

DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

* Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao tương ứng

* Lưu ý:

$$S = \frac{1}{2} a.h.$$

- Nếu hai tam giác có một cạnh bằng nhau thì tỉ số diện tích hai tam giác đó bằng tỉ số các chiều cao tương ứng.

- Nếu hai tam giác có một đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích hai tam giác đó bằng tỉ số các cạnh tương ứng.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Tính toán, chứng minh về diện tích tam giác

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích tam giác.

1. Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AM . Chứng minh $S_{AMB} = S_{AMC}$.

2. Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến AM , BN , CP cắt nhau tại trọng tâm G . Chứng minh:

a) $S_{AGP} = S_{PGB} = S_{BGM} = S_{MGC} = S_{CGN} = S_{NGA}$;

b) Các tam giác GAB , GBC và GCA có diện tích bằng nhau.

3. a) Tính diện tích của một tam giác cân có cạnh bên là a và cạnh đáy là b .

b) Tính diện tích của tam giác đều có cạnh là a .

4. Cho tam giác ABC có đáy $BC = 60 \text{ cm}$, chiều cao tương ứng 40 cm . Gọi D , E theo thứ tự là trung điểm của AB , AC . Tính diện tích tứ giác $BDEC$.

Dạng 2. Tính độ dài đoạn thẳng bằng cách sử dụng công thức tính diện tích tam giác

Phương pháp giải: Từ công thức $S = \frac{1}{2} a.h$, suy ra $a = \frac{2S}{h}$ và $h = \frac{2S}{a}$.

5. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy $BC = 60 \text{ cm}$, đường cao $AH = 40 \text{ cm}$. Tính đường cao tương ứng với cạnh bên.

6. Một tam giác cân có đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15 cm , đường cao ứng với cạnh bên bằng 20 cm . Tính các cạnh của tam giác đó (chính xác đến $0,1\text{ cm}$).

Dạng 3. Sử dụng công thức tính diện tích để chứng minh các hệ thức

Phương pháp giải: Phát hiện quan hệ về diện tích trong hình rồi sử dụng các công thức tính diện tích.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC.$$

8. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1.$$

Dạng 4. Tìm vị trí của một điểm để thỏa mãn một đẳng thức về diện tích

Phương pháp giải: Dùng công thức tính diện tích dẫn đến điều kiện về vị trí điểm, thường liên quan đến khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

9. Cho tam giác ABC . Hãy chỉ ra vị trí của điểm M trong tam giác đó sao cho $S_{MAB} + S_{MAC} = S_{MBC}$.

10. Tam giác ABC có $BC = 6\text{ cm}$. Lấy điểm M trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Xác định vị trí điểm N trên BC sao cho MN chia tam giác ABC thành hai phần thỏa mãn tứ giác $AMNB$ có diện tích gấp 3 lần diện tích MNC .

Dạng 5. Tìm diện tích lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một hình

Phương pháp giải: Để tìm diện tích lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một hình, ta có thể sử dụng mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Lưu ý:

- Nếu diện tích của một hình luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số M và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng M thì M là diện tích lớn nhất của hình.
- Nếu diện tích của một hình luôn lớn hơn hoặc bằng một hằng số m và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng m thì m là diện tích nhỏ nhất của hình.

11. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC có $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$.

12. Tính diện tích lớn nhất của tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = a$.

HƯỚNG DẪN

1.

Kẻ đường cao AH

Ta có: $S_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} CM \cdot AH$$

Mà $BM = CM$ (gt)

$$\Rightarrow S_{AMB} = S_{AMC} \text{ (ĐPCM)}$$

2.

a) Tam giác AGP và PGB có chung đường cao hạ từ đỉnh G và $AP = PB$ nên $S_{AGP} = S_{PGB}$

Tương tự, ta có: $S_{BGM} = S_{MGC}$ và $S_{CGN} = S_{NGA}$.

Vì G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow AG = 2GM$.

$$\Rightarrow S_{BGM} = \frac{1}{2} S_{ABG} \Rightarrow S_{BGM} = S_{AGP} = S_{PGB}.$$

Chứng minh tương tự, ta suy ra được:

$$S_{AGP} = S_{PGB} = S_{BGM} = S_{MGC} = S_{CGN} = S_{NGA}$$

b) Sử dụng kết quả câu a) ta có diện tích mỗi tam giác bằng $\frac{1}{6} S_{ABC}$,

từ đó suy ra ĐPCM.

