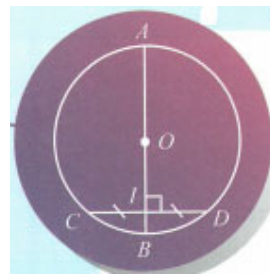


ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

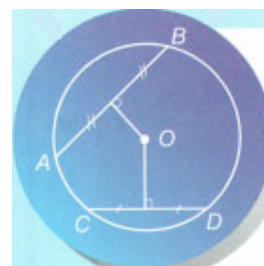
Đường kính và dây của đường tròn

- Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
- Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây:
 - + Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
 - + Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



Liên hệ khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
 - + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
 - + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
 - + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
 - + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



B.CÁC DẠNG BÀI TỰ LUẬN MINH HỌA

Dạng 1: Các bài toán liên quan đến tính toán trong đường tròn

Bài 1. Cho đường tròn (O) có bán kính r . Dây HK của đường tròn vuông góc với OI tại trung điểm của OI . Tính độ dài HK .

Bài 2. Cho đường tròn (O) , đường kính $AD = 2R$. Vẽ cung tâm D bán kính R , cung này cắt đường tròn (O) ở B và C .

- Tứ giác $OBDC$ là hình gì? Vì sao?
- Tính số đo các góc CBD , CBO , OBA .
- Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 3. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 4\text{cm}$. Dây BC vuông góc với OA tại trung điểm của OA . Tính độ dài BC .

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AD , dây AB . Qua B vẽ dây BC vuông góc với AD tại H . Biết $AB = 10\text{cm}$; $BC = 12\text{cm}$

- Tính độ dài đoạn AH .
- Tính bán kính đường tròn (O) .

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AD . Trên nửa đường tròn lấy hai điểm B và C . Biết $AB = BC = 2\sqrt{5}cm, CD = 6cm$. Tính bán kính đường tròn

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB . Lấy điểm E đối xứng với A qua M .

a) Tứ giác $ACED$ là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử $R = 6,5cm, MA = 4cm$. Tính CD .

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB . Chứng minh: $MH.MK = \frac{MC^3}{2R}$.

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng không bằng nhau

Bài 1. Cho tam giác ABC , các đường cao AH và CK . Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm A, C, H, K cùng thuộc một đường tròn;

b) $HK < AC$.

Bài 2. Cho đường tròn (O, R) và ba dây AB, AC, AD ; gọi M và N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD . Chứng minh rằng $MN \leq 2R$.

Bài 3. Tứ giác $ABCD$ có $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

b) So sánh độ dài AC và BD . Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 4. Cho đường tròn $(O, 4cm)$ Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $ACBD$.

Dạng 3: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Bài 1. Cho nửa đường tròn tâm (O) , đường kính AB và dây EF không cắt đường kính. Gọi I và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến EF . Chứng minh rằng $IE = KF$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB . Qua M vẽ dây CD không trùng với AB . Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD .

Bài 3. Cho đường tròn tâm O , đường kính CD . Dây AB cắt đường kính CD tại I . Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ C và D đến AB . Chứng minh rằng $AH = BK$.

Bài 4. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB . Lấy điểm E đối xứng với A qua M .

a) Tứ giác $ACED$ là hình gì? Tại sao?

b) Giả sử $R = 6cm$ và $MA = 4cm$, hãy tính CD .

c) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB . Chứng minh $MH.MK = \frac{MC^3}{2R}$.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Các bài toán liên quan đến tính toán trong đường tròn

Bài 1.

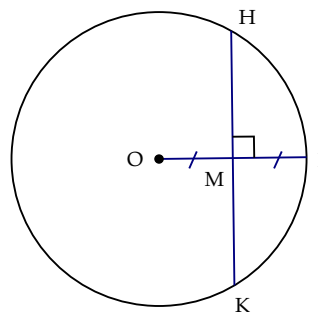
Gọi M là trung điểm của OI. Ta có: $OM = \frac{OI}{2} = 2cm$

Áp dụng định lý Pitagore trong tam giác vuông OMH:

$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 + MH^2 \Rightarrow MH^2 = OH^2 - OM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \\ &\Rightarrow MH = 2\sqrt{3}cm \end{aligned}$$

Vì $OI \perp HK$ nên M là trung điểm của HK. Do đó:

$$\Rightarrow HK = 2MH = 4\sqrt{3}cm$$



Hình 1

Bài 2.

a) Theo bài ra, ta có $BD = DC = R \Rightarrow OB = BD = DC = CO$. Do đó, tứ giác OBDC là hình thoi.

b) Vì $OB = BD = DO = R$ nên tam giác BOD là tam giác đều, suy ra $\widehat{DBO} = 60^\circ$

Vì BC là đường chéo của hình thoi nên là đường phân giác của góc DBO.

Do đó: $\widehat{DBC} = \widehat{CBO} = 30^\circ$.

Tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$

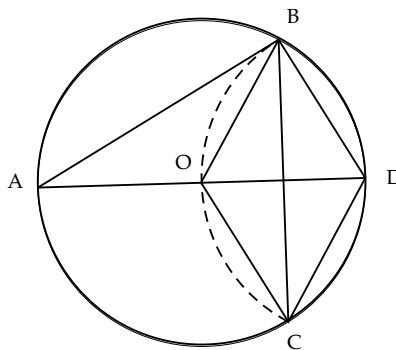
Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ABD} - \widehat{OBD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

c) Xét tam giác ABC, ta có

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

Tương tự $\widehat{ACB} = 60^\circ$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.



Hình 2

Bài 3.

Ta có: $OM = MA = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}.4 = 2cm$

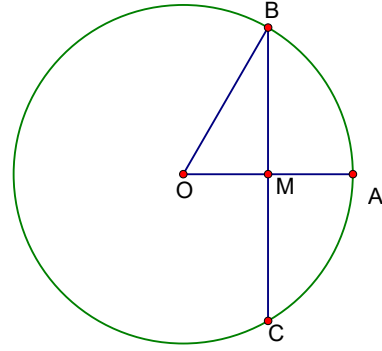
Xét $\triangle OMB$ vuông tại M

$$\Rightarrow MB^2 = OB^2 - OM^2 \text{ (Định lí Pytago)}$$

$$\Rightarrow MB^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow MB = 2\sqrt{3}cm$$

Xét (O) có $OA \perp BC$ tại $M \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC$

$$\Rightarrow BC = 2MB = 4\sqrt{3}cm$$



Bài 4

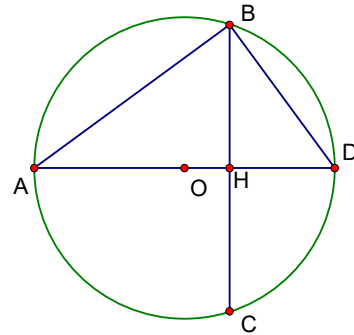
a) Xét (O) có $AD \perp BC$ tại H

$$\Rightarrow HB = HC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.12 = 6cm$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H

$$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 \text{ (Định lí Py ta go)}$$

$$\Rightarrow AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AH = 8cm$$



b) Xét $\triangle ABD$ có cạnh AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại B

$\Rightarrow AB^2 = AH.AD$ (Hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{100}{8} = 12,5cm \Rightarrow OA = \frac{12,5}{2} = 6,25cm$$

Vậy bán kính đường tròn (O) là 6,25cm

Bài 5.

