

DIỆN TÍCH HÌNH THANG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

* Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h$$

* Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:

$$S = a.h.$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Tính diện tích hình thang

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích hình thang:

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h,$$

trong đó a và b là độ dài các cạnh đáy, h là chiều cao.

1. Tính diện tích hình thang $ABCD$, biết $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 1\text{ cm}$, $CD = 3\text{ cm}$.

2. Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $CD = 6\text{ cm}$. Tính diện tích hình thang.

3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ đường cao AH .

Biết $AH = 8\text{ cm}$, $HC = 12\text{ cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Biết $AB = 10\text{ cm}$, $CD = 20\text{ cm}$, $AD = 13\text{ cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 2\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$ và $\hat{C} = 30^\circ$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

6. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 5\text{ cm}$, $CD = 15\text{ cm}$ và hai đường chéo là $AC = 16\text{ cm}$, $BD = 12\text{ cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Dạng 2. Tính diện tích hình bình hành

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích hình bình hành.

7. Cho hình bình hành $ABCD$ có cạnh $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$, $AD = 8\text{ cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính diện tích của hình bình hành.

8. Tính các góc của hình bình hành $ABCD$ có diện tích 30 cm^2 , $AB = 10\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$, $\hat{A} > \hat{D}$

9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, DA, AB, BC . Đoạn DR cắt CQ, CA, SA theo thứ tự tại H, I, G . Đoạn BP cắt SA, AC, CQ theo thứ tự tại F, J, E . Chứng minh:

a) Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành;

$$b) AI = IJ = JC; \quad c) S_{EFGH} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$$

10. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích là S . Gọi M là trung điểm của BC . Gọi N là giao điểm của AM và BD . Tính diện tích tứ giác $MNDC$ theo S .

Dạng 3. Tìm vị trí của một điểm để thỏa mãn một đẳng thức về diện tích

Phương pháp giải: Dùng công thức tính diện tích dẫn đến điều kiện về vị trí điểm, thường liên quan đến khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

11. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) và $AB < CD$. Gọi E là điểm bất kỳ trên cạnh AB . Xác định vị trí điểm F trên cạnh CD để $S_{AEFD} = S_{BCFE}$.

12. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) và $AB < CD$. Xác định R, S lần lượt trên các cạnh AB, CD sao cho $S_{ARSD} = 3S_{BCSR}$.

Dạng 4. Tìm diện tích lớn nhất (nhỏ nhất) của một hình

Phương pháp giải:

- Kí hiệu $\max S$ là giá trị lớn nhất của biểu thức S , $\min S$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức S .
- Sử dụng tính chất đường vuông góc ngắn hcm đường xiên.
- Nếu diện tích của một hình luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số M và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng M thì M là diện tích lớn nhất của hình.

Tương tự với trường hợp diện tích nhỏ nhất.

13. Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AD = 4 \text{ cm}$, đường trung bình bằng 5 cm . Tính diện tích lớn nhất của hình thang.

14. Trên đường chéo AC của hình vuông ta lấy một điểm E ($E \neq A, C$). Đường thẳng qua E và song song với AB cắt AD và BC theo thứ tự tại các điểm Q, N . Đường thẳng qua E và song song với BC cắt AB và CD theo thứ tự tại P, M .

- a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.
- b) So sánh S_{MNPQ} và S_{ABCD} .
- c) Xác định vị trí của E để hình thang $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN

1.

Kẻ $BH \perp DC$ tại H.

$\Rightarrow \Delta BHC$ vuông cân tại H

$\Rightarrow BH = 2\text{cm}$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot BH}{2} = \frac{(1 + 3) \cdot 2}{2} = 4\text{cm}^2$$

2.

Kẻ $BH \perp DC$ tại H $\Rightarrow CH = 3\text{cm}$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông BHC, suy ra $BH = 4\text{cm}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 18\text{cm}^2$$

3.

Kẻ $BK \perp CD$ tại K $\Rightarrow AB = HK$

$$S_{ABCD} = \frac{(2HK) + 2KC \cdot AH}{2} = HC \cdot AH = 96\text{cm}^2$$

4.

