

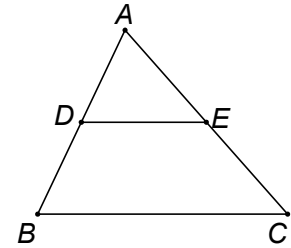
ĐỊNH LÝ ĐẢO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC. \end{cases}$$



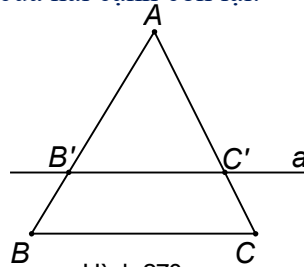
Hình 269

2. Hệ quả của định lý Ta-lét

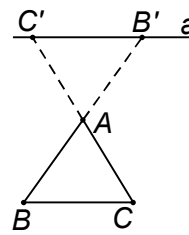
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}. \end{cases}$$

Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



Hình 270a



Hình 270b

II. BÀI TẬP MINH HỌA

A. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

DẠNG 1. Tính độ dài đoạn thẳng. Chia đoạn thẳng cho trước thành các phần bằng nhau
PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính độ dài đoạn thẳng:

Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét để lập tỉ lệ thức của các đoạn thẳng.

Thay số vào hệ thức rồi giải phương trình.

2. Chia đoạn thẳng cho trước thành các phần bằng nhau cách sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét hoặc tính chất của đường thẳng song song cách đều.

VÍ DỤ

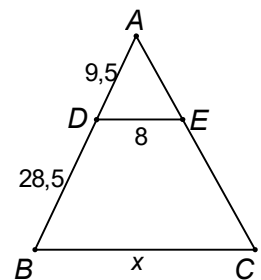
Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình 271.

Lời giải

a) Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DE \parallel BC$, ta được:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} \text{ hay } \frac{x}{8} = \frac{28,5}{9,5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 28,5}{9,5} = \frac{456}{19} \approx 31,58.$$



Hình 271a

b) Từ hình 271b ta thấy $A'B' \parallel AB$ vì cùng vuông góc với AA' .

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $A'B' \parallel AB$, ta được: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O}$ hay

$$\frac{x}{4,2} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 4,2 \cdot 2 = 8,4.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác OAB vuông ở A , ta được:

$$OB^2 = BA^2 + AO^2 \text{ hay } y^2 = 8,4^2 + 6^2 = 106,06 \Rightarrow y \approx 10,32.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 8\text{cm}$ và $DB = 4\text{cm}$. Tính tỉ số khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC .

Lời giải (hình 272)

Kẻ DH và BK cùng vuông góc với AC thì $DH \parallel BK$ và DH, BK lần lượt là khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC .

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DH \parallel BK$ thu được $\frac{DH}{BK} = \frac{AD}{AB}$

$$\text{hay } \frac{DH}{BK} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 3. Hãy chia đoạn AB cho trước thành 5 đoạn bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy? Hãy nêu rõ cách làm.

Lời giải (hình 273)

Có hai cách chia một đoạn AB cho trước thành 5 phần bằng nhau.

Cách 1: Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét.

Kẻ đường thẳng $a \parallel AB$.

Từ điểm C bất kì trên a , đặt liên tiếp các đoạn thẳng bằng nhau:

$$CD = DE = EF = FG = GH.$$

Gọi O là giao điểm của AH và BC .

Vẽ các đường thẳng DO, EO, FO, GO cắt AB theo thứ tự ở I, K, L, M

thì các điểm này chia đoạn AB thành 5 phần bằng nhau. Thật vậy:

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $CD \perp MB, GH \parallel AI$, ta được:

$$\frac{CO}{OB} = \frac{CD}{MB} = \frac{HO}{OA} = \frac{HG}{AI}$$

$$\Rightarrow MB = AI \text{ do } CD = GH.$$

Chứng minh tương tự, ta được: $AI = IK = KL = LM = MB$.

Cách 2: Sử dụng tính chất của đường thẳng song song cách đều.

Kẻ tia Ax , trên đó đặt liên tiếp các đoạn thẳng bằng nhau:

