

DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm diện tích đa giác

- * Số đo phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích đa giác đó.
- * Mỗi đa giác có một diện tích là một số dương xác định.
- * Diện tích đa giác có các tính chất sau:
 - Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
 - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
 - Nếu chọn hình vuông có cạnh 1 cm, 1 dm, 1 m,... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích của hình vuông đó tương ứng là $1 \text{ cm}^2, 1 \text{ dm}^2, 1 \text{ m}^2, \dots$

2. Công thức tính diện tích một số hình cơ bản

- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.

Ta có:

$$S = a.b,$$

với a, b là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật.

- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.

Ta có:

$$S = a^2,$$

với a là độ dài cạnh của hình vuông.

- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông.

Ta có:

$$S = \frac{1}{2} a.b,$$

với a, b là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông.

Diện tích tam giác thường bằng nửa tích một cạnh và chiều cao hạ xuống cạnh đó:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c$$

Với a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác và h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng hạ xuống cạnh đó.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ - THCS.TOANMATH.com

A.CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1. Tính diện tích đa giác

Phương pháp giải: Sử dụng ba khái niệm diện tích của đa giác.

1. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tia AM cắt tia DC tại điểm E . Chứng minh $S_{ABCD} = S_{AED}$.

2. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ A và C kẻ AH và CK vuông góc với đường chéo BD . Chứng minh:

a) $S_{ABCH} = S_{ADCK}$; b) $S_{ABCK} = S_{ADCH}$.

Dạng 2. Diện tích hình chữ nhật

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật.

3. Cho hình chữ nhật có chu vi 320 cm , diện tích 6000 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

4. Tính diện tích hình chữ nhật có đường chéo $d = 40\text{ cm}$ và các cạnh của nó tỉ lệ với hai số 3 và 4.

5. Hình chữ nhật có diện tích 6000 cm^2 . Nếu chiều dài tăng thêm 20 cm còn chiều rộng giảm 5 cm thì diện tích tăng 600 cm^2 . Tính chu vi hình chữ nhật ban đầu.

6. Một thửa đất hình chữ nhật. Nếu chiều dài tăng 20 m còn chiều rộng giảm 5 cm thì diện tích tăng 600 cm^2 . Nếu chiều dài giảm 10 cm còn chiều rộng tăng 10 cm thì diện tích tăng 300 cm^2 . Tính chu vi hình chữ nhật ban đầu.

Dạng 3. Diện tích hình vuông

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích hình vuông.

7. Một hình chữ nhật có diện tích 350 cm^2 và hai cạnh tỉ lệ với các số 2 và 7. Tính diện tích hình vuông có cùng chu vi với hình chữ nhật.

8. Diện tích một hình vuông tăng thêm bao nhiêu % nếu mỗi cạnh của nó tăng thêm 20%?

Dạng 4. Diện tích tam giác vuông

Phương pháp giải: Sử dụng công thức tính diện tích tam giác vuông và định lý Pytago.

9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 10\text{ cm}$ và $AC = 6\text{ cm}$. Tính diện tích tam giác ABC .

10. Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13 cm và tổng hai cạnh góc vuông bằng 17 cm .

Dạng 4. Tổng hợp các dạng trên

11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 7\text{ cm}$, $BD = 25\text{ cm}$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC, OD . Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

12. Một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, độ dài đường chéo bằng 6 cm . Tính diện tích tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thang cân đó.

13. Cho hình bình hành $ABCD$. Các tia phân giác của các góc A và cắt đường chéo BD theo thứ tự tại các điểm E và F . Chứng minh:

a) $S_{ABCFE} = S_{ADCFE}$; b) $S_{ABCE} = S_{ADCF}$.

14. Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích bằng 100 m^2 , hình nào có chu vi nhỏ nhất?

