

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác

* *Định nghĩa:* Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

* *Định lý 1:* Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

* *Định lý 2:* Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

2. Đường trung bình của hình thang

* *Định nghĩa:* Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

* *Định lý 3:* Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

* *Định lý 4:* Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa và định lý về đường trung bình của tam giác để chứng minh

Phương pháp giải: Sử dụng Định nghĩa đường trung bình của tam giác, Định lý 1, Định lý 2 để suy ra điều cần chứng minh.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A , có M là trung điểm của BC . Kẻ tia Mx song song với AC cắt AB tại E và tia My song song với AB cắt AC tại F . Chứng minh:

a) EF là đường trung bình của tam giác ABC ;

b) AM là đường trung trực của EF .

Bài 2. Cho tam giác ABC , có AM là trung tuyến ứng với BC . Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Đoạn CD cắt AM tại I . Chứng minh:

a) EM song song với DC ;

b) I là trung điểm của AM ;

c) $DC = 4DI$.

Dạng 2. Sử dụng định nghĩa và định lí về đường trung bình của hình thang để chứng minh

Phương pháp giải: Sử dụng Định nghĩa đường trung bình của hình thang, Định lí 3, Định lí 4 để suy ra điều cần chứng minh.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh:

a) ΔAFD cân tại F;

b) $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$.

Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Các đường phân giác ngoài của $\hat{A}$ và $\hat{D}$ cắt nhau tại E , các đường phân giác ngoài của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại F . Chứng minh:

a) EF song song với AB và CD ;

b) EF có độ dài bằng nửa chu vi hình thang $ABCD$.

Dạng 3. Sử dụng phối hợp đường trung bình của tam giác và đường trung bình của hình thang để chứng minh

Phương pháp giải: Sử dụng Định nghĩa đường trung bình của tam giác, Định nghĩa đường trung bình của hình thang và các Định lí : 1, 2, 3, 4 để suy ra điều cần chứng minh.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BD, AC, BC . Chứng minh:

a) M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng;

$$\text{b) } NP = \frac{1}{2}|DC - AB|.$$

Bài 6. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ và $DA = d$. Các tia phân giác của góc A và góc D cắt nhau tại E , các tia phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại F . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC .

a) Chứng minh M, E, N, F cùng nằm trên một đường thẳng.

b) Tính độ dài MN , MF , FN theo a , b , c , d .

Dạng 4. Tổng hợp

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Từ H kẻ tia Hx vuông góc với AB tại P và tia Hy vuông góc với AC tại Q . Trên các tia Hx, Hy lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $PH = PD, QH = QE$. Chứng minh:

a) A là trung điểm của DE ;

b) $PQ = \frac{1}{2}DE$;

c) $PQ = AH$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến ứng với BC . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{2} AC$. Kẻ Mx song song với BD và cắt AC tại E . Đoạn BD cắt AM tại I . Chứng minh:

a) $AD = DE = EC$;

b) $S_{AIB} = S_{IBM}$;

c) $S_{ABC} = 2S_{IBC}$.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC .

a) Chứng minh EK song song với CD, FK song song với AB .

b) So sánh EF và $\frac{1}{2}(AB + CD)$.

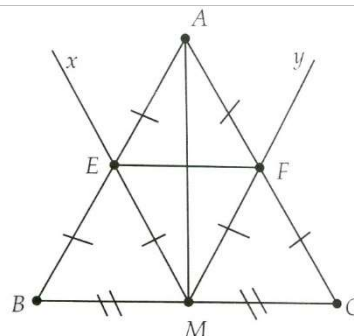
c) Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để ba điểm E, F, K thẳng hàng. Từ đó chứng minh $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$. Có G là trung điểm của đoạn nối các trung điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi m là một đường thẳng không cắt cạnh nào của hình thang $ABCD$; Gọi A', B', C', D', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, G lên đường thẳng m . Chứng minh $GG' = \frac{1}{2}(AA' + BB' + CC' + DD')$.

HƯỚNG DẪN

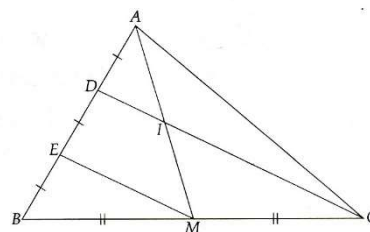
Bài 1.

- a) Mx đi qua trung điểm M của BC và song song với AC.
Suy ra Mx đi qua trung điểm E của AB (theo Định lí 1).
Tương tự, ta được F cũng là trung điểm của AC. Khi đó EF trở thành đường trung bình của tam giác ABC;
b) Do ME và MF cũng là đường trung bình nên có $ME = MF = AE = AF$. Suy ra AM là đường trung trực của EF.



Bài 2.

- a) Ta có EM là đường trung bình của tam giác BCD $\Rightarrow$ ĐPCM.
b) DC đi qua trung điểm D của AE và song song với EM $\Rightarrow$ DC đi qua trung điểm I của AM.
c) Vì DI là đường trung bình của tam giác AEM nên $DI = \frac{1}{2} EM$. (1)



Tương tự, ta được: $EM = \frac{1}{2} DC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DC = 4DI$

Bài 3.

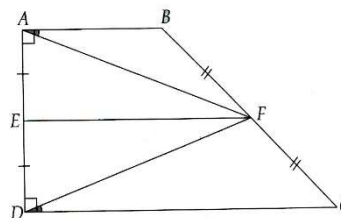
- a) Ta có E là đường trung bình của hình thang ABCD.
 $\Rightarrow EF \parallel AB$.

Suy ra $EF \perp AD$

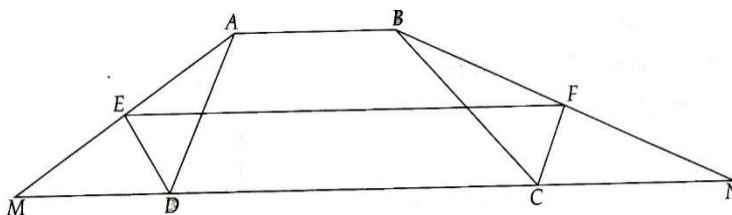
Khi đó EF vừa trung tuyến, vừa là đường cao của tam giác AFD $\Rightarrow$ ĐPCM.

