BÀI 7. ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Nắm được nội dung định lí Py-ta-go và định lí Py-ta-go đảo.

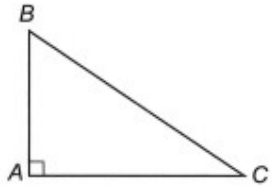
❖ **Kĩ năng**

+ Vận dụng định lí Py-ta-go để tính độ dài cạnh thứ ba khi biết độ dài hai cạnh của tam giác vuông.
+ Vận dụng định lí Py-ta-go đảo để chứng minh góc vuông hoặc tam giác vuông.
+ Áp dụng định lí Py-ta-go vào các bài toán trong thực tiễn.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định lí Py-ta-go

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông



ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

Định lí Py-ta-go đảo

Nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng các bình phương hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

ΔABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$

hay ΔABC vuông tại A

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính độ dài một cạnh của tam giác vuông

Phương pháp giải

* Sử dụng định lí Py-ta-go và các hệ quả đi kèm.

* Lưu ý sử dụng các giá trị số căn bậc hai: $x^2 = a$ thì $x = \sqrt{a}$ với mọi $x \geq 0$.

Bước 1. Xác định nội dung của định lí Py-ta-go đối với tam giác vuông.

Bước 2. Dựa theo yêu cầu tính toán, ta thay số vào hệ thức Py-ta- go và tìm độ dài cạnh cần tính.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết $AB = 5cm$, $AC = 12cm$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Với $AB = 5cm,\ AC = 12cm$, ta có

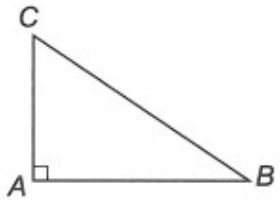
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$

$\Rightarrow BC = 13cm$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết $BC = 15cm$ và $AC = 2AC$.

Hướng dẫn giải

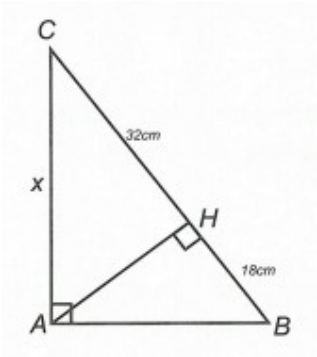


Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Với $BC = 15cm$ và $AB = 2AC$, ta có $(2AC)^2 + AC^2 = 15^2 \Rightarrow 5AC^2 = 225$

$\Rightarrow AC^2 = 45 \Rightarrow AC = \sqrt{45}cm$. Suy ra $AB = 2AC = 2\sqrt{45}cm$.

Ví dụ 2. Tính độ dài x trong hình sau



Hướng dẫn giải

Ta có $BC = BH + CH = 32 + 18 = 50(cm)$

Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có

+ Xét ΔACH vuông tại H có:

$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AH^2 = AC^2 - CH^2 = x^2 - 32^2$. (1)

+ Xét ΔABH vuông tại H có:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = x^2 - 32^2 + 18^2$. (2)

+ Xét ΔABC vuông tại A có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (3)

Thay (1) và (2) vào (3), ta có

$x^2 - 32^2 + 18^2 + x^2 = 50^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 700 = 2500$

$\Rightarrow x^2 = 1600$

$\Rightarrow x = 40$

Vậy $x = 40cm$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho tam giác *ABC* vuông tại *B*. Kết luận nào sau đây là đúng?

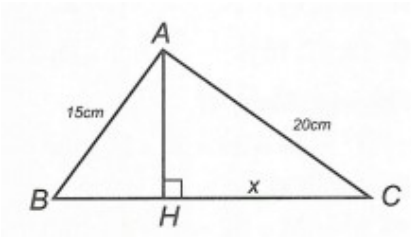
A. $BC^2 = AB^2 + AC^2$. **B.** $AC^2 = BA^2 + BC^2$.