Gợi ý: Kẻ $AH \perp CD$ tại H, kẻ $BK \perp CD$ tại K

$$\text{Tính được } S_{ABCD} = 180\text{cm}^2$$

5.

$$\text{Kẻ } BH \perp CD \text{ tại H} \Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = 4\text{cm}.$$

$$\text{Tính được } S_{ABCD} = 22\text{cm}^2$$

6.

Qua A kẻ $AE \parallel BD$ ($E \in DC$)

$$\Rightarrow AE = BD = 12\text{cm}, DE = AB = 5\text{cm}$$

$\Rightarrow \Delta AEC$ vuông tại A (định lý Pytago đảo)

$$\Rightarrow AH = \frac{AE \cdot AC}{EC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6\text{cm}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 96\text{cm}^2$$

7.

Kẻ $DH \perp AB$ tại H

$$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = 4\text{cm}$$

Áp dụng định lý Pytago trong Δ vuông ADH $\Rightarrow DH = 4\sqrt{3}\text{cm}$.

$$\Rightarrow S_{ABCD} = DH \cdot AB = 120\text{cm}^2$$

8.

Gợi ý: Kẻ $AH \perp CD \Rightarrow AH = 3\text{cm}$. Xét ΔADH vuông

$$\Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 30^\circ, \hat{A} = \hat{C} = 150^\circ$$

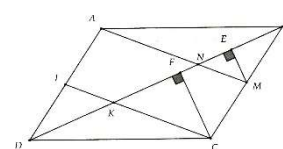
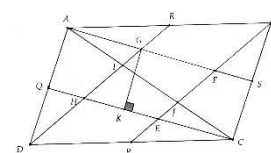
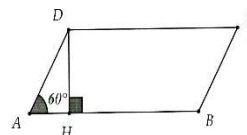
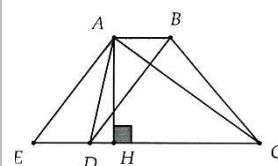
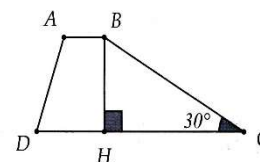
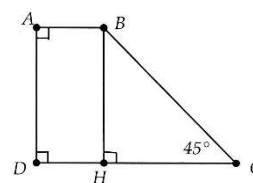
9.

a) EFGH là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song)

b) Tam giác CID có $PJ \parallel ID$ và P là trung điểm của CD.

$$\Rightarrow J \text{ là trung điểm của CI} \Rightarrow JC = IJ$$

$$\Rightarrow AI = IJ = JC;$$



c) Ta có: $S_{ASCQ} = \frac{1}{2} S_{EFGH}$, $HE = \frac{2}{5} S_{ASCQ}$.

$\Rightarrow$ Kẻ $GK \perp CQ$ tại $K \Rightarrow S_{EFGH} = GK \cdot HE = GK \cdot \frac{2}{5} S_{ASCQ}$.

$\Rightarrow S_{EFGH} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow S_{EFGH} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$

10.

Gọi I là trung điểm của AD , K là giao điểm của CI và BD . Kẻ $ME \perp BD$ tại E , $CF \perp BD$ tại F .

Có $BN = \frac{1}{3} BD$, $EM = \frac{1}{2} CF$

$S_{BMN} = \frac{1}{2} EM \cdot BN$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} CF \cdot \frac{1}{3} BD = \frac{1}{6} S_{BCD} = \frac{1}{12} S$

$\Rightarrow S_{MNDC} = \frac{1}{2} S - \frac{1}{12} S = \frac{5}{12} S$.

11.

Do hình thang $AEFD$ và hình thang $BCFE$ có cùng đường cao, suy ra

$S_{AEFD} = S_{BCFE} \Leftrightarrow DF = \frac{AB + DC}{2} - AE$

Cách dựng: Vẽ đường trung bình MN , trên đó lấy $MK = AE$. Từ K vẽ đường song song với BC cắt CD tại F cần tìm.

12.

$S_{ARSD} = 3S_{BCSR} \Leftrightarrow RB + CS = \frac{AB + DC}{4}$

13.

