \leq 16 \Rightarrow A \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

b. $B = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 5xy - 3yz - 3xz - 2x - 2y + 3$

Lời giải

a. $A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82 = 9y^2 - 12y(x+4) + 4(x+4)^2 - 4(x+4)^2 + 5x^2 + 24x + 82$

$$= [3y - 2(x+4)]^2 + (x-4)^2 + 2 \geq 2 \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{16}{3}$$

b. $B = \left[z - \frac{3}{2}(x+y) \right]^2 + \frac{3}{4} \left(x + \frac{y}{3} - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}(y-2)^2 + 1 \geq 1$

Bài 5: Tìm GTLN của $A = x + y + z - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)$

Lời giải

$$-A = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(2z - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{7}{16} \geq \frac{-7}{16} \Rightarrow A \leq \frac{7}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{8}$$

Bài 6: [HSG – Yên Dũng – Bắc Giang]. Tìm GTNN của $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

Lời giải

$$A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 = x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003 \geq 2003 \Leftrightarrow x = -4; y = 3$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm GTNN của: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Hướng dẫn

$$A = x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 10y + 17 = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + [2y^2 - 10y + 17 - (y-1)^2]$$

$$= (x - y + 1)^2 + (y^2 - 8y + 16)$$

Bài 2: Tìm min của: $B = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

Hướng dẫn

$$B = x^2 - x(y+2) + y^2 - 2y = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{y^2 + 4y + 4}{4} \right] + y^2 - 2y - \frac{y^2}{4} - y - 1$$

$$4B = (x - y - 2)^2 + 4y^2 - 8y - y^2 - 4y - 4$$

Bài 3: Tìm min của: $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

Hướng dẫn

$$C = x^2 + x(y-3) + y^2 - 3y = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{y-3}{2} + \frac{y^2 - 6y + 9}{4} \right] + y^2 - 3y - \frac{y^2 - 6y + 9}{4}$$

$$4C = (x + y - 3)^2 + [4y^2 - 12y - y^2 + 6y - 9]$$

Bài 4: Tìm min của: $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Hướng dẫn

$$D = x^2 - 2x(y+6) + 6y^2 + 2y + 45 = x^2 - 2x \cdot (y+6) + (y+6)^2 + 6y^2 + 2y + 45 - (y^2 + 12y + 36)$$

$$= (x - y - 6)^2 + 5y^2 - 10y + 9$$

Bài 5: Tìm min của: $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

Hướng dẫn

$$E = x^2 - x(y-2) + 3y^2 - 10y + 20 = x^2 - 2x \cdot \frac{y-2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + 3y^2 - 10y + 20 - \frac{y^2 - 4y + 4}{4}$$

$$4E = (x - y + 2)^2 + (12y^2 - 40y + 80) - (y^2 - 4y + 4) = (x - y + 2)^2 + (11y^2 - 36y + 76)$$

Bài 6: Tìm max của: $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$

Hướng dẫn

$$-F = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3 = x^2 - 2x(y+1) + 4y^2 - 10y + 3$$

$$-F = x^2 - 2x(y+1) + (y+1)^2 + 4y^2 - 10y + 3 - (y+1)^2$$

Bài 7: Tìm min của: $G = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$

Hướng dẫn

$$G = \left[(x - ay)^2 + 6(x - ay) + 9 \right] + (x^2 + 2x + 1) + 16y^2 - 8ay - 8y$$

$$G = (x - ay + 3)^2 + (x + 1)^2 + 16y^2 - 8y(a + 1) + (a + 1)^2 - (a + 1)^2$$

$$G = (x - ay + 3)^2 + (x + 1)^2 + (4y - a - 1)^2 - (a + 1)^2 \geq -(a + 1)^2$$

Bài 8: Tìm max của: $H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$

Hướng dẫn

$$-H = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y - 11 = x^2 - x(y - 2) + y^2 - 4y - 11$$

$$-H = x^2 - 2x \cdot \frac{y - 2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + y^2 - 4y - 11 - \frac{(y - 2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow -4H = (x - y + 2)^2 + 4y^2 - 16y - 44 - (y^2 - 4y + 4)$$

Bài 9: Tìm min của: $I = x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 11$

Hướng dẫn

$$I = (x^2 + 4xy + 4y^2) + y^2 - 6y + 11$$

Bài 10: Tìm min của: $K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$

Hướng dẫn

$$4K = 4x^2 + 4y^2 - 4xy + 12x + 12y + 80 = \left[4x^2 - 4x(y - 3) + (y - 3)^2 \right] + \left[4y^2 + 12y + 80 - (y - 3)^2 \right]$$

$$4K = (2x - y + 3)^2 + 3y^2 + 18y + 71$$

Bài 11: Tìm min của: $M = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$

Hướng dẫn

$$M = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1)$$

Bài 12: Tìm min của: $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$

Hướng dẫn

$$N = x^2 - x(2y + 1) + 2y^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{2y + 1}{2} + \frac{(2y + 1)^2}{4} + 2y^2 - \frac{(2y + 1)^2}{4}$$

$$4N = (x - 2y - 1)^2 + 8y^2 - (4y^2 + 4y + 1)$$

Bài 13: Tìm min của: $A = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$

Hướng dẫn

$$A = x^2 - 2x(y + 1) + 3y^2 + 1997 = x^2 - 2x(y - 1) + (y - 1)^2 + 3y^2 + 1997 - (y^2 + 2y + 1)$$

Bài 14: Tìm min của: $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$

Hướng dẫn

$$Q = x^2 - 2x(y - 1) + 2y^2 - 10y = x^2 - 2x(y - 1) + (y - 1)^2 + 2y^2 - 10y - (y^2 - 2y + 1)$$

Bài 15: Tìm min của: $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$

Hướng dẫn

$$R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = (x + y)^2 + (y - 1)^2 - 1 \geq -1$$

Bài 16: Tìm min của: $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$

Hướng dẫn

$$A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (4y^2 - 16y + 32)$$

Bài 17: Tìm min của: $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$

Hướng dẫn

$$B = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (z^2 - 4z + 4) + 8$$

$$= (x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 2)^2 + 8 \geq 8$$

Bài 18: Tìm min của: $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$

Hướng dẫn

$$C = (4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 9y^2) + (x^2 - 4x + 4) = (2x - 3y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

Bài 19: Tìm max của: $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Hướng dẫn

$$-D = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - x(y+2) + y^2 - 2y$$

$$-D = x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} + y^2 - 2y - \frac{y^2 + 4y + 4}{4}$$

Bài 20: Tìm min của: $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$

Hướng dẫn

$$E = x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = (x - 2y)^2 + (y + 1)^2 - 4 \geq -4$$

Bài 21: Tìm GTNN của $A = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } 4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2) + 4 + 2ab - 4a - 4b = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$$

Bài 22: Tìm min của: $G = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$

Hướng dẫn

$$4G = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 12$$

$$4G = 4x^2 + 4x(y - 3) + (y - 3)^2 + (4y^2 - 12y + 12) - (y^2 - 6y + 9)$$

$$4G = (2x + y - 3)^2 + 3y^2 - 6y + 3 = (2x + y - 3)^2 + 3(y - 1)^2 \geq 0$$

Bài 23: CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15 = 0$

Hướng dẫn

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 8y + 4) + (z^2 - 6z + 9) + 1 \geq 1$$

Bài 24: Tìm min của: $A = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

Hướng dẫn

$$A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2$$

Bài 25: Tìm min của: $B = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Hướng dẫn

$$B = x^2 - 2x(y - 1) + (y - 1)^2 + 2y^2 - 10y + 17 - (y^2 - 2y + 1) = (x - y + 1)^2 + (y^2 - 8y + 16)$$

