DẤU HIỆU NHẬN BIẾT-TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ây là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 2. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

B.BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại tiếp điểm C, ta có thể làm theo một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh C nằm trên (O) và OC vuông góc vói a tại C.

Cách 2. Kẻ OH vuông góc a tại H và chứng minh $OH = OC = R$.

Cách 3. Vẽ tiếp tuyến a' của (O) và chứng minh $a \equiv a'$.

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ crn. Vẽ đường tròn (B; BA). Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 2. Cho đường thẳng d và A là điểm nằm trên d; B là điểm nằm ngoài d. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với d tại A.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K;

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Bài 4. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD va CE căt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E và M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyên của (O).

Dạng 2. Tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyên và sử dụng các công thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài các đoạn thẳng.

Bài 5. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của (O) bằng 15 cm và dây $AB = 24$ cm.

Tính độ dài đoạn thẳng OC.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30°$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh:

a) MC là tiếp tuyến của (O);

b) $MC = R\sqrt{3}$.

Bài 7. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác *OCAB* là hình gì? Vì sao?
b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại *B,* cắt đường thẳng *OA* tại E.
Tính độ dài *BE* theo *R.*
Bài 8. Cho tam giác *ABC* vuông ở *A, AH* là đường cao, $AB = 8\ cm, BC = 16\ cm$. Gọi *D* là điểm đôi xứng với *B* qua *H.* Vẽ đường tròn đường kính *CD* cắt *AC* ở *E.*
a) Chứng minh *HE* là tiếp tuyến của đường tròn.
b) Tính độ dài đoạn thẳng *HE.*

Dạng 3.Tổng hợp

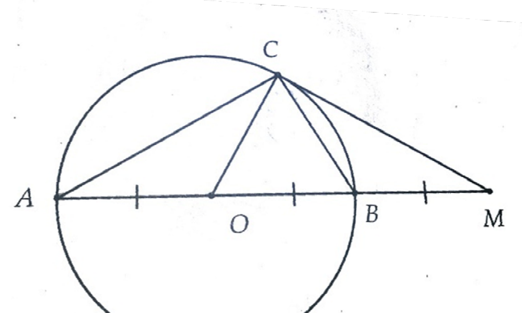
Bài 9.Cho tam giác *ABC* cân tại *A,* nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành *ABCD.* Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng *AD* tại *N.* Chứng minh:
a) Đường thẳng *AD* là tiếp tuyến của (O);
b) Ba đường thẳng *AC, BD* và *ON* đồng quy.
Bài 10.Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và *M* là điểm nằm trên (O). Tiếp tuyến tại *M* cắt tiếp tuyến tại *A* và *B* của (O) lần lượt ở C và D. Đường thẳng *AM* cắt OC tại E, đường thẳng *BM* cắt *OD* tại F.
a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90°$.
b) Tứ giác *MEOF* là hình gì?
c) Chứng minh *AB* là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
Bài 11.Cho tam giác *ABC* vuông tại *A có AH* là đường cao. Gọi *BD, CE* là các tiếp tuyến của đường tròn *(A; AH)* với *D*, *E* là các tiếp diêm. Chứng minh:
a) Ba điểm *D, A, E* thẳng hàng;
b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính *BC.*
Bài 12.Cho điểm *M* nằm trên nửa đường tròn tâm *o* đường kính *AB.* Qua *M* vẽ tiếp tuyến *xy* và gọi *C*, *D* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A, B* trên *xy.* Xác định vị trí của điểm *M* trên (O) sao diện tích tứ giác *ABCD* đạt giá trị lớn nhất.
Bài 13.Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10\ cm$ và *Bx* là tiếp tuyến của (O). Gọi C là một điểm trên (O) sao cho $\widehat{CAB} = 30°$ và *E* là giao điểm của các tia *AC, Bx.*
a) Tính độ dài các đoạn thẳng *AC, CE vả BC.*
b) Tính độ dài đoạn thẳng *BE.*
Bài 14.Cho đường tròn (O) đường kính *AB.* Lấy điểm *M* thuộc *(O) sao* cho
$MA < MB$. Vẽ dây *MN* vuông góc với *AB* tại *H.* Đường thẳng *AN* cắt *BM* tại C. Đường thẳng qua C vuông góc với *AB* tại *K* và cắt *BN* tại *D.*
a) Chứng minh *A, M,* C, *K* cùng thuộc đường tròn.
b) Chứng minh *BK* là tia phân giác của góc *MBN.*
c) Chứng minh Δ *KMC* cân và KM là tiếp tuyến của (O).
d) Tìm vị trí của M trên (O) để tứ giác *MNKC* trở thành hình thoi.