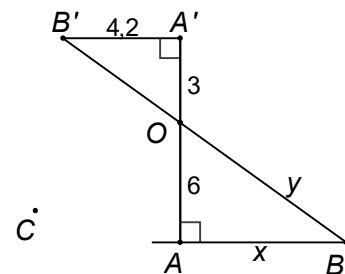
$$CD = DE = EF = FG = GH.$$

Nối GB . Từ C, D, E, F kẻ các đường thẳng song song với GB , chúng cắt

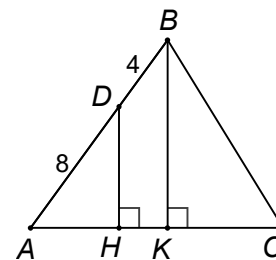
AB lần lượt ở I, K, L, M thì CI, DK, EL, FM, GB là năm đường thẳng

song song cách đều nên chúng chắn trên đường thẳng AB những đoạn

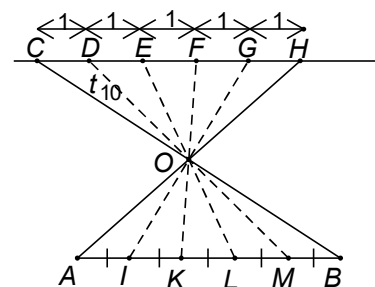
thẳng liên tiếp bằng nhau là $AI = IK = KL = LM = MB$.



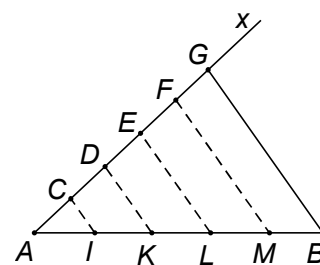
Hình 271b



Hình 272



Hình 273a



Hình 273b

DẠNG 2. Chứng minh hệ thức hình học

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Xác định đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
- Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét để lập tỉ lệ thức của các đoạn thẳng.
- Sử dụng các tính chất của tỉ lệ thức hoặc cộng hay nhân theo vế các đẳng thức hình học.

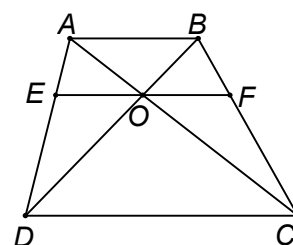
VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có O là giao điểm của hai đường chéo. Đường thẳng qua O song song với hai đáy cắt AD, BC lần lượt ở E và F . Chứng minh rằng $OE = OF$.

Lời giải (hình 274)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EO \parallel DC, OF \parallel DC$ và $AB \parallel DC$, ta được:

$$\begin{cases} \frac{EO}{DC} = \frac{AO}{AC} \\ \frac{OF}{DC} = \frac{BO}{BD} \end{cases} \Rightarrow \frac{EO}{DC} = \frac{OF}{DC} \Rightarrow EO = OF.$$



Hình 274

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Một đường thẳng qua giao điểm O của hai đường chéo và song song với hai đáy, cắt BC ở I . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OI}$.

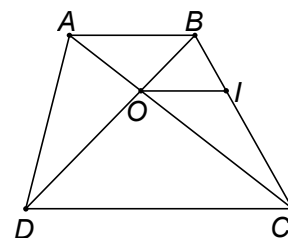
Lời giải (hình 275)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $OI \parallel AB, OI \parallel DC$, ta được:

$$\frac{OI}{AB} = \frac{CI}{CB} \quad (1); \quad \frac{OI}{DC} = \frac{BI}{BC} \quad (2).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$\frac{OI}{AB} + \frac{OI}{DC} = \frac{BI + IC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} = \frac{1}{OI}.$$



Hình 275

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB \neq CD$) có O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của AD và BC . Đường thẳng IO cắt AB và CD theo thứ tự ở M và N . Chứng minh rằng M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD . Có nhận xét gì về kết quả của bài toán.

Lời giải (hình 276)

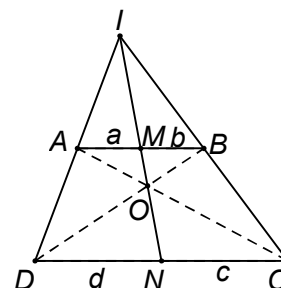
Đặt $AM = a, MB = b, DN = c, NC = d$.

Ta phải chứng minh $a = b, c = d$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AM \parallel CN, MB \parallel ND$ và $AM \parallel DN, MB \parallel NC$, ta được:

$$\begin{cases} \frac{AM}{CN} = \frac{MO}{ON} \\ \frac{MB}{ND} = \frac{MO}{ON} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND}, \text{ hay } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1);$$

$$\begin{cases} \frac{AM}{DN} = \frac{IM}{IN} \\ \frac{MB}{NC} = \frac{IM}{IN} \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{MB}{NC}, \text{ hay } \frac{a}{d} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \quad (2).$$



Hình 276

Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2) ta được $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{cd}{cd} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$.

Thay $a = b$ vào (1) ta được $c = d$.

Nhận xét: Trong một hình thang có hai đáy không bằng nhau thì giao điểm của hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy là bốn điểm thẳng hàng.

Đây chính là nội dung của: Bổ đề về hình thang.