Ta có $AB = BC \Rightarrow B \in$ đường trung trực của AC

$OA = OC = R \Rightarrow O \in$ đường trung trực của AC

$\Rightarrow OB$ là đường trung trực của $AC \Rightarrow IA = IC$

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle ADC$

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.6 = 3cm$$

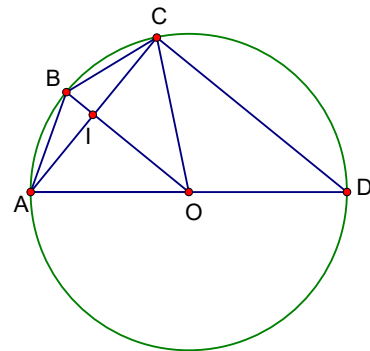
Xét $\triangle OIC$ vuông tại I

$$\Rightarrow IC^2 = OC^2 - OI^2 = R^2 - 9 \text{ (Định lí Py ta go)}$$

Xét $\triangle BIC$ vuông tại I

$$\Rightarrow IC^2 = BC^2 - BI^2 = (2\sqrt{5})^2 - (R-3)^2 \text{ (Định lí Py ta go)}$$

$$\Rightarrow R^2 - 9 = (2\sqrt{5})^2 - (R-3)^2 \Rightarrow R^2 - 3R - 10 = 0$$



$$\Rightarrow R = 5\text{cm} \text{ hoặc } R = -2\text{cm} (\text{ loại})$$

Vậy bán kính đường tròn là 5cm.

Bài 6.

a) Xét (O) có $AB \perp CD$ tại $M \Rightarrow MC = MD = \frac{1}{2}CD$

Xét tứ giác $ACED$ có $MC = MD; MA = ME$

$\Rightarrow$ tứ giác $ACED$ là hình bình hành

Mặt khác $AE \perp CD \Rightarrow ACED$ là hình thoi.

b) Ta có $AB = 2.R = 13\text{cm}$

$$\Rightarrow MB = AB - AM = 13 - 4 = 9\text{cm}$$

Xét $\triangle ABC$ có cạnh AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C

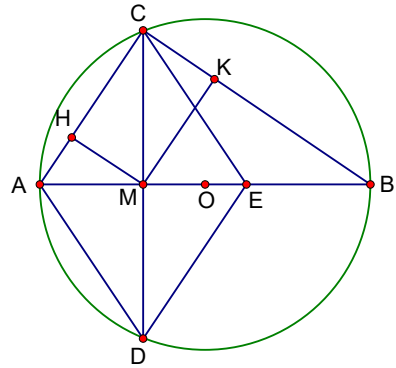
Áp dụng hệ thức $h^2 = b'.c'$ ta có $MC^2 = MA.MB = 4.9 = 36$

$$\Rightarrow MC = 6\text{cm} \Rightarrow CD = 2.MC = 2.6 = 12\text{cm}$$

c) Xét $\triangle MAC$ vuông tại M có đường cao MH , áp dụng hệ thức $b.c = a.h$ ta có

$$MH.AC = MA.MC \Rightarrow MH = \frac{MA.MC}{AC}. \text{ Tương tự } MK = \frac{MB.MC}{BC}$$

$$\Rightarrow MH.MK = \frac{MA.MC}{AC} \cdot \frac{MB.MC}{BC} = \frac{MC^2.MA.MB}{AC.BC} = \frac{MC^2.MC^2}{MC.AB} = \frac{MC^3}{2R}.$$



Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng không bằng nhau

Bài 1.

a) Gọi I là trung điểm của AC . Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong các tam giác vuông AKC , AHC ta có:

$$IK = IH = \frac{1}{2}AC$$

Suy ra điểm I cách đều 4 điểm A, K, H, C

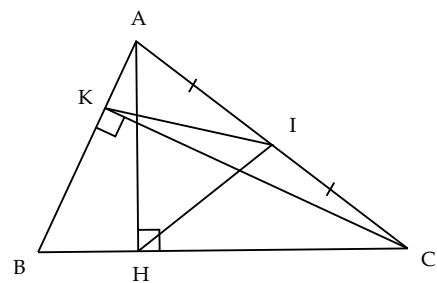
Vậy bốn điểm A, K, H, C cùng thuộc đường tròn tâm

I bán kính AI .

b) Trong đường tròn (I, AI) , AC là đường kính, HK là

dây phân biệt với AC nên $HK < AC$

Bài 2.



Hình 3

Gọi I là trung điểm của AB . Áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong các tam giác vuông ABN , ABM ta có:

$$IM = IN = \frac{1}{2}AB \Rightarrow IM = IN = IA = IB \text{ Suy ra điểm } I$$

cách đều 4 điểm A, B, M, N

Do đó bốn điểm A, B, M, N cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính AI .

Trong đường tròn (I, AI) , AB là đường kính, MN là dây nên $MN \leq AB$ (1)

Mặt khác, trong đường tròn (O, R) , AB là dây nên $AB \leq 2R$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $MN \leq 2R$.

Bài 3.

a) Gọi O là trung điểm của AC , áp dụng tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong các tam giác vuông ABC , ADC ta có: $OB = OA = OC = OD$
Suy ra bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn đường kính AC .

b) Vì BD là dây của đường tròn tâm O đường kính AC nên $BD \leq AC$

Nếu $BD = AC$ thì BD cũng là một đường kính khác của đường tròn tâm O đường kính AC . Suy ra,

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$$

Vậy tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

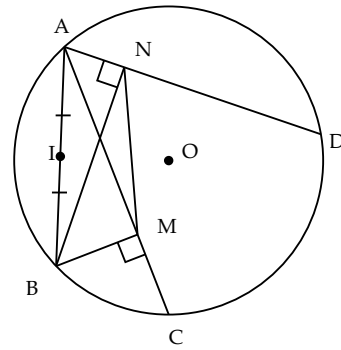
Bài 4.

Ta có AB, CD là dây của đường tròn $(O, 4cm)$ suy ra

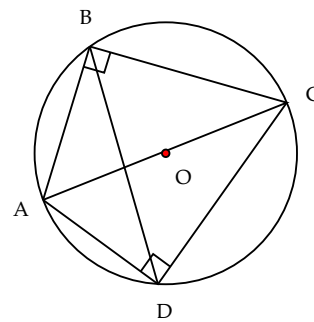
$$AB \leq 4cm, CD \leq 4cm.$$

Vì tứ giác $ACBD$ có $AB \perp CD$ nên

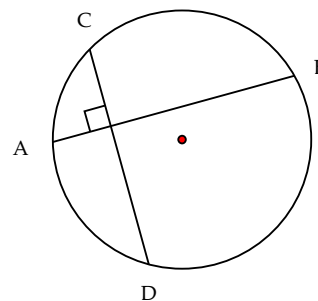
$$S_{ACBD} = \frac{1}{2}AB.CD \leq \frac{1}{2}4.4(cm^2) = 8(cm^2)$$



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Vậy diện tích lớn nhất của tứ giác ACBD bằng $8(cm^2)$
, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD = 4cm$
 $\Leftrightarrow AB$ và CD là đường kính của hình tròn.

Dạng 3: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Bài 1.

Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ O đến IK , ta có $AI \parallel OM \parallel BK$, mặt khác $OA = OB$ suy ra $MI = MK$ (1)

OM là phần đường kính vuông góc với dây EF nên $ME = MF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IE = KF$.

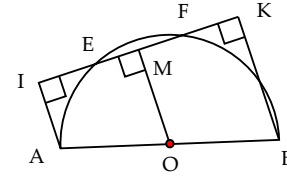
Bài 2.

Giả sử M là trung điểm của CD , ta có $OM \perp CD$.

