

DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân chiều cao.

Như vậy, ta có:

$$S_{xq} = 2p.h$$

Trong đó:

- p là nửa chu vi đáy.
- h là chiều cao.

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

Như vậy, ta có:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$$

Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

Như vậy, ta có:

$$V = S.h.$$

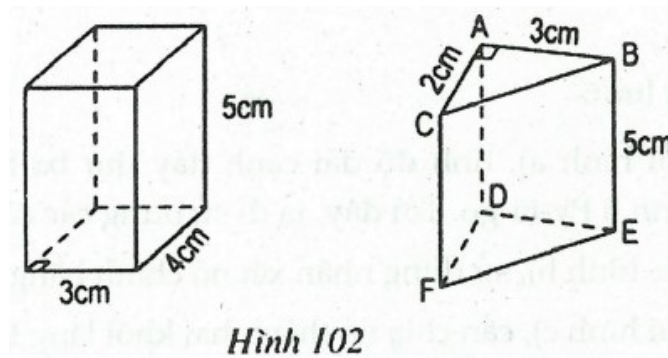
Trong đó:

- S là diện tích đáy.
- h là chiều cao.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các hình lăng trụ đứng trong hình 102.

👉 *Hướng dẫn:* Sử dụng các công thức có sẵn.



✍ *Giải*

a) Hình hộp chữ nhật (hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật) có:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2(3 + 4)5 = 70 \text{ (cm}^2\text{)}$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 70 + 2(3.4) = 94 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) Hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.DEF$ có $\triangle ABC$ vuông tại A nên:

$$BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Ta lần lượt có:

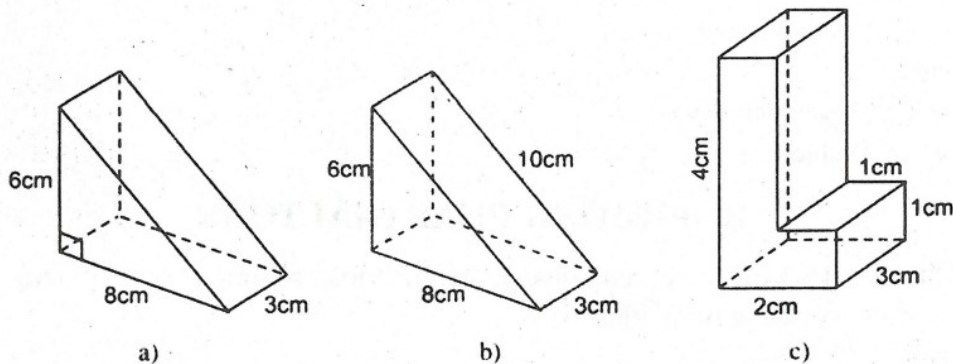
▪ Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = (2 + 3 + \sqrt{13})5 = 25 + 5\sqrt{13} (cm^2)$$

▪ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 25 + 5\sqrt{13} + 2\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\right) = 31 + 5\sqrt{13} (cm^2).$$

VÍ DỤ 2: Các hình a), b), c) trong sgk gồm một hoặc nhiều dạng lăng trụ đứng. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của chúng theo các kích thước đã cho trên hình 111.



Hình 111

👉 *Hướng dẫn:* Ta lần lượt:

▪ Với hình a), tính độ dài cạnh đáy thứ ba bằng việc sử dụng định lí Py-ta-go. Tới đây, ta đi sử dụng các công thức có sẵn.

▪ Với hình b), sử dụng nhận xét nó chính bằng hình a).

▪ Với hình c), cần chia nó thành hai khối lăng trụ đứng.

✍ *Giải*

a) Hình a) là lăng trụ có đáy là tam giác vuông có:

▪ Các cạnh 6cm, 8cm và cạnh thứ ba là $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10cm$.

▪ Chiều cao $h = 3cm$.

Do đó: $V = S.h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3 = 72 (cm^3)$.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S = (6 + 8 + 10) \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 120 (cm^2).$$

b) Hình b) là lăng trụ đứng bằng lăng trụ đứng ở hình a). Do đó:

$$V = 72 (cm^3); S_{tp} = 120 (cm^2)$$

c) Hình c) gồm 2 lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

Ta có: $V = (4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \cdot 3 = 15 (cm^3)$

$$S_{xq} = (4 + 2 + 1 + 1) \cdot 2 = 16 (cm^2)$$

$$S_{\text{hai đáy}} = (4.2 + 1.1).2 = 18(\text{cm}^2)$$

$$S_{\text{tp}} = 36 + 16 = 52(\text{cm}^2).$$

VÍ DỤ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 6\text{cm}$, $CD = 2\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$, $AA_1 = 5\text{cm}$. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

👉 *Hướng dẫn:* Trước tiên, ta cần đi xác định đầy đủ các độ dài cơ bản của hình lăng trụ bằng việc sử dụng tính chất hình thang vuông và định lý Py-ta-go. Cuối cùng, ta đi sử dụng các công thức có sẵn.