Ta có: $h \leq AD = 4\text{cm}$

$\Rightarrow \max S = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20\text{cm}^2$

14.

a) Chứng minh được $MN \parallel PQ$ (cùng vuông góc với AC). Chứng minh được $MP = QN$. $\Rightarrow$ $\square$ $MPNQ$.

b) Ta có:

$S_{MNE} = \frac{1}{2} S_{MENC}$, $S_{NPE} = \frac{1}{2} S_{PBNE}$, $S_{PQE} = \frac{1}{2} S_{APEQ}$, $S_{MQE} = \frac{1}{2} S_{QEMD}$

$\Rightarrow S_{MPNQ} = \frac{1}{2} S_{ABCS}$.

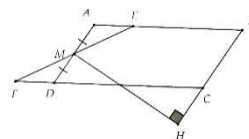
c) Chu vi $MNPQ = MN + PQ + NP + QM$

$= EC + AE + BE + ED = AC + BE + ED$.

Trong tam giác BED , $BE + ED \geq BD$

$\Rightarrow$ Chu vi $MNPQ \geq AC + BD$

$\Rightarrow E$ là tâm của hình vuông $ABCD$



B. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1:

Hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$) có $AB = 12cm$, $CD = 28cm$, $AD = BC = 17cm$. Tính diện tích hình thang.

Bài 2: Tính diện tích hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$), biết $AB = 5cm$, $CD = 12cm$, $BC = 25cm$.

Bài 3: Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), biết $AB = 5cm$, $CD = 13cm$, $BC = 8cm$, $\hat{C} = 30^\circ$.

Bài 4: Tính diện tích hình bình hành $ABCD$, biết $\hat{A} = 135^\circ$, $AD = \sqrt{2}dm$, $CD = 3dm$.

Bài 5: Tính diện tích hình bình hành $ABCD$, biết $AD = 6cm$, $AC = 8cm$, $CD = 10cm$.

Bài 6: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = 54cm$, $AD = 36cm$, một chiều cao bằng $30cm$. Tính chiều cao còn lại.

Bài 7: Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), biết $AB = 4cm$, $CD = 14cm$, $AD = 6cm$, $BC = 8cm$

Bài 8: Tính các góc của một hình bình hành có diện tích bằng $27cm^2$. Hai cạnh kề bằng $6cm$ và $9cm$.

Bài 9: Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), E là trung điểm của AD . Gọi H là hình chiếu của E trên đường thẳng BC . Qua E vẽ đường thẳng song song với BC , cắt các đường thẳng AB và CD theo thứ tự ở I và K .

a) Chứng minh rằng $\triangle AEI = \triangle DEK$

b) Cho biết $BC = 8cm$, $EH = 5cm$. Tính diện tích tứ giác $IBCK$; $ABCD$

Bài 10: Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 5cm$, $CD = 15cm$ và hai đường chéo là $AC = 16cm$, $BD = 12cm$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 11: Hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$) có hai đường chéo vuông góc, $AB = 40cm$, $CD = 60cm$. Tính diện tích hình thang.

Bài 12: Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích $40cm^2$. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

b) Tính diện tích tứ giác $EFGH$.

Bài 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Các đoạn thẳng AG, CE, BH, DF cắt nhau tạo thành một tứ giác.

a) Tứ giác đó là hình gì?

b) Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó bằng $\frac{1}{5}$ diện tích hình bình hành $ABCD$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Kẻ AH, BK vuông góc với CD .

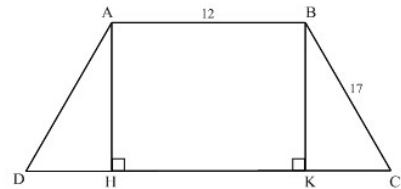
Ta có: $DH = CK = \frac{CD - AB}{2} = \frac{28 - 12}{2} = 8(cm)$

Áp dụng định lý Py – ta – go vào tam giác vuông BKC có:

$$BK^2 = BC^2 - CK^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2 \text{ nên } BK = 15cm$$

Diện tích hình thang $ABCD$ bằng:

$$\frac{1}{2}(AB + CD).BK = \frac{1}{2}(12 + 28).15 = 300(cm^2)$$



Bài 2: Chiều cao hình thang bằng 24cm.

