DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A.TRỌNG TÂM CƠ BẢN CẦN ĐẠT.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Công thức diện tích hình tròn*

Diện tích S của một hình tròn bán kinh R được tính theo công thức:

$S = \pi R^2$

2. *Công thức diện tích hình quạt tròn*

Diện tích hình quạt tròn bán kính E, cung n^0 được tính theo công thức:

$S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ *hay* $S = \dfrac{lR}{2}$.

(l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích hình tròn, hình quạt tròn và các loại lương có liên quan

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức trên và các kiến thức đã có.

1.1. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất):

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
	12cm		45^0	
2cm				12,5cm^2
		40cm^2		10cm^2

1.2. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**

	14cm		60^0	
4cm				$15cm^2$
		$60cm^2$		$16cm^2$

2.1. Cho hình vuông có cạng là 4cm nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O).

2.2. Cho hình vuông có cạnh là 5cm nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O).

3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; 3cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OC và cung nhỏ AC khi $\widehat{ABC} = 40^0$.

3.2. Cho tam giác ABC nội tếp đường tròn (O; 6cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA, OC và cung nhỏ AC khi $\widehat{ABC} = 60^0$.

Dạng 2. Bài toán tổng hợp

Phương pháp giải: *Sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học để tính góc ở tâm, bán kính đường tròn. Từ đó tính được diện tích hình tròn và diện tích hình quạt tròn.*

4.1. Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho OM = 2R. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB.

4.2. Cho đường tròn (O) đường kính *AB.* Lấy M thuộc đoạn *AB.* vẻ dây CD vuông góc với *AB* tại *M.* Giả sử $AM = 2cm$ và CD = $4\sqrt{3}$ *cm.* Tính:

a) Độ dài đường tròn (O) và diện tích đường tròn (O);

b) Độ dài cung $\overset{\frown}{CAD}$ và diện tích hình quạt tròn gioi hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$.

III. BÀI TẬP CƠ BẢN VỀ NHÀ

5. Cho đường tròn (O; *R),* đường kính *AB* cố định. Gọi *M* là trung điểm đoạn *OB.* Dây CD vuông góc với *AB* tại M. Điểm E chuyên động trên cung lớn CD *(E* khác *A).* Nôi *AE* cắt CD tại *K.* Nối *BE* cắt CD tại H.

a) Chứng minh bôn điểm *B,* M, *E, K* thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh *AE.AK* không đổi.

c) Tính theo *R* diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi *OB, OC* và cung nhỏ *BC*.

6. Cho nửa đường tròn (O; *R)* đường kính *AB*. Vẽ dây CD = *R* (C thuộc cung *AD)*. Nối *AC* và *BD* cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng khi CD thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì độ lớn góc $\widehat{AMB}$ không đổi.

b) Cho $\widehat{ABC} = 30^0$, tính độ dài cung nhỏ *AC* và diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây *AC* và cung nhỏ *AC*.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

1.1.

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
1,9cm	12cm	$11,3cm^2$	45^0	$1,4cm^2$
2cm	12,6cm	$12,6cm^2$	$351,1^0$	$12,5cm^2$
3,6cm	22,4cm	$40,7cm^2$	90^0	$10,2cm^2$

1.2.

Bán kính đường tròn (R)	**Độ dài đường tròn (C)**	**Diện tích hình tròn (S)**	**Số đo của cung tròn n^0**	**Diện tích hình quạt tròn cung n^0**
2,2cm	14cm	$15,2cm^2$	$^{60}0$	$2,6cm^2$
4cm	25,1cm	$50,3cm^2$	$107,4^0$	$15cm^2$
4,4cm	27,6cm	$60cm^2$	$94,8^0$	$16cm^2$

2.1. $R = 2\sqrt{2}cm, C(O) = 4\pi\sqrt{2}cm, S(O) = 8\pi cm^2$

2.2. Tương tự **2.1.**

3.1. $S = 3\pi cm^2$

3.2. Giải tương tự **3.1**

4.1. a) $l=\dfrac{2\pi R}{3}$;

b) $S=\sqrt{3}R^2-\dfrac{\pi R^2}{3}=(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3})R^2$

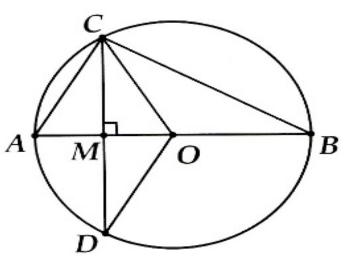
4.2. a) $AC=4cm\Rightarrow BC=4\sqrt{3cm}$

$\Rightarrow R=4cm\Rightarrow C=8\pi cm, S=16\pi cm^2$

b) ΔAOC đều $\Rightarrow \widehat{AOC}=60^0$

$\Rightarrow \widehat{COD}=120^0\Rightarrow l_{\overset{\frown}{CAD}}\dfrac{\pi.4.120}{180}=\dfrac{8}{3}\pi cm$.

$\Rightarrow S=\dfrac{\dfrac{8}{3}\pi.4}{2}=\dfrac{16}{3}\pi cm^2$



5. a) Chú ý: $\widehat{KMB}=90^0$ và $\widehat{KEB}=90^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $\Delta ABE\sim\Delta AKM(g.g)$

$\Rightarrow\dfrac{AE}{AM}=\dfrac{AB}{AK}$

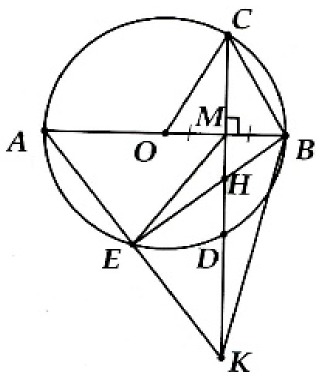
$\Rightarrow AE.AK=AB.AM=3R^2$ không đổi.

c) ΔOBC đều.