15. Cho tam giác ABC vuông tại A . Dựng phía ngoài tam giác các hình vuông $ABFG$, $ACKL$, $BCDE$. Chứng minh:

a) $S_{FBC} = S_{ABE}$; b) $S_{BCDE} = S_{ABFG} + S_{ACKL}$.

HƯỚNG DẪN

1. Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ECM$

Chứng minh $S_{ABM} = S_{ECM}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{AED}$

2.

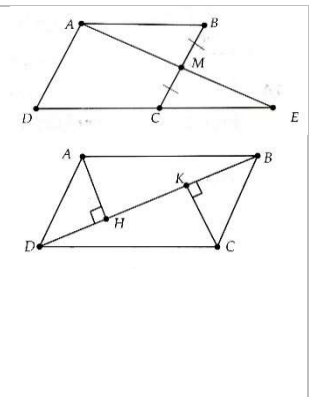
a) Chứng minh các cặp tam giác bằng nhau:

$\triangle ABH = \triangle CDK$ và $\triangle BCH = \triangle DAK$

Từ đó, suy ra $S_{ABH} + S_{BCH} = S_{CDH} + S_{DAK}$

$\Rightarrow S_{DPCM}$.

b) Trừ cả 2 vế của ý a) cho S_{AKCH} , ta thu được $S_{ABCK} = S_{ADCH}$



3. Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho lần lượt là a và b . (Điều kiện: $a, b > 0$)

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} 2(a+b) = 320 \\ a \cdot b = 6000 \end{cases}$$

Giải ra, ta được $a = 100$ và $b = 60$

4. Tương tự **3.** Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 = 40^2 = 1600 \\ \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \end{cases}$$

Giải ra, ta được $a = 32$ và $b = 24$.

Từ đó tính được diện tích hình chữ nhật.

5.

Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b . (Điều kiện: $a, b > 0$)

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} ab = 6000 \\ (a+20) \cdot (b-5) - ab = 600 \end{cases}$$

Giải ra, ta được $a = 100$ và $b = 60$. Từ đó chu vi = 320 cm .

6.

Tương tự 5. Ta có:
$$\begin{cases} (a+20).(b-5)-ab=600 \\ (a-10).(b+10)-ab=300 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = 100$ và $b = 60$. Từ đó chu vi $= 320\text{cm}$.

7.

Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b . (Điều kiện: $a, b > 0$)

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} ab = 350 \\ \frac{a}{7} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

Giải ra, ta được $a = 35$ và $b = 10$

Từ đó cạnh hình vuông là $22,5\text{cm}$ và diện tích là $506,25\text{cm}^2$.

8.

Gọi độ dài một cạnh của hình vuông là a . (Điều kiện: $a > 0$). Độ dài cạnh hình vuông lúc sau là: $120\%.a = 1,2a$.

Từ đó, ta có: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{(1,2a)^2}{a^2} = 1,44$.

Vậy diện tích hình vuông đã tăng thêm 44% .

9.

Theo định lý Pytago, ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Từ đó, tính được $AB = 8\text{cm}$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = 24\text{cm}^2$

10.

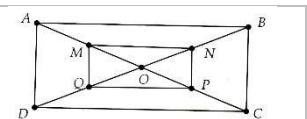
Gọi độ dài của hai cạnh góc vuông lần lượt là x và y . (Điều kiện: $x, y > 0$)

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Từ đó tính được $(x, y) = (5, 12)$ hoặc $(12, 5)$

$\Rightarrow$ Diện tích tamgiacs đó là: $S = 30\text{cm}^2$

11. Áp dụng định lý Pytago, ta tính được $AB = 24\text{cm}$. Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC, OD nên sử dụng tính chất của các đường trung bình, ta chứng minh được $MNNPQ$ là hình chữ nhật.



Đồng thời, ta có: $MN = \frac{1}{2} AB = 12cm, MQ = \frac{1}{2} AD = 3,5cm$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = MN.MQ = 42cm^2$$

12. Theo tính chất chất đường trung bình, ta chứng minh được tứ giác EFGH có 4 góc vuông và có 4 cạnh bằng nhau.

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông.