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Ta có

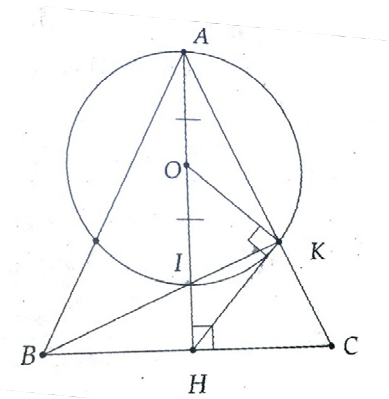
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow BA \perp AC$$



Bài 2. Trung trực AB cắt đường thẳng vuông góc với d ở A tại O. Đường tròn (O;OA) là đường tròn cần dựng.

Bài 3.



a) Chứng minh được $\widehat{BKA} = 90^0$

b) Gọi O là trung điểm AI.

Ta có:

+ $OK = OA \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$

+ $\widehat{OAK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

+ $HB = HK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HKB}$

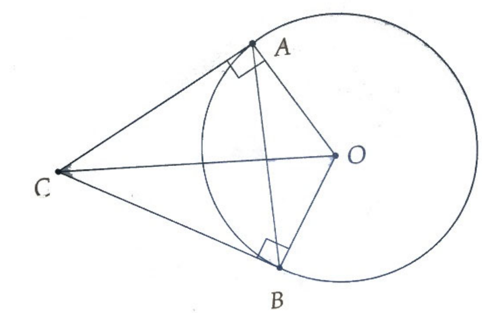
+ $\Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{HKB} \Rightarrow \widehat{HKO} = 90^0$.

Bài 4.

a) Gọi O là trung điểm của AH thì

$OE = OA = OH = OD$

b) Tương tự 2A



Bài 5.

a)

$\Delta OAC = \Delta OBC (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAB} = 90^0$

$\Rightarrow$ ĐPCM

b) Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OBC tính được OC=25cm

Bài 6.

a) Vì OCB là tam giác đều nên BC=BO=BM=R

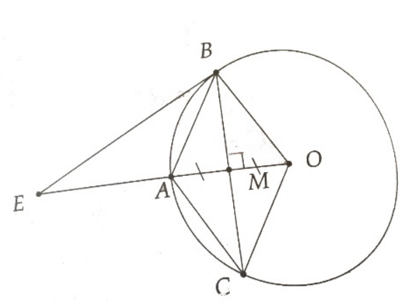
$\Rightarrow \widehat{OCM} = 90^0 \Rightarrow$ MC là tiếp tuyến (O;R)

b) Ta có

$OM^2 = OC^2 + MC^2$

$\Rightarrow MC^2 = 3R^2$

Bài 7.



a) OA vuông góc với BC tại M

$\Rightarrow$ M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ OCAB là hình thoi

b) Tính được BE=R$\sqrt{3}$

Bài 8.

a) Gọi O là trung điểm CD.

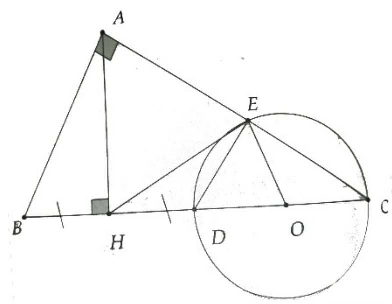
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD và tam giác ODE đều

$\Rightarrow$ DE = DH = DO = $\frac{BC}{4}$

$\Rightarrow \widehat{HEO} = 90^0$

$\Rightarrow$ HE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

b) HE = $4\sqrt{3}$



Bài 9.

