

ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng đơn vị đo (tỷ số này không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo).

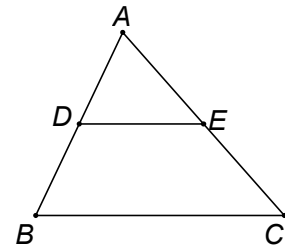
2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

3. Định lý Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 259

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC \\ DE \parallel BC \end{array} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{DB}{BA} = \frac{EC}{CA}, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \right.$$

4. Nhớ lại tỉ lệ thức và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

a) Tỷ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

b) Tính chất

Tính chất 1 (Tính chất cơ bản của tỉ lệ thức): Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $ad = bc$.

Tính chất 2: Nếu $ad = bc$ và $abcd \neq 0$ thì ta có bốn tỉ lệ thức sau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

c) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Từ dãy tỉ số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, suy ra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$.

5. Từ định lý Ta-lét ta thu được kinh nghiệm thứ năm

Cứ nói đến tỉ số của hai đoạn thẳng phải nghĩ đến định lí Ta-lét, ta cứ nói đến định lí Ta-lét phải nghĩ đến đường thẳng song song.

Ý nghĩa của kinh nghiệm này là: Với các bài toán đề cập đến tỉ số của hai đoạn thẳng mà phải vẽ thêm đường phụ, ta vẽ thêm đường thẳng song song để sử dụng định lí Ta-lét.

II. BÀI TẬP MINH HỌA

A. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính tỉ số hai đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng định nghĩa tỉ số của hai đoạn thẳng.
- Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB (hoặc đường thẳng AB), được gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n} \neq 1$ (m, n là các số dương), nếu ta có: $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$.
- Sử dụng kĩ thuật đại số hóa hình học:

$$\text{Nếu ta có: } \frac{CA}{CB} = \frac{m}{n} \text{ thì } \begin{cases} CA = mt \\ CB = nt \end{cases} \text{ (với } t > 0)$$

- Lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng tỉ lệ rồi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau.

II. VÍ DỤ

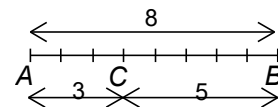
Ví dụ 1. Điểm C thuộc đoạn thẳng AB và chia AB theo tỉ số $\frac{3}{5}$. Hãy tính các tỉ số:

$$\frac{AB}{AC}; \frac{AB}{CB}.$$

Lời giải (hình 260)

Vì C chia đoạn AB theo tỉ số $\frac{3}{5}$ nên:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} CA = 3t \\ CB = 5t \end{cases} \text{ với } t > 0.$$



Hình 260

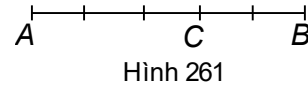
$$\text{Do đó } AB = AC + CB = 8t. \text{ Vậy } \frac{AB}{AC} = \frac{8t}{3t} = \frac{8}{3}, \frac{AB}{CB} = \frac{8t}{5t} = \frac{8}{5}.$$

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng $AB = 10cm$.

a) Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2}$. Tính độ dài CB .

b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$. Tính độ dài CD .

Lời giải (hình 261)



a) **Cách 1:** Từ giả thiết:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} CA = 3t \\ CB = 2t \end{cases} \text{ với } t > 0;$$

Nên $AB = 10cm = CA + CB = 5t \Leftrightarrow t = 2cm$. Vậy $CB = 4cm$.

Cách 2: Từ giả thiết $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CA}{3} = \frac{CB}{2} = \frac{CA + CB}{3 + 2} = \frac{AB}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

Vậy $CB = 4(cm)$.

Cách 3: Đặt $CB = x$ thì $CA = 10 - x$.

Từ giả thiết và tính chất cơ bản của tỉ lệ thức ta có $3CB = 2CA$ hay

$$3x - 2(10 - x) \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4(cm).$$

b) Từ giả thiết $\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} DA = 3t \\ DB = 2t \end{cases}$.

Mặt khác D thuộc tia đối của tia BA nên $DA > DB$.

Do đó $AB = 10cm = DA - DB = 3t - 2t \Leftrightarrow t = 10cm$, suy ra $DB = 20cm$.