- b) Tam giác AFD cân tại F nên $\widehat{EAF} = \widehat{EDF}$

Suy ra $\widehat{FAB} = \widehat{CDF}$



Bài 4.



a) Gọi M và N lần lượt là giao điểm của AE, BF với CD.

Ta có: $\widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{D}$ ngoài, $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}\widehat{A}$ ngoài.

Mà $\widehat{A}$ ngoài + $\widehat{D}$ ngoài = 180° (do $AB \parallel CD$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{DAE} = 90^\circ$, tức là tam giác ADE vuông tại E.

Khi đó, tam giác ADM cân tại D (do có DE vừa là đường phân giác, vừa là đường cao) và E là trung điểm của AM.

Chứng minh tương tự, ta được F là trung điểm của BN.

Từ đó, suy ra EF là đường trung bình của hình thang ABNM và ta được ĐPCM

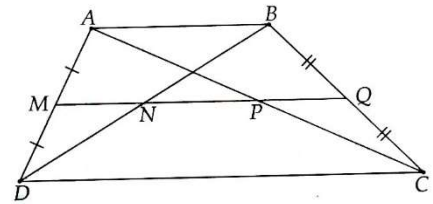
b) Từ ý a), $EF = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$

Lưu ý: Có thể sử dụng tính chất đường phân giác để chứng minh.

Bài 5.

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow MN \parallel AB$



Tương tự, ta được $MP \parallel CD$ và $MQ \parallel AB, CD$.

Như vậy, MN, MP, MQ cùng song song $AB \Rightarrow$ ĐPCM.

b) Ta có: $\frac{1}{2}|DC - AB| = \frac{1}{2}|2MP - 2MN| = |MP - MN| = NP$

Bài 6.

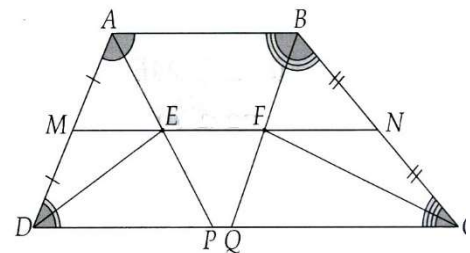
a) Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AE, AF với CD.

Chứng minh tương tự 4.

b) Ta có:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(a + c)$$

Lại có:



$c = CD = CQ + QD = BC + QD = b + QD$ (do tam giác BCQ cân) $\Rightarrow QD = c - b$.

Trong hình thang ABQD có M là trung điểm của AD và $MF \parallel DQ$ nên chứng minh được F là trung điểm của BQ, từ đó chứng minh MF là đường trung bình của hình thang ABQD.

Vì MF là đường trung bình của hình thang ABQD.

$$\Rightarrow MF = \frac{1}{2}(AB + DQ) = \frac{1}{2}(a + c - b)$$

Mặt khác, FN là đường trung bình của tam giác BCQ, tức là $FN = \frac{1}{2}CQ = \frac{1}{2}b$.

Bài 7.

a) Chứng minh được tam giác ADH và AEH cân tại A.

Khi đó: $\widehat{DAP} = \widehat{HAP}$, $\widehat{EAQ} = \widehat{HAQ}$ và $AD = AH = AE$.

Từ đó, suy ra được A, A, E thẳng hàng và A là trung điểm DE.

b) PQ là đường trung bình của tam giác DHE $\Rightarrow$ ĐPCM.

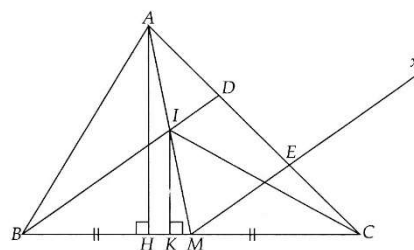
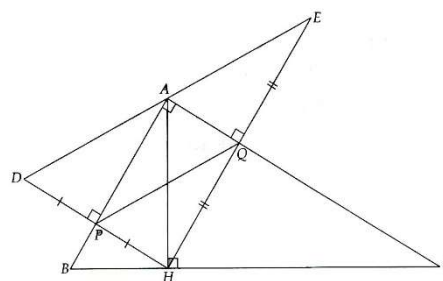
c) Có $AH = AD = AE = \frac{1}{2} DE$, mà $PQ = \frac{1}{2} DE \Rightarrow AH = PQ$.

Bài 8.

a) Theo định lý 1, trong tam giác BDC có: M là trung điểm của BC, $ME \parallel BD \Rightarrow E$ là trung điểm của DC $\Rightarrow$

$$DE = EC = \frac{1}{2} DC.$$

Suy ra $AD = DE = EC$.



b) Từ ý a) D là trung điểm của AE. Suy ra ID là đường trung bình của tam giác AME hay $IA = IM$.

Vậy $S_{AIB} = S_{IBM}$.

c) Hạ hai đường cao AH và IK của tam giác ABC và IBC

Chứng minh được IK là đường trung bình của tam giác AHM $\Rightarrow IK = \frac{1}{2} AH$.

Xét hai tam giác ABC và IBC có chung đáy BC và hai đường cao AH = 2IK $\Rightarrow ĐPCM$.

Bài 9 .

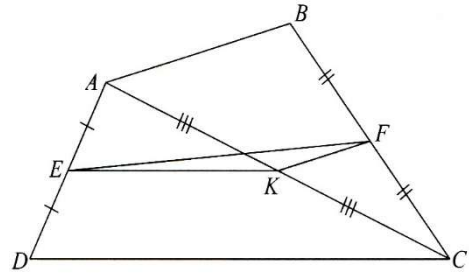
a) HS tự chứng minh.

b) Xét tam giác

$$EFK : EF \leq EK + KF = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AB + CD);$$

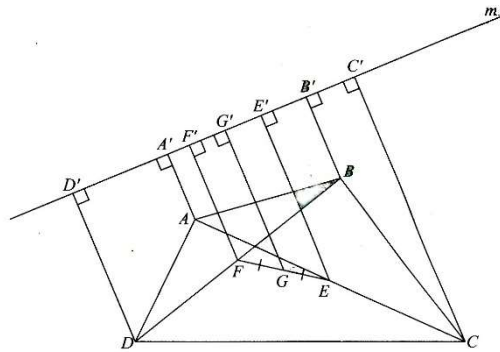
c) Để E, F, K thẳng hàng, khi đó EF đồng thời song song với AB và CD. Tức là tứ giác ABCD là hình thang (AB//CD)

$$\text{Theo định lý 4, } EF = \frac{1}{2}(AB + CD).$$



Bài 10. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD; E' và F' lần lượt là hình chiếu của E, F trên đường thẳng m.