Đồng thời, $GH = \frac{1}{2} AC = 3cm$. Suy ra $S_{EFGH} = GH^2 = 9cm^2$

13.

a) Chứng minh tương tự 1.

Ta có:

$$A_{ABE} = S_{CDF} \text{ và } S_{BCF} = S_{DAE}$$

b) Sử dụng kết quả ký a và $S_{AEF} = S_{CFE}$

14.

Gọi độ dài của chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b. (Điều kiện: a, b > 0)

Bài toán được diễn đạt lại là: "Cho a, b, > 0 và a.b = 100. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức a(a + b)"

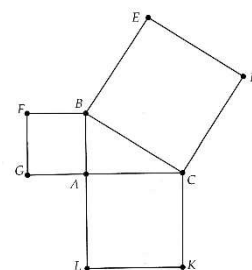
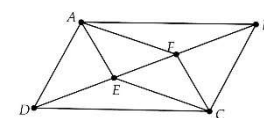
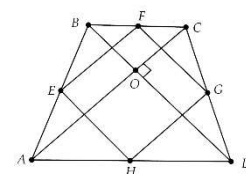
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương a và b, ta thu được chu vi nhỏ nhất bằng 40cm khi a = b = 10cm hay hình chữ nhật trở thành hình vuông.

15.

a) Ta chứng minh được $\Delta FBC = \Delta ABE$ (c.g.c) suy ra $S_{FBC} = S_{ABE}$.

b) Đặt độ dài các cạnh BC, AC, AB lần lượt là a, b, c. Ta có $S_{ABFG} = c^2, S_{ACKL} = b^2, S_{BCDE} = c^2$.

Áp dụng định lý Pytago, ta thu được ĐPCM.



B. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Dạng 1: Diện tích hình chữ nhật.

Bài 1: Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

a) Chiều dài tăng 3 lần, chiều rộng không đổi.

b) Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần.

c) Chiều dài và chiều rộng cùng tăng 20%.

Bài 2: Một căn phòng có nền hình chữ nhật kích thước dài 6m, rộng 4m.

a) Tính chu vi và diện tích nền căn phòng đó.

b) Nếu mỗi cạnh nền căn phòng hình chữ nhật tăng 10% thì diện tích nền nhà tăng bao nhiêu phần trăm? Diện tích căn phòng hình chữ nhật là bao nhiêu (m^2).

Dạng 2: Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật.

Bài 3: Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật biết bình phương độ dài một cạnh là 16cm và diện tích của hình chữ nhật là $28 cm^2$.

Bài 4: Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật biết rằng tỉ số các cạnh là $4:9$ và diện tích của nó là 144cm^2 .

Bài 5: Cho hình chữ nhật có chu vi 320cm và diện tích 6000cm^2 . Tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Dạng 3: Diện tích hình vuông. Diện tích tam giác vuông.

Bài 6: Tính diện tích tam giác ABC vuông tại A . Biết rằng $AB = 5\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$.

Bài 7: Một hình chữ nhật có diện tích 350cm^2 và hai cạnh tỉ lệ với các số 2 và 7 . Tính diện tích hình vuông có cùng chu vi với hình chữ nhật đó.

Dạng 4: Bài tập tổng hợp.

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 7\text{cm}$, $BD = 25\text{cm}$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC, OD . Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Bài 9: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 40cm , hình nào có diện tích lớn nhất?

Bài 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Kẻ các tia phân giác của các góc trong, chúng cắt nhau tại M, N, P, Q .

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

b) Tính diện tích hình vuông $MNPQ$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

- a) Chiều dài tăng 3 lần, chiều rộng không đổi.
- b) Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần.
- c) Chiều dài và chiều rộng cùng tăng 20%.