Bài 26: Tìm min của: $D = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$

Hướng dẫn

$$2D = 4x^2 + 4xy + 10y^2 - 16x - 44y = 4x^2 + 4x(y-4) + 10y^2 - 44y$$

$$2D = 4x^2 + 2 \cdot 2x(y-4) + (y-4)^2 + 10y^2 - 44y - y^2 + 8y - 16$$

Bài 27: Tìm min của: $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$

Hướng dẫn

$$2E = 4x^2 + 18y^2 - 12xy - 12x - 24y + 4008$$

$$2E = 4x^2 - 12x(y+1) + 9(y+1)^2 + 18y^2 - 24y + 4008 - 9(y^2 + 2y + 1)$$

$$2E = (2x - y - 1)^2 + 9y^2 - 42y + 3999$$

Bài 28: Tìm min của: $F = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 12y + 45$

Hướng dẫn

$$F = x^2 - 2x(y+6) + (y+6)^2 + 6y^2 + 12y + 45 - (y^2 + 12y + 36) = (x - y - 6)^2 + 5y^2 + 9 \geq 9$$

Bài 29: Tìm GTNN của biểu thức : $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

Hướng dẫn

$$P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 \Rightarrow 4P = (a-b)^2 + 3(a+b-2)^2 \geq 0$$

Bài 30: Tìm min của: $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$

Hướng dẫn

$$A = x^2 - 2x(2y+3z) + 6y^2 - 14z^2 \Rightarrow A = x^2 - 2x(2y+3z) + (2y+3z)^2 + 6y^2 - 14z^2 - (4y^2 + 12yz + 9z^2)$$

$$\Rightarrow A = (x - 2y - 3z)^2 + 2y^2 - 12yz - 23z^2$$

Bài 31: Tìm min của: $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

Hướng dẫn

$$B = x^2 - 2x(y-z+1) + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 8z + 2000$$

$$= x^2 - 2x(y-z+1) + (y-z+1)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 2z + 2000 - (y^2 + z^2 + 1 - 2yz - 2z + 2y)$$

$$\begin{aligned}
&= (x - y + z - 1)^2 + (y^2 + 2z^2 - 4y + 2yz + 1999) \\
&= (x - y + z - 1)^2 + \left[y^2 - 2y(z + 2) + (z + 2)^2 \right] + 2z^2 - (z^2 + 4z + 4) + 1999 \\
&= (x - y + z - 1)^2 + (y - z - 2)^2 + (z^2 - 4z + 1995)
\end{aligned}$$

Dạng 4: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức có quan hệ ràng buộc giữa các biến

Phương pháp :

- Dồn biến từ điều kiện rồi thay vào biểu thức.
- Biến đổi biểu thức thành các thành phần có chứa điều kiện để thay thế.
- Sử dụng thêm một số bất đẳng thức phụ :
 - + $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (Dấu = khi $a = b$, với a, b không âm)
 - + $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (Dấu = khi $a = b$)
 - + $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (Dấu = khi $a = 1$)

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = x^3 + y^3 + xy; x + y = 1$

b. $B = 5x^2 + y^2; x + y = 1$

c. $C = x^2 + 2y^2; x + 2y = 1$

d. $D = 2x^2 + 5y^2; 4x - 3y = 7$

Lời giải

a. $A = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$

Có : $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow A = (1 - y)^2 + y^2 = 2y^2 - 2y + 1 = 2(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Dấu ‘ = ’ xảy ra $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$

b. Có

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow B = 5x^2 + (1 - x)^2 = 6x^2 - 2x + 1 = 6(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}) + \frac{5}{3} = 6(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}; y = \frac{5}{6}$$

c. $C = x^2 + 2y^2 = 6y^2 - 4y + 1 \Rightarrow \min C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = x = \frac{1}{3}$

d. $4x - 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{4x - 7}{3} \Rightarrow D = 2x^2 + 5(\frac{4x - 7}{3})^2 \Rightarrow 9D = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x - 10)^2 + 45 \geq 45$

$$\Rightarrow \min D = 5 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}; y = \frac{-3}{7}$$

Bài 2: [HSG – BG – 2011]

Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$

Lời giải

Có $a + b = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow A &= a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a) = a^3 + 2ab + b^3 - ab = a^3 + b^3 + ab = a^3 + (1 - a)^3 + a(1 - a) = 2a^2 - 2a + 1 \\ &= 2(a^2 - a + \frac{1}{2}) = 2(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \forall a \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 3: [HSG – HN – 2006 - 2007]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 2$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 2xy$

Lời giải

$$A = x^3 + y^3 + 2xy = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 2xy$$

Theo giả thiết

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow A = 2^3 - 6x(2 - x) + 2x(2 - x) = 4x^2 - 8x + 8 = 4(x - 1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Bài 4: Cho các số thực x, y thỏa mãn : $x + y + 4 = 0$. Tìm GTLN của

$$A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy = 2(x + y)^3 - 6xy(x + y) + 3(x + y)^2 - 6xy + 10xy$$

$$= 28xy - 80 = 28x(-4 - x) - 80 = -28(x^2 + 4x + 4) + 32 \Rightarrow A = -28(x + 2)^2 + 32 \leq 32 \Leftrightarrow x = -2 \rightarrow y = -2$$

Bài 5: [HSG – HN – 1996 - 1997]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x^2 + y^2$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 8 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 + (x - y)^2 \geq x^2 + y^2 \Rightarrow P \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = y = \pm 2$$

$$\text{Vậy GTLN của } P = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$$

Mặt khác:

$$8 = 2(x^2 + y^2) - 2xy = 3(x^2 + y^2) - (x - y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow P \geq \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy GTNN của } P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}; y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}}; y = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Bài 6: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $2x + 2y + z = 4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$A = 2xy + yz + zx$$

Lời giải

Từ giả thiết: $2x + 2y + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 2x - 2y \Rightarrow A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y)$

$$= -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y \Rightarrow 2A = -4x^2 - 4y^2 - 4xy + 8x + 8y = -4x^2 - 4x(y + 2) - (y - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4y^2 + 8y \\ = -(2x + y - 2) - 3(y^2 - \frac{4}{3}y) + 4 = -(2x + y - 2) - 3(y - \frac{2}{3})^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3} \Rightarrow A \leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4}{3}$$

Bài 7: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 6$. Tìm GTLN của $A = xy + 2yz + 3xz$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 6 - x - y \Rightarrow A = xy + z(2y + 3x) = xy + (6 - x - y)(2y + 3x) = -3x^2 - 2y^2 - 4xy + 18x + 12y$

$$\Rightarrow 3A = -9x^2 - 6y^2 - 12xy + 54x + 36y = -9x^2 - 6x(2y - 9) - 6y^2 + 36y = -(3x + 2y - 9)^2 - 2y^2 + 81 \leq 81$$

$$\Rightarrow A \leq 27 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3$$

Bài 8: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$. Tìm GTNN $A = x + y + 3$

Lời giải

Từ giả thiết

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x + 2y + 7)^2 \leq 9 \Rightarrow |2x + 2y + 7| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x + 2y + 7 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Leftrightarrow -2 \leq A \leq 1$$

+) $A = 1 \Leftrightarrow x = -2; y = 0$

+) $A = -2 \Leftrightarrow x = -5; y = 0$

Bài 9: Tìm GTLN, GTNN của $S = ab + 2009$, với a, b, là hai số thực khác 0 và $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$

Lời giải

Ta có:

$$4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + ab - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + a \geq ab + 2 \Rightarrow ab \leq 2 \Rightarrow S \leq 2011 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = -2 \\ a = 1; b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có: } 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2 \geq -ab + 2 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow S \geq 2007 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -2 \\ a = -1; b = 2 \end{cases}$$