Khi đó, GG' là đường trung bình của hình thang EE'F'F



$$\Rightarrow GG' = \frac{1}{2}(EE' + FF').$$

Mà EE' và FF' lần lượt là đường trung bình của hình thang AA'C'C và BB'D'D.

$$\Rightarrow EE' = \frac{1}{2}(AA' + CC') \text{ và } FF' = \frac{1}{2}(BB' + DD')$$

Thay vào (1) ta được ĐPCM.

B. CÁC DẠNG BÀI NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

- Đường trung bình của tam giác

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$, đường chéo BD là đường trung trực của AC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AB . Vẽ $ME \perp BC$ và $NF \perp CD$ ($E \in BC, F \in CD$). Chứng minh rằng ba đường thẳng ME, NF và AC đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE và CD . Đường thẳng MN cắt tia AB và AC lần lượt là tại P và Q . Hỏi hai điểm D và E phải có điều kiện gì để tam giác APQ cân tại A ?

Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi Bx và Cy lần lượt là các đường chứa tia phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên Bx và Cy .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCKH$ là hình thang;

b) Tam giác ABC phải có điều kiện gì để hình thang $BCKH$ là hình thang cân?

Bài 4. Cho tam giác ABC , trực tâm H . Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng khoảng cách từ O đến BC bằng nửa độ dài AH .

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và đường phân giác BD . Biết rằng

$$AH = \frac{1}{2}BD, \text{ tính số đo các góc của tam giác } ABC$$

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB và n điểm $O_1, O_2, \dots, O_n$ không nằm giữa A và B sao cho

$$O_1A + O_2A + \dots + O_nA = O_1B + O_2B + \dots + O_nB = a. \text{ Chứng minh rằng tồn tại một điểm } M \text{ sao cho}$$

$$O_1M + O_2M + \dots + O_nM \leq a.$$

- Đường trung bình của hình thang

Bài 7. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB < CD$). Vẽ $AH \perp CD$. Chứng minh rằng:

a) HD bằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo;

b) HC bằng đường trung bình của hình thang.

Bài 8. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB . Trên tia đối của tia BC lấy điểm O sao cho $BO = \frac{1}{2}BC$. Đường thẳng OM cắt OC tại N . Chứng minh rằng: $AN = \frac{1}{4}AC$.

Bài 9. Cho tam giác ABC , cạnh BC cố định. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác ABM vuông cân tại B , tam giác CAN vuông cân tại C . Chứng minh rằng khi A di động trên một nửa mặt phẳng bờ BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 10. Cho điểm M nằm giữa hai điểm A và B nhưng không là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác CAM và DBM cân tại C và D sao cho $\widehat{C} = \widehat{D}$. Gọi H và F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng: $HF = \frac{1}{2}CD$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. (h.3.7)

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có: $AC \perp BD$ và $OA = OC$.

Xét $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel BD$ và $OA \perp MN$ (vì $OA \perp BD$).

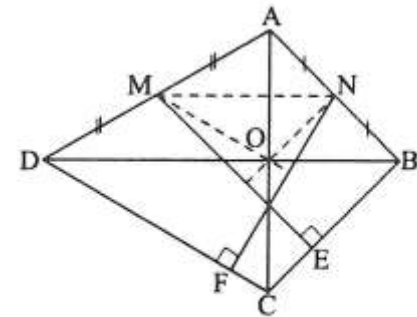
Xét $\triangle ABC$ có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON \parallel BC$ và $ON \perp ME$ (vì $ME \perp BC$).

Xét $\triangle ACD$ có OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM \parallel CD$ và $OM \perp NF$ (vì $NF \perp CD$).

Xét $\triangle OMN$ có OA, ME, NF là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 3.7

Bài 2. (h.3.8)

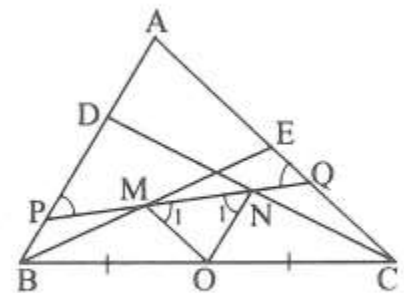
Gọi O là trung điểm của BC .

Xét $\triangle EBC$ có OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM \parallel CE$ và $OM = \frac{CE}{2}$.

Xét $\triangle DBC$ có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON \parallel BD$ và $ON = \frac{BD}{2}$.



Hình 3.8

Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{AQP}, \widehat{N_1} = \widehat{APQ}$ (so le trong).

$\triangle APQ$ cân tại $A \Leftrightarrow \widehat{Q} = \widehat{P} \Leftrightarrow \widehat{N_1} = \widehat{M_1} \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow CE = BD$.

Bài 3. (h.3.9)

a) Gọi D và E thứ tự là giao điểm của AH và AK với đường thẳng BC .

$\triangle ABD$ có BH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên là tam giác cân $\Rightarrow HA = HD$.

Tương tự, ta có: $KA = KE$.

Xét $\triangle ADE$ có HK là đường trung

binh nên $HK \parallel DE$

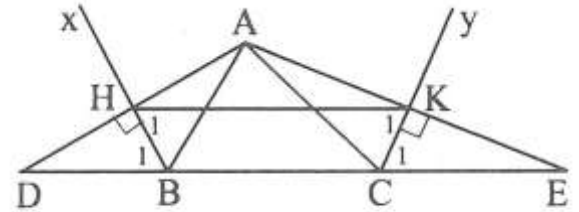
$\Rightarrow HK \parallel BC$.