3.

a) Kẻ đường cao AH.

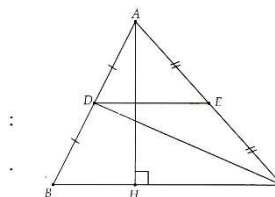
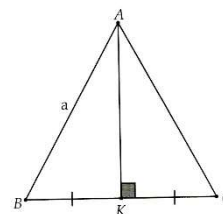
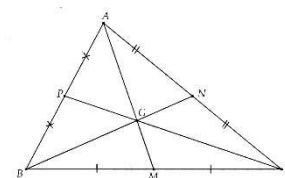
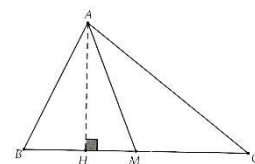
$$\Rightarrow BH = HC = \frac{b}{2}.$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông AHB, tính được

$$AH = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{4} b \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}$$

b) Ta có: $BK = KC = \frac{a}{2}$



Tính được $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

4.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 40 = 1200 \text{ cm}^2$$

Chứng minh: $S_{ACD} = S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

Vậy $S_{BDEC} = S_{BCD} + S_{DEC} = \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4} \cdot 1200 = 900 \text{ cm}^2$

5.

$$BH = HC = \frac{1}{2} BC = 30 \text{ cm}$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông AHC, tính được $AC = 50 \text{ cm}$.

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AC \cdot BK$

$$\Rightarrow AC \cdot BK = 2400$$

$$\Rightarrow BK = 48 \text{ cm}$$

6.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} BK \cdot AC$$

$$\Rightarrow 15BC = 20AC \Rightarrow BC = \frac{4}{3} AC$$

$$\Rightarrow BH = HC = \frac{2}{3} AC$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ACH, ta có:

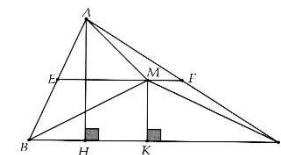
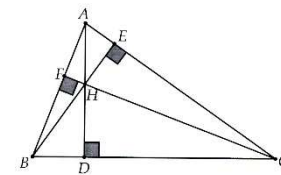
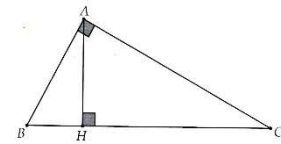
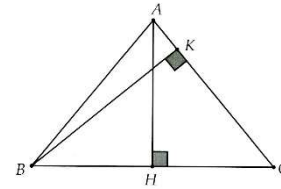
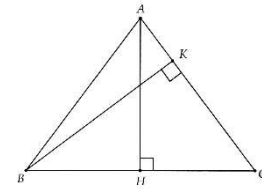
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 15^2 + \frac{4}{9} AC^2$$

Tính được $AC = AB = 20,1 \text{ cm}$ và $BC = 26,8 \text{ cm}$.

7.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ (ĐPCM)}$$



8.

$$S_{BHC} = \frac{1}{2} HD \cdot BC$$

$$\text{và } S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} = \frac{HD}{AD} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} = \frac{HE}{BE} \text{ và } \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = \frac{HF}{CF} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra được } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1 \text{ (ĐPCM)}$$

9. Vẽ $AH \perp BC$, $MK \perp BC$

$$S_{MBC} = S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow MK = \frac{1}{2} AH$$

Vì M không nằm ngoài tam giác nên M nằm trên đoạn thẳng $EF \parallel BC$

và cách BC một khoảng $\frac{1}{2} AH$.

10.

Vẽ $MH \perp BC$, $BK \perp AC$.

$$S_{AMNB} = 3S_{MNC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 4S_{MNC}$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{ABC}}{S_{BMC}} = \frac{AC}{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{BMC}}{S_{MNC}} = \frac{BC}{NC} = \frac{6}{NC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{9}{NC}$$

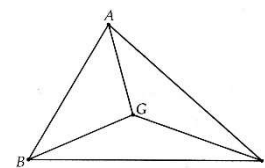
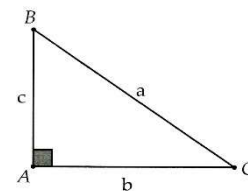
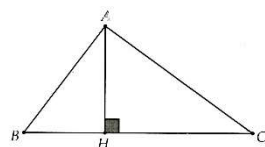
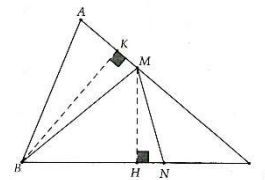
$$\text{Mà } S_{ABC} = 4S_{CMN} \Rightarrow NC = 2,25$$

11.