C. $AC^2 = BC^2 - AB^2$. **D.** $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Câu 2: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $BC = 26cm,\ AC = 10cm$. Chu vi của tam giác *ABC* bằng

A. 60 cm. **B.** 56 cm. **C.** 51 cm. **D.** 48 cm.

Câu 3: Cho tam giác *ABC* vuông tại A, đường cao $AH,\ H \in BC$.



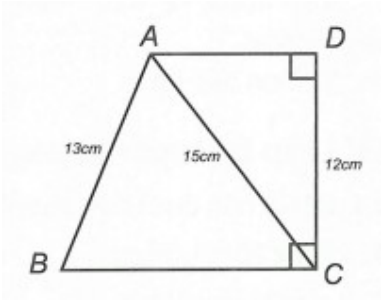
Giá trị của x bằng

A. $x = 16cm$. **B.** $x = 9cm$. **C.** $x = 8cm$. **D.** $x = 7,5cm$.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính độ dài BC biết $CA = 8cm$ và $BA = 4cm$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính độ dài các cạnh của tam giác biết $AB : BC = 5 : 13$ và chu vi tam giác là 90 cm.

Câu 6: Trên hình bên, cho biết $AD \perp DC$, $DC \perp BC$, $AB = 13cm$, $AC = 15cm$ và $DC = 12cm$.



Tính độ dài đoạn thẳng BC.

Dạng 2: Sử dụng định lý Py-ta-go đảo để chứng minh tam giác vuông

Phương pháp giải

Sử dụng độ dài các cạnh trong tam giác và dùng định lí Py-ta-go đảo để kiểm tra tam giác vuông.

Bước 1. Xác định cạnh có độ dài lớn nhất của tam giác và hai cạnh còn lại. Tính giá trị bình phương độ dài cạnh lớn nhất và tổng bình phương hai cạnh còn lại.

Bước 2. So sánh hai giá trị tính được để kiểm tra có thỏa mãn định lí Py-ta-go đảo hay không.

Ví dụ: Cho ΔABC có $AB = 4cm$, $AC = 3cm$ và $BC = 5cm$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

Ta có $BC = 5cm$ có độ dài lớn nhất (dự đoán có thể là cạnh huyền của tam giác vuông).

Ta có $BC^2 = 5^2 = 25$; $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

Suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Do đó theo định lí Py-ta-go đảo, tam giác ABC vuông tại A.

Nhận xét:

+ Ví dụ trên đề cập đến một tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên (3,4, 5). Ta cũng chứng minh được tam giác với độ dài các cạnh là bội số tương ứng $(3k, 4k, 5k)$ cũng là tam giác vuông.

+ Ngoài ra, ta có thể chứng minh có một số bộ số nguyên (và bội số của các bộ số này) là độ dài các cạnh của tam giác vuông như: $(5; 12; 13)$, $(7; 24; 25)$, $(9; 40; 41)$,…

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Bộ số nguyên nào dưới đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông?

A. $(3; 5; 7)$. **B.** $(4; 6; 8)$.

C. $(8; 12; 15)$. **D.** $(12; 16; 20)$.

Hướng dẫn giải

+) $7^2 = 49 \neq 34 = 3^2 + 5^2$ nên $(3; 5; 7)$ không là độ dài của 3 cạnh trong tam giác vuông.

+) $8^2 = 64 \neq 52 = 4^2 + 6^2$ nên $(4; 6; 8)$ không là độ dài của 3 cạnh trong tam giác vuông.

+) $15^2 = 225 \neq 208 = 12^2 + 8^2$ nên $(8; 12; 15)$ không là độ dài của 3 cạnh trong tam giác vuông.

+) $20^2 = 400 = 12^2 + 16^2$ nên $(12; 16; 20)$ là độ dài của 3 cạnh trong tam giác vuông.

Do đó chọn đáp án D.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Bộ số nào dưới đây **không phải** là độ dài các cạnh của tam giác vuông?