Vậy GTNN của $S = 2007 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1; \pm 2)$

Bài 10: [Tuyển sinh vào 10 – TH – 2009 – 2010]

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm GTNN, GTLN của $A = m + n + p$

Lời giải

Theo giả thiết có:

$$\begin{aligned} n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2} &\Rightarrow 2n^2 + 2np + 2p^2 + 3m^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp + m^2 - 2mn + n^2 + m^2 - 2np \\ &+ p^2 = 2 \Leftrightarrow (m+n+p)^2 + (m-n)^2 + (m-p)^2 = 2 \Rightarrow (m+n+p)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m+n+p \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m+n+p \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$+) A = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=0 \\ m-p=0 \\ m+n+p=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=n=p=\frac{-\sqrt{2}}{3}$$

$$+) A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=0 \\ m-p=0 \\ m+n+p=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=n=p=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Bài 11: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn : $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN $A = x + y + 2z$

Lời giải

$$\text{Từ } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 18 \Leftrightarrow (x+y+2z)^2 + (x-y)^2 + (2x-z)^2 + (2y-z)^2 = 18$$

$$\Rightarrow x+y+2z \leq 18 \Rightarrow -3\sqrt{2} \leq A \leq 3\sqrt{2}$$

$$+) A = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$+) A=3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}; z=\sqrt{2}$$

Bài 12: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn : $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$ (1)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = m + n + p$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3 \Leftrightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2pm) + (m^2 - 4mp + 4p^2) + (n^2 - 2np + p^2) = 3 \Leftrightarrow 3(m+n+p)^2 + (m-2p)^2 + (n-p)^2 = 3 \Rightarrow 3(m+n+p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m+n+p \leq 1$$

$$+) A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}; n = p = \frac{-1}{4}$$

$$+) A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}; n = p = \frac{1}{4}$$

Bài 13: Cho $x + y + z = 3$; $A = x^2 + y^2 + z^2$; $B = xy + yz + zx$

a. Chứng minh $A \geq B$

b. Tìm GTNN của A

c. Tìm GTLN của B

d. Tìm GTNN của A + B

Lời giải

$$a. \text{ Xét } A - B = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \Rightarrow A \geq B \Leftrightarrow x = y = z$$

$$b. (x+y+z)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \end{cases} \Rightarrow 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 3A \Rightarrow A \geq 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

$$c. 9 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) = 3B \Rightarrow B \leq 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

d. Có: $\begin{cases} A+2B=9 \\ B \leq 3 \end{cases} \Rightarrow A+B=9-B \geq 6 \Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 14: Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ thỏa mãn: $a+b+c=0$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Với $x \in [-1, 2]$, ta có: $x \geq -1; x \leq 2 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2$

Áp dụng : $P=a^2+b^2+c^2 \leq a+2+b+2+c+2=a+b+c+6=6 \Rightarrow (a,b,c)=(-1,-1,2) \Rightarrow GTLN=6$

Bài 15: Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Ta có : $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 0 \Rightarrow abc+ab+bc+ca+a+b+c+1 \geq 0$

$(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \Rightarrow 8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc \geq 0 \Rightarrow 3(ab+bc+ca)+9-3(a+b+c) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \geq -6 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq -2 \Rightarrow P=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2(ab+bc+ca) \leq 5$

Dấu ‘ = ’ xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=(-1,0,2) \Rightarrow \max P=5$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tìm min của: $A=3x^2+y^2$ biết $3x+y=1$

Hướng dẫn

Từ $3x+y=1 \Rightarrow y=1-3x \Rightarrow A=3x^2+(1-3x)^2=12x^2-6x+1$

Bài 2: Tìm min của: $A=xy$ biết $3x+y=1$

Hướng dẫn

Ta có $3x+y=1 \Rightarrow y=1-3x \Rightarrow A=x(1-3x)=-3x^2+x$

Bài 3: Tìm min của: $A=a^3-b^3-ab$ biết: $a-b=1$

Hướng dẫn

$$a = b + 1 \Rightarrow A = (b+1)^3 - b^3 - (b+1)b = 2b^2 + 2b + 1$$

Bài 4: Tìm max của: $B = a.b$ biết: $3a + 5b = 12$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $a = \frac{12-5b}{3}$, thay vào $B = b\left(\frac{12-5b}{3}\right) = \frac{-5}{3}b^2 + \frac{12}{3}b$

Bài 5: Tìm min của: $C = x^3 + y^3 + xy$ biết: $x + y = 1$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow y = 1 - x$ thay vào C ta được: $C = x^3 + (1-x)^3 + xy = 2x^2 - 2x + 1$

Bài 6: Tìm min của: $D = x^2 + 2y^2$ biết: $x + 2y = 1$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow x = 1 - 2y$ thay vào $D = (1-2y)^2 + 2y^2$

Bài 7: Tìm min của: $E = 2x^2 + 5y^2$ biết: $4x - 3y = 7$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow y = \frac{4x-7}{3}$ thay vào E và làm tiếp

Bài 8: Cho $a, b > 0$ và $a+b=4$, tìm GTLN của $P = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Hướng dẫn

Ta có: $P = 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{4}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{3}{ab}$

Do $a, b > 0 \Rightarrow a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow ab \leq 4$

Khi đó: $\frac{3}{ab} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{ab} \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, dấu = xảy ra khi $\begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Bài 9: Tìm min của: $F = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, biết: $a + b = 1$ và $a, b > 0$

Hướng dẫn

Cách 1:

Ta có: $\left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 = 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$

$$\geq 8 + 4.2 + 2 = 18$$

Cách 2:

Ta có: $F = \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$

$$F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \quad (1)$$

Mà $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$ thay vào (1) ta được: $F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{1-2ab}{a^2b^2} = 2 + \frac{1}{a^2b^2}$

Lại có: $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2 \leq \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} \geq 16 \Rightarrow F = 2 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 2 + 16 = 18$$

Dấu = khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 10: Cho x, y thỏa mãn: $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$, tìm Max của: $A = x.y$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 2 \Rightarrow 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy + 2$

$$\Rightarrow xy + 2 \leq 4 \Rightarrow xy \leq 2$$

Bài 11: Cho hai số thực a, b $\neq 0$, thỏa mãn: $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$, Tìm min, max của: $S = ab + 2017$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\right) + ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + 2$

$$\Rightarrow ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab + 2017 \leq 2019 \Rightarrow S \leq 2019$$

Mặt khác: $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab\right) - ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2$

$$\Rightarrow -ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow ab + 2017 \geq 2015 \Rightarrow S \geq 2015$$

Bài 12: Cho hai số x, y khác 0 thỏa mãn: $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8$, Tìm min, max của: $A = xy + 2024$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có : } 8 = x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} \Rightarrow 16 = 2x^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - xy + 8$$

$$\Rightarrow 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - xy + 8 \Rightarrow -xy + 8 \leq 16 \Rightarrow xy \geq -8 \Rightarrow A = xy + 2024 \geq 2016$$

$$\text{Mặt khác : } 16 = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy - 8$$

$$\Rightarrow xy - 8 \leq 16 \Rightarrow xy \leq 8 \Rightarrow S = xy + 2024 \leq 2032$$

Bài 13: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ khác 0 biết: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$, Tìm x, y để $B = x.y$ đạt min và đạt max

Hướng dẫn

$$\text{Ta có : } 4 = 8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2\right) + (4x^2 + y^2 - 4xy) + 4xy + 2$$

$$4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x - y)^2 + 4xy + 2 \Rightarrow 4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác : } 4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x + y)^2 - 4xy + 2 \Rightarrow -4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \geq -\frac{1}{2}$$