DẠNG 3. Chứng minh hai đường thẳng song song

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng định lý Ta-lét, lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Áp dụng định lý Ta-lét đảo, kết luận hai đường thẳng song song.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên đường chéo AC của hình bình hành $ABCD$ lấy một điểm I . Qua I kẻ hai đường thẳng bất kì sao cho đường thứ nhất cắt AB, CD lần lượt ở E và F , đường thẳng thứ hai cắt AD, BC theo thứ tự ở G và H . Chứng minh rằng $GE \parallel FH$.

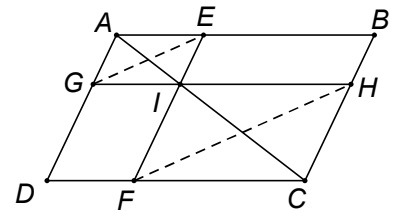
Lời giải (hình 277)

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$, suy ra $AE \parallel FC, AG \parallel HC$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel FC$ và $AG \parallel HC$, ta được:

$$\begin{cases} \frac{EI}{IF} = \frac{AI}{IC} \\ \frac{GI}{IH} = \frac{AI}{IC} \end{cases} \Rightarrow \frac{EI}{IF} = \frac{GI}{IH}.$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng EG cắt hai cạnh IF, IH của tam giác IHF và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, nên $EG \parallel HF$ (theo định lý Ta-lét đảo).



Hình 277

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD ở E . Đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC ở G . Chứng minh rằng $EG \parallel CD$.

Lời giải (hình 278)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel BC$ và $BG \parallel AD$, ta được:

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \quad (1); \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA} \quad (2).$$

Nhân theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được:

$$\frac{OE}{OB} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OG}{OA} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC}.$$

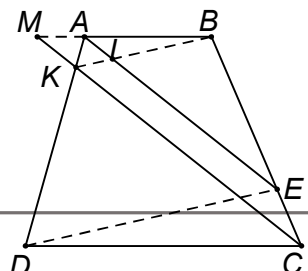
Điều này chứng tỏ đường thẳng EG cắt hai cạnh OD, OC của tam giác OCD và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên $EG \parallel DC$ (theo định lý Ta-lét đảo).

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ và điểm E trên cạnh bên BC . Qua C vẽ đường thẳng song song với AE cắt AD ở K . Chứng minh rằng $BK \parallel DE$.

Lời giải (hình 279)

Gọi I, M lần lượt là giao điểm của AE với BK và CK với AB .

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AI \parallel MK$ và $IE \parallel KC$, thu được:



Hình 278

$$\begin{cases} \frac{AI}{MK} = \frac{BI}{BK} \\ \frac{BI}{BK} = \frac{IE}{KC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AI}{MK} = \frac{IE}{KC} \Rightarrow \frac{AI}{IE} = \frac{MK}{KC} \quad (1).$$

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $MA \parallel DC$, ta được:

$$\frac{MK}{KC} = \frac{AK}{KD} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI}{IE} = \frac{AK}{KD}$. Điều này chứng tỏ đường thẳng KI cắt hai cạnh AD, AE của tam giác ADE và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ nên $KI \parallel DE$, hay $KB \parallel DE$ (theo định lý Ta-lét đảo).

DẠNG 4*. Vẽ thêm đường thẳng song song để chứng minh hệ thức hình học, tính tỉ số hai đoạn thẳng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Vẽ thêm đường thẳng song song.
- Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét để lập tỉ lệ thức giữa các đoạn thẳng.
- Biến đổi tỉ lệ thức.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC , I là một điểm trong tam giác, IA, IB, IC

theo thứ tự cắt BC, CA, AB ở M, N, P . Chứng minh rằng $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.

Lời giải (hình 280)

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC . Đường thẳng này cắt BN, CP lần lượt ở E và F .

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $AE \parallel BC$ và $FA \parallel BC$, ta được:

$$\frac{NA}{NC} = \frac{EA}{BC} \quad (1); \quad \frac{PA}{PB} = \frac{AF}{BC} \quad (2).$$

Cộng theo vế các đẳng thức (1) và (2), ta được: $\frac{NA}{NC} + \frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IM}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , lấy $D \in AB, E \in AC$ sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của

DE và BC . Chứng minh rằng tỉ số $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Lời giải

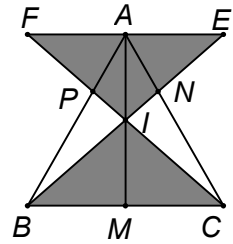
Đặt $BD = CE = a$.

Cách 1: (hình 281) Kẻ $DH \parallel AC$ thì $DH \parallel EC$.