$\Rightarrow\widehat{BOC}=60^0\Rightarrow S=\dfrac{\pi R^2}{6}$

6. a) Chứng minh được ΔCOD đều $\Rightarrow\widehat{AMB}=60^0$

b) $\widehat{ABC}=30^0\Rightarrow\widehat{AOC}=60^0\Rightarrow l_{\overset{\frown}{AC}}=\dfrac{\pi R}{3}$


C
M
A
O
B
H
E
D
K

B.NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, Gọi Ax, By là các tiếp tuyến tại A và B của (O), Tiếp tuyến tại điểm M tùy ý của (O) cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOCD.

b) Cho $AB = 8$ cm. Tìm vị trí của C để chu vi tứ giác ABDC bằng 28cm, khi đó tính diện tích của phần tứ giác nằm ngoài (O).

Bài 2. Cho đường tròn tâm O, cung AB bằng $120°$. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và tại B cắt nhau ở C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CB và cung AB nói trên. So sánh độ dài của đường tròn (I) với độ dài cung AB của đường tròn (O)

Bài 3. Cho đường tròn có bán kính bằng 3. Người ta tô đỏ một số cung của hình tròn, tổng độ dài các cung được tô bằng 9. Có tồn tại hay không một đường kính của đường tròn mà hai đầu không bị tô mầu?

Bài 5. Trong một hình tròn có bán kính 20 có thể đặt được 500 điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ lớn hơn 2 không?

Bài 6. Một hình vuông và một tam giác đều cùng nội tiếp trong đường tròn $(O;1)$ sao cho một cạnh của tam giác song song với một cạnh của hình vuông. Tính diện tích phần chung của tam giác và hình vuông.

Bài 7. Đường tròn $(O;r)$ nội tiếp tam giác ABC. Qua O kẻ đường thẳng cắt hai cạnh AC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $S_{CMN} \geq 2r^2$.

Bài 8. Đường tròn $(O;r)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Đặt AD = x, BE = y, CF = z. Chứng minh rằng:

a) $S_{ABC} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$

b) $S_{ABC} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(xy+yz+zx)$

Bài 9. Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp được trong các đường tròn.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} = \sqrt{AB.BC.CD.DA}$.

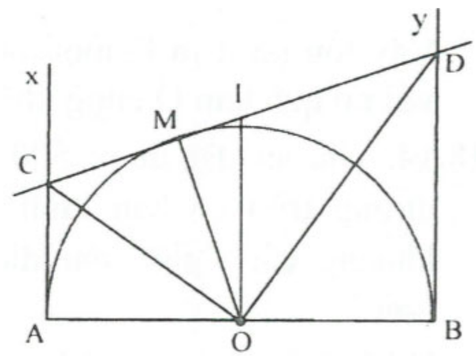
HƯỚNG DẪN

Bài 1.

a) ΔOCD vuông tại O (OC và OD là phân giác của hai góc kề bù)

I là trung điểm của CD thì IO = IC = ID và $IO \perp AB$ tại O nên

AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOCD.



b) Đặt $AC = x(\text{cm})$ và $BD = y(\text{cm})$

$C_{ABDC} = AB + 2(AC + BD) = 28 \Rightarrow x + y = 10$

Mặt khác $OM^2 = MC.MD \Rightarrow xy = 16$

Giải hệ $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy C cách A một đoạn $AC = 2cm$ và $BD = 8cm$ hoặc $AC = 8cm$ và $BD = 2cm$. Cả hai trường hợp trên hình thang vuông ABCD có cùng diện tích: $S_1 = 40$ (cm^2).

Diện tích nửa hình tròn (O): $S_2 = 8\pi$ (cm^2)

Vậy phần diện tích tứ giác ABCD nằm ngoài đường tròn:

$S = S_1 - S_2 = 40 - 8\pi(\text{cm}^2)$

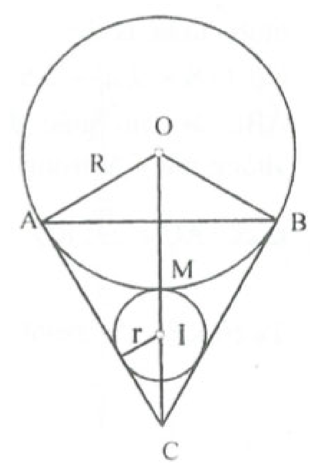
Bài 2.

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của đường tròn (O), (I).

Gọi tiếp điểm của đường tròn (I) với cung AB và với cạnh CA theo thứ tự là M và H.

ΔOAC vuông tại A, $\widehat{AOC} = 60°$ nên $OC = 2OA = 2R$ và

$CM = OC - OM = 2R - R = R$ (1)



ΔIHC vuông tại H, $\widehat{HIC} = 60°$ nên $IC = 2IH = 2r$

Do đó $MC = MI + IC = r + 2r = 3r$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $r = \dfrac{R}{3}$

Độ dài cung AB của (O) bằng $\dfrac{2\pi R}{3}$

Độ dài đường tròn (I) bằng $2\pi r = \dfrac{2\pi R}{3}$

Vậy độ dài đường tròn (I) bằng độ dài cung AB của đường tròn (O).

Bài 3.

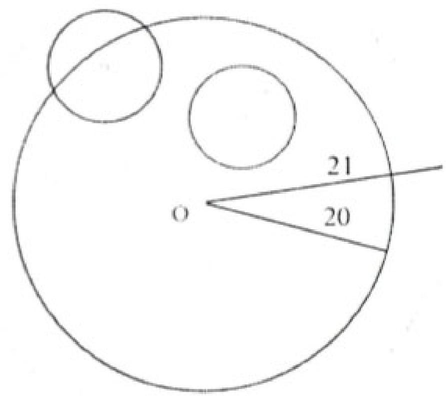
Ta tô xanh các cung đối xứng với các cung đỏ qua tâm O.

Như vậy tổng độ dài các cung được tô màu là $9.2 = 18$.

Chu vi của hình tròn là $2\pi.3 = 6\pi > 18$.

Vậy tồn tại ít ra là một điểm của đường tròn không bị tô mầu. Điểm đối xứng với nó qua tâm O cũng không được tô mầu. Đó là hai đầu đường kính phải tìm.

Bài 4.



Giả sử đặt được 500 điểm trong đường tròn có bán kính 20 sao cho khoảng cách giữa hai điểm đều lớn hơn 2.