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

Mà $AH \leq AB$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6.$$



Vậy diện tích lớn nhất của ΔABC là 6cm^2 .

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AH \equiv BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

12.

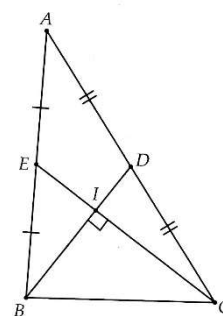
Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2$ và $bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác ABC là $\frac{a^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.



B. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Một hình chữ nhật có các kích thước 6m và 2m. Một hình tam giác có các cạnh bằng 5m, 5m, 6m. Chứng minh rằng hai hình đó có chu vi bằng nhau và diện tích bằng nhau.

Bài 2: Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc, $AC = 16\text{cm}$, $BD = 10\text{cm}$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tính diện tích tứ giác EFGH.

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12\text{ cm}$, $AD = 6,8\text{ cm}$. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE.

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD có $CD = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của C trên BD. Tính diện tích tam giác ADH.

Bài 5: Hai hình vuông có hiệu hai cạnh bằng 3m và hiệu diện tích bằng 69m^2 . Tính cạnh của mỗi hình vuông.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường phân giác BD. Biết $AD = 3\text{cm}$, $DC = 5\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 7: Trong hình chữ nhật có chu vi 100m, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích đó.

Bài 8: Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 26m, hiệu hai cạnh góc vuông bằng 14m.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = 15\text{cm}$, đường cao $AH = 10\text{cm}$. Tính đường cao ứng với cạnh bên.

Bài 10: Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD, $AB = 10\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$. Tính diện tích hình vuông có đường chéo là AD.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = b$, đường cao AH. Ở phía ngoài tam giác vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCIK.

a) Tính diện tích tam giác DBC.

b) Chứng minh rằng $AK = DC$.

c) Đường thẳng AH cắt KI ở M. Tính diện tích các tứ giác $BHMK, CHMI, BCIK$.

Bài 12: Tam giác ABC có $AB = 10\text{cm}$, $AC = 17\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$.

a) Gọi AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Tính $HC^2 - HB^2$ và $HC - HB$.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 13: Cho điểm M nằm trong $\triangle ABC$. Các tia AM, BM, CM lần lượt cắt cạnh đối diện tại D, E, F. Chứng minh $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1$

HƯỚNG DẪN

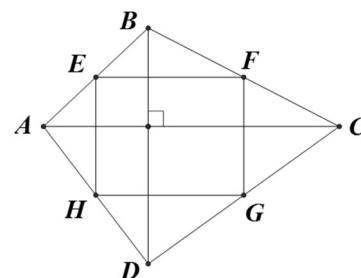
Bài 1: Chu vi hình chữ nhật và chu vi hình tam giác cùng bằng 16m.

Diện tích hình chữ nhật và diện tích hình tam giác cùng bằng 12m^2

Bài 2: EFGH là hình chữ nhật, có $EF = 8\text{cm}$, $EH = 5\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật EFGH bằng 40cm^2 .

Bài 3: a) ABCD là hình chữ nhật nên $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6,8 = 40,8\text{cm}^2$.



E là trung điểm của CD, suy ra:

$$S_{BDE} = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot S_{BCD} = 20,4 \text{ cm}^2.$$

b) H là trung điểm BC $\Rightarrow S_{CHE} = \frac{1}{2} \cdot S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 20,4 = 10,2 \text{ cm}^2.$

K là trung điểm CE $\Rightarrow S_{HKC} = \frac{1}{2} \cdot S_{CHE} = 5,1 \text{ cm}^2.$

I là trung điểm CH $\Rightarrow S_{CKI} = \frac{1}{2} \cdot S_{HKC} = 2,55 \text{ cm}^2.$

Vậy $S_{EHIK} = S_{CHE} - S_{CKI} = 10,2 - 2,55 = 7,65 \text{ cm}^2.$

Bài 4: Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông BCD ,

ta có $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

nên $BD = 5 \text{ cm}$

$$CH = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{BC \cdot CD}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ cm}$$