✍ *Giải*

Xét hình thang $ABCD$, hạ CH vuông góc với AB , ta có:

$$CH = AD = 3\text{cm}, BH = AB - AH = AB - CD = 4\text{cm}.$$

Trong $\triangle HBC$ vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5\text{cm}.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

▪ Diện tích một đáy:

$$S_{\text{đáy}} = (AB + CD).AD = (6 + 2).3 = 24\text{cm}^2.$$

▪ Diện tích xung quanh:

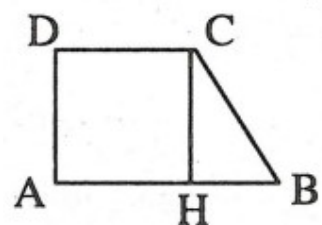
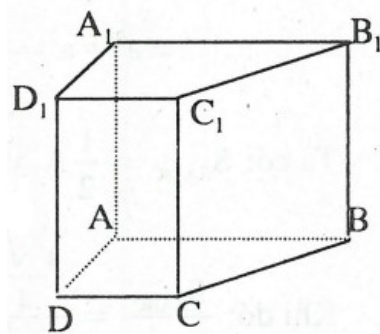
$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= (AB + BC + CD + DA).AA_1 \\ &= (6 + 5 + 2 + 3).5 = 80\text{cm}^2 \end{aligned}$$

▪ Diện tích toàn phần:

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 80 + 2.24 = 128\text{cm}^2$$

▪ Thể tích:

$$V = S_{\text{đáy}}.h = 24.5 = 120\text{cm}^3.$$



VÍ DỤ 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có các cạnh bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1BC$.

👉 *Hướng dẫn:* Ta lần lượt:

- Với câu a), sử dụng ngay các công thức có sẵn.
- Với câu b), cần tính được diện tích của $\triangle A_1BC$ bằng lưu ý nó là tam giác cân tại A_1

✍ Giải

a) Ta lần lượt có:

▪ Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = (AB + BC + CA) \cdot AA_1 = (a + a + a) \cdot a = 3a^2.$$

▪ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 3a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

▪ Thể tích:

$$V = S_{đáy} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

b) Gọi M là trung điểm của BC

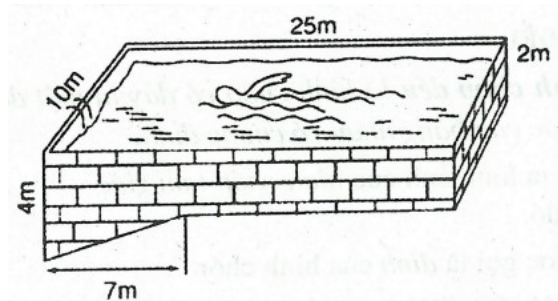
Trong ΔA_1BC , ta có:

$$\begin{aligned} A_1M^2 &= A_1C^2 - BM^2 = A_1A^2 + AC^2 - BM^2 \\ &= a^2 + a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow A_1M = \frac{a\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot A_1M \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

VÍ DỤ 5: Các kích thước của một bể bơi được cho trên hình sgk (mặt nước có dạng hình chữ nhật). Hãy tính xem bể nước chứa được bao nhiêu mét khối nước khi nó đầy ắp nước.



Hình 110

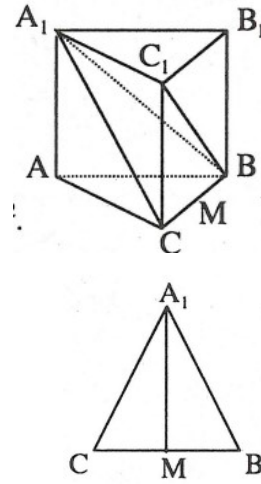
✍ Giải

Bể bơi có dạng lăng trụ đứng mà các mặt đáy là các hình $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$.

Để tính thể tích bể bơi, ta chia thành hai lăng trụ đứng:

- Lăng trụ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$.
- Lăng trụ có đáy là hình tam giác DEF .