A. $15cm; 20cm; 25cm$.

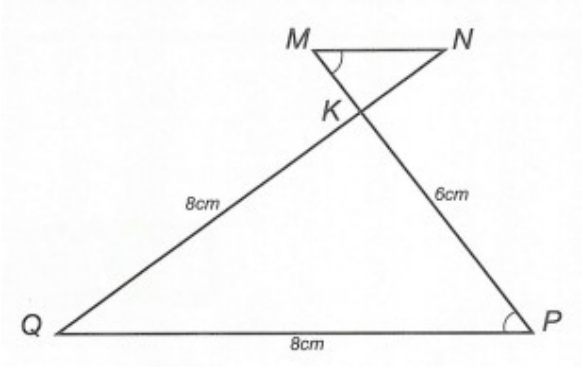
B. $3cm; 7cm; \sqrt{58}cm$.

C. $7cm; 24cm; 25cm$.

D. $5cm; 7cm; \sqrt{70}cm$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có đường cao AH $(H \in BC)$. Biết rằng $AH^2 = BH.CH$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Câu 3: Cho hình vẽ bên. Biết $MP = 6cm$, $NQ = 8cm$, $MN = 2cm$, $QP = 8cm$ và $\widehat{NMK} = \widehat{QPK}$.



Chứng minh rằng $MP \perp NQ$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tính độ dài một cạnh của tam giác vuông

Câu 1: Chọn B

ΔABC vuông tại B nên cạnh huyền là *AC* và hai cạnh góc vuông là *BA, BC.*

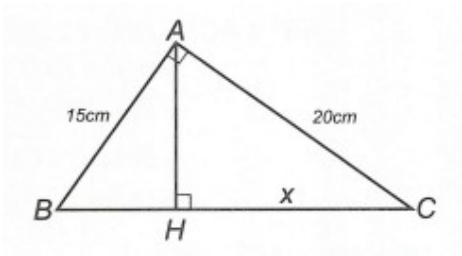
Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có $AC^2 = BA^2 + BC^2$.

Câu 2: Chọn A

ΔABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 26^2 - 10^2 = 576 \Rightarrow AB = 24$.

Chu vi ΔABC là $AB + AC + BC = 24 + 10 + 26 = 60(cm)$.

Câu 3: Chọn A



Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có:

+) Xét ΔABC vuông tại A nên

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 20^2 = 625 \Rightarrow BC = 25(cm)$.

Suy ra $BH = 25 - x(cm)$.

+) Xét ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H, ta có

$AB^2 = AH^2 + BH^2$; $AC^2 = AH^2 + CH^2$.

Suy ra $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 \left(= AH^2\right)$.

Suy ra $15^2 - (25 - x)^2 = 20^2 - x^2$.

Ta tính được $x = 16cm$.

Câu 4:

Áp dụng định lí Py-ta-go trong ΔABC $\left(\widehat{A} = 90°\right)$ ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Với $CA = 8cm$ và $BA = 4cm$, ta có $BC^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80 \Rightarrow BC = \sqrt{80}(cm)$.

Câu 5:

Áp dụng định lí Py-ta-go trong ΔABC $\left(\widehat{A} = 90°\right)$ ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (1)

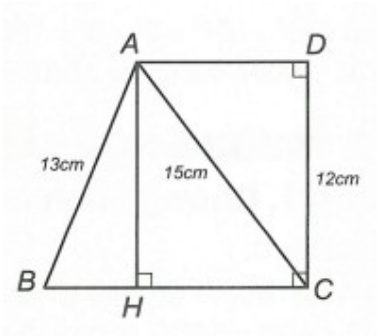
Ta có $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{13} = k > 0 \Rightarrow AB = 5k;\ BC = 13k$. Thay vào (1), ta có:

$(13k)^2 = (5k)^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = (13k)^2 - (5k)^2 = 144k^2 \Rightarrow AC = 12k$.

Mà chu vi tam giác bằng 90cm nên $AB + BC + CA = 90 \Rightarrow 5k + 13k + 12k = 90 \Rightarrow k = 3$.

Vậy $AB = 5k = 15cm,\ AC = 12k = 36cm,\ BC = 13k = 39cm$.

Câu 6:



Dựng $AH \perp BC$ với $H \in BC$.

Do $AD // BC$ nên $\widehat{ACH} = \widehat{CAD}$ (hai góc so le trong).