Xét tam giác vuông CDH, ta có $DH^2 = CD^2 - CH^2 = 4^2 - 2,4^2 = 10,24 = 3,2^2$

nên $DH = 3,2 \text{ cm}.$

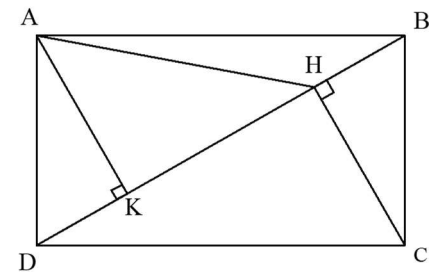
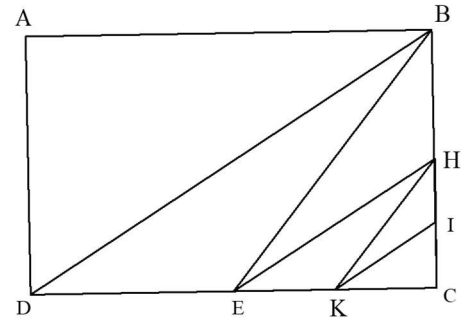
Kẻ $AK \perp BD$. Ta có $S_{ABD} = S_{CBD}$ nên $AK = CH = 2,4 \text{ cm}.$ Vậy

$$S_{ADH} = \frac{1}{2} DH \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 2,4 = 3,84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 5: Gọi a và b là cạnh của hình vuông. Ta có $a - b = 3$ và $a^2 - b^2 = 69$, do đó

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{69}{3} = 23$$

Biết tổng $a + b = 23$, $a - b = 3$ ta tính được $a = 13; b = 10.$



Bài 6: Kẻ $DH \perp BC$. Ta có $\triangle HBD = \triangle ABD$ (cạnh huyền BD chung, góc nhọn $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$) nên $DH = AD = 3\text{cm}$ và $BH = AB$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle DHC$ vuông, ta có

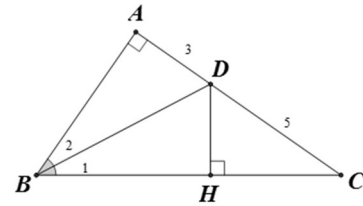
$$HC^2 = DC^2 - DH^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2, \text{ nên } HC = 4\text{cm}. \text{ Đặt}$$

$$AB = BH = x.$$

Áp dụng định lý Py –ta-go vào $\triangle ABC$ vuông, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = 6.$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABC \text{ bằng } \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} 6.8 = 24\text{cm}^2.$$



Bài 7: Gọi một kích thước của hình chữ nhật là $x(\text{m})$, kích thước kia là $50 - x(\text{m})$

Diện tích hình chữ nhật bằng:

$$S = x(50 - x) = -x^2 + 50x = -(x - 25)^2 + 625 \leq 625.$$

Giá trị lớn nhất của S bằng 625 tại $x = 25$. Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng 625 m^2 , khi đó hình chữ nhật là hình vuông có cạnh 25m.

Bài 8: Gọi a, b là các cạnh góc vuông. Ta có $a - b = 14$ và $a^2 + b^2 = 26^2 = 676$ (1)

Từ $a - b = 14$ suy ra $(a - b)^2 = 14^2$, tức là $a^2 + b^2 - 2ab = 196$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2ab = 676 - 196 = 480$.

$$\text{Diện tích tam giác vuông bằng } \frac{ab}{2} = \frac{480}{4} = 120\text{m}^2.$$

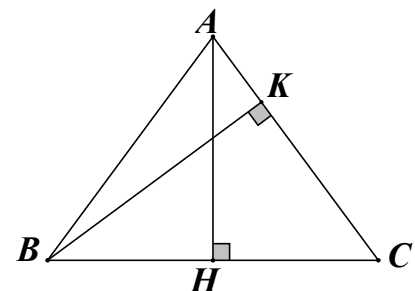
Bài 9: Tam giác ABC cân tại A. Đường cao AH nên

$$BH = HC = BC : 2 = 15 : 2 = 7,5(\text{cm})$$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AHC ta có

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 10^2 + 7,5^2$$

$$= 156,25 = 12,5^2; \text{ suy ra } AC = 12,5 \text{ cm}.$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75 (cm^2).$$

Kẻ $BK \perp AC$, ta có $BK = 2S_{ABC} : AC = 2 \cdot 75 : 12,5 = 12 (cm)$.