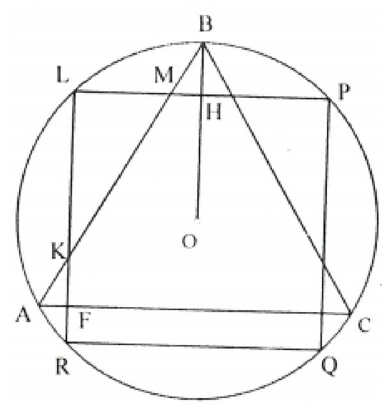
Vẽ 500 đường tròn có bán kính bằng 1 có tâm là các điểm đã cho. Vì khoảng cách giữa hai tâm lớn hơn tổng của hai bán kính nên các hình tròn này nằm ngoài nhau và nằm trong hình tròn có bán kính $20 + 1 = 21$.

Tổng diện tích của 500 hình tròn bán kính 1 phải nhỏ hơn diện tích của hình tròn có bán kính 21 nên $500.\pi.1^2 < \pi.21^2$ hay $500.\pi < 441.\pi$, vô lý.

Vậy không thể đặt 500 điểm thỏa mãn đề bài.

Bài 5.

Ta kí hiệu ABC là tam giác đều và PQRL là hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O;1)$ như hình vẽ. Đặt diện tích phần chung của tam giác đều và hình vuông là S.



Do đó $S = S_{ABC} - 2.S_{AKF} - S_{MNB} (*)$

ABC là tam giác đều và PQRL là hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O;1)$, nên ta có: $AC = \sqrt{3}; RQ = \sqrt{2} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

Ta có $KF = AF.\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{AKF} = \frac{1}{2}.AF.KF = \frac{1}{2}.\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{4}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\left(5-2\sqrt{6}\right)}{8}$$

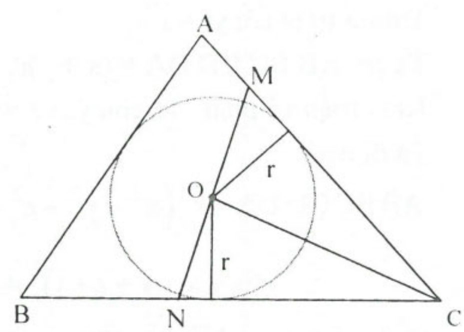
$$BH = OB - OH = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

Ta có $MH = BH.\tan 30° = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{2}.MN.BH = \frac{1}{2}\frac{2.\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6}$$

Mà $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Thay các giá trị trên vào (*), ta được: $S = \frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$

Bài 6.



Ta có $S_{CMN} = S_{CMO} + S_{CNO} = \frac{1}{2}\left(CM + CN\right)r$

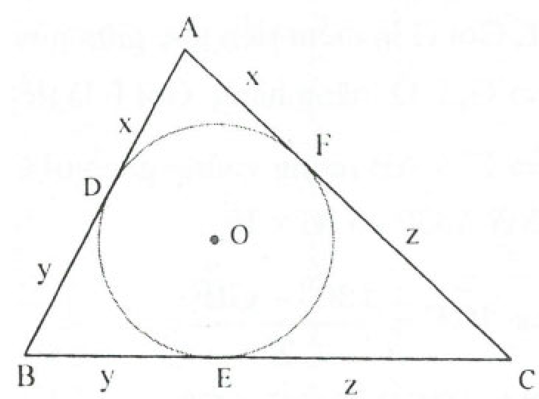
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$CM + CN \geq 2\sqrt{CM.CN} \geq 2\sqrt{2.S_{CMN}}$

Do đó: $S_{CMN} \geq \sqrt{2.S_{CMN}}.r$

$\Leftrightarrow S_{CMN}^2 \geq 2.S_{CMN}.r^2 \Leftrightarrow S_{CMN} \geq 2r^2$

Bài 7.



a) Vì $2p = AB + BC + CA = x + y + y + z + z + x$

$= 2\left(x+y+z\right)$ nên $p = x + y + z$

Mặt khác $a = BC = BE + EC = y + z$ nên $p - a = x$

Tương tự p - b = y, p - c = z

Áp dụng công thức Hê-rông, ta có:

$S_{ABC} = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

$= \sqrt{xyz\left(x+y+z\right)}$

b) $S_{ABC} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}.S_{ABC} \le xy+yz+zx$ (*)

Từ câu a, nên $(*) \Leftrightarrow 3xyz\left(x+y+z\right) \le \left(xy+yz+zx\right)^2$

Đặt: $xy=a, yz=b, zx=c$. Bất đẳng thức trên có dạng:

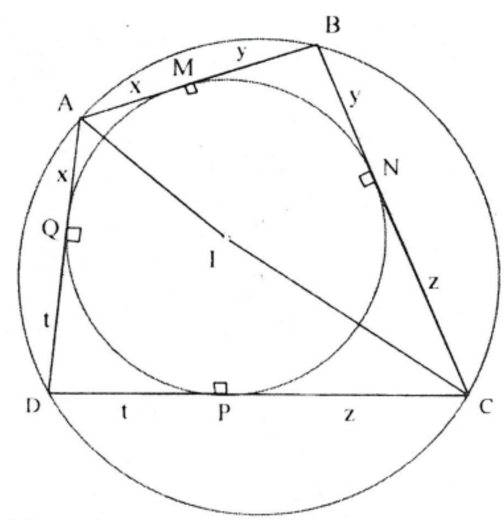
$3\left(ab+bc+ca\right) \le \left(a+b+c\right)^2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng, nên bất đẳng thức đầu đã được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi ABC là tam giác đều.

Bài 8. Giả sử đường tròn $(I;r)$ nội tiếp tứ giác ABCD, tiếp xúc với AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q.

Đặt $x=AM=AQ, y=BM=BN,$

$z=CN=CP, t=DP=DQ$



Do tứ giác ABCD nội tiếp nên:

$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180°$

Từ đó suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{NIP} \Rightarrow \widehat{IAM}=\widehat{NIC}$

$\Rightarrow \Delta IAM \backsim \Delta CIN \Rightarrow \frac{AM}{IN}=\frac{IM}{CN}$

$\Rightarrow AM.CN=IM.IN$ hay $xz=r^2$

Tương tự ta có: $yt=r^2$

Ta có: $AB.BC.CD.DA=\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+t\right)\left(t+x\right)$

Khai triển vế phải, và chú ý: $xz=yt=r^2$

Ta được:

$AB.BC.CD.DA=r^2\left(x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt\right)$

$=r^2\left(x+y+z+t\right)^2=\left(rp\right)^2=S_{ABCD}^2$

($p = x + y + z + t$ là nửa chu vi của tứ giác ABCD).