Bài 14: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$, Tìm min của: $A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có : } A = 16(xy)^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy = 6x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$$

$$\text{Vì } x + y = 1 \text{ nên } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy, \text{ thay vào } A$$

$$A = 6x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy, \text{ Đặt } xy = t \text{ khi đó: } A = 6t^2 - 2t + 12$$

Bài 15: Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x + y = 1$ Tìm min của biểu thức:

$$C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$$

Hướng dẫn

Ta có : $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy = x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy = x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$

Do $x + y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ Thay vào C ta được :

$$C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy = x^2y^2 + 12xy + 4 = (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32 = (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$$

$$\text{Min} C = -32, \text{ Dấu} = \text{xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 16: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x + 2y = 3$ tìm min của: $A = x^2 + 2y^2$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x = 3 - 2y$ thay vào $A = (3 - 2y)^2 + 2y^2 = 6y^2 - 12y + 9$

Bài 17: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$, Tìm min và max của: $A = x^2 + y^2$

Hướng dẫn

Ta có : $x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy = 8 \Rightarrow (x - y)^2 + x^2 + y^2 = 8$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 8 \text{ hay } A \leq 8$$

mặt khác : $8 = 2x^2 + 2y^2 - 2xy \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8 + 2xy \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 8 + (x + y)^2 \geq 8 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{8}{3}$

$$\text{hay } A \geq \frac{8}{3}$$

Bài 18: Cho x,y thỏa mãn: $x + y = 2$, Tìm min của: $A = x^3 + y^3 + 2xy$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $y = 2 - x$ thay vào A ta được : $A = x^3 + (2 - x)^3 + 2x(2 - x)$

Bài 19: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x + y + 4 = 0$, Tìm max của:

$$A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$$

Hướng dẫn

Ta có: $x + y = -4$, nên $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -64 + 12xy$,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16 - 2xy \text{ thay vào } A = 2(-64 + 12xy) + 3(16 - 2xy) + 10xy$$

Bài 20: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $2x + 2y + z = 4$, tìm max của: $A = 2xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 4 - 2x - 2y$ thay vào A ta được :

$$A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y$$

Bài 21: Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x + y + z = 6$. Tìm max của: $A = xy + 2yz + 3zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 6 - x - y$ thay vào $A = xy + 2y(6 - x - y) + 3x(6 - x - y)$

Bài 22: Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$, tìm min và max của:

$$S = x + y + 3$$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x^2 + 2xy + 7x + 7y + 2y^2 + 10 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2x\left(\frac{2y+7}{2}\right) + \frac{(2y+7)^2}{4} + 2y^2 + 7y + 10 - \frac{(2y+7)^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x + y + \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Rightarrow -2 \leq x + y + 3 \leq 1$$

Bài 23: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm min, max của:

$$A = m + n + p$$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $2n^2 + 2np + 2p^2 = 2 - 3m^2 \Rightarrow 3m^2 + 2n^2 + 2p^2 + 2np = 2$

$$\Rightarrow (m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp) + (2m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp) = 2$$

$$\Rightarrow (m + n + p)^2 + (m - p)^2 + (m - n)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m + n + p \leq \sqrt{2}$$

Bài 24: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, Tìm min, max của: $P = x + y + 2z$

Hướng dẫn

Ta có : $P^2 = (x + y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz$, nên ta nhân 6 vào gt :

$$18 = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz) + (5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz - 4xz)$$

$$18 = (x+y+2z)^2 + (x-y)^2 + (2x-z)^2 + (2y-z)^2 \Rightarrow (x+y+2z)^2 \leq 18$$

$$-\sqrt{18} \leq x+y+2z \leq \sqrt{18}$$

Bài 25: Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$,

Tìm min max của: $B = m + n + p$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3$

$$\Rightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np) + (m^2 + n^2 + 5p^2 - 4mp - 2np) = 3$$

$$\Rightarrow 3(m+n+p)^2 + (2p-m)^2 + (n-p)^2 = 3 \Rightarrow 3(m+n+p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m+n+p \leq 1$$

Bài 26: Cho x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$, Tìm min max của: $A = xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 3-x-y$ thay vào $A = xy + y(3-x-y) + x(3-x-y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y$

Bài 27: Cho x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$, Tìm min max của: $B = -xy + 3yz + 4zx$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $z = 3-x-y \Rightarrow B = -xy + 3y(3-x-y) + 4x(3-x-y)$

$$\Rightarrow B = -4x^2 - 3y^2 - 16xy + 9y + 12x$$

Bài 28: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $2x+3y-z=4$, Tìm min max của $A = -xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 2x+3y-4$ thay vào $A = -xy + y(2x+3y-4) + x(2x+3y-4)$

Bài 29: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $2x+3y-z=4$, tìm min max của: $B = 12xy - 3yz - 4zx$

Hướng dẫn

Từ gt ta có : $z = 2x+3y-4$ thay vào $B = 12xy - 3y(2x+3y-4) - 4x(2x+3y-4)$

Bài 30: Cho hai số thực x,y thỏa mãn: $x+y=-2$, tìm min của: $A = 2(x^3 + y^3) - 15xy + 7$

Hướng dẫn

Từ $x + y = -2$, ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -8 + 6xy$ thay vào

$$A = 2(-8 + 6xy) - 15xy + 7 = -3xy - 9 \text{ và } y = -2 - x \text{ thay vào } A = -3x(-2 - x) - 9$$

Bài 31: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = -2$, Tìm min của

$$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$$

Hướng dẫn

$$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$$

Từ $x + y = -2$, ta có: $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$

$$x^3 + y^3 = 6xy - 8, \quad x^2 + y^2 = 4 - 2xy, \text{ Thay vào b ta được :}$$

$$B = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - (6xy - 8) + 2x^2y^2 + 2xy(4 - 2xy) + 13xy$$

$$B = -xy + 24, \text{ thay } y = -2 - x \Rightarrow B = x^2 + 2x$$

Bài 32: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 5$, tìm max của: $A = x^3 + y^3 - 8(x^2 + y^2) + xy + 2$

Hướng dẫn

Vì $x + y = 5$ nên $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$ và $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$ thay vào

$$A = 125 - 15xy - 8(25 - 2xy) + xy + 2$$

Bài 33: Cho hai số x, y thỏa mãn: $x + y = 5$, Tìm max của:

$$B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy$$

Hướng dẫn

$$B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy$$

Vì $x + y = 5$ nên $x^4 + y^4 = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$, $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$, $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$

$$B = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - 4(125 - 15xy) - 20(25 - 2xy) - 2x^2y^2 + xy$$

Bài 34: Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^4 + y^4 - 7 = xy(3 - 2xy)$, Tìm min max của: $P = xy$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x^4 + y^4 - 3xy + 2x^2y^2 = 7 \Rightarrow (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2 - 3xy = 7 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 + \left(2xy - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

$$\Rightarrow \left(2xy - \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{121}{16}$$

Bài 35: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $7x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y - 15 = 0$, Tìm min max của:
 $A = 2x + 3y + 5$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow (2x)^2 + (3y)^2 + 2.2x.3y - 2.2x - 2.3y + 1 + 3x^2 = 16 \Rightarrow (2x + 3y + 1)^2 + 3x^2 = 16$$

Bài 36: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 2yz = 5$, Tìm min max của:
 $P = x + y$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có: } (x^2 + y^2 + 2xy) + (2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 2yz) = 5$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (4z^2 - 4xz + x^2) = 5$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x + y \leq \sqrt{5}$$