Do đó tứ giác $BCKH$ là hình thang.

b) Ta có: $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}; \widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong).

Hình thang $BCKH$ là hình thang cân $\Leftrightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_1} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A .



Hình 3.9

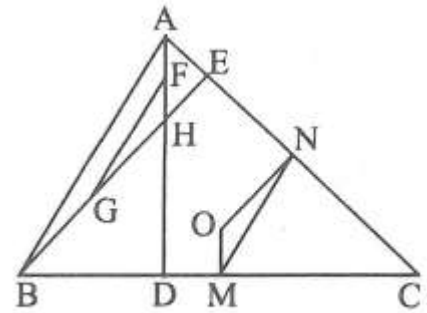
Bài 4. (h.3.10)

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CA .

Gọi F và G lần lượt là trung điểm của AH và BH .

Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC$; FG

là đường trung bình của $\triangle ABH$.



Hình 3.10

Suy ra $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2} AB$

$FG \parallel AB$ và $FG = \frac{1}{2} AB$.

Do đó $MN \parallel FG$ và $MN = FG$. Dễ thấy $OM \parallel AD, ON \parallel BE$.

$\triangle OMN$ và $\triangle HFG$ có: $MN = FG$; $\widehat{OMN} = \widehat{HFG}$; $\widehat{ONM} = \widehat{HGF}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

$$\text{Vậy } \triangle OMN = \triangle HFG (\text{g.c.g}) \Rightarrow OM = HF = \frac{AH}{2}.$$

Bài 5. (h.3.11)

Gọi M là trung điểm của BD thì:

$$MD = \frac{1}{2}BD = AH.$$

$\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên $HB = HC$.

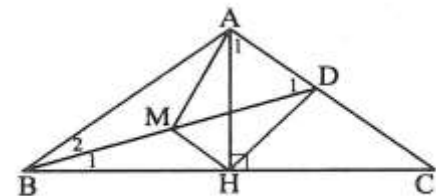
Ta có HM là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow HM \parallel AC$.

Hình thang $HMDA$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

$$\triangle ADH = \triangle DAM (\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \Leftrightarrow 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{B_1} + \widehat{C} \quad (1)$$

$$\text{Ta đặt } \widehat{B} = \widehat{C} = x \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 90^\circ - x = \frac{x}{2} + x \Leftrightarrow x = 36^\circ$$

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 36^\circ$; $\widehat{A} = 108^\circ$.



Hình 3.11

Bài 6. Gọi M là trung điểm của AB và O là một điểm tùy ý không nằm giữa A và B .

- Trường hợp O nằm trên tia đối của tia AB hay tia đối của tia BA (h.3.16), ta

$$\text{chứng minh được } OM = \frac{OA + OB}{2}. \quad (1)$$



Hình 3.16

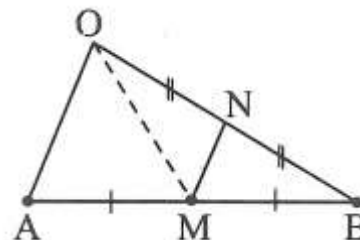
- Trường hợp O không thẳng hàng với A và B (h.3.17).

Gọi N là trung điểm của OB , khi đó MN là

$$\text{đường trung bình của } \triangle OAB, MN = \frac{OA}{2}.$$

Xét $\triangle OMN$, ta có: $OM < MN + ON$

$$\Rightarrow OM < \frac{OA + OB}{2}. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra: $OM \leq \frac{OA+OB}{2}$. (*)

Áp dụng hệ thức (*) đối với n điểm $O_1, O_2, \dots, O_n$ ta có:

$$O_1M \leq \frac{O_1A+O_1B}{2}; O_2M \leq \frac{O_2A+O_2B}{2}; \dots; O_nM \leq \frac{O_nA+O_nB}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} O_1M + O_2M + \dots + O_nM &\leq \frac{O_1A+O_1B}{2} + \frac{O_2A+O_2B}{2} + \dots + \frac{O_nA+O_nB}{2} \\ &= \frac{O_1A+O_2A+\dots+O_nA}{2} + \frac{O_1B+O_2B+\dots+O_nB}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a. \end{aligned}$$

Như vậy điểm cần tìm chính là trung điểm M của AB .

Bài . (h.3.19)

a) Vẽ $BK \perp CD$ ta được $AH \parallel BK$ và $AB \parallel HK$

$$\Rightarrow AB = HK.$$

$$\triangle ADH = \triangle BCK \Rightarrow HD = KC.$$

Ta có: $HD + KC = CD - HK \Leftrightarrow 2HD = CD - AB$

$$\Leftrightarrow HD = \frac{CD - AB}{2}.$$

Theo ví dụ 4 thì đoạn thẳng PQ nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy. Vậy

$$HD = PQ$$

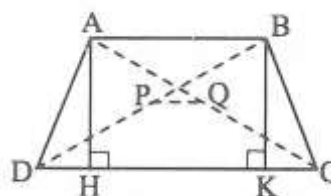
$$\text{b) Ta có: } HC = CD - HD = CD - \frac{CD - AB}{2} = \frac{CD + AB}{2}.$$

Đường trung bình của hình thang bằng nửa tổng hai đáy. Do đó HC bằng độ dài đường trung bình của hình thang.

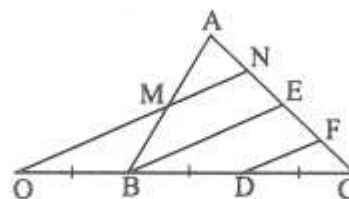
Bài 8. (h.3.20)

Gọi D là trung điểm của BC .

Vẽ $BE \parallel ON, DF \parallel ON (E, F \in AC)$.



Hình 3.19



Hình 3.20

Ta có: $OB = BD = DC = \frac{1}{2}BC$.