Từ đó suy ra $S_{ABCD} = \sqrt{AB.BC.CD.DA}$

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Một hình tròn có diện tích $S = 225\pi(cm^2)$. Bán kính của hình tròn đó là:

A. $15(cm)$. **B.** $16(cm)$. **C.** $12(cm)$. **D.** $14(cm)$.

Câu 2. Diện tích hình tròn bán kính $R = 8cm$ là:

A. $8\pi(cm^2)$. **B.** $64\pi(cm^2)$. **C.** $16\pi(cm^2)$. **D.** $32\pi^2(cm^2)$.

Câu 3. Diện tích hình tròn bán kính $R = 10cm$ là:

A. $100\pi(cm^2)$. **B.** $10\pi(cm^2)$. **C.** $20\pi(cm^2)$. **D.** $100\pi^2(cm^2)$.

Câu 4. Cho đường tròn $(O;10cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 45°$. Tính diện tích hình quạt AOM.

A. $5\pi(cm^2)$. **B.** $25\pi(cm^2)$. **C.** $50\pi(cm^2)$. **D.** $\frac{25}{2}\pi(cm^2)$.

Câu 5. Cho đường tròn $(O;8cm)$, đường kính AB. Điểm $M \in (O)$ sao cho $\widehat{BAM} = 60°$. Tính diện tích hình quạt AOM.

A. $32\pi(cm^2)$. **B.** $\frac{16\pi}{3}(cm^2)$. **C.** $\frac{32\pi}{3}(cm^2)$. **D.** $23\pi(cm^2)$.

Câu 6. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 4\sqrt{3}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Tính diện tích hình viên phân AC (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

A. $\pi - 3\sqrt{3}cm^2$. **B.** $2\pi - 3\sqrt{3}cm^2$. **C.** $4\pi - 3\sqrt{3}cm^2$. **D.** $2\pi - \sqrt{3}cm^2$.

Câu 7. Cho đường tròn(O) đường kính $AB = 3\sqrt{3}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 60°$. Tính diện tích hình viên phân BC. (hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và dây căng cung ấy).

A. $\frac{18\pi - 27\sqrt{3}}{16}(cm^2)$.**B.** $\frac{18\pi - 9\sqrt{3}}{16}(cm^2)$. **C.** $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{16}(cm^2)$. **D.** $\frac{18\pi - 27\sqrt{3}}{4}(cm^2)$.

Câu 8. Cho hình vuông có cạnh $6cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính diện tích hình tròn (O).

A. $18\pi(cm^2)$.   **B.** $36\pi(cm^2)$.   **C.** $18(cm^2)$.   **D.** $36(cm^2)$.

Câu 9. Cho hình vuông có cạnh $5\,cm$ là nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính diện tích hình tròn (O).

A. $\frac{25\pi}{4}(cm^2)$.   **B.** $\frac{25\pi}{3}(cm^2)$.   **C.** $\frac{15\pi}{2}(cm^2)$.   **D.** $\frac{25\pi}{2}(cm^2)$.

Câu 10. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC;BC$.

A. $\pi - \sqrt{3}$.   **B.** $2\pi - 2\sqrt{3}$.   **C.** $\pi - 3\sqrt{3}$.   **D.** $2\pi - \sqrt{3}$.

Câu 11. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 4\sqrt{2}cm$. Điểm $C \in (O)$ sao cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và $AC;BC$.

A. $\pi - \sqrt{3}$.   **B.** $2\pi - 2\sqrt{3}$.   **C.** $\pi - 3\sqrt{3}$.   **D.** $2\pi - \sqrt{3}$.

Câu 12. Một hình quạt có chu vi bằng $34cm$ và diện tích bằng $66cm^2$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R = 5(cm)$.   **B.** $R = 6(cm)$.   **C.** $R = 7(cm)$.   **D.** $R = 8(cm)$.

Câu 13. Một hình quạt có chu vi bằng $28(cm)$ và diện tích bằng $49(cm^2)$. Bán kính của hình quạt bằng?

A. $R = 5(cm)$.   **B.** $R = 6(cm)$.   **C.** $R = 7(cm)$.   **D.** $R = 8(cm)$.

Câu 14. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M sao cho $OM = 2M$. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB.

A. $\frac{\pi}{3}R^2$.   **B.** $\sqrt{3}R^2$.   **C.** $R^2\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$.   **D.** $R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 15. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). Độ dài các cung AB, BC, CA đều bằng 6π. Diện tích của tam giác đều ABC là:

A. $\frac{243}{2}\sqrt{3}$.   **B.** $\frac{234}{4}\sqrt{3}$.   **C.** $61\sqrt{3}$.   **D.** $\frac{243}{4}\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Độ dài của các cung AB, BC, CA đều bằng 4π. Diện tích của tam giác đều ABC là:

A. $27\sqrt{3}cm^2$. **B.** $7\sqrt{3}cm^2$. **C.** $29\sqrt{3}cm^2$. **D.** $9\sqrt{3}cm^2$.

Câu 17. Cho A, B, C, D là 4 đỉnh của hình vuông có cạnh là $2cm$. Tính diện tích của hình hoa 4 cánh giới hạn bởi các đường tròn có bán kính bằng a, tâm là các đỉnh của hình vuông.

A. $S = 4\pi - 8$. **B.** $S = 4\pi + 8$. **C.** $S = 4\pi$. **D.** $S = 8 - 4\pi$.

Câu 18. Cho A, B, C, D là 4 đỉnh của hình vuông có cạnh là $2cm$. Tính diện tích của hình hoa 4 cánh giới hạn bởi các đường tròn có bán kính bằng a, tâm là các đỉnh của hình vuông.

A. $S = (\pi + 2)a^2$. **B.** $S = 2(\pi + 2)a^2$. **C.** $S = (\pi - 2)a^2$. **D.** $S = 2(\pi - 2)a^2$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Diện tích $S = \pi R^2 = 225\pi \Leftrightarrow R^2 = 225 \Rightarrow R = 15(cm)$

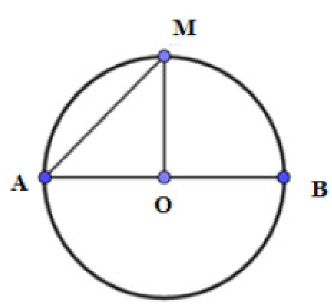
Câu 2. Đáp án B.