Bài 37: Cho các số x, y, z thỏa mãn: $3x + y + 2z = 1$. Tìm min max của: $p = x^2 + y^2 + z^2$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có: } y = 1 - 3x - 2z \Rightarrow y^2 = 1 + 9x^2 + 4z^2 - 6x + 12xz - 4z \text{ khi đó :}$$

$$P = 10x^2 + 5z^2 + 12xz - 6x - 4z + 1$$

Bài 38: Cho các số x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$, Tìm max của: $A = 2xy + 3yz + 4zx$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow z = 1 - x - y \text{ thay vào } A = 2xy + 3y(1 - x - y) + 4x(1 - x - y)$$

Bài 39: Cho x, y $\in \mathbb{R}$, thỏa mãn: $x + 2y = 1$, Tìm max của: $P = x \cdot y$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x = 1 - 2y \text{ thay vào } P = y(1 - 2y)$$

Bài 40: Cho x, y ≥ 0 , $x + y = 1$, Tìm min, max của: $A = x^2 + y^2$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow y = 1 - x$ thay vào $A = x^2 + (1 - x)^2$

Bài 41: Tìm min max của: $P = x + y + z$, biết: $y^2 + z^2 + yz = 1 - \frac{3}{2}x^2$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx) = 2$

$\Rightarrow (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 = 2 \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 2$

Bài 42: Cho $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x - 14y + 18 = 0$, Tìm min, max của: $S = x + y$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow x^2 + 2x(y - 5) + (y - 5)^2 + 3y^2 - 14y + 18 - y^2 + 10y - 25 = 0$

$\Rightarrow (x + y - 5)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 \Rightarrow (x + y - 5)^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x + y - 5 \leq 3$

Bài 43: Cho a, b, c không âm thỏa mãn: $3a + 2c = 51$ và $c + 5b = 21$.

Tìm max của $A = a + b + c$

Hướng dẫn

Cộng theo vế giả thiết ta được: $3a + 3c + 5b = 72 \Rightarrow 3(a + b + c) = 72 - 2b \leq 72$

Do $b \geq 0 \Rightarrow a + b + c \leq \frac{72}{3} = 24$

Bài 44: Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $2a + b = 6 - 3c$ và $3a + 4b = 3c + 4$.

Tìm min $E = 2a + 3b - 4c$

Hướng dẫn

Cộng theo vế ta được: $a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 - 3c \\ b = 3c - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \leq \frac{4}{3} \\ c \geq \frac{2}{3} \end{cases} \text{ do } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Khi đó: $E = 2(4 - 3c) + 3(3c - 2) - 4c = 2 - c$

Bài 45: Cho $x, y, z \geq 0, 2x + 7y = 2014, 3x + 5z = 3031$, Tìm GTLN của biểu thức $A = x + y + z$

Hướng dẫn

Cộng theo vế của gt ta có: $5x + 5y + 5z = 5045 - 2y \leq 5045$ do $y \geq 0$

nên $5(x + y + z) \leq 5045 \Rightarrow x + y + z \leq 1009$

Bài 46: Cho $a + b = 2$, Tìm max của: $A = ab(a^2 + b^2)$

Hướng dẫn

Ta có: $a + b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - 2ab \Rightarrow A = ab(4 - 2ab) = -2a^2b^2 + 4ab$

$A = -(a^2b^2 - 2ab + 1) + 2 \leq 2$, Max $A = 2$

Bài 47: Cho x, y thỏa mãn: $(11x + 6y + 2015)(x - y + 3) = 0$, Tìm min của: $P = xy - 5x + 2016$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $11x + 6y + 2015 = 0$ hoặc $x - y + 3 = 0$

TH1: Ta có: $11x + 6y + 2015 = 0 \Rightarrow y = \frac{11x + 2015}{6}$ thay vào P

TH2: ta có: $x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$ thay vào P

Bài 48: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$, Tìm GTLN của: $B = xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Ta có: $B = xy + z(x + y) = xy + [3 - (x + y)](x + y)$

$= xy + 3(x + y) - (x + y)^2 = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3}{4}(y-1)^2 + 3 \leq 3$

Bài 49: Cho $x^2 + xy + 3y^2 = 5$, tìm Min hoặc max của biểu thức: $P = x^2 - 2xy + 2y^2$

Hướng dẫn

Ta có: $\frac{P}{5} = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + 3y^2}$

Dạng 5: Phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

- Phân tích thành các biểu thức tương đồng để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng phương pháp nhóm hợp lý làm xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2, (a + b + c)^2$.

Bài 1: Tìm GTNN của biểu thức $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$

Lời giải

$$\text{Đặt } y = x - 2 \Rightarrow A = (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$$

Bài 2: Tìm GTNN của $A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8)$

Lời giải

$$A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) = (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 9x + 8 \Rightarrow A = t(t+12) = t^2 + 12t = (t+6)^2 - 36 \geq -36 \Leftrightarrow t = 6 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Bài 3: Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} (x \neq 0)$

Lời giải

$$A = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 - 4y + y^2 \left(y = \frac{1}{x}\right) \Rightarrow A = (y-2)^2 - 3 \geq -3 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 4: Tìm GTNN của: $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Lời giải

$$A = x(x-7)(x-3)(x-4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12), \text{ đặt } x^2 - 7x + 6 = t, \text{ khi đó:}$$

$$A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ dấu “=” khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy Min A = - 36 khi x = 1 hoặc x = 6

Bài 5: Tìm GTNN của: $B = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$

Lời giải

$$B = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 5), \text{ Đặt } x^2 - 4x + 4 = 0. \text{ Khi đó:}$$

$$B = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \geq -1, \text{ Dấu “=” khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bài 6: Tìm min của: $A = x(x+2)(x+4)(x+6) + 8$

Lời giải

$$A = x(x+6)(x+2)(x+4) + 8 = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 8, \text{ Đặt } x^2 + 6x + 4 = t. \text{ Khi đó:}$$

$$A = (t-4)(t+4) + 8 = t^2 - 16 + 8 = t^2 - 8 \geq -8, \text{ Dấu “=” Khi đó:}$$

$$t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + \sqrt{5} \\ x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Bài 7: Tìm GTNN của: $B = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Lời giải

$$B = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6), \text{ Đặt } x^2 + 5x + 5 = t, \text{ Khi đó:}$$

$$B = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \geq -1, \text{ Dấu “=” khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 8: Tìm GTNN của: $A = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2 + x - 2 = t. \text{ Khi đó: } A = (t-4)(t+4) = t^2 - 16 \geq -16$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } t = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 9: Tìm GTNN của : $C = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$C = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$, Đặt $x^2 + 5x = t$. Khi đó:

$$C = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36 \text{ , Dấu “=” khi } t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 10: Tìm GTNN của: $D = (2x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$

Lời giải

$D = (2x-1)(x+3)(x+2)(2x+1) = (2x^2 + 5x - 3)(2x^2 + 5x + 2)$, Đặt $2x^2 + 5x = t$, Khi đó:

$$D = (t-3)(t+2) = t^2 - t - 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \geq \frac{-25}{4} \text{ , Dấu “=” khi:}$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{4}$$

Bài 11: Tìm min của: $C = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2011$

Lời giải

$C = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) + 2011 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2011$, Đặt $x^2 + 5x + 5 = t$

$$\text{Khi đó: } C = (t-1)(t+1) + 2011 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 12: Tìm max của: $E = 5 + (1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$E = 5 - (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = -(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 5$, đặt $x^2 + 5x = t$.