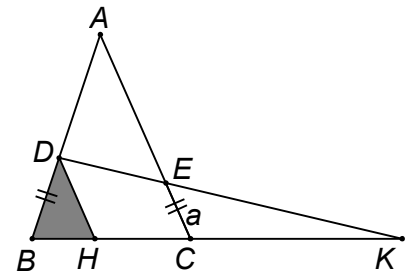
Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DH \parallel EC$ và $DH \parallel AC$, ta được:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EC}{DH} = \frac{a}{DH} \quad (1);$$

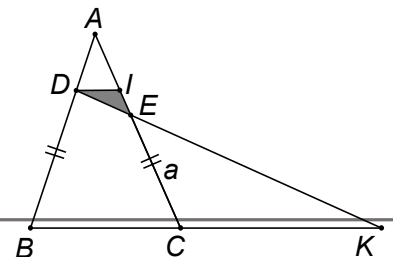
$$\frac{DH}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{BA} \Rightarrow \frac{a}{DH} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$$



Hình 280



Hình 281



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Cách 2: (hình 282)

Kẻ $DI \parallel BC$ thì $DI \parallel CK$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $DI \parallel CK$ và $DI \parallel BC$, ta được:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{CE}{CI} = \frac{a}{CI} \quad (3); \quad \frac{CI}{CA} = \frac{BD}{BA} = \frac{a}{BA} \Rightarrow \frac{BA}{CA} = \frac{a}{CI} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Cách 3: (hình 283)

Kẻ $EM \parallel AB$ thì $EM \parallel BD$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EM \parallel BD$

và $EM \parallel AB$, ta được:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EM}{BD} = \frac{EM}{a} \quad (5); \quad \frac{CE}{CA} = \frac{EM}{AB} = \frac{a}{CA} \Rightarrow \frac{EM}{a} = \frac{AB}{CA} \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.

Cách 4: (hình 284)

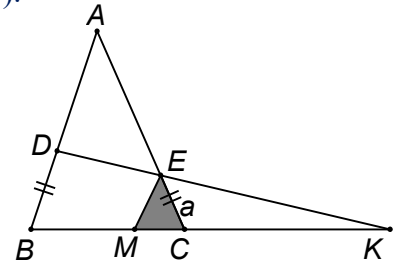
Kẻ $EN \parallel BC$ thì $EN \parallel BK$.

Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét cho $EN \parallel BK$ và $EN \parallel BC$,

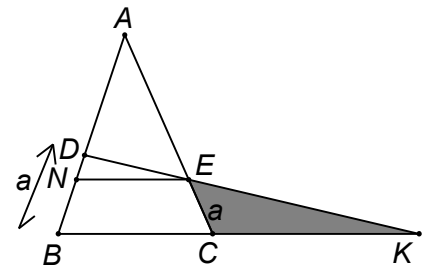
ta được:

$$\frac{KE}{KD} = \frac{BN}{BD} = \frac{BN}{a} \quad (7); \quad \frac{BN}{BA} = \frac{CE}{CA} = \frac{a}{CA} \Rightarrow \frac{BN}{a} = \frac{BA}{CA} \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$.



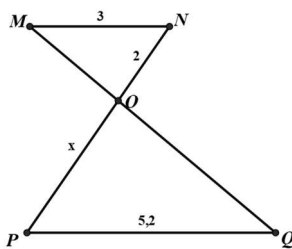
Hình 283



Hình 284

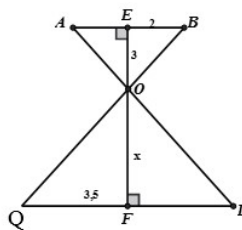
PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN DẠNG CƠ BẢN

Bài 1: Tìm x trong hình

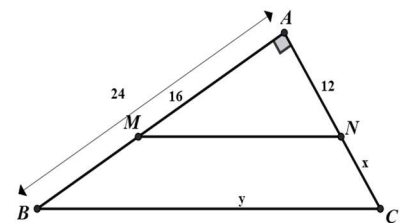


Biết $MN \parallel PQ$

Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 2: Cho tam giác ABC, điểm I nằm trong tam giác, các tia AI, BI, CI cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự ở D, E, F. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia CI tại H và cắt tia BI tại K. Chứng minh:

a) $\frac{AK}{BD} = \frac{HA}{DC};$

b) $\frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AI}{ID}.$

Bài 3: Tam giác ABC có đường cao AH. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B', C' và H'.

a) Chứng minh rằng $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$

Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{AH}{3}$ và diện tích tam giác ABC là $67,5\text{cm}^2$. Hãy tính diện tích tam giác $AB'C'$.

Bài 4: Cho tam giác ABC, điểm I thuộc cạnh AB, điểm K thuộc cạnh AC. Kẻ IM song song với BK (M thuộc AC), kẻ KN song song với CI (N thuộc AB). Chứng minh MN song song với BC.

Bài 5: (Định lý Ceva) Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy tương ứng ba điểm P, Q, R.