Diện tích $S = \pi R^2 = \pi.8^2 = 64\pi(cm^2)$

Câu 3. Đáp án A.

Diện tích $S = \pi R^2 = \pi.10^2 = 100\pi(cm^2)$.

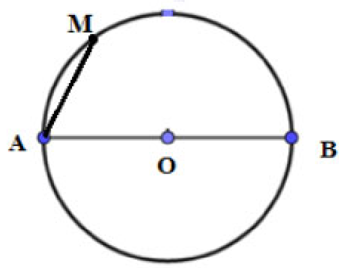
Câu 4. Đáp án B.



Xét đường tròn (O) có: $\begin{cases} OA = OM \\ \widehat{MAO} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AOM$ là tam giác vuông cân $\Rightarrow \widehat{MOA} = 90^0$.

Vậy diện tích hình quạt AOM là $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.10^2.90}{360} = 25\pi(cm^2)$.

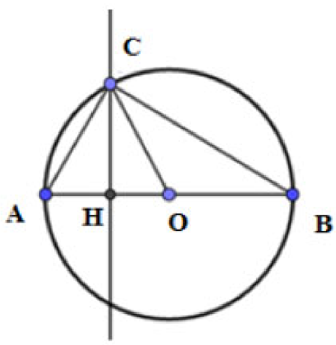
Câu 5. Đáp án C.



Xét đường tròn (O) có $\widehat{BAM} = 60^\circ$ suy ra số đo cung MB bằng $2.60^\circ = 120^\circ$ Suy ra số đo cung AM bằng $n^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Vậy diện tích hình quạt AOM là $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.8^2.60}{360} = \dfrac{32\pi}{3}(cm^2)$

Câu 6. Đáp án B.



Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 2.\widehat{ABC} = 2.30^0 = 60^0 \Rightarrow S_{qAOC} = \dfrac{\pi R^2.60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Xét ΔAOC có $\widehat{AOC} = 60^\circ$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

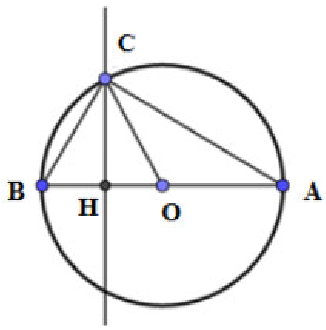
Gọi CH là đường cao của tam giác AOC, ta có:

$CH = CO.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{AOC} = \dfrac{1}{2}CH.OA = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.R.R = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.R^2.$

Diện tích hình viên phân AC là: $S_{qAOC} - S_{AOC} = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}.R^2 = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2$

$= \left(\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right).\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2\pi - 3\sqrt{3}$ (cm^2).

Câu 7. Đáp án A.



Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\widehat{CAB} = 90^\circ - \widehat{CBA} = 30^\circ$ (tam giác ABC vuông tại C)

$\widehat{ACB}$ và $\widehat{BOC}$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn

cung $\Rightarrow \widehat{BOC} = 2.\widehat{ACB} = 2.30^0 = 60^0 \Rightarrow S_{quat\ AOC} = \dfrac{\pi R^2.60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

Xét ΔBOC có $\widehat{BOC} = 60^\circ$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều

cạnh bằng R.

Gọi CH là đường cao của tam giác AOC, ta có:

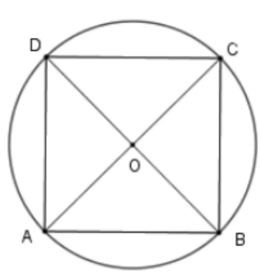
$$CH = CO.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{AOC} = \frac{1}{2}CH.OA = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.R.R = \frac{\sqrt{3}}{4}.R^2.$$

Diện tích hình viên phân BC là:

$$S_{quat\ BOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.R^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).R^2$$

$$= \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right).\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{18\pi - 27\sqrt{3}}{16}(cm^2)$$

Câu 8. Đáp án A.

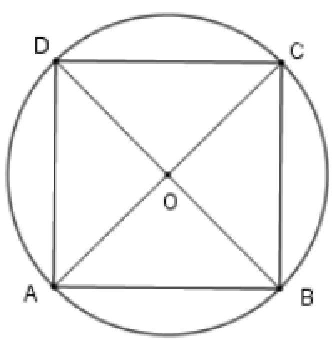


Gọi hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) khi đó $OA = OB = OC = OD = R \Rightarrow O$ là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow R = \dfrac{AC}{2}$

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Diện tích hình tròn (O) là $S = \pi R^2 = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\pi(cm^2)$.

Câu 9. Đáp án D.

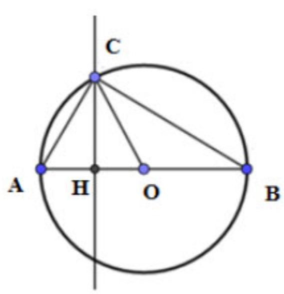


Gọi hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) khi đó $OA = OB = OC = OD = R$ là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow R = \dfrac{AC}{2}$.

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Diện tích hình tròn (O) là $S = \pi R^2 = \dfrac{25\pi}{2}(cm^2)$.

Câu 10. Đáp án A.



Diện tích hình tròn (O) là: $S_{(O)} = \pi R^2$

Ta có góc $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 - \widehat{CBA} = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

Tam giác AOC có $\widehat{CAO} = 60°$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

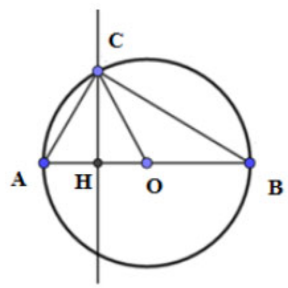
Giả sử CH là đường cao của tam giác ABC, ta có:

$$CH = CO.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}R.2R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và AC, BC là:

$$\frac{1}{2}S_{(O)} - S_{ABC} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)R^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi - \sqrt{3}.$$

Câu 11. Đáp án B.