Khi đó: $E = -(t-6)(t+6) + 5 = -(t^2 - 36) + 5 = -t^2 + 41 \leq 41$

$$\text{Dấu “=” “ Khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 13: Tìm GTNN của: $M = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$$M = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2+5x-6)(x^2+5x+6), \text{ Đặt } x^2+5x = t.$$

$$\text{Khi đó: } M = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ Dấu “=” khi } t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 14: Tìm min của: $D = (x+1)(x^2-4)(x+5) + 2014$

Lời giải

$$D = (x+1)(x+2)(x-2)(x+5) + 2014 = (x^2+3x-10)(x^2+3x+2) + 2014, \text{ Đặt } x^2+3x-4 = t$$

$$\text{Khi đó: } D = (t-6)(t+6) + 2014 = t^2 + 1978, \text{ Dấu “=” xảy ra khi:}$$

$$t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Bài 15: Tìm GTNN của: $C = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

Lời giải

$$C = (x^4 - 2.3x^2.x + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0$$

Bài 16: Tìm GTNN của: $D = (x+8)^4 + (x+6)^4$

Lời giải

$$\text{Đặt: } x+7 = y \Rightarrow D = (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2$$

Bài 17: Tìm max của: $F = 2 - 3(x+1)^4 - 3(x-5)^4$

Lời giải

$$\text{Đặt } x-2 = t \Rightarrow F = 2 - 3(t+3)^4 - 3(t-3)^4$$

$$-F = 3(t^2 + 6t + 9)^2 + 3(t^2 - 6t + 9)^2 - 2 = 6t^4 + 324t^2 + 484 = 6(t^4 + 54t^2) + 484$$

$$F = -6(t^2 + 27)^2 + 3890 \leq 3890$$

Bài 18: Tìm min của: $G = (x+3)^4 + (x-7)^4$

Lời giải

$$\text{Đặt } x-2=t \Rightarrow G=(t+5)^4+(t-5)^4=(t^2+10t+25)^2+(t^2-10t+25)^2$$

$$G=2t^4+300t^2+1250=2(t^4+2.75t^2+5625)-10^4=2(t^2+75)^2-10^4 \geq -10^4$$

Bài 19: Tìm min của: $I = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x + 20$

Lời giải

$$I = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 20 = x^2(x^2 - 6x + 9) + 2x^2 - 12x + 20$$

$$I = x^2(x-3)^2 + 2(x^2 - 6x + 9) + 2 = x^2(x-3)^2 + 2(x-3)^2 + 2 \geq 2$$

Bài 20: Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x: $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m$

Lời giải

$$VT = (x+1)(x+3)(x+2)^2 = (x^2+4x+3)(x^2+4x+4), \text{ Đặt } x^2+4x=t, \text{ Khi đó:}$$

$$VT = (t+3)(t+4) = t^2 + 7t + 12 = t^2 + 2.t.\frac{7}{2} + \frac{49}{4} + 12 - \frac{49}{4} = \left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4}$$

Dạng 6 : Sử dụng bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

a. Định nghĩa:
$$\begin{cases} |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \\ |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \end{cases}$$

b. Tính chất

$$+) \forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| \geq 0; |A| \geq A$$

$$+) \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

$$+) \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y| \Leftrightarrow (x-y).y \geq 0$$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = |x-3| + |x-7|$

b. $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

c. $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

d. $D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$

e. $E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$

Lời giải

a. $A = |x-3| + |x-7| = |x-3| + |7-x| \geq |x-3+7-x| = |4| = 4 \Rightarrow A \geq 4 \Leftrightarrow (x-3)(7-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

b. $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

Ta có : $B = |x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2(1) \Leftrightarrow (x-1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Mà : $|x-2| \geq 0 \Leftrightarrow x = 2(2) \Rightarrow C \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

c. $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có : $|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3; |x-2| + |x-4| = |x-2| + |4-x| \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

$$\Rightarrow C \geq 4 \Rightarrow \min C = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$$

$$d. D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$$

Áp dụng bất đẳng thức $|M| \geq M \forall M \in R$

$$\text{Ta có : } D = |x+5| + |x+2| + |7-x| + |8-x| \geq x+5+x+2+7-x+8-x = 22 \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \min D = 22 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \\ x \leq 7 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 7$$

$$e. E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6| = |-x-1| + |-x-2| + |-x-3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$$

$$\Rightarrow E \geq -x-1-x-2-x-3+x+4+x+5+x+6 = 9 \forall x \in R \Rightarrow \min E = 9 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3$$

Bài 2: Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau

$$a. A = |x+3| + |x-2| + |x-5|$$

$$b. B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6|$$

Lời giải

$$a. A = |x+3| + |x-2| + |x-5| = |x+3| + |x-2| + |x-5| \geq |x+3| + |5-x| \geq x+3+5-x = 8 \forall x \in R$$

$$\text{Dấu ' = ' } \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 = 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$$b. B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6| = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |5-x| + |6-x|$$

$$\geq |x-2| + |x-3| + |5-x| + |6-x| \geq x-2+x-3+5-x+6-x = 6 \forall x \in R \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 3: Cho số thực x. Tìm GTLN của các biểu thức sau

$$a. A = |x+5| - |x-2|$$

$$b. B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$$

Lời giải

a. $A = |x+5| - |x-2|$

Áp dụng bất đẳng thức : $|x| - |y| \leq |x-y| \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x-y) \geq 0$

$$A = |x+5| - |x-2| \leq |x+5 - (x-2)| = 7 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max A = 7 \Leftrightarrow (x-2)(x+5 - x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

b. $B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$

$$\text{Vì } -|x-5| \leq 0 \Rightarrow B \leq |x-2| - |x-4| \leq |x-2 - x + 4| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ (x-4)(x-2-x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Bài 4:[Chuyên LHP – 2003] Cho số thực x. Tìm GTNN của

$$A = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x+2}}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-2} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x-2 \Rightarrow x = t^2 + 2 \Rightarrow A = \sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = \sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-3)^2}$$

$$= |t-1| + |3-t| \geq t-1+3-t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ 3-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 11$$

Bài 5: Cho số thực x. Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{x-4+2\sqrt{x-5}} + \sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}} (x \geq 5)$

b. $B = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + 5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} (x \geq 1)$

Lời giải

a. Đặt $t = \sqrt{x-5} (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 5 \Rightarrow A = \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(2-t)^2} = |t+1| + |2-t| = t+1 + |2-t| \geq t+1+2-t = 3$

$$A = 3 \Leftrightarrow 2-t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9$$

b. Đặt $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow A = \sqrt{(t-1)^2} + 5\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-1| + 5|t-2| + |3-t|$

$$\geq |t-1| + |3-t| \geq t-1+3-t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ t=2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x=5$$

Bài 6: (HSG Tỉnh Sóc Trăng năm 2014 – 2015) Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-2| + 2012$

Lời giải

Ta có $A = |x+3| + |x-2| + 2012 = |x+3| + |2-x| + 2012$

Lại có : $|x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3$

Mà $|2-x| \geq 2-x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow A = |x+3| + |2-x| + 2012 \geq x+3+2-x+2012 = 2017$

Vậy $\min A = 2017 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$

Bài 7: (HSG Tỉnh Quảng Ngãi năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3$

Lời giải

Ta có $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3 = |x+3| + |x-1| + |4-x| - 3$

Lại có $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1; |x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3; |4-x| \geq 4-x \Leftrightarrow x \leq 4 \Rightarrow A \geq x+3+0+4-x-3 = 4$

Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x=1$

Bài 8: (Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 420) Tìm GTNN của

$$A = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n| + 2017 (a_1 < a_2 < \dots < a_n)$$

Lời giải

- Trường hợp $n = 2k \Rightarrow A = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_k| + |a_{k+1}-x| + |a_{k+2}-x| + \dots + |a_{2k}-x| + 2017$

Ta có $|x - a_i| \geq x - a_i \Leftrightarrow x \geq a_i \forall i = \overline{1, k}; |a_{k+1} - x| \geq a_{k+1} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+1} \forall j = \overline{1, k}$

$$\Rightarrow A \geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + a_{k+1} - x + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k} - x + 2017 = (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}) -$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Leftrightarrow a_k \leq x \leq a_{k+1}$$