Chứng minh nếu AP, BQ, CR đồng quy thì $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD. Qua $E \in AD$ kẻ đường thẳng song song với DC cắt AC ở G. Qua G kẻ đường thẳng song song với CB cắt AB tại H. Chứng minh rằng:

a) $HE // BD$

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với CD, cắt đường thẳng AC tại I. Qua C kẻ đường thẳng song song với BA, cắt BD tại F. Chứng minh $IF // AD$.

Bài 7: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$). M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh $IK // AB$

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng $EI = IK = KF$.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ có AD là trung tuyến. Từ một điểm M bất kỳ trên cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh :

a) $ME + MF = 2AD$

b) $ADMI$ là hình hình hành

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1:

Hình 1. Trong tam giác ABC, $\triangle OPQ$, $MN // PQ$ ta có: $\frac{OP}{ON} = \frac{PQ}{MN}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5,2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5,2 \cdot 2}{3} = \frac{52}{15} (cm)$$

Hình 2. Ta có: $EF \perp AB$; $EF \perp QD$ Suy ra $AB // QD$.

Trong $\triangle OQF$, $QF // EB$ suy ra: $\frac{OF}{OE} = \frac{FQ}{EB}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{3,5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3.3,5}{2} = 5,25(cm)$$

Hình 3. Áp dụng định lí Pytago trong $\triangle AMN$, $\hat{A} = 90^\circ$ ta có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow MN = \sqrt{400} = 20(cm)$$

Trong $\triangle AMN$, $MN \parallel BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{12}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{24.12}{16} = 18(cm); NC = 18 - 12 = 6(cm)$$

Trong $\triangle AMN$, $MN \parallel BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{20}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{24.20}{16} = 30(cm)$$

Bài 2: a) $AK \parallel BD \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AK}{BD}$

$$\text{Từ } AH \parallel DC \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AH}{DC}$$

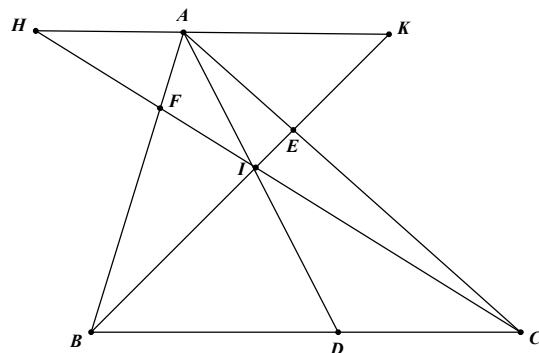
$$\text{Do đó } \frac{AK}{BD} = \frac{AH}{DC}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{AK}{BD} = \frac{AH}{DC} = \frac{AK + AH}{BD + DC} = \frac{HK}{BC} = \frac{AI}{ID}$$

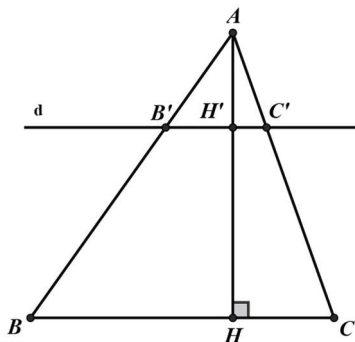
Ta chứng minh

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AH}{BC} (2); \frac{AE}{CE} = \frac{AK}{BC} (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF} = \frac{AI}{ID} \text{ (đpcm)}$$



Bài 3:



a) Trong $\triangle ABH, B'H' // BH$ suy ra $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (1)

Trong $\triangle ACH, C'H' // CH$ suy ra $\frac{AH'}{AH} = \frac{AC'}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (2)

Trong $\triangle ABC, B'C' // BC$ suy ra $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$

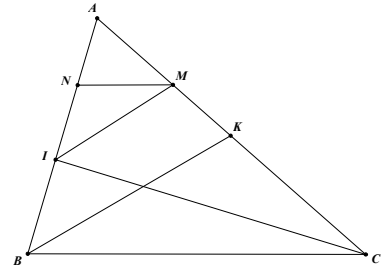
b) Ta có: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$ (câu a); $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'C' = \frac{1}{3} BC$

Từ đó suy ra: $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AH' \cdot B'C'}{\frac{1}{2} AH \cdot BC} = \frac{AH'}{AH} \cdot \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AB'C'} = \frac{1}{9} S_{ABC} = \frac{67,5}{9} = 9,5 (cm^2)$

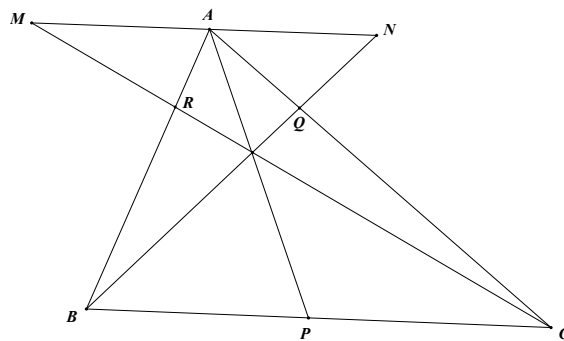
Bài 4: Từ $IM // BK$ và $KN // IC$ ta suy ra $\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AC}$

và $\frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AC}$.