Diện tích hình tròn (O) là: $S_{(O)} = \pi R^2$

Ta có góc $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 - \widehat{CBA} = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

Tam giác AOC có $\widehat{CAO} = 60°$ và $OA = OC = R$ nên tam giác AOC đều cạnh bằng R.

Giả sử CH là đường cao của tam giác ABC, ta có:

$$CH = CO.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.R \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}R.2R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Diện tích hình giới hạn bởi đường tròn (O) và AC, BC là:

$$\frac{1}{2}S_{(O)} - S_{ABC} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)R^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi - 2\sqrt{3}.$$

Câu 12. Đáp án B.

Ta có $\begin{cases} \frac{lR}{2} = 66 \\ l + 2R = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} lR = 132 \\ l + 2R = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l.2R = 264 \\ l + 2R = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2R = 12 \\ l = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 6 \\ l = 22 \end{cases}$

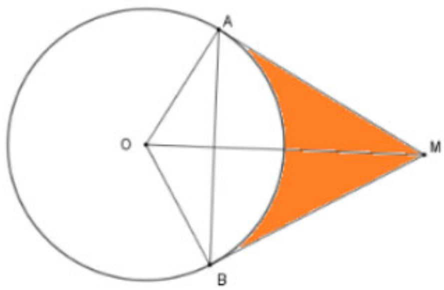
Vậy $R = 6(cm)$.

Câu 13. Đáp án C.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{lR}{2} = 49 \\ l + 2R = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} lR = 98 \\ l + 2R = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l.2R = 196 \\ l + 2R = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2R = 14 \\ l = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 7 \\ l = 14 \end{cases}$

Vậy $R = 7(cm)$

Câu 14. Đáp án D.



Xét ΔOAM có $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{OAM} = \dfrac{OA.AB}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Mà $\Delta OAM = \Delta OBM(c-c-c) \Rightarrow S_{OAMB} = 2S_{OAM} = \sqrt{3}R^2$

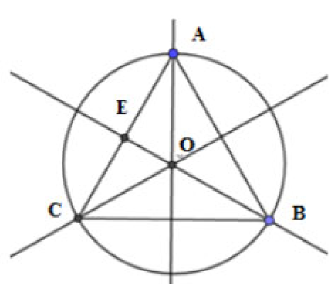
Xét ΔOAM có $\cos\widehat{AOM} = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$

Diện tích quạt tròn $S_{qAB} = \dfrac{\pi R^2.120}{360} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

Diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB là

$S = S_{OAMB} - S_{qAB} = \sqrt{3}R^2 - \dfrac{\pi R^2}{3} = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right).$

Câu 15. Đáp án D.



Gọi RR là bán kính của đường tròn (O). Độ dài của các cung AB, BC, CA đều bằng 6π nên ta có $C = 2\pi R = 6\pi + 6\pi + 6\pi = 18\pi$, suy ra $R = 9$ hay $OA = OB = OC = 9$

Ta cũng có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$

suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$ suy ra $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AOC} = S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

Xét tam giác AOC có: $\begin{cases} \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 30° \\ \widehat{COA} = 120° \end{cases}$

Kẻ đường cao OE , ta có đồng thời là đường trung tuyến, phân giác của góc $\widehat{COA}$

Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{COE} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$

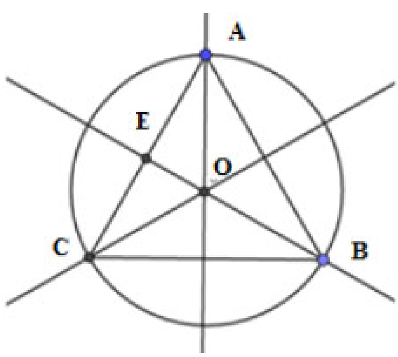
Xét tam giác COE có: $\begin{cases} \widehat{ECO} = 30° \\ \widehat{CEO} = 90° \end{cases} \Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}CO = \dfrac{R}{2}$

Áp dụng định lý Pytago ta có: $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

Vậy $S_{COE} = \dfrac{1}{2}OE.CE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{R}{2}.\dfrac{\sqrt{3}R}{2} = \dfrac{\sqrt{3}R^2}{8}$ Suy $S_{COA} = 2S_{COE} = \dfrac{\sqrt{3}R^2}{4}$

và $S_{ABC} = 3S_{COA} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}.9^2}{4} = \dfrac{243\sqrt{3}}{4}$.

Câu 16. Đáp án A.



Gọi R là bán kính của đường tròn (O). Độ dài của các cung AB, BC, CA đều bằng 4π nên ta có $C = 2\pi R = 4\pi + 4\pi + 4\pi = 12\pi$, suy ra $R = 6$ hay $OA = OB = OC = 6$

Ta cũng có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$ suy ra $\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta BOC = \dfrac{1}{3}\Delta ABC$

Xét tam giác AOC có: $\begin{cases} \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 30° \\ \widehat{COA} = 120° \end{cases}$

Kẻ đường cao OE , ta có đồng thời là đường trung tuyến, phân giác của góc $\widehat{COA}$.

Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$

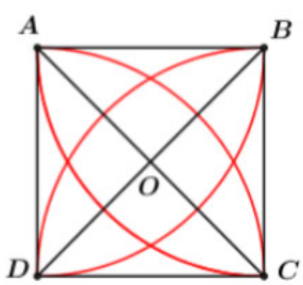
Xét tam giác COE có: $\begin{cases} \widehat{ECO} = 30^\circ \\ \widehat{CEO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow OE = \frac{1}{2}CO = \frac{R}{2}$

Áp dụng định lý Pytago ta có: $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

Vậy $S_{COE} = \frac{1}{2}OE.CE = \frac{1}{2}.\frac{R}{2}.\frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{\sqrt{3}R^2}{8}$

Suy ra $S_{COA} = 2S_{COE} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$ và $S_{ABC} = 3S_{COA} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = 27\sqrt{3}\ cm^2$.

Câu 17. Đáp án A.



Ta có diện tích của hình hoa cần tính bằng 4 lần diện tích của hình viên phân AC $S = 4S_{viên\,phân\,AC}$.