- Xét $\triangle ABE$ có $MN \parallel BE$ và $MA = MB$ nên $NA = NE$. (1)
- Xét hình thang $ONFD$ có $BE \parallel ON$ và $OB = BD$ nên $NE = EF$. (2)
- Xét $\triangle CBE$ có $DF \parallel BE$ và $BD = DC$ nên $EF = FC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AN = NE = EF = FC$, do đó $AN = \frac{1}{4}AC$.

Bài 9. (h.3.21)

Gọi O là trung điểm của MN .

Vẽ $OF \perp BC$; $AH \perp BC$; $MD \perp BC$ và $NE \perp BC$.

Ta có: $OF \parallel AH \parallel MD \parallel NE$.

$\triangle BMD = \triangle ABH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MD = BH$ và $BD = AH$. (1)

Tương tự, $\triangle CNE = \triangle ACH$

$\Rightarrow NE = CH$ và $CE = AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD = CE (= AH)$.

Dễ thấy OF là đường trung bình của hình thang $MDEN$

$\Rightarrow OF = \frac{MD + NE}{2} = \frac{BH + CH}{2} = \frac{BC}{2}$ (không đổi).

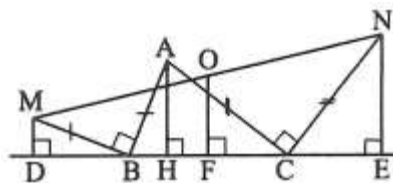
Ta có: $FD = FE$; $BD = CE \Rightarrow FB = FC$.

Vậy O nằm trên đường trung trực của BC và cách BC một khoảng không đổi là $\frac{BC}{2}$. Do đó O là một điểm cố định.

Suy ra MN đi qua một điểm cố định là điểm O .

Bài 10. (h.3.22)

* Tìm hướng giải



Hình 3.21

Điều phải chứng minh là $HF = \frac{1}{2}CD$ gợi ý cho ta nghĩ đến định lý đường trung bình của tam giác.

Ta vẽ đường trung bình EG của $\triangle MCD$ thì $EG = \frac{1}{2}CD$. Chỉ còn phải chứng minh $HF = EG$.

*** Trình bày lời giải**

Gọi E là trung điểm của CM , G là trung điểm của DM . Khi đó EG là đường trung bình của

$$\triangle MCD \Rightarrow EG = \frac{1}{2}CD. \quad (1)$$

$\triangle CAM$ và $\triangle DBM$ cân tại C và D mà $\widehat{C} = \widehat{D}$ nên

các góc ở đáy của chúng bằng nhau:

$$\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = \widehat{DMB} = \widehat{DBM}.$$

$\Rightarrow CA \parallel DM$ và $CM \parallel DB$ (vì có các cặp góc đồng vị bằng nhau).

Xét $\triangle CMB$ có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF \parallel MB$.

Xét $\triangle DAM$ có HG là đường trung bình $\Rightarrow HG \parallel AM$.

Suy ra: $EF \parallel HG$ (vì cùng song song với AB). Vậy tứ giác $EFGH$ là hình thang.

Xét hình thang $ACDM$ có EH là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo nên $EH \parallel AC$.

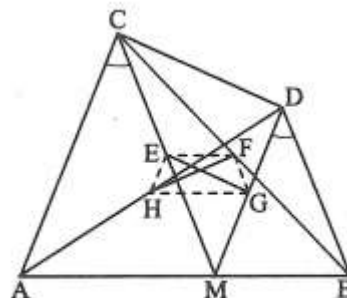
Tương tự, xét hình thang $CDBM$ có: $FG \parallel DB$.

$$\text{Do đó } \widehat{EHG} = \widehat{CAM}, \widehat{FGH} = \widehat{DBM}.$$

Mặt khác $\widehat{CAM} = \widehat{DBM}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{EHG} = \widehat{FGH}$.

Vậy hình thang $EFGH$ là hình thang cân $\Rightarrow HF = EG$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $HF = \frac{1}{2}CD$.



Hình 3.22

C. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Đường trung bình của tam giác

Bài 1: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = AC$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AD, K là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AE.

- a) Chứng minh rằng HK song song với DE.
- b) Tính HK, biết chu vi tam giác ABC bằng 10.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, AH là đường cao. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

- a) Chứng minh MNKH là hình thang cân.
- b) Trên tia AH và AK lần lượt lấy điểm E và D sao cho H là trung điểm của AE và K là trung điểm của AD. Chứng minh tứ giác BCDE là hình thang cân.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM, I là một điểm thuộc đoạn thẳng AM, BI cắt AC ở D.

- a) Nếu $AD = \frac{1}{2}DC$. Khi đó hãy chứng minh I là trung điểm của AM.
- b) Nếu I là trung điểm của AM. Khi đó hãy chứng minh $AD = \frac{1}{2}DC$, $ID = \frac{1}{4}BD$.
- c) Nếu $AD = \frac{1}{2}DC$. Khi đó trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AB = 3AE$. Chứng minh BD, CE, AM đồng quy.

Bài 4: Dùng tính chất đường trung bình của tam giác chứng minh trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có $AB = CD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, DB. Đường thẳng EF lần lượt cắt AB, CD tại H, K. Chứng minh rằng: $\widehat{KHB} = \widehat{HKC}$

Bài 6: Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 4$ cm, $CD = 10$ cm, $BD = 5$ cm. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BD đến cạnh CD.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH, E là giao điểm của BI và AC. Tính các độ dài AE và EC, biết $AH = 12$ cm, $BC = 18$ cm.