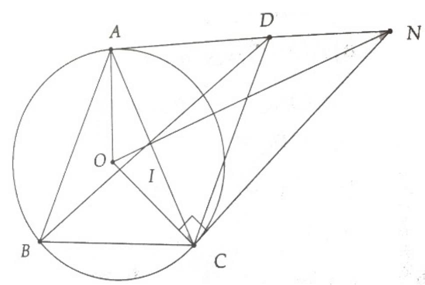
a) Tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O)

$\Rightarrow OA \perp BC$

$\Rightarrow OA \perp AD$ (vì $AD \parallel BC$)

$\Rightarrow$ AD là tiếp tuyến của (O)

b) Chứng minh được ON là tia phân giác của $\widehat{AOD}$ mà ΔOAC cân tại O nên ON cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow$ ON cắt AC tại trung điểm I của AC$\Rightarrow$ ON,AC,BD cùng đi qua trung điểm I của AC.



Bài 10.

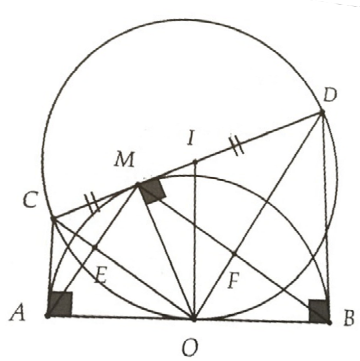
a) Dễ thấy $\widehat{AMB} = 90^0$ hay $\widehat{EMF} = 90^0$ tiếp tuyến CM,CA

$\Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$ Tương tự $\Rightarrow \widehat{OFM} = 90^0$

Chứng minh được $\Delta CAO = \Delta CMO \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{MOC} \Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{AMO}$

Tương tự OD là tia phân giác của $\widehat{BOM}$ suy ra

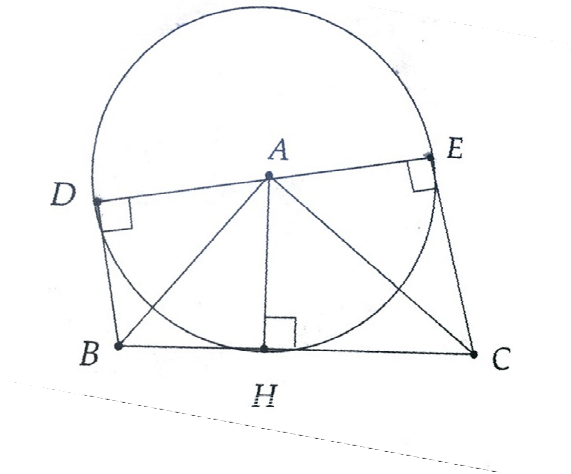
$OC \perp OD \Leftrightarrow \widehat{COD} = 90^0$



b) Do ΔAOM cân tại O nên OE là đường phân giác đồng thời là đường cao

$\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$ chứng minh tương tự $\widehat{OFM} = 90^0$.

Vậy MEOF là hình chữ nhật



c) Gọi I là trung điểm CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và IO=IC=ID. Có ABDC là hình thang vuông tại A và B nên $IO \parallel AC \parallel BD$ và IO vuông góc với AB. Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Bài 11.

a) Vì BH, BD là tiếp tuyến của (A;AH)

$\Rightarrow \widehat{HAD} = 2\widehat{HAB}$

Vì CH,CE là tiếp tuyến của (A;AH)

$\Rightarrow \widehat{HAE} = 2\widehat{HAC}$

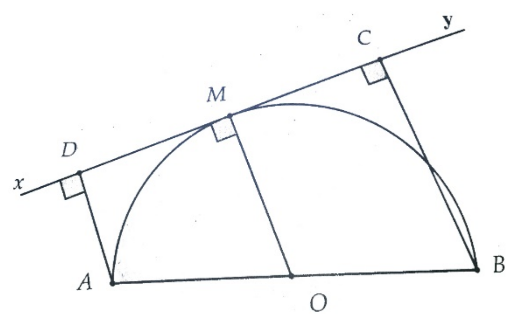
$\Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{HAB} + \widehat{HAC}) = 180^0$

$\Rightarrow$ D,A,E thẳng hàng

b) Tương tự 8.