Vậy $CD = 20 + 4 = 24(cm)$.

Ví dụ 3. Đoạn thẳng $AB = 44dm$ được chia thành các đoạn thẳng liên tiếp AM, MN, NP và PB lần lượt tỉ lệ với 10, 2, 3 và 5.

a) Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.

b) Chứng minh rằng hai điểm M và P chia đoạn AN theo cùng một tỉ số k và tính k .

c) Còn hai điểm nào chia đoạn thẳng nào theo cùng một tỉ số nữa không?

Lời giải

a) Từ giả thiết và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{AM}{10} = \frac{MN}{2} = \frac{NP}{3} = \frac{PB}{5} = \frac{AM + MN + NP + PB}{10 + 2 + 3 + 5} = \frac{44}{20} = 2,2.$$

Vậy $AM = 22dm, MN = 4,4dm, NP = 6,6dm, PB = 11dm$.

b) Từ câu a) ta có $\frac{MA}{MN} = \frac{22}{4,4} = 5; \frac{PA}{PN} = \frac{33}{6,6} = 5$.

Điều này chứng tỏ M và P chia đoạn AN theo cùng một tỉ số $k = 5$.

c) Vì $\frac{AM}{AP} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}, \frac{NM}{NP} = \frac{4,4}{6,6} = \frac{2}{3}$;

Nên còn hai điểm A và N chia đoạn MP theo cùng một tỉ số $\frac{2}{3}$.

DẠNG 2. Tính độ dài đoạn thẳng, dựng đoạn thẳng tỉ lệ thứ tư

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính độ dài đoạn thẳng:

- Áp dụng định lí Ta-lét để lập hệ thức của các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
- Thay số vào hệ thức rồi giải phương trình.

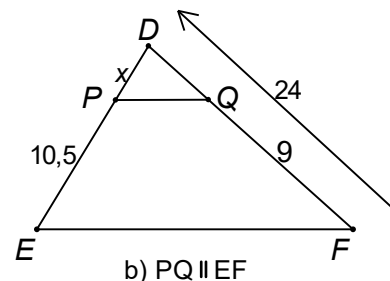
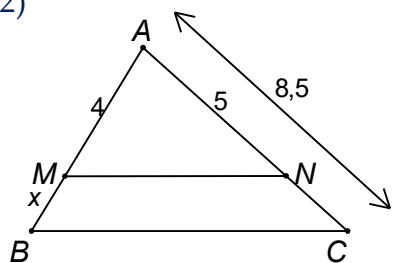
2. Trong bốn đoạn thẳng tỉ lệ, dựng đoạn thẳng thứ tư khi biết độ dài của ba đoạn kia:

- Đặt ba đoạn thẳng trên hai cạnh của một góc.
- Dựng đường thẳng song song để xác định đoạn thẳng thứ tư.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính x trong các trường hợp sau (h. 262), biết rằng các số trên hình có cùng đơn vị đo là cm .

Lời giải (hình 262)



a) Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle ABC$ có $MN \parallel BC$, ta được:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA} \text{ hay } \frac{x}{4} = \frac{8,5-5}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4,3,5}{5} = 2,8.$$

b) Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle DFE$ có $PQ \parallel EF$, ta được:

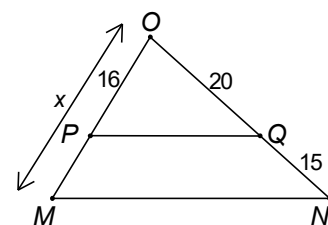
$$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF} \text{ hay } \frac{x}{10,5} = \frac{24-9}{9} \Leftrightarrow x = \frac{10,5,15}{9} = 17,5.$$

Ví dụ 2. Tính x trên hình 263.

Lời giải (hình 263).

Áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle OMN$ có $PQ \parallel MN$, ta được:

$$\frac{MP}{PO} = \frac{NQ}{QO} \text{ hay } \frac{x-16}{16} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x-16 = 12 \Leftrightarrow x = 28.$$

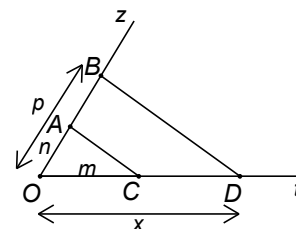


Hình 263

Ví dụ 3. Cho ba đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Hãy dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

Lời giải (hình 264)

- Vẽ góc zOt bất kì.
- Trên tia Oz đặt các đoạn $OA = n, OB = p$.
- Trên tia Ot đặt $OC = m$.
- Vẽ $BD \parallel AC$ thì $OD = x$ là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 264

Thật vậy, áp dụng định lí Ta-lét vào $\triangle OBD$ có $AC \parallel BD$, ta được:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \text{ hay } \frac{n}{p} = \frac{m}{x}.$$

DẠNG 3. Chứng minh các hệ thức hình học

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
2. Áp dụng định lí Ta-lét để lập hệ thức của các đoạn thẳng tỉ lệ.
3. Sử dụng các tính chất của tỉ lệ thức hoặc cộng theo vế các đẳng thức hình học.

Hình 266

$$MQ \parallel AP, PN \parallel QC.$$

Áp dụng định lí Ta-lét vào hai tam giác APB và DQC có $MQ \parallel AP, PN \parallel QC$, ta được:

$$\frac{BQ}{QP} = \frac{BM}{MA} = 1 \Rightarrow BQ = QP \quad (1).$$

$$\frac{DP}{PQ} = \frac{DN}{NC} = 1 \Rightarrow DP = PQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $DP = PQ = QB$.

DẠNG 4*. Vẽ thêm đường thẳng song song để tính tỉ số hai đoạn thẳng

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ thêm đường thẳng song song.
2. Sử dụng kĩ thuật đại số hóa hình học.
3. Áp dụng định lí Ta-lét.

II. VÍ DỤ

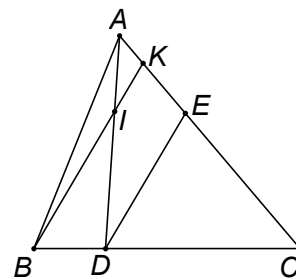
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\frac{BC}{BD} = \frac{4}{1}$. Điểm I thuộc đoạn AD sao cho $\frac{AI}{ID} = \frac{1}{2}$. Gọi K là giao điểm của BI và AC . Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$.

Lời giải (hình 267)

Kẻ thêm $DE \parallel BK$ thì $DE \parallel IK$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ADE có $IK \parallel DE$, ta được:

$$\frac{AK}{KE} = \frac{AI}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} AK = 1t \\ KE = 2t \end{cases} \text{ (với } t > 0).$$



Hình 267

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BCK có $DE \parallel BK$, ta được:

$$\frac{KC}{KE} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{1} \Rightarrow KC = 4KE = 8t$$

$$\text{Vậy } \frac{AK}{KC} = \frac{1t}{8t} = \frac{1}{8}.$$

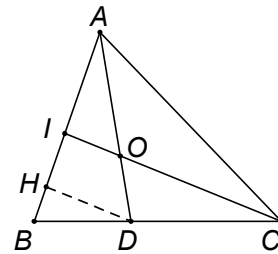
lấy điểm O sao cho $\frac{AO}{OD} = \frac{3}{2}$. Gọi I là giao điểm của CO và AB . Tính tỉ số $\frac{AI}{IB}$.

Lời giải (hình 268)

Kể thêm $DH \parallel CI$ thì $DH \parallel IO$.

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác ADH có $DH \parallel IO$, ta được:

$$\frac{AI}{IH} = \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} AI = 3t \\ IH = 2t \end{cases} \text{ (với } t > 0);$$



Hình 268

Áp dụng định lí Ta-lét vào tam giác BIC có $DH \parallel IC$, ta được:

$$\frac{BI}{IH} = \frac{BC}{CD} = \frac{2}{1} \Rightarrow BI = 2IH = 2.2t = 4t. \text{ Vậy } \frac{AI}{IB} = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}.$$

C. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN DẠNG BÀI CƠ BẢN

Bài 1: Cho tam giác ABC , các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G .

a) Tính $\frac{AE}{AC}$

b) Tính $\frac{AG}{GD}$

b) Kể hai cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.