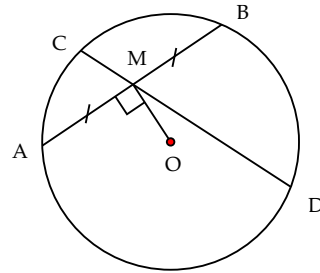
Mặt khác M là trung điểm của AB nên $OM \perp AB$
Suy ra $AB \equiv CD$ (trái giả thiết).

Do đó điều giả sử sai.

Vậy M không là trung điểm của CD .



Hình 7



Hình 8

Bài 3.

Kẻ $OM \perp AB, M \in AB, OM$ cắt CK tại N , ta có

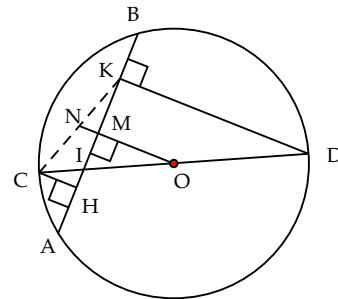
$$AM = BM \quad (1)$$

Tam giác CKD có $ON \parallel KD, OC = OD$ nên $NC = NK$

Tam giác CKH có $MN \parallel CH, NC = NK$ nên $MH = MK$
(2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$AM - MH = BM - MK \Leftrightarrow AH = KB.$$



Hình 9

Bài 4.

a) Đường tròn (O, R) có đường kính CD , AB là dây mà

$$AB \perp CD \Rightarrow MC = MD$$

$$\text{mà } MA = ME$$

Suy ra tứ giác ACED là hình bình hành.

Mặt khác $AE \perp CD$ nên ACED là hình thoi

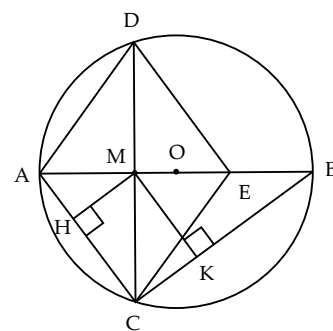
b) Do C nằm trên đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
 Trong tam giác vuông ACB có MC là đường cao nên
 $MC^2 = MA.MB = 4.(10 - 4) = 24 \Rightarrow MC = 2\sqrt{6}$

c) Áp dụng tính chất $a.h = b.c$ trong tam giác vuông AMC có
 $MH.AC = MA.MC \Rightarrow MH = \frac{MA.MC}{AC}$

Tương tự $MK = \frac{MB.MC}{BC}$

Do đó

$$MH.MK = \frac{MA.MC}{AC} \cdot \frac{MB.MC}{BC} = \frac{MC^2.MA.MB}{AC.BC} = \frac{MC^2.MC^2}{MC.BC} = \frac{MC^3}{BC}$$



Hình 10

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẦN XẠ

Câu 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây CD không đi qua tâm. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $AB > CD$. B. $AB = CD$. C. $AB < CD$. D. $AB \leq CD$.

Câu 2: “Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài ...”. Cụm từ thích hợp điền vào chỗ trống là:

- A. Nhỏ nhất. B. Lớn nhất. C. Bằng 10 cm . D. Bằng tổng hai dây bất kỳ.

Câu 3: Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến hai dây là bằng nhau. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $AB > CD$. B. $AB = CD$. C. $AB < CD$. D. $AB // CD$.

Câu 4: Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD không đi qua tâm. Biết rằng khoảng cách từ tâm đến dây AB lớn hơn khoảng cách từ tâm O đến dây CD . Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $AB > CD$. B. $AB = CD$. C. $AB < CD$. D. $AB // CD$.

Câu 5: “Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với dây thì ... của dây ấy”. Điền vào dấu ... cụm từ thích hợp.

- A. Đi qua trung điểm. B. Đi qua giao điểm của dây ấy với đường tròn.
C. Đi qua điểm bất kì. D. Đi qua điểm chia dây ấy thành hai phần có tỉ lệ $2 : 3$.

Câu 6: “Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm một dây không đi qua tâm thì ... với dây ấy”. điền vào dấu ... cụm từ thích hợp.

- A. Nhỏ hơn. B. Bằng. C. Song song. D. Vuông góc.

Câu 7: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau. Trong hai dây của một đường tròn.

- A. Dây nào lớn hơn thì dây đó xa tâm hơn. B. Dây nào nhỏ hơn thì dây đó xa tâm hơn.
C. Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn. D. Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Câu 8: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau. Trong hai dây của đường tròn.

- A. Dây nào lớn hơn thì dây đó xa tâm hơn. B. Hai dây đi qua tâm thì vuông góc với nhau.
C. Dây nào gần tâm hơn thì dây đó nhỏ hơn. D. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Câu 9: Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 5\text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm đến dây AB là 3 cm . Tính độ dài dây AB .

- A. $AB = 6\text{ cm}$. B. $AB = 8\text{ cm}$. C. $AB = 10\text{ cm}$. D. $AB = 12\text{ cm}$.

Câu 10: Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 6,5\text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm đến dây AB là $2,5\text{ cm}$. Tính độ dài dây AB .

- A. $AB = 6\text{ cm}$. B. $AB = 8\text{ cm}$. C. $AB = 10\text{ cm}$. D. $AB = 12\text{ cm}$.

Câu 11: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Giả sử

$IA = 2\text{ cm}; IB = 4\text{ cm}$. Tổng khoảng cách từ tâm O đến dây AB, CD là:

- A. 4 cm . B. 1 cm . C. 3 cm . D. 2 cm .

Câu 12: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M . Biết

$AB = 16\text{ cm}; CD = 12\text{ cm}; MC = 2\text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là:

- A. 4 cm . B. 5 cm . C. 3 cm . D. 2 cm .

Câu 13: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M . Biết

$CD = 8\text{ cm}; MC = 1\text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB là:

- A. 4 cm . B. 5 cm . C. 3 cm . D. 2 cm .

Câu 14: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M . Biết

$AB = 14\text{ cm}; CD = 12\text{ cm}; MC = 2\text{ cm}$. Bán kính R và khoảng cách từ tâm O đến dây CD lần lượt là

- A. $8\text{ cm}; \sqrt{29}\text{ cm}$. B. $\sqrt{65}\text{ cm}; \sqrt{29}\text{ cm}$. C. $\sqrt{29}\text{ cm}; \sqrt{65}\text{ cm}$. D. $\sqrt{29}\text{ cm}; 8\text{ cm}$.

Câu 15: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD vuông góc với nhau ở M . Biết

$AB = 10\text{ cm}; CD = 8\text{ cm}; MC = 1\text{ cm}$. Bán kính R và khoảng cách từ tâm O đến dây CD lần lượt là

- A. $\sqrt{34}\text{ cm}; 9\text{ cm}$. B. $6\text{ cm}; 3\text{ cm}$. C. $\sqrt{34}\text{ cm}; 3\sqrt{2}\text{ cm}$. D. $3\sqrt{2}\text{ cm}; \sqrt{34}\text{ cm}$.

Câu 16: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và một dây MN . Kẻ AE và BF vuông góc với MN lần lượt tại E và F . So sánh độ dài OE và OF .

- A. $OE = OF$. B. $OE = \frac{3}{2}OF$. C. $OE < OF$. D. $OE > OF$.

Câu 17: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và một dây CD . Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F . So sánh độ dài CE và DF .

- A. $CE > DF$. B. $CE = 2DF$. C. $CE < DF$. D. $CE = DF$.