- Trường hợp

$$n = 2k + 1 \Rightarrow A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |x - a_{k+1}| + |a_{k+2} - x| + |a_{k+3} - x| + \dots + |a_{2k} - x| + 2017$$

Ta có: $|x - a_{k+1}| \geq 0 \Leftrightarrow x = a_{k+1}; |a_{k+j} - x| \geq a_{k+j} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+j} \forall j = \overline{1, k}$

Lại có $|x - a_i| \geq x - a_i \Leftrightarrow x \geq a_i \forall i = \overline{1, k}; |a_{k+j} - x| \geq a_{k+j} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+j} \forall j = \overline{1, k}$

$$\Rightarrow A = x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + 0 + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k+1} - x + 2017 = (a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k+1}) -$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Rightarrow \text{Min} B = (a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Leftrightarrow x = a_{k+1}$$

Bài 9: (HSG Tỉnh Yên Bái năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của $A = |5x + 3| + |2x - 3| - x + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = |5x + 3| + |2x - 3| - x + 1 = 2 \left| x + \frac{3}{5} \right| + 3 \left| x + \frac{3}{5} \right| + |2x - 3| - x + 1$$

$$\text{Mặt khác } 2 \left| x + \frac{3}{5} \right| \geq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}; 3 \left| x + \frac{3}{5} \right| \geq 3 \left(x + \frac{3}{5} \right) \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$$

$$\text{Lại có } |3 - 2x| \geq 3 - 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \geq 0 + 3 \left(x + \frac{3}{5} \right) + 3 - 2x + 1 = \frac{29}{5} \Rightarrow \text{Min} B = \frac{29}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: (Chuyên Toán Quảng Ngãi năm 2014 – 2015) Tìm GTNN của

$$A = |4x + 3| + |5x - 7| + |2x - 9| - 15$$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{-1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$

Bài 2: Tìm GTNN của $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Bài 3: Tìm GTNN của $A = (2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 4: Tìm GTNN của $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-1998|$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = 999^2 \Leftrightarrow 999 \leq x \leq 1000$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 5: (Chuyên Toán Quảng Ngãi năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của

$$A = |x\sqrt{3} + 2| + |x\sqrt{5} - 7| + |x\sqrt{11} - 9|$$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{9}{\sqrt{11}}(\sqrt{11} - \sqrt{5} + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{11}}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 6: (Chuyên Toán Quảng Trị năm 2015 – 2016) Tìm GTNN của

$$A = |x\sqrt{5} - 6| + |x\sqrt{2} + 1| + 2x + 2017$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \min A = \frac{2018\sqrt{2} + \sqrt{5} - 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ hay } x = \frac{-1}{4}$$

Dạng 7: Dạng phân thức

A. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Phương pháp: Biểu thức dạng này đạt giá trị nhỏ nhất khi mẫu đạt giá trị lớn nhất

$$A = \frac{m}{ax^2 + bx + c} \Rightarrow A_{\min} \Leftrightarrow (ax^2 + bx + c)_{\max}$$

Bài 1: Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau

a) $A = \frac{1}{9x^2 - 12x + 10}$

b) $B = \frac{2}{x^2 + x + 4}$

c) $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$

Lời giải

a. $A = \frac{1}{9x^2 - 12x + 10} = \frac{1}{(3x - 2)^2 + 6} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow A_{\max} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

b. $B = \frac{2}{x^2 + x + 4} = \frac{2}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}} \leq \frac{2}{\frac{15}{4}} = \frac{8}{15} \Rightarrow B_{\max} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

c. $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$

+) $y = 0 \Rightarrow A = 0$

+) $y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{1}{9\frac{x^2}{y^2} - 12\frac{x}{y} + 5} = \frac{1}{9t^2 - 12t + 5} (t = \frac{x}{y}) = \frac{1}{(3t - 2)^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$

Bài 2: Tìm GTNN hoặc GTLN của biểu thức sau

a) $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

b) $y = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

c) $A = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2} (x \neq 0)$

Lời giải

a) Ta có thể viết: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow y \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

Vậy GTLN của $y = \frac{4}{3}$ tại $x = \frac{-1}{2}$

b) $y = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}; (3x - 1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \Rightarrow \frac{1}{(3x - 1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $y = 0 \Rightarrow A = 0$

+) $y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3}{-25\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} - 5} = \frac{3}{-25t^2 + 20t - 5} = \frac{-3}{(5t - 2)^2 + 1}$

Vì $(5t - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(5t - 2)^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow A \geq -3 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y$

Bài 3: Tìm GTLN của biểu thức sau

a) $A = \frac{5}{x^2 - 2x - 5}$

b) $B = \frac{1}{x^2 - 4x + 11}$

Lời giải

a) $A = \frac{5}{x^2 - 2x - 5} = \frac{5}{(x - 1)^2 - 6} \Rightarrow \max A = \frac{-5}{6} \Leftrightarrow x = 1$

b) $B = \frac{1}{x^2 - 4x + 11} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow x = 2$

B. Phân thức có mẫu là bình phương của 1 nhị thức

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$\Rightarrow$ Ta đưa về dạng: $A = m + \frac{C}{D} (\frac{C}{D} \geq 0)$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

c. $C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2} (x \neq 2)$

d. $D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} (x \in \mathbb{R})$

e. $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

f. $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

Lời giải

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} + \frac{(x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^2} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

Cách khác: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1) = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Đặt $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow A = 3 - 2y + y^2 = (y-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$

c. $t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{t} \Rightarrow A = t^2 \left[4\left(2 + \frac{1}{t}\right)^2 - 6\left(2 + \frac{1}{t}\right) + 1 \right] = 4(2t+1)^2 - 6t(2t+1) + t^2 = 5(t+1)^2 - 1 \geq -1$

$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = 1$

$$d. D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} (x \in R) = \frac{2(x^2 - 8x + 22) - 3}{x^2 - 8x + 22} = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6}$$

$$\text{Vì } (x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$D = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$e. E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(x^4 + 2x^2 + 1) - 9(x^2 + 1) + 4}{(x^2 + 1)^2} = 4 - \frac{9}{x^2 + 1} + \frac{4}{(x^2 + 1)^2} = 4t^2 - 9t + 4 \left(t = \frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

$$E = \left(2t - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{81}{16} + 4$$

$$\text{Ta có: } t \leq 1 \Rightarrow 2t - \frac{9}{4} \leq 2 - \frac{9}{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \left(2t - \frac{9}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow A \geq \frac{1}{16} - \frac{17}{16} = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Lời giải ngắn gọn hơn

$$E + 1 = \frac{5x^4 + x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \Rightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Cách khác: } E = \frac{4x^4}{(x^2 + 1)^2} - \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f. F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{(x-2)^2 + 1} \geq 3 - 5 = -2$$

$$\text{Do } (x-2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{-5}{(x-2)^2 + 1} \geq -5 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

$$a. A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} (x \neq 1)$$

$$b. B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$$

$$c. C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} (x \neq -5)$$

$$d. D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$$

Lời giải

$$\text{a. } A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3(x^2 + 2x + 3)}{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

$$\text{Có: } (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow A_{\max} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b. } B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 1 - x + 1 - 11}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 - (x-1) - 11}{(x-1)^2} = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{11}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow A = -1 - y - 11y^2 = -(11y^2 + y + 1) = -\left[11\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{22} + \frac{1}{22^2} - \frac{1}{22^2} + \frac{1}{11}\right)\right]$$

$$= -\left[11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 + \frac{43}{44}\right] = \frac{-43}{44} - 11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 \leq \frac{-43}{44} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{22} \Leftrightarrow x = -21$$

$$\text{c. } C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} (x \neq -5) = \frac{x}{(x+5)^2} = \frac{(x+5) - 5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5} - \frac{5}{(x+5)^2} = t - 5t^2 (t = \frac{1}{x+5})$$

$$\Rightarrow -A = 5t^2 - t = 5\left(t - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{20} \geq \frac{-1}{20} \Rightarrow A \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow t = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{d. } D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1). \text{ Đặt}$$

$$t = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow A = t^2 \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 14 \right] = (t+1)^2 + 4t(t+1) - 14t^2 = -(3t-1)^2 + 2 \leq 2$$

$$D = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 3: Tìm GTNN, GTLN của $A = \frac{7y^2 - 4xy}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