Thể tích nước chứa trong lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V_1 = 25 \cdot 2 \cdot 10 = 500 (m^3)$.



Thể tích nước chứa trong lăng trụ đứng $DEF.D'E'F'$ là: $V_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10 = 70 (m^3)$.

Do đó, ta được: $V_1 + V_2 = 500 + 70 = 570 (m^3)$

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

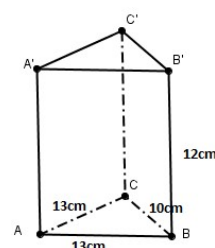
Dạng 1: Tính Sxq, Stp và thể tích hình lăng trụ đứng.

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại C , D là trung điểm của cạnh AB . Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Bài 2: Một khối gỗ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh bằng a . Người ta cắt khối gỗ theo mặt $(ACC'A')$ được hai hình lăng trụ đứng bằng nhau. Tính diện tích xung quanh của mỗi hình lăng trụ đó.

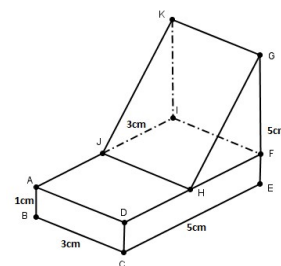
Bài 3: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có các kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình lăng trụ.



Dạng 2: Lắp ghép một số hình lăng trụ đứng đơn giản và tính toán các dữ liệu của hình lăng trụ đứng.

Bài 5: Cho hình lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a . Tính chiều cao (theo a) của hình lăng trụ, biết diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.



Bài 6: Cho hình vẽ bên

- Tính diện tích toàn phần hình lăng trụ $HFG.JIK$
- Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) và thể tích của hình đã cho

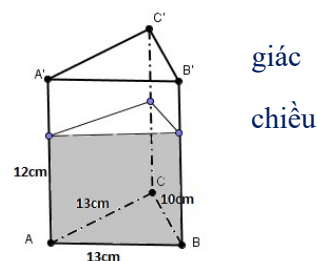
Dạng 3: Bài toán thực tế.

Bài 7: Thành được mẹ mua cho một thanh kẹo như hình:

Hai mặt bên của hộp đựng kẹo là hai tam giác đều cạnh 4cm. Chiều dài thanh kẹo là 20 cm. Tính thể tích của hộp đựng kẹo.



Bài 8: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác cân ABC có kích thước như hình vẽ. Mức nước hiện tại trong bình bằng $\frac{2}{3}$



cao của lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài 9: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$, $AC = 8cm$, chiều cao $CC' = 12cm$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(ACC'A')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1:

D là trung điểm AB, suy ra CD là chiều cao tam giác đáy

$$\text{Vậy nên } DB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3\text{cm}$$

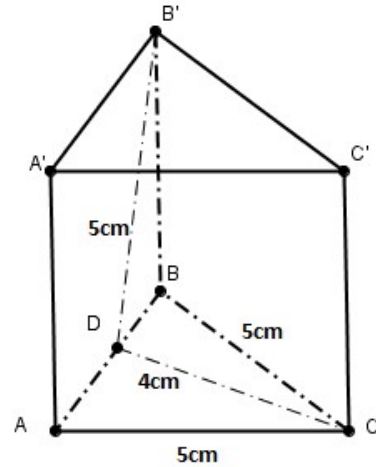
$BB' \perp AB$, áp dụng định lý Py-ta-go, ta có

$$BB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\text{cm}$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (5 + 5 + 6) \cdot 4 + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \right)$$

$$S_{tp} = 64 + 24 = 88\text{ cm}^2$$



Bài 2:

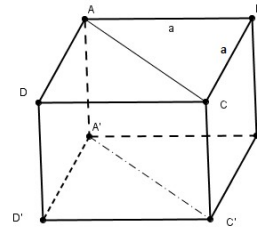
$$\text{Ta có } AC = \sqrt{a + a^2} = a\sqrt{2}\text{cm}$$

Chu vi đáy hình lăng trụ

$$a + a + a\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a$$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ

$$S_{xq} = 2ph = \frac{2(2 + \sqrt{2})a \cdot a}{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$