Câu 18: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Kẻ hai dây AC và BD song song. So sánh độ dài AC và BD .

- A. $AC > BD$. B. $AC < BD$. C. $AC = BD$. D. $AC = 3BD$.

Câu 19: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Lấy điểm C là trung điểm đoạn OB . Kẻ dây MN qua C và dây $AD \parallel MN$. So sánh độ dài AD và MN .

- A. $AD = 2MN$. B. $AD = MN$. C. $AD > MN$. D. $AD < MN$.

Câu 20: Cho đường tròn (O) , dây cung AB và CD với $CD < AB$. Giao điểm K của các đường thẳng AB và CD nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn $(O; OK)$, đường tròn này cắt KA và KC lần lượt tại M và N . So sánh KM và KN .

- A. $KN > KM$. B. $KN < KM$. C. $KM = KN$. D. $KN = \frac{4}{3}KM$.

Câu 21: Cho đường tròn (O) , dây cung AB và CD với $CD = AB$. Giao điểm K của các đường thẳng AB và CD nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn $(O; OK)$, đường tròn này cắt KA và KC lần lượt tại M và N . So sánh KM và KN .

- A. $KN > KM$. B. $KN < KM$. C. $KM = KN$. D. $KN = \frac{4}{3}KM$.

Câu 22: Cho đường tròn $(O; 10cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $16cm$ và $12cm$. Tính khoảng cách giữa hai dây.

- A. $14cm$. B. $10cm$. C. $12cm$. D. $16cm$.

Câu 23: Cho đường tròn $(O; 8cm)$. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là $14cm$ và $10cm$. Tính khoảng cách giữa hai dây

- A. $2\sqrt{15}(cm)$. B. $2\sqrt{39}(cm)$. C. $\frac{\sqrt{39} + \sqrt{15}}{2}(cm)$. D. $\sqrt{39} + \sqrt{15}(cm)$.

Câu 24: Cho tam giác ABC nhọn và có các đường cao BD, CE . So sánh BC và DE .

- A. $BC = DE$. B. $BC < DE$. C. $BC > DE$. D. $BC = \frac{2}{3}DE$.

Câu 25: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 14cm$, dây CD có độ dài $12cm$ vuông góc với AB tại H nằm giữa O và B . Độ dài HA là:

- A. $7 + \sqrt{13}cm$. B. $7 - \sqrt{13}cm$. C. $7cm$. D. $7 - 2\sqrt{13}cm$.

Câu 26: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 20cm$, dây CD có độ dài $16cm$ vuông góc với AB tại H nằm giữa O và B . Độ dài HA là:

- A. $12cm$. B. $18cm$. C. $16cm$. D. $15cm$.

Câu 27: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm của CM và DN . So sánh AE và DM .

- A. $AM = \frac{3}{2}AE$. B. $DM < AE$. C. $DM = AE$. D. $DM > AE$.

HƯỚNG DẪN

1. Lời giải:

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Đáp án cần chọn là A.

2. Lời giải:

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây có độ dài lớn nhất.

Đáp án cần chọn là B.

3. Lời giải:

Trong một đường tròn: Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Đáp án cần chọn là B.

4. Lời giải:

Trong một đường tròn: Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Từ đề bài ta thấy dây CD gần tâm hơn dây AB nên $CD > AB$.

Đáp án cần chọn là C.

5. Lời giải:

Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Đáp án cần chọn là A.

6. Lời giải:

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Đáp án cần chọn là D.

7. Lời giải:

Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Nên phương án B, C, D đúng.

Đáp án cần chọn là A.

8. Lời giải:

Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

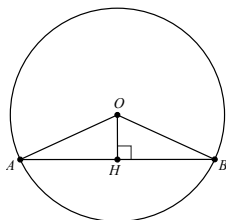
+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

+ Hai dây đi qua tâm thì chưa chắc vuông góc với nhau nên B sai.

Nên phương án A, B, C sai, D đúng.

Đáp án cần chọn là D.

9. Lời giải:



Kẻ $OH \perp AB$ tại H suy ra H là trung điểm của AB .

Xét tam giác OHB vuông tại H có $OH = 3; OB = 5$. Theo định lý Pytago ta có:

$$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Mà H là trung điểm của AB nên $AB = 2HB = 8 \text{ cm}$.

Vậy $AB = 8 \text{ cm}$.

Đáp án cần chọn là B.

10. Lời giải:

Kẻ $OH \perp AB$ tại H suy ra H là trung điểm của AB .

Xét tam giác OHB vuông tại H có $OH = 2,5; OB = 6,5$. Theo định lý Pytago ta có:

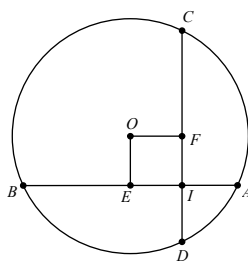
$$HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6.$$

Mà H là trung điểm của AB nên $AB = 2HB = 12 \text{ cm}$.

Vậy $AB = 12 \text{ cm}$.

Đáp án cần chọn là D.

11. Lời giải:



Xét đường tròn tâm (O) .

Kẻ $OE \perp AB$ tại E suy ra E là trung điểm của AB , kẻ $OF \perp CD$ tại F .

Vì dây $AB = CD$ nên $OE = OF$ (hai dây bằng nhau thì cách đều tâm).

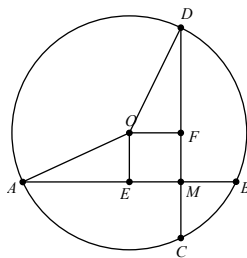
Xét tứ giác $OEIF$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{I} = 90^\circ$ nên $OEIF$ là hình chữ nhật và $OE = OF$ nên $OEIF$ là hình vuông $\Rightarrow OE = OF = EI$.

Mà $AB = IA + IB = 6 \text{ cm} \Rightarrow EB = 3 \text{ cm} \Rightarrow EI = EB - IB = 1 \text{ cm}$ nên $OE = OF = 1 \text{ cm}$

Vậy tổng khoảng cách từ tâm đến hai dây AB, CD là 2 cm .

Đáp án cần chọn là D.

12. Lời giải:



Xét đường tròn tâm (O) .

Kẻ $OE \perp AB$ tại E suy ra E là trung điểm của AB , kẻ $OF \perp CD$ tại F suy ra F là trung điểm của CD .

Xét tứ giác $OEMF$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên $OEIF$ là hình chữ nhật, suy ra $FM = OE$.

Ta có $CD = 12\text{cm} \Rightarrow FC = 6\text{cm}$ mà $MC = 2\text{cm} \Rightarrow FM = FC - MC = 4\text{cm}$ nên $OE = 4\text{cm}$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây AB là 4cm .

Đáp án cần chọn là A.

13. Lời giải:

Xét đường tròn tâm (O) .

Kẻ $OE \perp AB$ tại E suy ra E là trung điểm của AB , kẻ $OF \perp CD$ tại F suy ra F là trung điểm của CD .

Xét tứ giác $OEMF$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên $OEIF$ là hình chữ nhật, suy ra $FM = OE$.

Ta có $CD = 8\text{cm} \Rightarrow FC = 4\text{cm}$ mà $MC = 1\text{cm} \Rightarrow FM = FC - MC = 4 - 1 = 3\text{cm}$ nên

$$OE = FM = 3\text{cm}$$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây AB là 3cm .

Đáp án cần chọn là C.