Giải: Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là $S=a.b$

a) Nếu chiều dài tăng 3 lần, chiều rộng không đổi thì chiều dài, chiều rộng mới là $3a$ và b nên diện tích mới là $S_m=3a.b=3S$. Vậy diện tích hình chữ nhật tăng 3 lần.

b) Nếu chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng giảm 4 lần thì chiều dài, chiều rộng mới là $2a$ và $\frac{b}{4}$ nên diện tích mới là $S_m=2a.\frac{b}{4}=\frac{1}{2}S$. Vậy diện tích hình chữ nhật giảm đi một nửa.

c) Nếu chiều dài và chiều rộng cùng tăng 20% thì chiều dài, chiều rộng mới là $\frac{120a}{100}$ và $\frac{120b}{100}$ nên diện tích mới là $S_m=\frac{120a}{100}.\frac{120b}{100}=\frac{144}{100}S$. Vậy diện tích hình chữ nhật tăng 44%.

Bài 2: Một căn phòng có nền hình chữ nhật kích thước dài 6m, rộng 4m.

- a) Tính chu vi và diện tích nền căn phòng đó.
- b) Nếu mỗi cạnh nền căn phòng hình chữ nhật tăng 10% thì diện tích nền nhà tăng bao nhiêu phần trăm? Diện tích căn phòng hình chữ nhật là bao nhiêu (m^2).

Giải:

a) Chu vi căn phòng đó là: $(6+4).2=20(m)$

Diện tích căn phòng đó là: $6.4=24(m^2)$

b) Chiều dài: $6+6 \cdot \frac{10}{100}=6 \cdot \frac{110}{100}(\text{m})$, Chiều rộng: $4+4 \cdot \frac{10}{100}=4 \cdot \frac{110}{100}(\text{m})$

Diện tích hình chữ nhật mới tăng thêm:

$$\left(6 \cdot \frac{110}{100}\right) \cdot \left(4 \cdot \frac{110}{100}\right) - 6 \cdot 4 = \frac{121}{100}(6 \cdot 4) - 6 \cdot 4 = \frac{21}{100} \cdot (6 \cdot 4)$$

Vậy diện tích hình chữ nhật tăng thêm 21%.

Diện tích căn phòng mới là: $\left(6 \cdot \frac{110}{100}\right) \cdot \left(4 \cdot \frac{110}{100}\right) = 29,04(\text{m}^2)$

Bài 3: Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật biết bình phương độ dài một cạnh là 16cm và diện tích của hình chữ nhật là 28 cm^2 .

Giải: Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là $x, y (x > 0, y > 0)$ thì diện tích của hình chữ nhật là $S = x \cdot y$.

Theo bài ra ta có: $x \cdot y = 28$ (1) và $x^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4$ (vì $x > 0$).

Thay $x = 4$ vào (1) ta được $4 \cdot y = 28 \Leftrightarrow y = 7$.

Vậy hai kích thước của hình chữ nhật là 4cm và 7cm.

Bài 4: Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật biết rằng tỉ số các cạnh là $4 : 9$ và diện tích của nó là 144 cm^2 .

Giải: Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là $x, y (x > 0, y > 0)$ thì diện tích của hình chữ nhật là $S = x \cdot y$.

Theo bài ra ta có: $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$ (1) và $x \cdot y = 144$ (2).

Nhân theo vế của (1) và (2) ta được: $x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = 8$ (vì $x > 0$).

Thay $x = 8$ vào (2) ta được: $8 \cdot y = 144 \Leftrightarrow y = 18$.

Vậy hai kích thước của hình chữ nhật là 8cm và 18cm.

Bài 5: Cho hình chữ nhật có chu vi 320cm và diện tích 6000 cm^2 . Tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Giải: Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật là $x, y (x > 0, y > 0)$ thì diện tích của hình chữ nhật là $S = x \cdot y$.

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} 2(x+y)=320 \\ x \cdot y=6000 \end{cases}$$

Giải ra ta được $x=100, y=60$.