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của HC, K là trung điểm của AH. Chứng minh rằng BK vuông góc với AM.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Gọi I là trung điểm HK. Chứng minh rằng: $AI \perp BK$

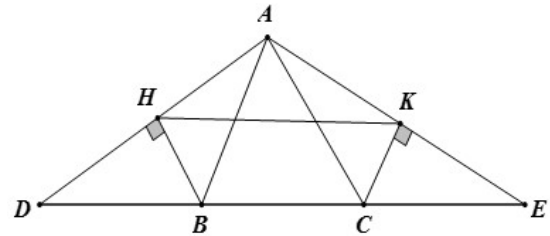
HƯỚNG DẪN

Bài 1:

a) $\triangle ABD$ cân tại B, đường cao BH nên BH đồng thời là đường trung tuyến nên $AH = HD$

Tương tự $AK = KE$ nên HK là đường trung bình của

$\triangle ADE$ nên $HK \parallel DE$; $HK = \frac{1}{2}DE$



b) $HK = \frac{DE}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}$ (vì $DE = DB + BC + CF = AB + BC + CA = 10 \text{ cm}$)

Bài 2:

a) MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$,
hay $MI \parallel BH$

$MI \parallel BH$ và $MA = MB \Rightarrow IA = IH$

$\triangle MAH$ cân tại A nên $\widehat{HMI} = \widehat{IMA}$ (1)

NK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow NK \parallel AB \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{IMA}$
(hai góc ở vị trí so le trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HMI} = \widehat{MNC}$ (so le trong) hay $\widehat{HMN} = \widehat{MNC}$

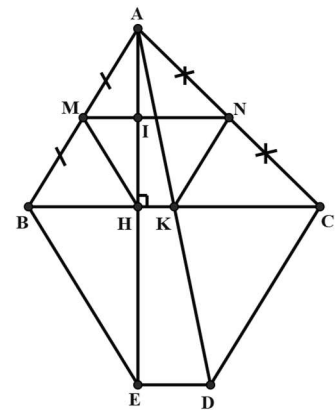
Tứ giác MNHK có $MN \parallel HK$ nên tứ giác là hình thang, lại có $\widehat{HMN} = \widehat{MNC}$ là hình thang cân.

b) HK là đường trung bình của $\triangle AED$

$\Rightarrow HK \parallel ED$ hay $BC \parallel ED$ nên tứ giác BCDE là hình thang.

$\Rightarrow NK$ là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow NK \parallel CD$ mà $NK \parallel AB$ nên $AB \parallel CD$

$\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{BCD}$ (so le trong) (3)



Để thấy $\triangle ABE$ cân tại B vì BH vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$$\Rightarrow BH \text{ là phân giác của } \widehat{ABE} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{HBE} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{BCD} \text{ hay } \Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{BCD}$$

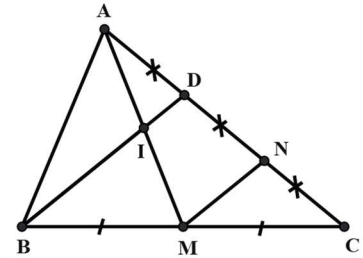
Hình thang $BCDE$ có $\widehat{CBE} = \widehat{BCD} \Rightarrow$ tứ giác BCDE là hình thang cân.

Bài 3: a) Khi $AD = \frac{1}{2}DC$.

Gọi N là trung điểm của DC, khi đó MN là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel ID$

$\triangle AMN$ có $MN \parallel ID$ và $AD = DN \Rightarrow AI = IM$

b) Khi $AI = IM$. Kẻ $MN \parallel BD$. Xét $\triangle AMN$ ta có $ID \parallel MN$ và $AI = IM$ nên $AD = DN$.



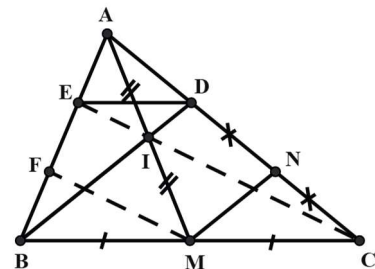
Xét $\triangle BCD$ có $MN \parallel BD$; $MB = MC$ nên $ND = NC$. Vậy $AD = \frac{1}{2}DC$, và dễ dàng chỉ ra

$$ID = \frac{1}{4}BD.$$

c) Khi $AD = \frac{1}{2}DC$. $AB = 3AE$.

Ta có I là giao điểm của BD và AM

Gọi F là trung điểm của BE. Ta có MF là đường trung bình của $\triangle BEC \Rightarrow FM \parallel CE$

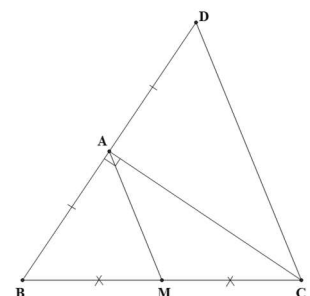


$AD = \frac{1}{2}DC$ thì $IA = IM$ (theo câu a) nên EI là đường trung bình của $\triangle AFM \Rightarrow EI \parallel FM$

Có $FM \parallel CE$ và $EI \parallel FM$ nên E, I, C thẳng hàng hay EC đi qua điểm I

Bài 4: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Khi đó $\triangle BCD$ cân tại C nên $BC = CD$

AM là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BC$



Bài 5: E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD

Gọi M là trung điểm của BC

Nên EM là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow EM = \frac{1}{2}AB \text{ và } EM \parallel AB \Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{AHK}$$

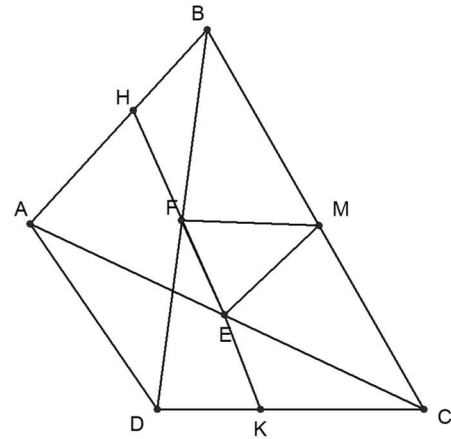
Và FM là đường trung bình của $\triangle BCD$

$$\Rightarrow FM = \frac{1}{2}CD \text{ và } FM \parallel CD \Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HKD}$$

Mà $AB = CD$ nên $AB = CD \Rightarrow \triangle FME$ cân

$$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{AHK} = \widehat{EFM} = \widehat{HKD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{HKD} \Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{HKC} \text{ (kề bù)}$$



Bài 6:

Kẻ $BH \perp CD, IK \perp CD$.