14. Lời giải:

Lấy E, F lần lượt là trung điểm của hai dây AB và CD . Khi đó:

$OE \perp AB; OF \perp AC$ lại có $\widehat{FME} = 90^\circ$ nên $OEMF$ là hình chữ nhật. Suy ra

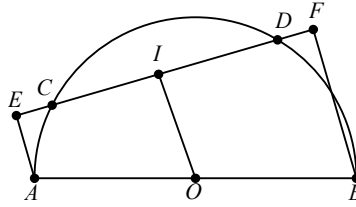
$$OE = MF = CF - MC = 4\text{cm}.$$

xét đường tròn (O) , có $OE = 4\text{cm}$, E là trung điểm của AB nên $AE = \frac{14}{2} = 7\text{cm}$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OEA ta có $OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{65}$ nên $R = \sqrt{65}$.

Lại có $OD = \sqrt{65}\text{cm}$; $FD = 6\text{cm}$ nên áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OFD ta có:

$$OF = \sqrt{OD^2 - FD^2} = \sqrt{29}\text{cm}.$$



Lấy I là trung điểm của EF .

Xét tứ giác $AEFB$ có $AE \parallel FB$ (vì cùng vuông với EF) nên $AEFB$ là hình thang vuông tại $E; F$

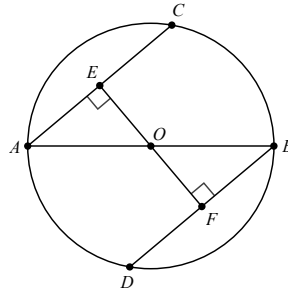
Ta có OI là đường trung bình của hình thang $AEFB$ nên $OI \parallel AE \parallel FB \Rightarrow OI \perp EF$

Hay $OI \perp CD$ nên I là trung điểm của CD (quan hệ giữa dây và đường kính)

Ta có $IE = IF; IC = ID \Rightarrow IE - IC = IF - ID \Leftrightarrow EC = DF$.

Đáp án cần chọn là D.

18. Lời giải:



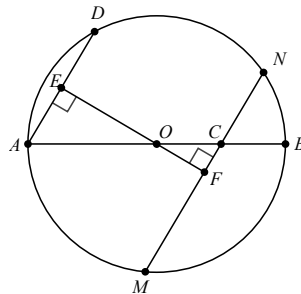
Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với AC tại E và cắt BD tại F thì $EF \perp BD$ tại F vì $AC \parallel BD$.

Xét hai tam giác vuông OEA và tam giác OFB có $OB = OA; \widehat{EAO} = \widehat{FBO}$ (so le trong)

Nên $\triangle AEO = \triangle BFO$ (ch-gn) $\Rightarrow OE = OF \Rightarrow AC = DB$ (hai dây cách đều tâm thì bằng nhau).

Đáp án cần chọn là C.

19. Lời giải:



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với AC tại E và cắt BD tại F thì $EF \perp BD$ tại F vì $AC \parallel BD$.

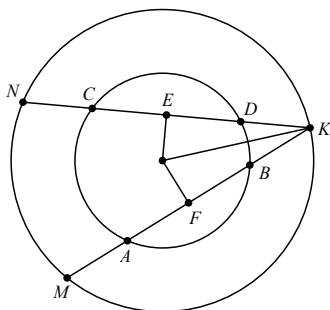
Xét hai tam giác vuông OEA và tam giác OFB có $\widehat{AEO} = \widehat{OFC} = 90^\circ; \widehat{AOE} = \widehat{FOC}$ (đối đỉnh)

Nên $\triangle AEO \sim \triangle CFO$ (g - g) $\Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{OA}{OC}$ mà $OA = OB = 2.OC \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{OA}{OC} = 2 \Rightarrow OE = 2OF$

Hay $OE > OF$ suy ra $AD < MN$ (dây nào xa tâm hơn thì dây đó nhỏ hơn).

Đáp án cần chọn là D.

20. Lời giải:



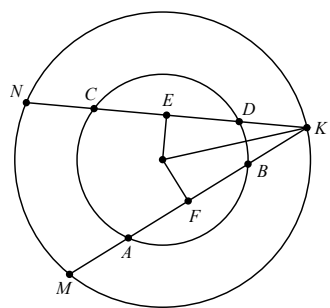
Xét đường tròn $(O;OB)$

Kẻ $OE \perp CD; OF \perp AB$ tại E, F mà $CD < AB \Rightarrow OE > OF$ (dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn)

Xét đường tròn $(O;OK)$ có $OE \perp KN; OF \perp KM$ tại E, F mà $OE > OF \Rightarrow KN < KM$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây)

Đáp án cần chọn là B.

21. Lời giải:



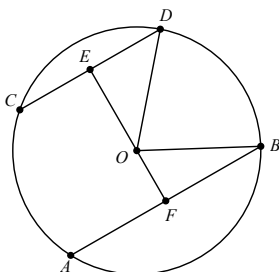
Xét đường tròn $(O;OB)$

Kẻ $OE \perp CD; OF \perp AB$ tại E, F mà $CD < AB \Rightarrow OE > OF$ (hai dây bằng nhau thì cách đều tâm)

Xét đường tròn $(O;OK)$ có $OE \perp KN; OF \perp KM$ tại E, F mà $OE = OF \Rightarrow KN = KM$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây)

Đáp án cần chọn là C.

22. Lời giải:



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với CD tại E và cắt AB tại F thì $EF \perp AB$ vì $AB \parallel CD$.

Khi đó E là trung điểm của CD và F là trung điểm của AB (đường kính vuông góc với dây thì đi qua trung điểm dây đó)

Nên $ED = 6cm; FB = 8cm; OD = OB = 10cm$

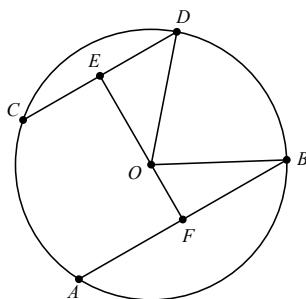
Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OED ta được $OE = \sqrt{OD^2 - ED^2} = 8cm$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OFB ta được $OF = \sqrt{OB^2 - FB^2} = 6cm$.

Vậy khoảng cách giữa hai dây là $EF = OE + OF = 14cm$.

Đáp án cần chọn là A.

23. Lời giải:



Kẻ đường thẳng qua O vuông góc với CD tại E và cắt AB tại F thì $EF \perp AB$ vì $AB \parallel CD$.

Khi đó E là trung điểm của CD và F là trung điểm của AB (đường kính vuông góc với dây thì đi qua trung điểm dây đó)

Nên $ED = \frac{CD}{2} = 5cm; FB = \frac{AB}{2} = 7cm; OD = OB = 8cm$

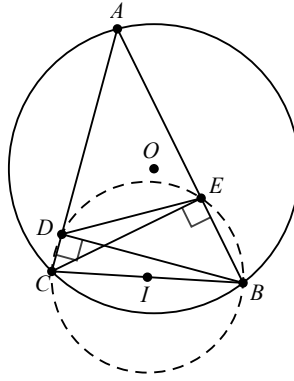
Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OED ta được $OE = \sqrt{OD^2 - ED^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}cm$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OFB ta được $OF = \sqrt{OB^2 - FB^2} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}cm$.

Vậy khoảng cách giữa hai dây là $EF = OE + OF = \sqrt{39} + \sqrt{15}cm$.

Đáp án cần chọn là D.

24. Lời giải:



Lấy I là trung điểm của BC

Xét tam giác vuông BDC có DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DI = IB = IC = \frac{BC}{2}$.