Lời giải

Điều kiện $(x, y) \neq (0, 0)$

$$+) A+1 = \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{(x-3y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 3y \neq 0$$

$$+) A-4 = \frac{-(y^2 + 4xy - 4x^2)}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{-(2x-y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \leq 0 \Rightarrow A \leq 4 \Leftrightarrow x = 1; y = 2$$

Bài 4: Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} (x \neq -1); B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

Lời giải

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - x - 1 + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - y + y^2 \left(y = \frac{1}{x+1}\right)$$

$$A = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

$$+) B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - x + 1 + 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = y^2 - y + 1 \left(y = \frac{1}{x-1}\right)$$

$$B = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Bài 5: Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x+y)^2 + (x-y)^2]}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$$

Bài 6: Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) - 6(x - 1) - 9}{(x - 1)^2} = 2 + \frac{6}{x - 1} - \frac{9}{(x - 1)^2} = -\left(\frac{3}{x - 1} + 1\right)^2 + 3 \leq 3$$

$$\forall -\left(\frac{3}{x - 1} + 1\right)^2 \leq 0 \forall x \neq 1 \Rightarrow \max A = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{x - 1} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

C. Tìm GTLN, GTNN của phân thức có dạng khác

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

1. Bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{8x+12}{x^2+4}$

b. $B = \frac{4x+2}{x^2+2}$

c. $C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0)$

Lời giải

a. $A = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{x^2+8x+16-x^2-4}{x^2+4} = -1 + \frac{(x+4)^2}{x^2+4} \geq -1 \Leftrightarrow x = -4$

b. $B = \frac{4x+2}{x^2+2} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{(x+2)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x = -2$

c. $C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0) = \frac{(x-4)^2}{x} + 18 \geq 18 \Leftrightarrow x = 4$

Bài 2: Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau

a. [HSG – Thanh Chương – 2011] $A = \frac{3-4x}{x^2+1}$

b. $B = \frac{2x+1}{x^2+2}$

c. $C = \frac{4x+3}{x^2+1}$

d. $D = \frac{8x+3}{4x^2+1}$

e. $E = \frac{4x}{4x^2+1}$

Lời giải

a. [HSG – Thanh Chương – 2011]

$$A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$+) A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow A_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$b. B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)}$$

$$+) B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow A_{\min} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$+) B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{x^2+2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} + 1 \leq 1 \Rightarrow A_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$c. C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$+) C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{-4x^2+4x-1+4x^2+4}{x^2+1} = \frac{-(2x-1)^2}{x^2+1} + 4 \leq 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$d. D = \frac{8x+3}{4x^2+1} = \frac{(4x^2+8x+4)-(4x^2+1)}{4x^2+1} = -1 + \frac{(2x+2)^2}{4x^2+1} \geq -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$+) D = \frac{8x+3}{4x^2+1} = \frac{16x^2+4-(16x^2-8x+1)}{4x^2+1} = 4 - \frac{(4x-1)^2}{4x^2+1} \leq 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$e. E = \frac{4x}{4x^2+1} = \frac{4x^2+1-4x^2-1+4x}{4x^2+1} = 1 - \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$+) E = \frac{4x}{4x^2+1} = \frac{-(4x^2+1)+(4x^2+4x+1)}{4x^2+1} = -1 + \frac{(2x+1)^2}{4x^2+1} \geq -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Bài 3: [HSG – Yên Phong – 14/04/2014]

Tìm GTLN của biểu thức $A = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Lời giải

$$A = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A_{\max} = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 4: [HSG – Yên Phong – 2016 – 2017] Tìm GTNN của các biểu thức sau

$$D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} (x \in R)$$

Lời giải

$$D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} (x \in R) = \frac{335(6x + 8)}{x^2 + 1} = \frac{335(x^2 + 6x + 9 - x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \frac{335(x + 3)^2}{x^2 + 1} - 335 \geq -335 \Leftrightarrow x = -3$$

Bài 5: Tìm GTNN của biểu thức sau $A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in R^+)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in R^+) = \frac{(x - 4)^2}{3x} + \frac{23}{3} \geq \frac{23}{3} \Rightarrow \min A = \frac{23}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 6: Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} (x, y \in R)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} (x, y \in R) = \frac{y^4 + 1}{(y^4 + 1)(x^2 + 2)}$$

Vì $y^4 + 1 \neq 0 \forall x$ nên chia cả tử và mẫu cho $y^4 + 1$ ta được: $A = \frac{1}{x^2 + 2}$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \forall x \Rightarrow A = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; y \in R$$

Bài 7: Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Lời giải

+) Xét $x=0 \Rightarrow A=0$ giá trị này không phải giá trị lớn nhất của A vì với $x \neq 0 \Rightarrow A > 0$

+) Xét $x \neq 0$ đặt $P = \frac{1}{A} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$

Ta có $P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1; x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \text{ (Cosi)} \Rightarrow P \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow P_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bài 8: Tìm GTNN của biểu thức sau $A = \frac{-x}{(x+2017)^2} (x > 0)$

Lời giải

2. Bậc của tử bằng bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTN N của các biểu thức sau

a. $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} (x \neq 0)$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

c. $C = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

d. $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$

Lời giải

a. $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} (x \neq 0) = \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{3x^2} = \frac{(x-3)^2}{3x^2} + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A_{\min} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$

c. $C = \frac{2(x^2 + 2x + 3)}{2(x^2 + 2)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{2(x^2 + 2)} + \frac{x^2 + 2}{2(x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

d. $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2} = \frac{2016x^2 - 2x \cdot 2016 + 2016}{2016x^2} = \frac{(x-2016)^2}{x^2} + \frac{2015}{2016} \geq \frac{2015}{2016} \Leftrightarrow x = 2016$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7}$

b. $B = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

Lời giải

a. $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7} = \frac{2(3x^2 + x + 7) + 5}{3x^2 + x + 7} = 2 + \frac{5}{3x^2 + x + 7}$

Đặt $M = 3x^2 + x + 7 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12} \geq \frac{83}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \Rightarrow A_{\max} = M_{\min} \Rightarrow A_{\max} = 2 + \frac{5}{\frac{83}{12}} = 2 \frac{60}{83} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

$$b. B = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2(x^2 + 2) - 4 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 3: Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau

$$a. A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

$$b. B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1}$$

Lời giải

$$a. A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$+) A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4}{x^2 + 1} - \frac{(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 4 \Leftrightarrow x = 1$$

$$b. B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2 - (2x^2 + 2x + 2)}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 \leq -2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$+) \text{ Với } x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 = \frac{3}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2$$

$$\text{Ta lại có: } 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow A \geq \frac{3}{\frac{3}{4}} - 2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 4: Tìm GTLN của $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

Lời giải

$$A = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{(x+1)^2 + 2}\right]_{\max} \Leftrightarrow [(x+1)^2 + 2]_{\min} \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow A_{\max} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 5: Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} (x \in \mathbb{R})$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$