Bài 2: Cho đoạn thẳng AM , M là một điểm trên đoạn AB . Tính các tỉ số $\frac{AM}{AB}$ và $\frac{MB}{AB}$ nếu:

$$a) \frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{MA}{MB} = \frac{7}{4}$$

$$\text{c) } \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$$

Bài 3: Cho góc xOy . Trên tia Ox , lấy theo thứ tự 2 điểm A, B sao cho

OA = 2cm, AB = 3cm. Trên tia Oy, lấy điểm C với OC = 3cm. Từ B, kẻ đường thẳng song song với AC cắt Oy tại D. Tính độ dài CD.

Bài 4: Cho tam giác ACE có $AC = 11\text{cm}$. Lấy điểm B trên cạnh AC sao cho $BC = 6\text{cm}$. Lấy điểm D trên cạnh AE sao cho $DB \parallel EC$. Giả sử $AE + ED = 25,5\text{cm}$. Hãy tính:

a) Tỷ số $\frac{DE}{AE}$;

b) Độ dài các đoạn thẳng AE, DE và AD.

Bài 5: Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC sao cho $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$, điểm E trên đoạn AD sao cho $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi K là giao điểm của BE và AC. Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$.

Bài 6: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và điểm E thuộc đoạn thẳng MC. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở D và cắt AM ở K. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F. Chứng minh $CF = DK$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$. Từ D trên cạnh AB, kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E. Trên tia đối của tia CA, lấy điểm F sao cho $CF = DB$. Gọi M là giao điểm của DF và BC. Chứng minh $\frac{DM}{MF} = \frac{AC}{AB}$

Bài 8: Cho tam giác ABC có đường cao AH. Trên AH, lấy các điểm K, I sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K lần lượt vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC$, $MN \parallel BC$ ($E, M \in AB$, $F, N \in AC$).

a) Tính $\frac{MN}{BC}$ và $\frac{EF}{BC}$.

b) Cho biết diện tích của tam giác ABC là 90 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $MNFE$.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN DẠNG CƠ BẢN

Bài 1:

a) Có E là trung điểm của AC (vì BE là trung tuyến)

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ (tính chất trung điểm của đoạn thẳng)

b) $\triangle ABC$ có các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G

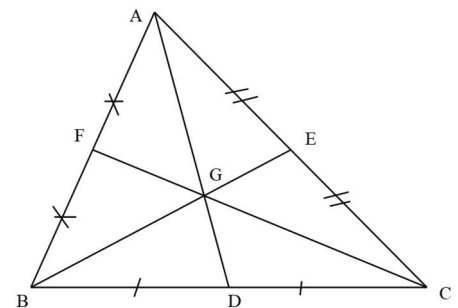
$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} = 2$ (G là trọng tâm $\triangle ABC$)

c) G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF}$

$\Rightarrow BG$ và GE là cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD .

$\Rightarrow CG$ và GF là cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD .



Bài 2:



$$a) \frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} = \frac{MA + MB}{1 + 2} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{1}{3}; \frac{MB}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$b) \text{ Có } \frac{MA}{MB} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MA}{7} = \frac{MB}{4} = \frac{MA + MB}{7 + 4} = \frac{AB}{11} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{7}{11}; \frac{MB}{AB} = \frac{4}{11}$$

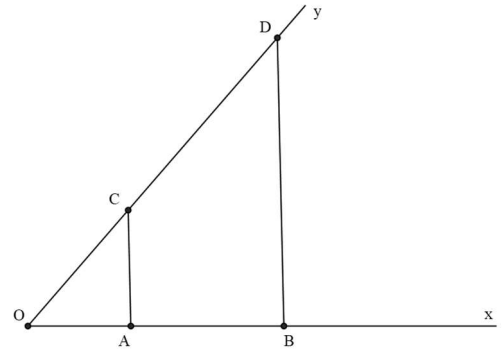
$$c) \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{MA}{m} = \frac{MB}{n} = \frac{MA + MB}{m + n} = \frac{AB}{m + n} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{m}{m + n}; \frac{MB}{AB} = \frac{n}{m + n}$$

Bài 3:

Xét $\triangle OBD$ có: $AC \parallel BD$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CD} \text{ (định lý Ta-let trong tam giác)}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{AB \cdot OC}{OA} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 (cm)$$



Bài 4:

$$a) \text{ Theo định lý Ta-lét trong } \triangle ACE, \text{ ta có: } \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}.$$

$$b) \text{ Cách 1. Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có: } \frac{DE + AE}{AE} = \frac{17}{11}$$

Từ đó tính được $AE = 16,5 \text{ cm}; DE = 9 \text{ cm}$ và $AD = 7,5 \text{ cm}$.