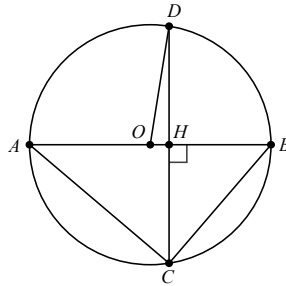
Xét tam giác vuông BEC có EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EI = IB = IC = \frac{BC}{2}$

Từ đó $ID = IE = IB = IC = \frac{BC}{2}$ hay bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc đường tròn $\left(I; \frac{BC}{2}\right)$

Xét $\left(I; \frac{BC}{2}\right)$ có BC là đường kính và DE là dây không đi qua tâm nên $BC > DE$.

Đáp án cần chọn là C.

25. Lời giải:



Xét (O) có $AB \perp CD$ tại H và AB là đường kính nên H là trung điểm của CD

$$\Rightarrow HD = HC = \frac{CD}{2} = 6cm$$

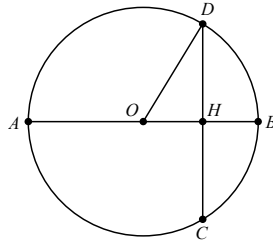
$$\text{Vì } AB = 14 \Rightarrow OA = OB = OD = \frac{14}{2} = 7cm$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OHD ta được $OH = \sqrt{OD^2 - DH^2} = \sqrt{13}$

Khi đó $HA = OA + OH = 7 + \sqrt{13} cm$.

Đáp án cần chọn là A.

26. Lời giải:



Xét (O) có $AB \perp CD$ tại H và AB là đường kính nên H là trung điểm của CD

$$\Rightarrow HD = HC = \frac{CD}{2} = 8cm$$

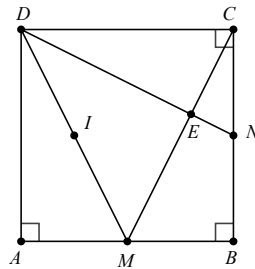
$$\text{Vì } AB = 20 \Rightarrow OA = OB = OD = \frac{20}{2} = 10cm$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OHD ta được $OH = \sqrt{OD^2 - DH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

Khi đó $HA = OA + OH = 10 + 6 = 16cm$.

Đáp án cần chọn là C.

27. Lời giải:



+ Ta có $\widehat{CDN} = \widehat{ECN}$ (vì cùng phụ với $\widehat{CNE}$) nên $\widehat{CNE} + \widehat{ECN} = \widehat{CNE} + \widehat{CDN} = 90^\circ$ suy ra

$$\widehat{CEN} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp DN$$

+ Gọi I là trung điểm của DM

Xét tam giác vuông ADM ta có $AI = ID = IM = \frac{DM}{2}$. Xét tam giác vuông DEM ta có:

$$EI = ID = IM = \frac{DM}{2}$$

$$\text{Nên } EI = ID = IM = IA = \frac{DM}{2}.$$

Do đó bốn điểm A, D, E, M cùng thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{DM}{2}$.

Xét $\left(I; \frac{DM}{2}\right)$ có DM là đường kính và AE là dây không đi qua tâm nên $DM > AE$.

Đáp án cần chọn là D.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho tam giác ABC , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh rằng B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
- c) Chứng minh rằng $BC > DE; AH > DE$.

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$, A và B thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm AB .

- a) Chứng minh rằng $OM \perp AB$
- b) Tính độ dài AB, OM theo R .

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$, A và B di động trên đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Vẽ $OH \perp AB$ tại H .

- a) Chứng minh H là trung điểm của AB
- b) Tính OH, AB . Diện tích OAB theo R .
- c) Tia OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại C . Tứ giác $OABC$ là hình gì? Vì sao?

Bài 4: Cho một nửa đường tròn (O) có đường kính AB và một dây cung CD . Vẽ AP và BS vuông góc với $CD (P \in CD, S \in CD)$. Chứng minh:

- a) P và S ở ngoài đường tròn (O)
- b) $PC = DS$
- c) $S_{APSB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây cung AB . Gọi I là trung điểm của AB . Tia OI cắt cung AB tại M .

- a) Cho $R = 5cm; AB = 6cm$. Tính độ dài dây cung MA
- b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua O , giả sử $MA = 5cm; AB = 6cm$. Tính bán kính R .

Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn thẳng OA lấy điểm C và trên đoạn thẳng OB lấy điểm D sao cho $OC = OD$. Từ C và D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở E và F . Gọi I là trung điểm của EF . Chứng minh rằng: $S_{CEF} + S_{DEF} = EF.OI$.

Bài 7: Cho đoạn thẳng $AB = 6cm$. Các đường tròn đi qua A, B đường tròn nào có độ dài bán kính nhỏ nhất.

Bài 8: Cho đường tròn $(O; R)$. Các điểm A, B, C, D thuộc đường tròn $(O; R)$.

Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 9: Cho tam giác nhọn ABC . D là điểm di động trên cạnh BC . Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACD . Xác định vị trí của D để tổng $R_1 + R_2$ nhỏ nhất.

Bài 10: Cho đường tròn $(O; R)$. A là điểm nằm ngoài đường tròn (O) . Đường thẳng d qua A cắt đường tròn (O) tại B, C . Xác định vị trí của d để $AB + AC$ lớn nhất.

Bài 11: Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Vẽ dây CD không qua tâm và không vuông góc với AB . Qua A và B vẽ các đường vuông góc với CD tại E và F . Chứng minh $CF = DE$.

Bài 12: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . C, D là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{CAB} = 45^\circ, \widehat{DAB} = 30^\circ$. AC cắt BD tại M, AD cắt BC tại N .

a) Chứng minh rằng $MN \perp AB$

b) Tính diện tích ABM theo R .

Bài 13: Cho đường tròn $(O; R)$ và $l(O < l < 2R)$

a) Tìm quỹ tích trung điểm M của tất cả các dây cung $AB = l$ của đường tròn (O)

b) Gọi C, D là hai điểm tùy ý sao cho $CD = l$. Hãy dựng hình bình hành $CDEF$ sao cho E, F nằm trên đường tròn $(O; R)$. (Chỉ trình bày cách dựng và chứng minh).

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

a) $\widehat{BEC} = 90^\circ (CE \perp AB), \widehat{BDC} = 90^\circ (BD \perp AC)$

Gọi M là trung điểm BC , $\triangle EBC$ vuông tại E có EM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow ME = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

$$\text{Tương tự: } MD = MB = MC = \frac{BC}{2}$$

Ta có: $MB = ME = MD = MC$

$\Rightarrow B, E, D, C$ cùng thuộc đường tròn tâm M

b) Chứng minh tương tự có A, D, H, E cùng thuộc đường tròn

c) $\angle BED = 90^\circ, DE$ là dây cung khác đường kính đường tròn đường kính BC

$$\Rightarrow BC > DE$$

Chứng minh tương tự có: $AH > DE$.