Bài 12. Ta có ABCD là hình thang vuông tại C và D

Mà O Là trung điểm AB và OM vuông góc với CD(tiếp tuyến của (O)



$\Rightarrow$ AD+BC=2OM=2R. Chú ý rằng CD$\le$ AB

(hình chiếu đường xiên)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).CD$

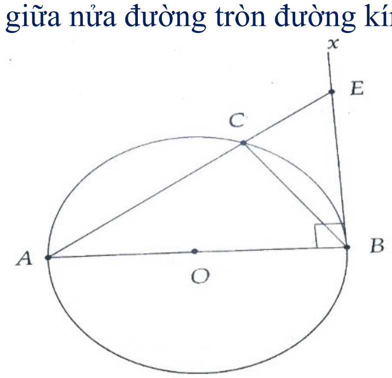
$= R.CD \le R.AB = 2R^2$

Do đó S_{ABCD} lớn nhất khi CD=AB hay M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB

Bài 13.

a) Tính được BC=5cm

$AC = 5\sqrt{3}cm,\ CE = \frac{5\sqrt{3}}{3}cm$



b) Tính được $BE = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm$

Bài 14.

a) $\widehat{CKA} = \widehat{CMA} = 90^0 \Rightarrow C, K, A, M$ thuộc đường tròn đường kính AC

b) ΔMBN cân tại B có BA là đường cao, trung tuyến và phân giác .

c) ΔBCD có $BK \perp CD$ và $CN \perp BN$ nên A là trực tâm của ΔBCD

$\Rightarrow$ D,A,M thẳng hàng

Ta có ΔDMC vuông tại M có MK là trung tuyến nên ΔKMC cân tại

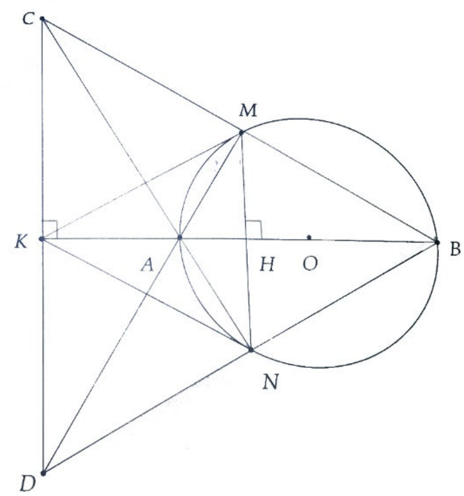
$K \Rightarrow \widehat{KCM} = \widehat{KMC}$

lại có $\widehat{KBC} = \widehat{OMB}$ nên

$\widehat{KMC} + \widehat{OMB} = \widehat{KCB} + \widehat{KBC} = 90^0$

Vậy $\widehat{KMO} = 90^0$ mà OM là bán kính

nên KM là tiếp tuyến của (O)



d) MNKC là hình thoi

$\Leftrightarrow MN = CK$ và $CM = CK$

$\Leftrightarrow \Delta KCM$ đều

$\Leftrightarrow \widehat{KBC} = 30^0 \Leftrightarrow AM = R$

C.TRẮC NGHIỆM RÈN PHẢN XẠ.

Câu 1: Cho $(O;R)$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm A khi

A. $d \perp OA$ tại A và $A \in (O)$. **B.** $d \perp OA$. **C.** $A \in (O)$. **D.** $d//OA$.

Câu 2: "Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và … thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn". Cụm từ thích hợp điền vào chỗ trống là

A. Song song với bán kính khi qua điểm đó. **B.** Vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

C. Song song với bán kính đường tròn. **D.** Vuông góc với bán kính bất kì.

Câu 3: Cho $(O;5cm)$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;5cm)$, khi đó:

A. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d nhỏ hơn $5cm$.

B. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn hơn $5cm$.

C. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $5cm$.

D. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $6cm$.

Câu 4: Cho $(O;4cm)$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn $(O;4cm)$, khi đó:

A. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d nhỏ hơn $4cm$.

B. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $4cm$.

C. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn hơn $4cm$.

D. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d bằng $5cm$.

Câu 5: Cho tam giác MNP có $MN = 5cm, NP = 12cm, MP = 13cm$. Vẽ đường tròn $(M;NM)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. NP là tiếp tuyến của $(M;MN)$. **B.** MP là tiếp tuyến của $(M;MN)$.

C. ΔMNP vuông tại M. **D.** ΔMNP vuông tại P.

Câu 6: Cho tam giác ABC có $AC = 3cm, AB = 4cm, BC = 5cm$. Vẽ đường tròn $(C;CA)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng BC cắt đường tròn $(C;CA)$ tại một điểm.

B. AB là cát tuyến của đường tròn $(C;CA)$.

C. AB là tiếp tuyến của $(C;CA)$.

D. BC là tiếp tuyến của $(C;CA)$.

Câu 7: Cho tam giác ABC cân tại A; đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Khi đó đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

A. HK. **B.** IB. **C.** IC. **D.** AC.

Câu 8: Hình chữ nhật $ABCD$, H là hình chiếu của A lên BD. M,N lần lượt là trung điểm của BH,CD. Đường nào sau đây là tiếp tuyến của đường tròn tâm A, bán kính AM.

A. BN. **B.** MN. **C.** AB. **D.** CD.

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính BH cắt AB tại D, đường tròn đường kính CH cắt AC tại E. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. DE là cát tuyến của đường tròn đường kính BH.

B. DE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH.

C. Tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

D. $DE \perp DI$ (với I là trung điểm BH).

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{ABC} = 30°$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = R$.

Câu 10: Chọn khẳng định **đúng?**

A. MC là tiếp tuyến của $(O;R)$. **B.** MC là cát tuyến của $(O;R)$. **C.** $MC \perp BC$. **D.** $MC \perp AC$.

Câu 11: Tính độ dài MC theo R.

A. $MC = \sqrt{2}R$. **B.** $MC = \sqrt{3}R$. **C.** $MC = 3R$. **D.** $MC = 2R$.

Cho đường tròn $(O;2cm)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{OBC} = 60^\circ$. Trên tia OB lấy điểm M sao cho $BM = 2cm$.

Câu 12: Chọn khẳng định **đúng?**

A. MC là tiếp tuyến của (O). **B.** MC là cát tuyến của (O). **C.** $MC \perp BC$. **D.** $\widehat{MCB} = 45^\circ$.

Câu 13: Tính độ dài MC.

A. $MC = 2\sqrt{2}cm$. **B.** $MC = \sqrt{3}cm$. **C.** $MC = 2\sqrt{3}cm$. **D.** $MC = 4cm$.

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O). Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC cắt tia AB tại M.

Câu 14: Tứ giác $AMON$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 15: Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O)?

A. $OA = 2R$. **B.** $OA = \frac{3}{2}R$. **C.** $OA = 3R$. **D.** $OA = \frac{4}{3}R$.

Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.

Câu 16: Chọn khẳng định đúng?

A. BC là cát tuyến của (O). **B.** BC là tiếp tuyến của (O).

C. $BC \perp AB$. **D.** $BC//AB$.

Câu 17: Cho bán kính của đường tròn bằng $15cm; AB = 24cm$. Tính OC.

A. $OC = 35cm$. **B.** $OC = 20cm$. **C.** $OC = 25cm$. **D.** $OC = 15cm$.

Cho đường tròn (O), dây MN khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với MN, cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn ở điểm P.

Câu 18: Chọn khẳng định **đúng?**

A. PN là tiếp tuyến của (O) tại P. **B.** $\Delta MOP = \Delta PON$.

C. PN là tiếp tuyến của (O) tại N. **D.** $\widehat{ONP} = 80^\circ$.

Câu 19: Cho bán kính của đường tròn bằng $10cm; MN = 12cm$. Tính OP.

A. $OP = 12,5cm$. **B.** $OP = 17,5cm$. **C.** $OP = 25cm$. **D.** $OP = 15cm$.

Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

Câu 20: Xác định tâm F của đường tròn đi qua bốn điểm A, D, H, E .