Do đó $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MN // BC$.



Bài 5:



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BQ và CR lần lượt tại N và M.

Ta chứng minh được: $\frac{QC}{AQ} = \frac{BC}{AN}$ (1)

$\frac{RA}{BR} = \frac{AM}{BC}$ (2); $\frac{BP}{CP} = \frac{AN}{AM}$ (3)

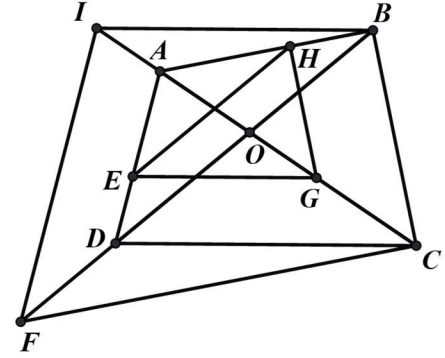
Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ (đpcm)

Bài 6:

$$a) \left. \begin{aligned} EG // DC &\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AC} \\ GH // BC &\Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{AH}{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow EH // BD$$

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\left. \begin{aligned} BI // DC &\Rightarrow \frac{OI}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ AB // CF &\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OF}{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OI}{OA} = \frac{OF}{OD} \Rightarrow AD // IF$$



Bài 7:

$$a) \left. \begin{aligned} AB // DM &\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MD}{AB} \\ AB // MC &\Rightarrow \frac{MK}{KB} = \frac{MC}{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MK}{KB} \Rightarrow IK // AB$$

b) Ta có:

$$\left. \begin{aligned} AB // EI &\Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{ID}{DB} \\ AB // IK &\Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{IM}{MA} \\ AB // DM &\Rightarrow \frac{DI}{BI} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \frac{DI}{BD} = \frac{IM}{AM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{IK}{AB} \Rightarrow EI = IK$$

Tương tự $IK = KF$. Do đó $EI = IK = KF$.

Bài 8: a) $MF // AD \Rightarrow \frac{MF}{AD} = \frac{CM}{CD}$

$$AD // ME \Rightarrow \frac{ME}{AD} = \frac{BM}{BD}$$

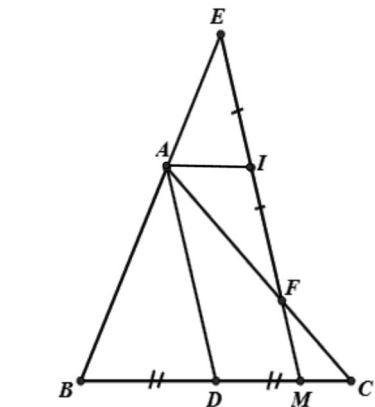
$$\Rightarrow \frac{MF}{AD} + \frac{ME}{AD} = \frac{CM}{CD} + \frac{BM}{BD} \text{ mà } CD = BD \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \frac{MF + ME}{AD} = \frac{CM + BM}{CD} = \frac{BC}{CD} = 2 \Rightarrow ME + MF = 2AD$$

(đpcm)

b) $ME + MF = 2AD$ (cmt)

Mà $ME + MF = FE + MF + MF = FE + 2MF = 2IF + 2MF = 2IM$



$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow AD = IM \\ AD // IM \end{array} \right\} \Rightarrow ADIM \text{ là hình bình hành}$$

B. DẠNG BÀI NÂNG CAO TỔNG HỢP TALET VÀ LIÊN QUAN

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}.$$

Ví dụ 2. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3;$$

$$b) \frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1.$$

Ví dụ 3. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Gọi M, N là trung điểm BO; AO. Lấy F trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4;$$

$$b) BE + AK \geq BC.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Trên AH, AB, AC lần lượt lấy điểm D, E, F sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $EF // BC$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là điểm tùy ý thuộc khoảng BD. Lấy E thuộc AB và F thuộc AC sao cho $ME // AC$; $MF // AB$. Gọi H là giao điểm MF và AD.

Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K. Đường thẳng AK cắt BC tại I. Tính tỉ số $\frac{IB}{ID}$?

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI NÂNG CAO

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}.$$

Giải

Kẻ $DE // AB$, ta có:

$\widehat{D_1} = \widehat{A_1} = 60^\circ$; $\widehat{A_2} = 60^\circ$ nên tam giác ADE đều. Suy ra $AD = AE = DE$.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{AC}$.