Đáp số: $204cm^2$.

Bài 3: Chiều cao hình thang bằng 4cm.

Đáp số: $36cm^2$.

Bài 4: Chiều cao $AH = 1dm$.

Đáp số: $3dm^2$.

Bài 5: Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = 90^\circ$.

Đáp số: $48cm^2$.

Bài 6: Nếu chiều cao 30cm ứng với cạnh 54cm thì diện tích hình bình hành bằng

$$30.54 = 1620(cm^2), \text{ chiều cao còn lại bằng } 1620 : 36 = 45(cm).$$

Nếu chiều cao 30cm ứng với cạnh 36cm thì chiều cao còn lại bằng $30.36 : 54 = 20(cm)$

Bài 7: Kẻ $AE \parallel BC$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành nên $AE = BC = 8cm, EC = AB = 4cm,$

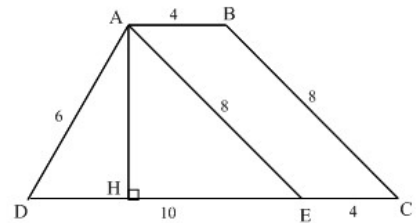
$$DE = DC - EC = 14 - 4 = 10(cm)$$

Tam giác ADE có $AD^2 + AE^2 = DE^2$ (vì $6^2 + 8^2 = 10^2$) nên $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

Kẻ $AH \perp CD$, ta có $AH.DE = AD.AE$ (bằng $2.S_{ADE}$) nên

$$AH = \frac{6.8}{10} = 4,8(cm).$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AH = \frac{1}{2}(4 + 14).4,8 = 43,2(cm^2)$$

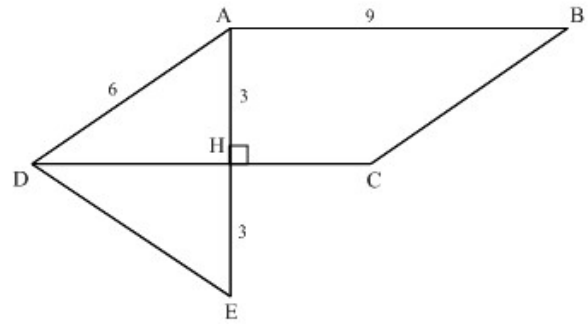


Bài 8: Giả sử hình bình hành $ABCD$ có $AD = 6cm, AB = 9cm$ diện tích $27cm^2$ ($\widehat{A}$ là góc tù). Kẻ $AH \perp CD$.

$$AH = \frac{S}{AB} = \frac{27}{9} = 3(cm).$$

Tam giác vuông AHD có $AD = 2AH$ nên $\widehat{ADH} = 30^\circ$ (Chứng minh: Lấy E đối xứng với A qua H, để chứng minh $\triangle ADE$ đều).

Do đó $\widehat{ADH} = \widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{DAB} = \widehat{C} = 150^\circ$.

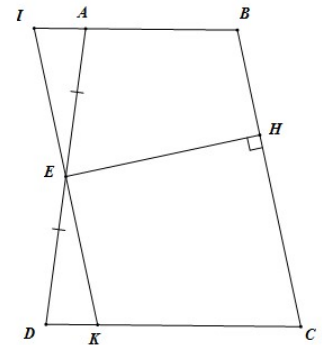


Bài 9: a) $\triangle AEI = \triangle DEK$ (c.g.c)

b) IBCK là hình bình hành, $S_{IBCK} = BC.EH = 8.5 = 40(cm^2)$

Ta có $\triangle AEI = \triangle DEK \Rightarrow S_{AEI} = S_{DEK} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{IBCK}$.

Vậy $S_{ABCD} = 40cm^2$



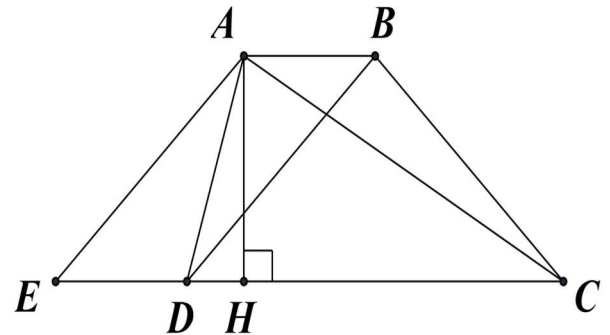
Bài 10: Qua A kẻ $AE \parallel BD$ ($E \in CD$).