A. $F \equiv B$.
B. F là trung điểm đoạn AD .
C. F là trung điểm đoạn AH .
D. F là trung điểm đoạn AE .

Câu 21: Gọi M là trung điểm BC . Đường tròn (F) ở trên nhận các đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến.

A. $ME; MF$. **B.** ME . **C.** MF . **D.** EC .

Cho nửa đường tròn đường kính AB . C là một điểm thuộc nửa đường tròn. Vẽ dây BD là phân giác của góc ABC . BD cắt AC tại E . AD cắt BC tại G . H là điểm đối xứng với E qua D .

Câu 22: Chọn đáp án đúng nhất. Tứ giác $AHGE$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 23: Chọn câu đúng:

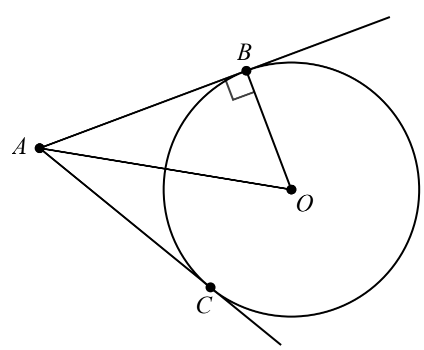
A. AH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB .

B. HG là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB .

C. $\widehat{ADB} = 90°$.

D. Cả A và C đều đúng.

Cho hình vẽ dưới đây: Biết $\widehat{BAC} = 60°$; $AO = 10cm$. Chọn đáp án đúng:



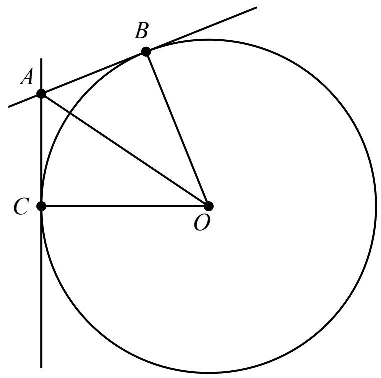
Câu 25: Độ dài bán kính OB là:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 5 . **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 26: Độ dài tiếp tuyến AB là:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 5 . **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Cho hình vẽ dưới đây. Biết AB và AC là hai tiếp tuyến của $(O), \widehat{BAC} = 120°, AO = 8cm$. Chọn đáp án đúng.



Câu 27: Độ dài bán kính OB là:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 28: Độ dài đoạn AB là:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** 4.

Câu 29: Cho nửa đường tròn $(O;R), AB$ là đường kính. Dây BC có độ dài R. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 3R$. Chọn câu đúng.

A. AD là tiếp tuyến của đường tròn.

B. $\widehat{ACB} = 90°$.

C. AD cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm phân biệt.

D. Cả A, B đều đúng.

Câu 30: Cho $\widehat{xOy}$, trên Ox lấy P, trên Oy lấy Q sao cho chu vi ΔPOQ bằng $2a$ không đổi. Chọn câu đúng.

A. PQ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

B. PQ không tiếp xúc với một đường tròn cố định nào.

C. $PQ = a$.

D. $PQ = OP$.

HƯỚNG DẪN

1. Lời giải:

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Đáp án cần chọn là A.

2. Lời giải:

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Đáp án cần chọn là B.

3. Lời giải:

Khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến tiếp tuyến bằng bán kính của đường tròn đó.

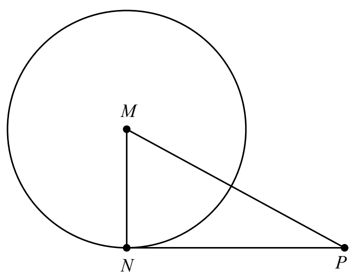
Đáp án cần chọn là C.

4. Lời giải:

Khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến tiếp tuyến bằng bán kính của đường tròn đó.

Đáp án cần chọn là B.