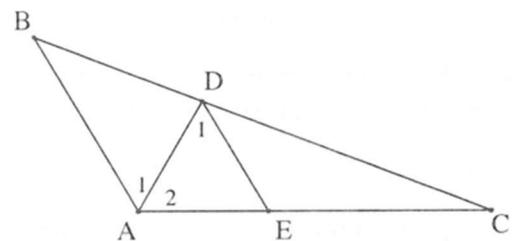
Mặt khác $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC}$ nên $\frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC} = \frac{CE}{AC} + \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$.

Suy ra $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Nhận xét. Những bài toán chứng minh đẳng thức có nghịch

đảo độ dài đoạn thẳng, bạn nên biến đổi và chứng minh hệ thức tương đương có tỉ số của hai đoạn thẳng.

Ví dụ 2. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:



$$a) \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3;$$

$$b) \frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1.$$

Giải

* **Tìm cách giải.** Để tạo ra tỉ số $\frac{AB}{AM}; \frac{AC}{AN}$ chúng ta cần vận dụng định lý Ta-let, mà hình vẽ chưa có yếu tố song song do vậy chúng ta cần kẻ thêm yếu tố song song. Kẻ đường thẳng song song với MN từ B và C vừa khai thác được yếu tố trọng tâm, vừa tạo ra được tỉ số yêu cầu.

* Trình bày lời giải

Trường hợp 1. Nếu $MN \parallel BC$, thì lời giải giản đơn (dành cho bạn đọc).

Trường hợp 2. Xét MN không song song với BC .

a) Gọi giao điểm của AG và BC là $D \Rightarrow BD = CD$.

Kẻ $BI \parallel CK \parallel MN$ ($I, K \in AD$)

Xét $\triangle BDI$ và $\triangle CDK$ có $BD = CD$; $\widehat{IBD} = \widehat{KCD}$; $\widehat{IDB} = \widehat{KDC}$ nên $\triangle BDI = \triangle CDK$ (g.c.g)

$\Rightarrow DI = DK$.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có $\frac{AB}{AM} = \frac{AI}{AG}$ (vì $MG \parallel BI$);

$\frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG}$ (vì $GN \parallel CK$).

Suy ra $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2 \cdot AD}{AG} = 3$ (1) (vì $AD = \frac{3}{2} \cdot AG$).

b) Xét $\frac{BM}{AM} = \frac{GI}{AG}$; $\frac{CN}{AN} = \frac{KG}{AG}$

hay $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = \frac{GI + GK}{AG} = \frac{2 \cdot GD}{AG} = 1$, suy ra $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$.

Nhận xét. Từ kết quả (1), chúng ta thấy rằng bởi G là trọng tâm nên $\frac{2AD}{AG} = 3$. Vậy nếu G không phải là trọng tâm thì ta có bài toán sau:

- Một đường bất kỳ cắt cạnh AB , AC và đường trung tuyến AD của tam giác ABC lần lượt tại M ,

N và G . Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 2 \cdot \frac{AD}{AG}$.

- Nếu thay yếu tố trung tuyến bằng hình bình hành, ta có bài toán sau: Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng bất kỳ cắt AB , AD và AC lần lượt tại M , N và G . Chứng minh rằng:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AG}.$$

Ví dụ 3. Cho $ABCD$ là hình bình hành có tâm O . Gọi M , N là trung điểm BO ; AO . Lấy F trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K . Chứng minh rằng:

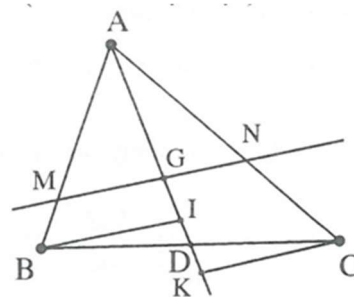
$$a) \frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4;$$

$$b) BE + AK \geq BC.$$

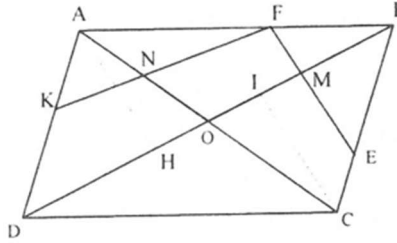
Giải

* Tìm cách giải.

Với phân tích và suy luận như câu a, ví dụ 4 thì câu a, ví dụ này không quá khó.