Hình viên phân AC bằng $S_{quat\,ADC} - S_{\Delta ADC}$

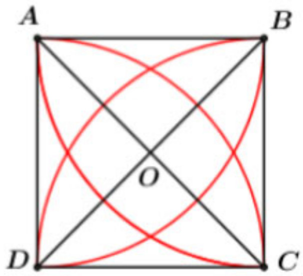
Quạt tròn ADC có bán kính $DA = DC = 3cm$ và số đo cung 90° Có:

$$S_{viên\,phân\,AC} = S_{quat\,ADC} - S_{\Delta ADC} = \frac{\pi R^2.90^0}{360^0} - \frac{1}{2}R^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)R^2 = \frac{\pi - 2}{4}.2^2 = \pi - 2$$

$$\Rightarrow S = 4S_{viên\,phân\,AC} = 4.(\pi - 2) = 4\pi - 8\ .$$

Câu 18. Đáp án C.



Ta có diện tích của hình hoa cần tình băng 4 lần diện tích của hình viên phân AC : $S=4S_{vp\,AC}$.

Có: $S_{vp\,AC}=S_{cung\,AC}-S_{ADC}=\dfrac{\pi R^2.90^0}{360^0}-\dfrac{1}{2}R^2=\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)R^2=\dfrac{\pi-2}{4}a^2$

$\Rightarrow S=4S_{vp\,AC}=4.\dfrac{\pi-2}{4}a^2=(\pi-2)a^2$.

D.TỰ LUYỆN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Bài 1:

a) Tính diện tích hình tròn có bán kính là 4 cm.

b) Tính diện tích hình quạt có bán kính là 4 cm, số đo cung là 72^0.

Bài 2: Tính theo a diện tích hình tròn (O);

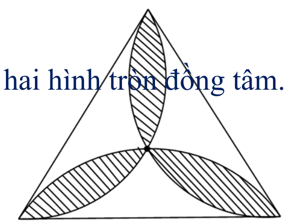
a) Biết độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn (O) là a.

b) Biết độ dài cạnh của tam giác đều nội tiếp của đường tròn (O) là a.

Bài 3: Cho đường tròn $(O;R)$ có AB là dây cung và $AB = R$. Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AB và dây AB.

Bài 4: Hãy tính diện tích hình viên phân AmB theo R biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 120^0$ và bán kính hình tròn là R.

Bài 5: Hình vành khăn là phần hình tròn bao gồm phần giữa hai hình tròn đồng tâm. Hãy lập công thức tính diện tích hình vành khăn S theo R_1 và R_2 $(R_1 > R_2)$.



Bài 6: Trong một tam giác đều, vẽ những cung tròn đi qua tâm của tam giác và từng cặp đỉnh của nó (hình bên) cạnh tam giác bằng a. Tính diện tích hình hoa thị gạch dọc.

Bài 7: Cho hình tròn $(O;R)$; A là điểm sao cho $OA = 2R$. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B và C là tiếp điểm).

Tính diện tích phần của tứ giác $OBAC$ nằm ngoài hình tròn (O).

Bài 8: Cho đoạn thẳng AB: M là điểm nằm giữa A và B trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các nửa đường tròn có đường kính AM; MB và AB. Xác định vị trí của M để diện tích hình giới hạn bởi ba nửa đường tròn trên có giá trị lớn nhất.

Bài 9: Cho ba hình tròn có bán kính $R_1; R_2; R_3$ có diện tích lần lượt là $S_1; S_2; S_3$ tiếp xúc ngoài và cùng tiếp xúc với đường thẳng d trong đó R_3 là bán kính có độ dài nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{S_1S_2}$ theo độ dài cho trước R_3.

Bài 10: Một tờ giấy hình tròn bán kính 100cm có 9800 lỗ kim châm. Chứng minh rằng có thể cắt ra ở tờ giấy ấy một hình tròn bán kính 1cm không có lỗ kim châm nào.

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

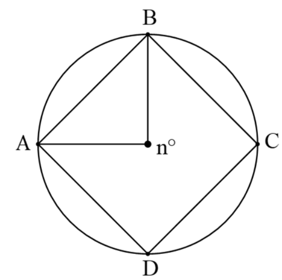
a) Diện tích hình tròn có bán kính 4cm là:

$S = \pi R^2 = 15\pi (cm^2)$

b) Diện tích hình quạt tròn có bán kính 4cm, số đo cung 72^0 là:

$S_q = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi R^2}{5} (cm^2)$

Bài 2:

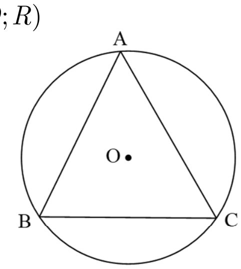


a) AB là cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O;R)$

Ta có: $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

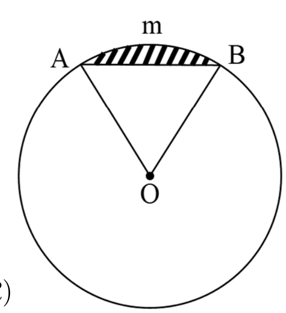
$S_{hinhtron} = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{2}$ (đvdt)

b) AB là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$



Ta có: $AB = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$S_{hinhtron} = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{3}$ (đvdt)



Bài 3:

$AB = R, AB$ là dây cung của đường tròn $(O;R)$

$\Rightarrow AB$ là cạnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$

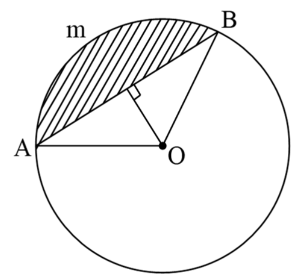
$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^0$ nên là tam giác đều.

$$S_{OAB} = \frac{OA^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{quatOAB} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R^2}{6} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{vienphan\,\overset{\frown}{AmB}} = S_{quatOAB} - S_{OAB} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2 \text{ (đvdt)}$$

Bài 4:



$\overset{\frown}{AOB} = 120^0$

$\Rightarrow AB$ là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$

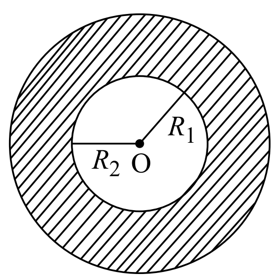
$$\Rightarrow OH = \frac{R}{2}; AB = R\sqrt{3}, \text{sđ}AB = 120^0$$

$$S_{OAB} = \frac{OH.AB}{2} = R^2\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{(quatOAB)} = \pi R^2\frac{n}{360} = \pi R^2\frac{120}{360} = \pi\frac{R^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{(vienphanAmB)} = S_{(quatOAB)} - S_{AOB} = \pi\frac{R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ (đvdt)}$$