$$\text{Ta có: } CH = \frac{CD - AB}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \text{ (cm).}$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle BHC$, ta có: $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$

$$\Rightarrow BH = 4 \text{ cm.}$$

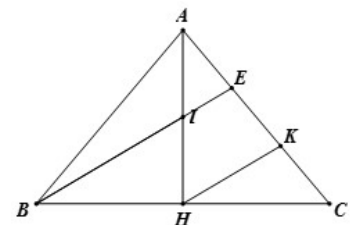
Tam giác BDH có $BI = ID$ và $IK \parallel BH$ nên IK là đường trung bình.

$$\Rightarrow IK = \frac{BH}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Bài 7:

Kẻ $HK \parallel BE$ ta chứng minh được $AE = EK = KC$

Kết quả: $AE = 5\text{cm}, EC = 10\text{cm}$



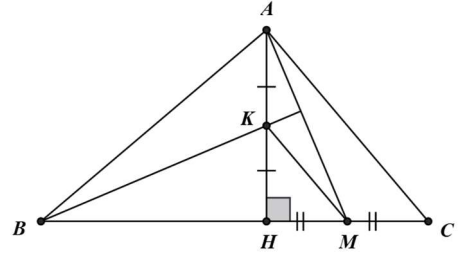
Bài 8:

Tam giác AHC có $AK = KH$ và $HM = MC \Rightarrow MK$ là đường trung bình của ΔAHC .

$\Rightarrow MK \parallel AC$. Ta lại có $AC \perp AB$ nên $MK \perp AB$

Tam giác ABM có: $AH \perp BM$ và $MK \perp AB$

$\Rightarrow K$ là trực tâm, suy ra $BK \perp AM$.

**Bài 9:**

Gọi J là trung điểm của KC, ta có IJ là đường trung bình trong tam giác KHC.

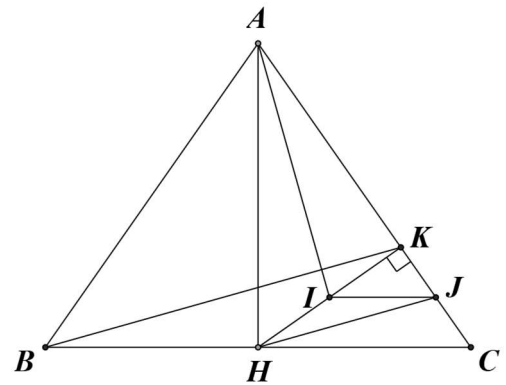
Do đó $IJ \parallel HC \Rightarrow IJ \perp AH$

Trong tam giác AHJ có $IJ \perp AH, HI \perp AJ$. Từ đó, I là trực tâm tam giác AHJ.

$\Rightarrow AI \perp HJ$ (1).

Trong tam giác BKC, HJ là đường trung bình, suy ra $HJ \parallel BK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp BK$

**Đường trung bình của hình thang**

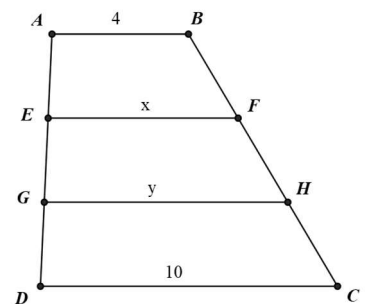
Bài 1: Cho ΔABC và đường thẳng d qua A không cắt đoạn thẳng BC. Vẽ $BD \perp d, CE \perp d$.

(D, E $\in$ d) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $ID = IE$

Bài 2: Cho hình thang vuông ABCD tại A và D. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh:

a) ΔAFD cân tại F;

b) $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$.



Bài 3: Tính các độ dài x và y trên hình. Biết

$AB \parallel EF \parallel GH \parallel CD, AE = EG = GD, AB = 4, CD = 10$ (cm).

Bài 4: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$ ($AB < CD$) và M là trung điểm của AD. Qua M vẽ đường thẳng song song với hai đáy của hình thang cắt hai đường chéo BD và AC tại E và F, cắt BC tại N.

a, Chứng minh rằng N, E, F lần lượt là trung điểm của BC, BD, AC.

b, Gọi I là trung điểm của AB, đường thẳng vuông góc với IE tại E và đường thẳng vuông góc với IF tại F cắt nhau ở K. Chứng minh : $KC = KD$.

Bài 5: Cho hình thang ABCD, AB là đáy nhỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;

b) Chứng minh $PQ \parallel CD$ và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$;

c) Hình thang ABCD phải có điều kiện gì để $MP = PQ = QN$.

Bài 6: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của cạnh bên AD. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BMC} = 90^\circ$

b) $BC = AB + CD$

Bài 7: Cho tam giác ABC, AM là trung tuyến. Vẽ đường thẳng d qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC. Gọi A' , B' , C' thứ tự là hình chiếu của A, B, C lên đường thẳng d. Chứng minh rằng $BB' + CC' = 2AA'$.

HƯỚNG DẪN

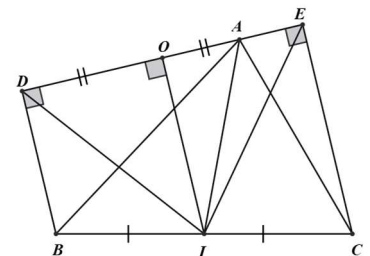
Bài 1: $BD \parallel AE$ (cùng vuông góc với d)

Tứ giác BDEC là hình thang,

Từ I kẻ $IO \perp DE \Rightarrow IO \parallel BD \parallel CE$

Hình thang BDEC có $IO \parallel BD \parallel CE$ và $IB = IC$ nên $OD = OE$

Ta có $OD = OE$; $IO \perp DE$ nên IO là đường trung trực của đoạn thẳng DE $\Rightarrow ID = IE$



Bài 2:

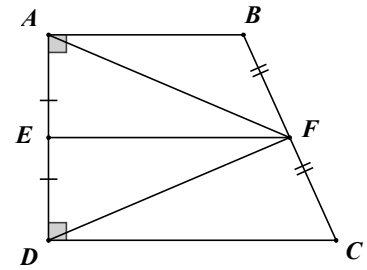
Chỉ ra EF là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên

$$EF // AB // CD$$

$AD \perp AB \Rightarrow AD \perp EF$. $AE = ED$ EF là đường trung trực của AB nên $FA = FD$ hay $\triangle AFD$ cân tại F ;

$$\triangle AFD \Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{ADF}$$

b) $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$. (cùng phụ với 2 góc bằng nhau $\widehat{DAF} = \widehat{ADF}$)

**Bài 3:**

Theo tính chất của đường trung bình của hình thang,

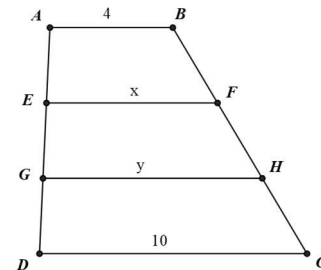
ta có $2x = y + 4$ hay:

$$y = 2x - 4 \quad (1)$$

$$\text{và } y = \frac{x+10}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2x - 4 = \frac{x+10}{2}$$

Ta tính được $x = 6$ và $y = 8$

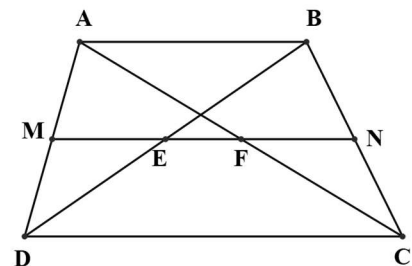
**Bài 4:**

a) Xét hình thang $ABCD$ có $MA = MD$;

$N \in BC, MN // AB // CD(gt) \Rightarrow N$ là trung điểm của BC

Xét $\triangle ADC$ có $MA = MD$; $MF // DC \Rightarrow FA = FC$

Xét $\triangle ADB$ có $MA = MD$; $MF // DC \Rightarrow ED = EB$



b) IE là đường trung bình của $\triangle ABD \Rightarrow IE // AD$

OF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow OF // AD$

Vậy $IE // FO$;

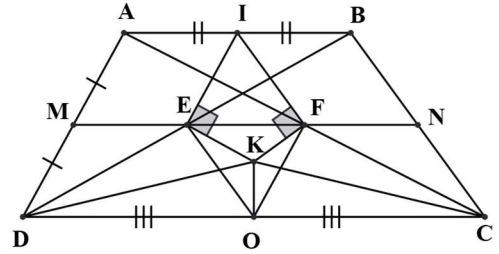
Có $IE // FO$; $IE \perp EK \Rightarrow EK \perp OF$

Chứng minh tương tự ta có $IF // EO // BC$;

$IF \perp KF \Rightarrow EO \perp KF$

$\triangle EFO$ có $EK \perp OF$; $EO \perp KF$ nên K là trực tâm $\Rightarrow OK \perp EF$ mà

$EF // CD \Rightarrow OK \perp DC$; $OD = OC$ vậy KO là đường trung trực của DC hay $KC = KD$



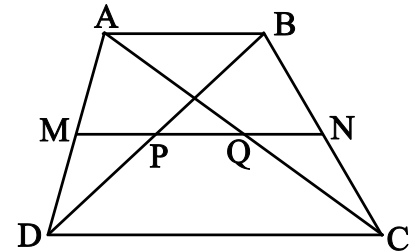
Bài 5: a) Xét $\triangle ABD$ có MP là đường trung bình

$\Rightarrow MP // AB \Rightarrow MP // CD$.

Xét $\triangle ADC$ có MQ là đường trung bình $\Rightarrow MQ // CD$.

Xét hình thang $ABCD$ có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN // CD$.



Qua điểm M có các đường thẳng MP , MQ , MN cùng song song với CD nên các đường thẳng này trùng nhau, suy ra bốn điểm M , N , P , Q thẳng hàng.

b) Ta có $MN // CD$ nên $PQ // CD$; $PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$.

c) Ta có $MP = NQ = \frac{AB}{2}$.

$$MP = PQ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB = CD - AB \Leftrightarrow 2AB = CD \text{ (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ)}.$$

Bài 6: a) Gọi N là trung điểm BC.

Ta có $MN \parallel CD \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CMN}$

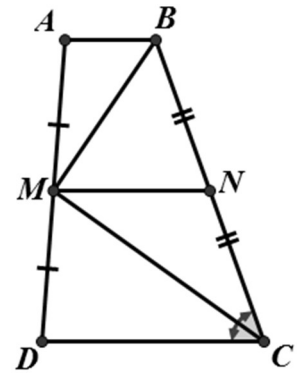
Mà $\widehat{MCD} = \widehat{MCN}$ (vì CM là phân giác $\widehat{D}$)

Suy ra $\widehat{CMN} = \widehat{MCN} = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$

Tam giác MCN cân tại N $\Rightarrow MN = NC = NB$, do đó $\triangle MNB$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NBM}$. Mặt khác $\widehat{NMB} = \widehat{MBA}$, suy ra $\widehat{NMB} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$\widehat{BMC} = \widehat{CMN} + \widehat{NMB} = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} + \widehat{ABC}) = 90^\circ$



b) Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$

Ta lại có $MN = \frac{1}{2}BC$. Do đó $BC = AB + CD$

Bài 7: Gọi N là hình chiếu của M trên d.

Xét tứ giác $BB'C'C$ có $BB' \parallel CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow BB'C'C$ là hình thang.

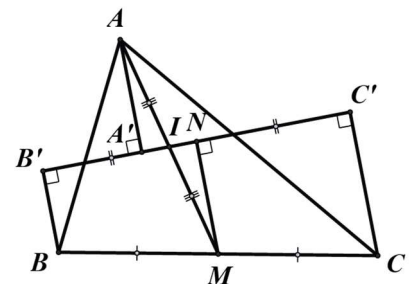
M là trung điểm BC và $MN \parallel BB' \parallel CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow BB'C'C$

$\Rightarrow BB' + CC' = 2MN$ (1)

Chứng minh được $\triangle AA'I = \triangle MNI$ (g.c.g) $\Rightarrow AA' = MN$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $BB' + CC' = 2AA'$.



===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====