Xét ΔAHC và ΔCDA có

$\widehat{AHC} = \widehat{CDA} = 90°$, AC chung, $\widehat{ACH} = \widehat{CAD}$.

Do đó $\Delta AHC = \Delta CDA$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Suy ra $AH = CD = 12cm$ (hai cạnh tương ứng).

Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông:

+) ΔAHC vuông tại H có $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow CH = 9(cm)$.

+) ΔABH vuông tại H có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow BH = 5(cm)$.

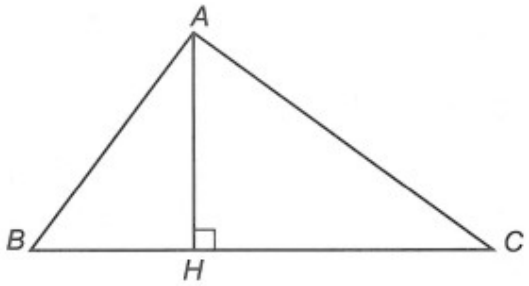
Do đó $BC = BH + CH = 9 + 5 = 14(cm)$.

Dạng 2. Sử dụng định lí Py-ta-go đảo để chứng minh tam giác vuông

Câu 1: Chọn D

Vì $\left(\sqrt{70}\right)^2 = 70 \neq 74 = 5^2 + 7^2$ nên bộ ba số $5cm;\ 7cm;\ \sqrt{70}cm$ không là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Câu 2:



Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có

+) Xét ΔABH vuông tại H có $AB^2 = BH^2 + AH^2$.

+) Xét ΔAHC vuông tại H có $AC^2 = AH^2 + CH^2$.

Cộng từng vế 2 đẳng thức, ta được

$AB^2 + AC^2 = BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

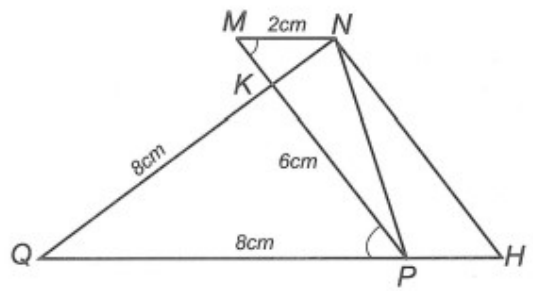
Theo giả thiết $AH^2 = BH.CH$ nên

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BH^2 + 2.BH.CH + CH^2 \\ &= BH^2 + BH.CH + BH.CH + CH^2 \\ &= BH.(BH + CH) + CH.(BH + CH) \\ &= BH.BC + CH.BC \text{ (do } BH + CH = BC) \\ &= (BH + CH).BC = BC.BC = BC^2. \end{aligned}$$

Vậy $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Theo định lí Py-ta-go đảo ta có ΔABC vuông tại A.

Câu 3:



Qua N, dựng $NH // MP$ với $H \in PQ$.

Suy ra $\widehat{MPN} = \widehat{HNP}$ (hai góc so le trong).

Ta có $\widehat{NMK} = \widehat{QPK}$ (giả thiết) nên $MN // PQ$.

Suy ra $\widehat{MNP} = \widehat{HPN}$ (hai góc so le trong).

Xét ΔMNP và ΔHPN có

$\widehat{MNP} = \widehat{HPN}$, NP là cạnh chung, $\widehat{MPN} = \widehat{HNP}$.

Do đó $\Delta MNP = \Delta HPN\,(g.c.g)$.

Suy ra $PH = MN = 2cm;\ NH = MP = 6cm$.

Khi đó ΔNQH có $NQ = 8cm,\ NH = 6cm$ và $QH = QP + PH = 8 + 2 = 10\,(cm)$.

Ta có $NQ^2 + NH^2 = 8^2 + 6^2 = 100;\ QH^2 = 10^2 = 100$. Suy ra $NQ^2 + NH^2 = HQ^2$.

Do đó ΔNQH vuông tại N (định lí Py-ta-go đảo) $\Rightarrow NH \perp NQ$. Mà $NH // MP$ (cách dựng) nên $MP \perp NQ$.