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật là 100cm và 60cm.

Bài 6: Tính diện tích tam giác ABC vuông tại A . Biết rằng $AB = 5\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$.

Giải: Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC vuông tại A ta được:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 13^2 = 5^2 + CA^2 \Leftrightarrow CA^2 = 12^2 \Leftrightarrow CA = 12 \text{ (Vì } CA > 0 \text{)}$$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác vuông ta được:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 7: Một hình chữ nhật có diện tích 350 cm^2 và hai cạnh tỉ lệ với các số 2 và 7. Tính diện tích hình vuông có cùng chu vi với hình chữ nhật đó.

Giải: Gọi chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật là x, y ($x > 0, y > 0$) thì diện tích của hình chữ nhật là $S = x \cdot y$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} x \cdot y = 350 \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

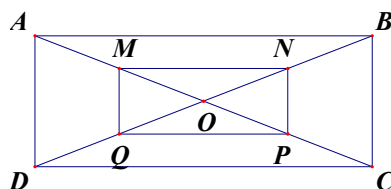
Giải ra ta được $x=35, y=10$.

Chu vi hình chữ nhật là: $2 \cdot (35 + 10) = 90 \text{ (cm)}$.

Cạnh hình vuông là 22,5 cm. Vậy diện tích hình vuông là $506,25 \text{ cm}^2$.

Bài 8: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 7\text{cm}$, $BD = 25\text{cm}$ và O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC, OD . Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.

Giải:



Áp dụng định lý Pytago ta tính được OA, OB, OC, OD nên sử dụng tính chất đường trung bình ta chứng minh được $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Đồng thời ta có: $MN = \frac{1}{2}AB = 12\text{cm}$, $MQ = \frac{1}{2}AD = 3,5\text{cm}$

Vậy $S_{MNPQ} = MN.MQ = 42(\text{cm}^2)$.

Bài 9: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 40 cm, hình nào có diện tích lớn nhất?

Giải: Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y thì diện tích của nó là $S = x.y$.

Ta có: $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \leq (x+y)^2$ (1). Dấu “=” xảy ra khi $x=y$.

Khi chu vi của hình chữ nhật bằng $2(x+y) = 40 \Leftrightarrow x+y=20$.

Thay $x+y=20$ vào (1) ta được $S = x.y \leq 100$.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{x+y}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

Vậy diện tích lớn nhất bằng 100 khi $x=y=10$ hay hình chữ nhật là hình vuông.

Vậy trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 40 cm, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Bài 10:

a) Ta có: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A} = 45^\circ$

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B} = 45^\circ$

Tam giác ABQ có $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQB} = 90^\circ$

Chứng minh tương tự ta có:

$\widehat{QMN} = \widehat{MNP} = 90^\circ$.

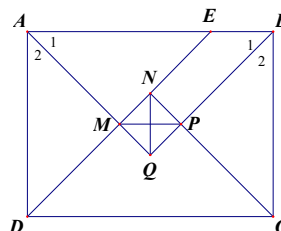
Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

$\triangle ABQ$ vuông cân suy ra $QA = QB$. (1)

$\triangle MAD = \triangle PBC$ (g.c.g) suy ra $MA = PB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $QM = QP$.

Vậy MNPQ là hình vuông.



b) $\triangle ADE$ có phân giác AM đồng thời là đường cao nên $\triangle ADE$ cân, suy ra $AD = AE$ và AM cũng là trung tuyến suy ra $AM = ME$. Mà $AM = PB$ nên $ME = PB$. Tứ giác MEPB là hình bình hành suy ra: $MP = EB = AB - AE = AB - AD = 4 - 3 = 1$ (cm).

MNPQ là hình vuông nên $MP = NQ = 1 \text{ cm}$ và $MP \perp NQ$.

$$\text{Vậy } S_{\text{MNPQ}} = \frac{1}{2} MP \cdot NQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} (\text{cm}).$$

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====