$\Rightarrow AE = BD = 12cm, DE = AB = 5cm$.

$\Rightarrow \triangle AEC$ vuông tại A (Định lý Pytago đảo).

$$\Rightarrow AH = \frac{AE.AC}{EC} = \frac{12.16}{20} = 9,6cm.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 96cm^2.$$



Bài 11: Kẻ $BE \parallel AC$ ($E \in DC$)

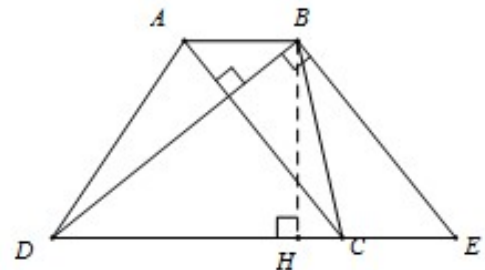
Ta có: $CE = AB = 40cm \Rightarrow DE = 100cm$

Ta lại có: $BE = AC = BD \Rightarrow \triangle BDE$ cân ở B.

Kẻ $BH \perp DE$ thì BH cũng là trung tuyến.

Do $AC \perp BD$, $AC \parallel BE$ nên $BD \perp BE \Rightarrow \triangle BDE$ vuông ở E

$$E \Rightarrow BH = \frac{1}{2}DE = 50cm$$



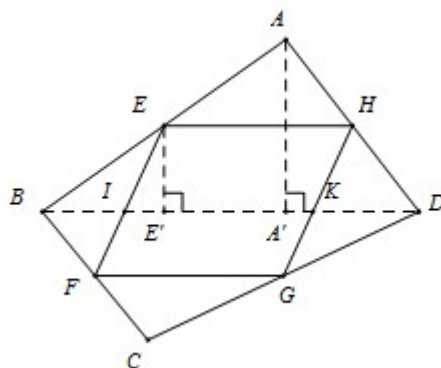
$$S_{ABCD} = (40 + 60).50 : 2 = 2500 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 12:

a) $EFGH$ là hình bình hành.

b) Gọi I, K là các giao điểm của EF, GH và BD .

Kẻ EE', AA' vuông góc với BD



Xét hình bình hành $EHKI$, ta có $EH = \frac{1}{2}BD, EE' = \frac{1}{2}AA'$

$$\Rightarrow S_{EHKI} = EH.EE' = \frac{1}{4}BD.AA' = \frac{1}{2}S_{ABD}$$

Xét hình bình hành $FGKI$ và chứng minh tương tự: $S_{FGKI} = \frac{1}{2}S_{BCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 20 \text{ cm}^2$.

Bài 13: a) Gọi tứ giác tạo thành là $MNPQ$ như trên hình 207.

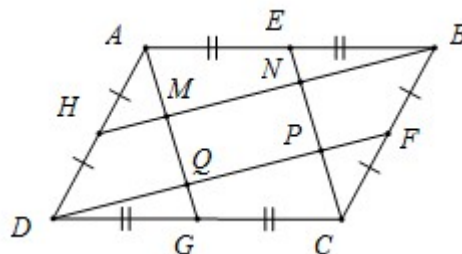
Dễ dàng chứng minh $AG \parallel CE$,

$BH \parallel DF$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

b) $\triangle ADQ$ có $AH = HD$,

$HM \parallel DQ \Rightarrow AM = MQ$. Tương tự: $NP = PC$, mà

$MQ = NP$ nên $AM = MQ = PC$.



Ta lại có $QG = \frac{1}{2}PC$ nên $QG = \frac{1}{2}MQ$. Vậy $MQ = \frac{2}{5}AG$.

Suy ra $S_{MNPQ} = \frac{2}{5}S_{AECG}$, mà $S_{AECG} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====