Bài 5:



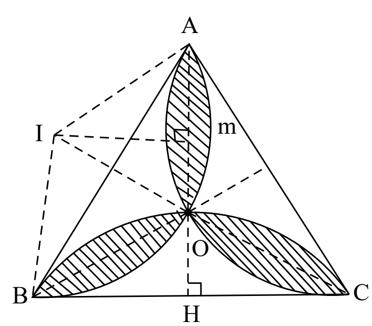
$S_1 = \pi.R_1^2$

$S_2 = \pi.R_2^2$

$S_{vanhkhan} = S_1 - S_2$

$= \pi(R_1^2 - R_2^2)$ (đvdt)

Bài 6:



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

Ta có: $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

O nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AB

nên có số đo $\overset{\frown}{OA} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta IAO$ đều có $IO = AI = AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

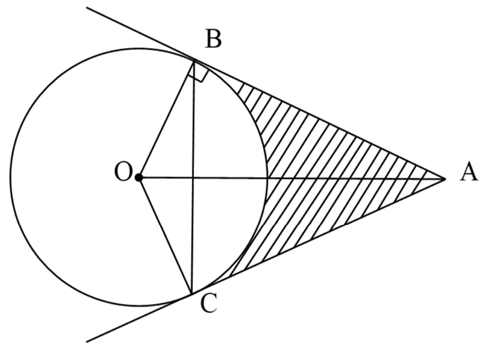
$S_{hoathi} = 6S_{(vienphanAmO)}$

$S_{(vienphanAmO)} = S_{quatAIO} - S_{AIO}$

$$= \frac{\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{6} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\frac{a^2}{3}}{6} - \frac{a^2\frac{\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{a^2}{36}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

Suy ra: $S_{hoathi} = \dfrac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (đvdt)

Bài 7:



ΔOAB có $\widehat{B} = 90^0$;

$OB = \dfrac{1}{2}OA(= R)$

Nên ΔOBA là nửa tam giác đều

Suy ra: $\widehat{BOA} = 60^0; AB = R\sqrt{30}$

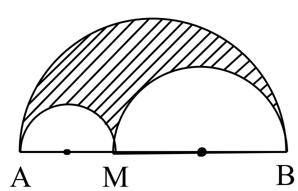
Mà $\Delta OBA = \Delta OCA$ nên $\widehat{BOC} = 120^0$

Và $S_{BOAC} = 2S_{\Delta OBA} = 2\dfrac{OB.AB}{2} = R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$ (đvdt)

Mặt khác: $S_{quatOBC} = \pi R\dfrac{120}{360} = \pi\dfrac{R^2}{3}$ (đvdt)

Do đó: $S_{cantim} = S_{OBAC} - S_{(quatOBC)} = R^2\sqrt{3} - \pi\dfrac{R^2}{3} = \dfrac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$ (đvdt)

Bài 8:



Đặt $AB = 2a, AM = 2x$

Suy ra: $MB = 2(a - x)$

Gọi S là diện tích hình giới hạn bởi ba nửa đường tròn trên; S_1, S_2, S_3 là diện tích các nửa đường tròn

có đường kính lần lượt là $AM; MB; AB$.

Ta có: $S = S_3 - (S_1 + S_2) = \pi \frac{a^2}{2} - \left[\pi \frac{x^2}{2} + \pi \frac{(a-x)^2}{2}\right]$

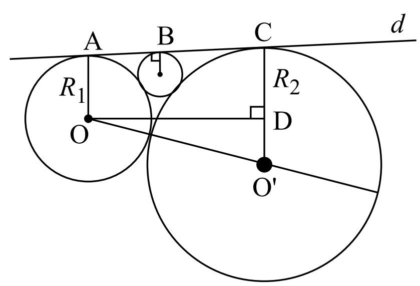
$= \frac{a^2 - x^2 - a^2 + 2ax - x^2}{2} = -\pi(x^2 - ax)$

$= -\pi\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \pi \frac{a^2}{4} \le \pi \frac{a^2}{4}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AB.

Diện tích giới hạn bởi ba nửa đường tròn lớn nhất là $\pi \frac{a^2}{4}$ khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 9:



Dễ thấy $OACD$ là hình chữ nhật do đó $AC = OD$

$OD^2 = OO'^2 - O'D^2$

$= (R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2 = 4R_1R_2$

Suy ra: $AC = 2\sqrt{R_1R_2}$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$AB = 2\sqrt{R_1R_3}; BC = 2\sqrt{R_2R_3}; AC = AB + BC$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{R_1R_3} + 2\sqrt{R_2R_3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}}$

$\sqrt{S_1S_2}$ min $\Leftrightarrow R_1R_2$ min $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}} max$

Mà tổng $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} =$ không đổi

Do đó tích $\frac{1}{\sqrt{R_1}}.\frac{1}{\sqrt{R_2}} max \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{2\sqrt{R_3}}$

$\Leftrightarrow R_1 = R_2 = 4R_3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{S_1S_2}$ là $16\pi R_3^2$ (đvdt).

Bài 10:

Ta cần chứng minh được hình tròn $(O;1cm)$ không có lỗ kim châm nào.

(1) Tâm (O) của hình tròn $(O;1cm)$ có mép giấy 1cm.

(2) Tâm (O) của hình tròn $(O;1cm)$ cách mọi lỗ kim châm không nhỏ hơn 1cm.

Từ (1) $\Rightarrow$ tâm (O) thuộc hình tròn $(O';99cm)$ có diện tích là:

$99^2\pi = 9801\pi(cm^2)$

Từ (2) $\Rightarrow$ tâm (O) phải ở ngoài 9800 hình tròn có tâm là 9800 lỗ kim chân và có bán kính là 1cm, diện tích là: $9800.1^2.\pi = 9800\pi(cm^2)$

$9801 > 9800$

Suy ra trong tờ giấy vẫn còn chỗ trống để chọn được tâm (O).

Ta có đpcm.

---------------------Toán Học Sơ Đồ--------------------