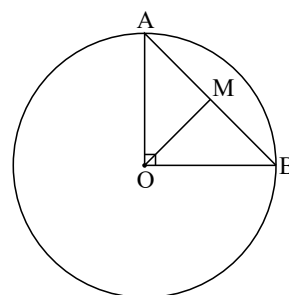
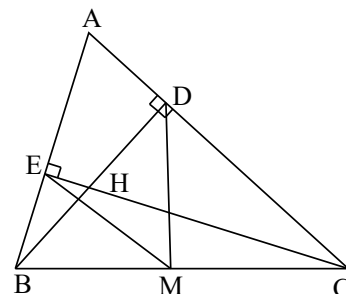
Bài 2:

a) $\widehat{AOB} = 90^\circ \neq 180^\circ$

$\Rightarrow AB$ không là đường kính của đường tròn (O)

M là trung điểm của dây cung AB

22. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com



Nên $OM \perp AB$

b) $\triangle OAB$ vuông tại O có:

$OA = OB (= R)$ nên là tam giác vuông cân

$$\Rightarrow AB = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}.$$

$\triangle OAB$ vuông tại O , OM là đường trung tuyến nên:

$$OM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Bài 3:

a) AB là dây cung của đường tròn (O)

$OH \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) $\triangle OAB$ cân tại O (vì $OA = OB = R$) có:

OH là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác.

$$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ$$

Tam giác HAO vuông tại H có $\widehat{AOH} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều.

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R; AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2}R; AB = 2AH = \sqrt{3}R$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}R \cdot \sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \text{ (đvdt)}$$

$$c) \quad HC = OC - OH = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

Tứ giác $OACB$ có $HA = HB, HO = HC (= \frac{1}{2}R)$

Nên là hình bình hành.

Mà $OA = OB (= R)$

Do đó $OACB$ là hình thoi

Bài 4:

a) Gọi I là trung điểm PS

$AP \perp PS$ (gt), $BS \perp PS$ (gt)

$$\Rightarrow AP \parallel BS$$

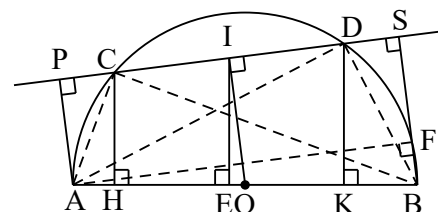
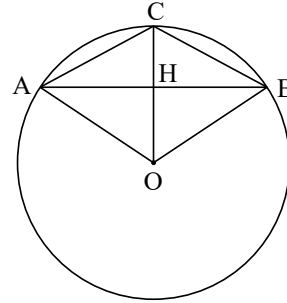
$\Rightarrow APSB$ là hình thang

Nên OI là đường trung bình của hình thang $APSB$

$$\Rightarrow OI \parallel AP \text{ mà } AP \perp PS \Rightarrow OI \perp PS$$

Ta có OI là đường trung trực của PS

23. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com



$$\Rightarrow OP = OS$$

$$\widehat{PAB} + \widehat{ABS} = 180^\circ (AP \parallel BS)$$

$$\Rightarrow \widehat{PAB} \geq 90^\circ \text{ hoặc } \widehat{ABS} \geq 90^\circ$$

Giả sử $\widehat{PAB} \geq 90^\circ$.

$$\Delta APO \text{ có } \angle PAD \geq 90^\circ \Rightarrow OP > OA = R$$

$\Rightarrow P$ nằm ngoài đường tròn $(O; R)$

Ta cũng có $OS = OP > R \Rightarrow S$ nằm ngoài đường tròn $(O; R)$.

$$b) \quad OI \perp CD \Rightarrow IC = ID$$

$$\text{Do đó: } IP = IC = IS - ID \Rightarrow PC = DS$$

c) Hạ CH, IE và DK vuông góc với AB . Ta có tứ giác $HCDK$ là hình thang và IE là đường trung bình nên:

$$IE = \frac{CH + DK}{2}. \text{ Ta có:}$$

$$S_{ACB} + S_{ADB} = \frac{1}{2}CH \cdot AB + \frac{1}{2}DK \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}(CH + DK) \cdot AB$$

$$= IE \cdot AB \quad (1) \text{ (Vì } OI = \frac{1}{2}(CH + DK))$$

Giả sử $AP < BS$, hạ $AF \perp BS$, ta có:

$$S_{APSB} = \frac{1}{2}(AP + BS) \cdot AF \quad (2) \text{ (Vì } OI = \frac{1}{2}(AP + BS))$$

Mặt khác: $\triangle OEI \sim \triangle BFA$

Vì $\widehat{IOE} = \widehat{FBA}$ (Vì $OI \parallel BS$) và $\widehat{E} = \widehat{F} (= 90^\circ)$

$$\text{Cho ta: } \frac{EI}{FA} = \frac{OI}{BA} \text{ hay } EI \cdot BA = OI \cdot FA \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) cho ta: } S_{APSB} = S_{ACB} + S_{ADB}.$$

Bài 5:

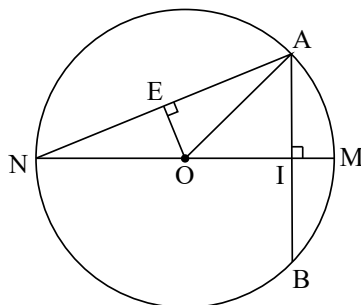
a) Vì I là trung điểm của dây AB nên:

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Và $OI \perp AB$

$$\bullet \quad \triangle OIA (\widehat{I} = 90^\circ)$$

$$OI^2 = OA^2 - IA^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$



$$\Rightarrow OI = 4cm \Rightarrow IM = 1cm$$

- $\triangle AIM$ cho ta:

$$AM^2 = AI^2 + IM^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

b) Gọi E là trung điểm của dây NA

Ta có $OE \perp NA$ và $NE = EA = 2,5cm$

- $\triangle IAN$ cho ta: $IN^2 = NA^2 - AI^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow IN = 4(cm)$

- $\triangle NEO \triangle NIA$ cho ta: $\frac{NE}{NI} = \frac{ON}{NA}$

$$\Rightarrow ON = \frac{NE.NA}{NI} = \frac{2,5.5}{4} = 3,125cm.$$

Bài 6:

Vì I là trung điểm của EF

Nên $OI \perp EF$

Ta có: $CE \parallel DF$

Và O là trung điểm của CD nên tứ giác $CEFD$ là hình thang

Và OI là đường trung bình

Suy ra: $OI \parallel CE \parallel DF$

mà $OI \perp EF$

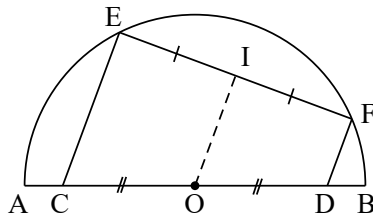
nên $CE \perp EF, DF \perp EF$.

$$\text{Do đó: } OI = \frac{1}{2}(CE + DF)$$

$$\text{Và } S_{CEF} = \frac{1}{2}CE.EF$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE.EF$$

$$\Rightarrow S_{CEF} + S_{DEF} = \frac{1}{2}EF(CE + DF) = EF.OI$$



Bài 7:

Gọi R là bán kính của đường tròn đi qua A và B

Ta có: $2R \geq AB$

$$2R \geq 6cm$$

$$R \geq 3cm, \text{ không đổi}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của đường tròn đường kính AB có độ dài bán kính nhỏ nhất.

Bài 8:

Vẽ $AH \perp BD (H \in BD), CK \perp BD (K \in BD)$

Gọi I là giao điểm của AC, BD

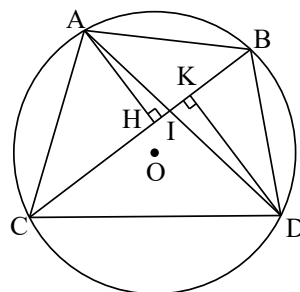
$AH \perp HI$ nên $AH \leq AI$

$CK \perp KI$ nên $CK \leq IC$

Do đó: $AH + CK \leq AI + IC = AC$

$AC \leq 2R, BD \leq 2R$

(AC, BD là các dây cung của đường tròn $(O; R)$).



Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH + \frac{1}{2}BD \cdot CK$

$$= \frac{1}{2}BD(AH + CK) \leq \frac{1}{2}BD \cdot AC$$

Do vậy: $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}2R \cdot 2R = 2R^2$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} BD = 2R \\ AC = 2R \\ H \equiv I \equiv K \end{cases}$$

$\Leftrightarrow AC, BD$ là hai đường kính vuông góc nhau.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $2R^2$.

Bài 9:

R_1 là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (gt)

Nên $2R_1 \geq AB$

Và R_2 là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD

Nên $2R_2 \geq AC$

Do đó: $2R_1 + 2R_2 \geq AB + AC$

$$R_1 + R_2 \geq \frac{1}{2}(AB + AC), \text{ không đổi}$$

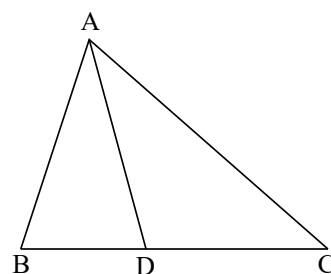
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AB, AC$ là đường kính cả các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD .

$$\Leftrightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$$

$\Leftrightarrow D$ là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC

Vậy khi D là chân đường cao vẽ từ A của tam giác ABC thì

$R_1 + R_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài 10:

Vẽ $OH \perp d (H \in d)$

$\Rightarrow H$ là trung điểm BC (Định lý đường kính vuông góc dây cung)

Ta có: $AB + AC = AH - HB + AH + HC$

$$= (AH + AH) + (HC - HB) = 2AH$$

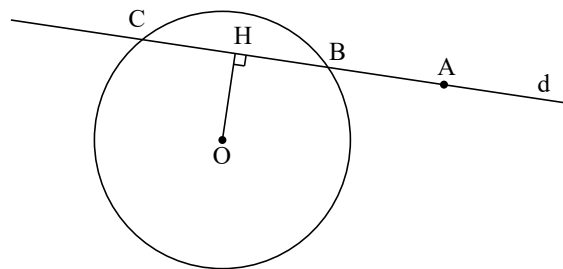
Mà $OH \perp AH$ nên $AH \leq OA$

Do đó: $AB + AC \leq 2OA$

$2OA$ không đổi

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow O \equiv H$

Vậy khi đường thẳng d đi qua O thì tổng $AB + AC$ lớn nhất.



Bài 11:

Vẽ $OI \perp CD, I \in CD$

$\Rightarrow IC = ID$ (Định lý đường kính vuông góc với dây cung)

$AE \perp DC, BF \perp DC, OI \perp CD$

$\Rightarrow$ Các đường thẳng AE, BF, OI song song với nhau

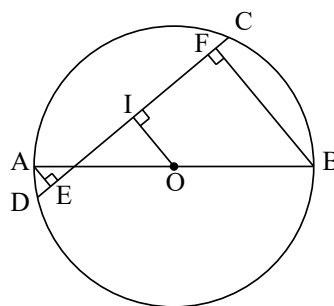
Hình thặng $EAFB$ có:

$OI \parallel AE$ và $OA = OB$

Do đó: $IF = IE$

Ta có: $IC - IF = ID - IE$

$\Rightarrow CF = DE$



Bài 12:

a) C, D thuộc đường tròn đường kính AB (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

Xét $\triangle MAB$ có AD, BC là hai đường cao cắt nhau tại N

$\Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác MAB

$\Rightarrow MN \perp AB$

b) Gọi H là giao điểm của MN và AB

$\triangle HAM$ vuông tại H có $\widehat{MAH} = 45^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \triangle HAM$ vuông cân tại H

$\Rightarrow AH = MH$

$\triangle DAB$ vuông tại D có $\widehat{DAB} = 30^\circ$ nên:

$$\widehat{DBA} + \widehat{DAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBA} = 60^\circ$$

$\triangle MHB$ vuông tại H có $\widehat{MBH} = 60^\circ$ nên là nửa tam giác đều

$$\Rightarrow HB = \frac{\sqrt{3}MH}{3}$$

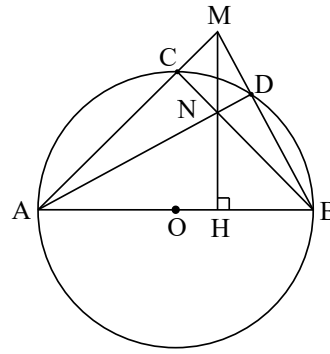
$$MH + \frac{\sqrt{3}MH}{3} = AH + HB$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} MH = 2R$$

$$MH = \frac{2 \times 3}{3 - \sqrt{3}} R$$

$$= (3 - \sqrt{3})R$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AB = (3 - \sqrt{3})R^2 \text{ (đvdt)}$$



Bài 13:

a) 1) Phần thuận:

Vì M là trung điểm của dây cung $AB = 1$

Nên: $MA = MB = \frac{1}{2}$ và $OM \perp AB$

$\triangle OMA$ cho: $OM^2 = OA^2 - AM^2 \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}}$ không đổi

Do đó M ở trên đường tròn $(O; \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}})$

2) Phần đảo:

Trên đường tròn $(O; \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}})$ ta lấy một điểm M' bất kỳ.

Vẽ dây cung $A'B'$ vuông góc với OM' tại M' . Ta phải chứng minh M' là trung điểm của dây cung $A'B' = 1$. Thật vậy:

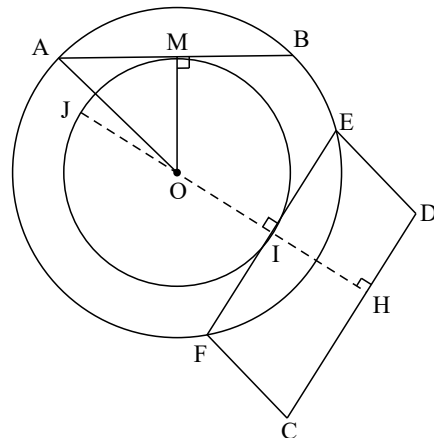
- Vì dây cung $A'B'$ vuông góc với OM' tại M' . Nên M' là trung điểm của $A'B'$

- Ta có: $OM' = \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}}$

$$\text{Nên } OM'^2 = R^2 - \frac{1^2}{4}$$

Tam giác vuông $OM'A'$ cho ta:

$$\begin{aligned} A'M'^2 &= OA'^2 - OM'^2 \\ &= R^2 - \left(R^2 - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{1^2}{4} \end{aligned}$$



Suy ra: $A'M' = \frac{1}{2}$ và $A'B' = 1$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn $(O; \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}})$.

b) 1) *Cách dựng:*

- Dựng $OH \perp CD$, đường thẳng OH cắt đường tròn $(O; \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}})$ tại I và J .

- Dựng dây cung EF của đường tròn $(O; R)$ vuông góc với OI tại I (hoặc OJ tại J). Tứ giác $EFCD$ là hình bình hành phải dựng.

2) *Chứng minh:*

Vì $OI = OM$ nên $EF = AB \Rightarrow EF = CD$.

Theo cách dựng, ta còn có: $EF \parallel CD$ (vì cùng $\perp OH$)

Vậy tứ giác $EFCD$ là hình bình hành.

3) *Biện luận:*

Vì đường thẳng OH luôn cắt đường tròn $(O; \sqrt{R^2 - \frac{1^2}{4}})$ tại hai điểm nên bài toán luôn dựng được và có hai nghiệm hình.

-----Toán Học Sơ Đồ-----