Cách 2. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

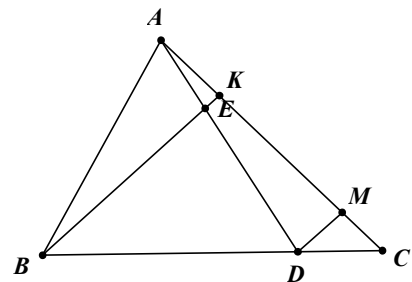
$$\text{Cách 3. Thay } DE = 25,5 - AE \text{ vào } \frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}$$

Bài 5: Kẻ $DM \parallel BK (M \in AC)$

Áp dụng định lý Ta-lét trong $\triangle CBK$, ta có:

$$\frac{KM}{KC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự với } \triangle ADM, \text{ ta có: } \frac{AK}{KM} = \frac{1}{2} \quad (2)$$



Từ (1) và (2), tìm được: $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{8}$

Bài 6: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và điểm E thuộc đoạn thẳng MC. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở D và cắt AM ở K. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F. Chứng minh $CF = DK$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh được ADEF là hình bình hành, từ đó: $EF = AD$ (1)

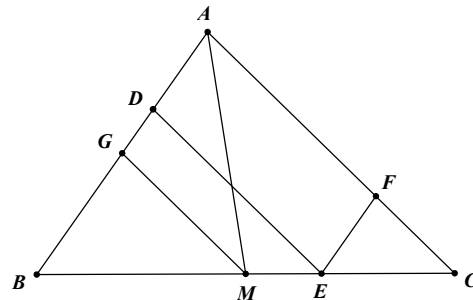
Kẻ $MG \parallel AC$ ($G \in AB$), ta được G là trung điểm của AB. Áp dụng định lý Ta-lét trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

Tương tự với $\triangle AGM$ và $\triangle ABC$, ta có:

$$\frac{DK}{AD} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{BG} = \frac{AC}{AB} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $CF = DK$



Bài 7:

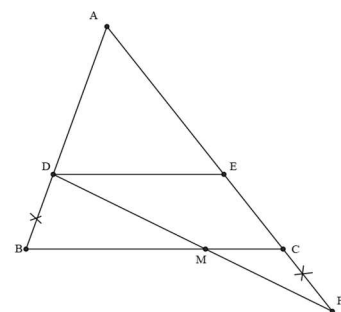
Xét $\triangle ABC$ có: $DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BD} \text{ hay } \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{BD} \quad (\text{định lý Ta-let trong tam giác}) \quad (1)$$

Xét $\triangle DEF$ có: $DE \parallel MC$ (vì $DE \parallel BC$)

$$\Rightarrow \frac{DM}{MF} = \frac{EC}{CF} \quad (\text{định lý Ta-let trong tam giác}) \quad (2)$$

Mà $CF = DB$ (gt) (3) nên từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DM}{MF} = \frac{AC}{AB}$



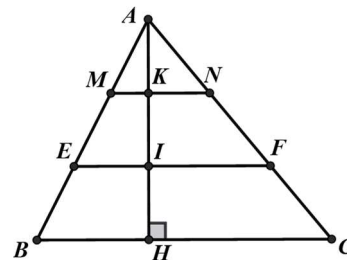
Bài 8:

$$a) \quad +) \quad NK \parallel CH \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$+) \quad IF \parallel CH \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3}$$



b) $MNFE$ có $MN // FE$ và $KI \perp MN$. Do đó $MNEF$ là hình thang có 2 đáy MN, FE , chiều cao KI .

$$\Rightarrow S_{MNEF} = \frac{(MN + FE) \cdot KI}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3}BC + \frac{2}{3}BC\right) \cdot \frac{1}{3}AH}{2} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 30(cm^2)$$

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====