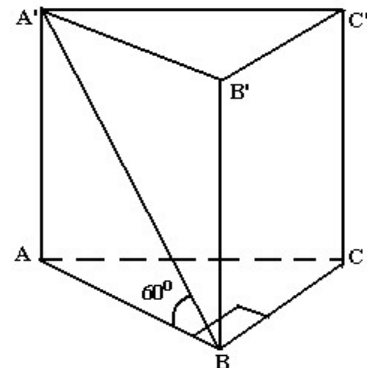
Bài 3:

Ta nhớ lại một bổ đề quan trọng: Trong tam giác vuông, cạnh đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền (HS tự chứng minh)

Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ và AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC và $\widehat{ABA'} = 60^\circ$

Tam giác $A'AB$ vuông tại A, $AB = a$ thì $A'B = 2a$, áp dụng định lý Pytago ta tính được $A'B = a\sqrt{3}$

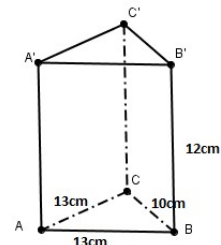
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}. \text{ Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$



Bài 4:

Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow h' = \sqrt{144} = 12\text{cm}$$



Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} h' \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^2$

Thể tích của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_d \cdot h = 60 \cdot 12 = 720 \text{ cm}^3$

Bài 5:

Diện tích xung quanh hình trụ

$$S_{xq} = 2(a + a) \cdot h \text{ (cm)}$$

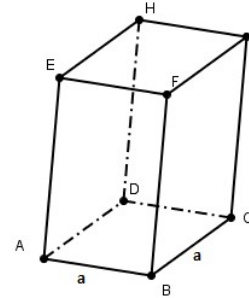
Diện tích toàn phần của hình trụ

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + a) \cdot h + 2a \cdot a \Rightarrow S_{tp} = 4ah + 2a^2 = 2a(2h + a)$$

Theo đề ta có $S_{xq} = \frac{1}{2} S_{tp}$

Hay $4ah = \frac{1}{2} 2a(a + 2h) \Rightarrow 4h = a + 2h \Rightarrow 2h = a \Rightarrow h = \frac{a}{2}$

Vậy chiều cao của hình trụ là $\frac{a}{2} \text{ (cm)}$



Bài 6:

Độ dài đường chéo của tam giác đáy là $JK = HG = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$

Diện tích tam giác đáy $S_{\Delta HFG} = S_{\Delta TIK} = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ $HFG.JIK$

$$S_{tp1} = S_{xq} + 2S_{\text{day}} = 2 \left(\frac{3 + 4 + 5}{2} \right) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$$

* Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật $ABCD.EFII'$ (I' là điểm phía dưới)

$$S_{tp2} = S_{xq} + 2S_d = 2(1 + 3) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 46 \text{ cm}^2$$

$$* S_{JFHH} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$$

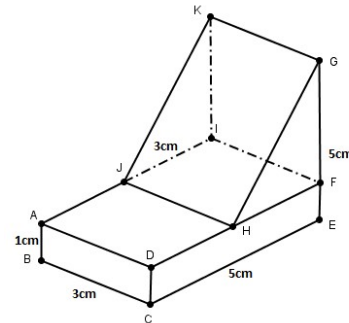
* Diện tích toàn phần của hình đã cho là

$$S_p = S_{tp1} + S_{tp2} - S_{MFH} = 48 + 46 - 9 = 85 \text{ cm}^2$$

Thể tích hình lăng trụ $V_1 = S_d \cdot h = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^3$

Thể tích hình hộp chữ nhật $V_2 = S_d \cdot h = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^3$

Thể tích của hình đã cho là $V = V_1 + V_2 = 18 + 15 = 33 \text{ cm}^3$



Bài 7:

Diện tích đáy tam giác đều: $S = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Thể tích hộp kẹ: $V = 20.2\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 8:

Chiều cao của tam giác đáy $h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow h' = \sqrt{144} = 12\text{cm}$

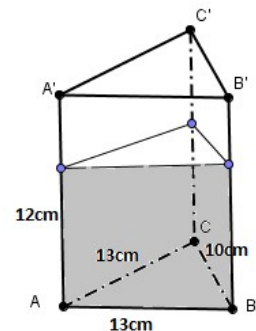
Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}h'.BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60\text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 480\text{cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(BCC'B')$ thì $S_d = 10 \cdot 12 = 120\text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{480}{120} \Rightarrow h' = 4\text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 4cm.



Bài 9:

Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24\text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192\text{cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(ACC'A')$ thì $S_d = 8 \cdot 12 = 96\text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{96} \Rightarrow h' = 2\text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2cm.