Tương tự câu a, chúng ta có kết quả: $\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} = 4$ và suy ra $\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} + \frac{AB}{BF} + \frac{BC}{BE} = 8$ để liên kết được BE + AK với nhau, mà với suy luận trên thì BE, AK cùng nằm ở mẫu số, do đó chúng ta liên tưởng tới bất đẳng thức đại số $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ sẽ cho chúng ta yêu cầu. Với suy luận đó, chúng ta có



lời giải sau:

* **Trình bày lời giải**

a) Kẻ $CI \parallel AH \parallel EF$ (với $I, H \in BD$)

Xét $\triangle AOH$ và $\triangle COI$ có $\widehat{AOH} = \widehat{COI}$ (đối đỉnh); $OA = OB$; $\widehat{HAO} = \widehat{ICO}$ (so le trong)
 $\Rightarrow \triangle AOH = \triangle COI$ (c.g.c) $\Rightarrow IO = OH$. Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = \frac{BH}{BM} + \frac{BI}{BM} = \frac{BH + BI}{BM} = \frac{BO + OH + BO - OI}{BM} = \frac{2 \cdot BO}{BM} = 4.$$

b) Tương tự ta có:

$$\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} = 4 \Rightarrow \frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} + \frac{AB}{BF} + \frac{BC}{BE} = 8$$

$$\Rightarrow BC \cdot \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) + AB \left(\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \right) = 8 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (với $x, y > 0$)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \geq \frac{4}{AF + BF} = \frac{4}{AB} \Rightarrow AB \left(\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \right) \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } BC \cdot \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) \leq 4$$

$$\text{Mà } \frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \geq \frac{4}{AK + BE} \Rightarrow BC \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) \geq \frac{4BC}{AK + BE}$$

$$\Rightarrow \frac{4BC}{AK + BE} \leq 4 \Rightarrow AK + BE \geq BC.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Trên AH, AB, AC lần lượt lấy điểm D, E, F sao cho $\widehat{EDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $EF \parallel BC$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Để chứng minh $EF \parallel BC$, suy luận một cách tự nhiên chúng ta cần vận dụng định lý

Ta-let đảo. Do vậy cần chứng minh tỉ lệ thức $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. Nhận thấy

để định hướng tỉ lệ thức ấy cũng như khai thác được

$\widehat{EDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ$ chúng ta cần kẻ $BO \perp CD$; $CM \perp DB$, để có các đường thẳng song song rồi vận dụng định lý Ta-let. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

* **Trình bày lời giải.**

Kẻ $BO \perp CD$; $CM \perp DB$, BO và CM cắt nhau tại $I \Rightarrow D$ là trực tâm của $\triangle BIC$

$\Rightarrow DI \perp BC \Rightarrow I, D, A$ thẳng hàng.

$$DE \parallel BI \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AB}{AE}.$$

$$IC \parallel FD \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AC}{AF} \text{ suy ra } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow EF \parallel BC$$

(Định lý Ta-let đảo).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là điểm tùy ý thuộc khoảng BD . Lấy E thuộc AB và F thuộc AC sao cho $ME \parallel AC$; $MF \parallel AB$. Gọi H là giao điểm MF và AD .

Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K . Đường thẳng AK cắt BC tại I . Tính tỉ số $\frac{IB}{ID}$?

Giải

Qua D kẻ đường thẳng song song với AB , cắt tia AI tại P . Áp dụng định lý Ta-let, cho các đoạn thẳng song song ta có:

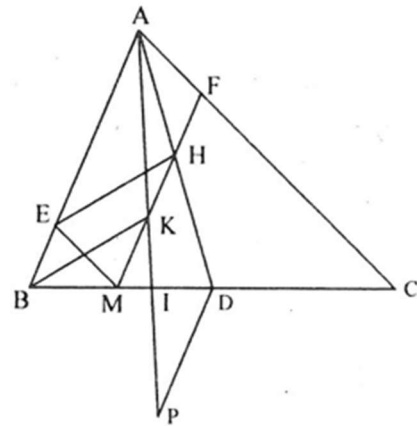
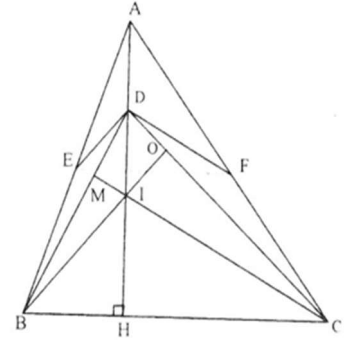
$$DP \parallel AB \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DP} = \frac{AB}{HK} \cdot \frac{HK}{DP} \quad (1).$$

$$ME \parallel AC \Rightarrow \frac{AB}{HK} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BM} \quad (2).$$

$$HK \parallel DP \text{ và } MH \parallel AB \Rightarrow \frac{HK}{DP} = \frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{IB}{ID} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{BM}{BD} = \frac{BC}{BD} = 2. \text{ Vậy } \frac{IB}{ID} = 2.$$



===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====