Bài 10: Kẻ $DH \perp AB, DK \perp AC$. Điểm D thuộc tia phân giác của góc A nên $DH = DK$.

Đặt $DH = DK = x$, ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ADB} + S_{ADC} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot x + \frac{1}{2} AC \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x = 12,5x. \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $12,5x = 75$. Do đó $x = 75 : 12,5 = 6$.

$$S_{AHDK} = 6^2 = 36 (cm^2).$$

Bài 11:

a) $S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ADBE} = \frac{a^2}{2}$

b) $\triangle ABK = \triangle DBC (c.g.c) \Rightarrow AK = DC$.

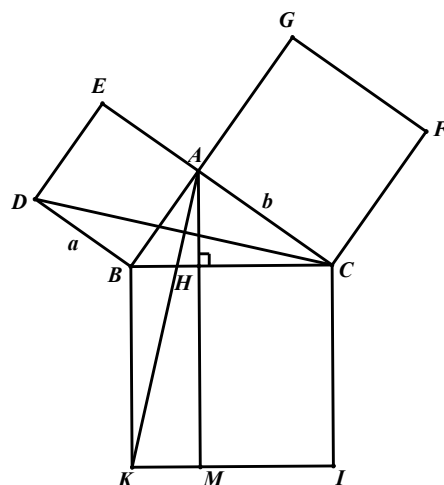
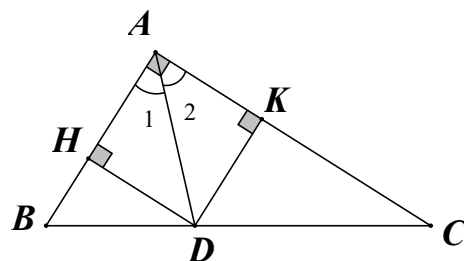
c) $S_{BHKM} = 2S_{ABK} = 2S_{DBC} = a^2$

Chứng minh tương tự, $S_{CHMI} = S_{ACFG} = b^2$.

Vậy $S_{BICK} = a^2 + b^2$

Lưu ý. Bài toán trên cho ta một cách chứng minh định lý Py-ta-go: Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

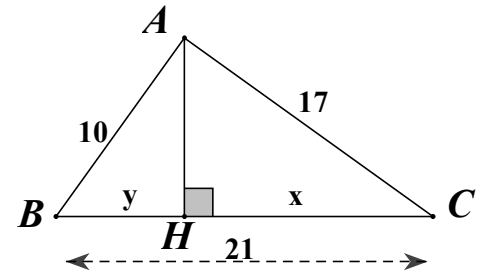


Bài 12:

a) Đặt $HC = x, HB = y$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (AC^2 - AH^2) - (AB^2 - AH^2) \\ &= AC^2 - AB^2 = 17^2 - 10^2 = 189 \end{aligned}$$

Do đó: $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{189}{21} = 9.$



b) Biết tổng $(x + y)$ và hiệu $(x - y)$ ta tính được $y = 6 \text{ cm}$, từ đó $AH = 8 \text{ cm}$.

Đáp số: $S_{ABC} = 84 \text{ cm}^2$.

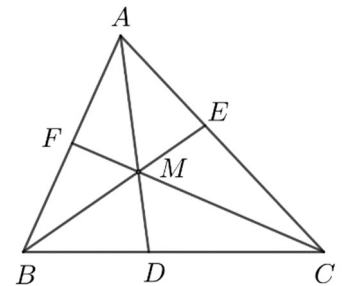
Bài 13: Ta có: $\frac{S_{BMD}}{S_{BAD}} = \frac{MD}{AD}$ ($\triangle BMD$ và $\triangle BAD$ có chung đường cao kẻ từ B)

Và $\frac{S_{CMD}}{S_{CAD}} = \frac{MD}{AD}$ ($\triangle CMD$ và $\triangle CAD$ có chung đường cao kẻ từ C)

Suy ra: $\frac{MD}{AD} = \frac{S_{BMD}}{S_{BAD}} = \frac{S_{CMD}}{S_{CAD}} = \frac{S_{BMD} + S_{CMD}}{S_{BAD} + S_{CAD}} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Chúng minh tương tự: $\frac{S_{MAC}}{S_{BAC}} = \frac{ME}{BE}; \frac{S_{MAB}}{S_{CAB}} = \frac{MF}{CF}$

Suy ra: $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = \frac{S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \text{ (đpcm)}$



===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====