5. Lời giải:



Xét tam giác MNP có $MP^2 = 13^2 = 169; NM^2 + NP^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

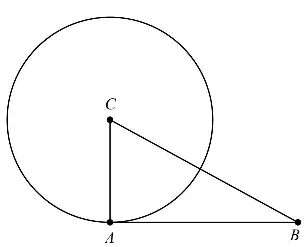
$\Rightarrow MP^2 = NM^2 + NP^2$

$\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại N (định lý Pytago đảo)

$\Rightarrow MN \perp NP$ mà $N \in (M; MN)$ nên NP là tiếp tuyến của $(M; NM)$.

Đáp án cần chọn là A.

6. Lời giải:



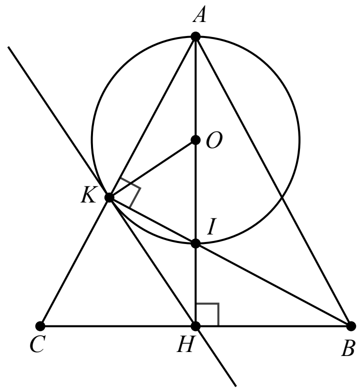
Xét tam giác ABC có $BC^2 = 5^2 = 25; AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (định lý Pytago đảo)

$\Rightarrow AB \perp AC$ mà $A \in (C; CA)$ nên AB là tiếp tuyến của $(C; CA)$.

Đáp án cần chọn là C.

7. Lời giải:



Gọi O là trung điểm AI. Xét tam giác vuông AIK có $OK = OI = OA \Rightarrow K \in \left(O; \frac{AI}{2}\right)$ (*)

Ta đi chứng minh $OK \perp KH$ tại K.

Xét tam giác OKA cân tại O ta có: $\widehat{OKA} = \widehat{OKA}$ (1)

Vì tam giác ABC cân tại A có đường cao AH nên H là trung điểm của BC. Xét tam giác vuông BKC có $HK = HB = HC = \frac{BC}{2}$.

Suy ra tam giác KHB cân tại H nên $\widehat{HKB} = \widehat{HBK}$ (2)

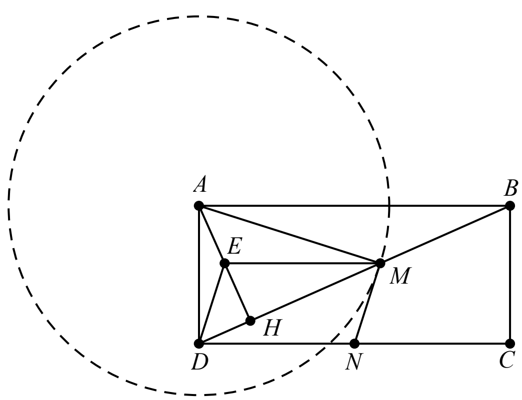
Mà $\widehat{HBK} = \widehat{KAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $\widehat{HKB} = \widehat{AKO}$ mà $\widehat{AKO} + \widehat{OKI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HKB} + \widehat{OKI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OKH} = 90^\circ$ hay $OK \perp KH$ tại K (**)

Từ (*) và (**) thì HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Đáp án cần chọn là A.

8. Lời giải:



Lấy E là trung điểm của AH. Do M là trung điểm của BH (gt) nên EM là đường trung bình của $\Delta AHB \Rightarrow EM//AB$ và $EM = \frac{1}{2}AB$.

Hình chữ nhật $ABCD$ có $CD//AB$ và $CD = AB$ mà N là trung điểm của DC, suy ra:

$DN//AB$ và $DN = \frac{1}{2}AB$.

Từ (1) và (2) ta có $EM//DN$ và $EM = DN$.

Suy ra tứ giác $EMND$ là hình bình hành, do đó $DI//MN$.

Do $EM//AB$ mà $AB \perp AD$ (tính chất hình chữ nhật)

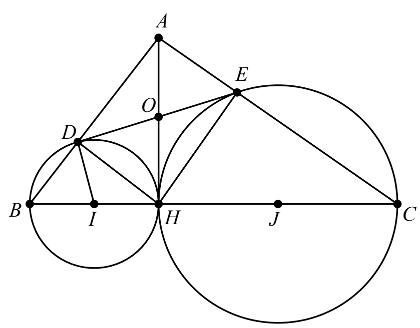
$AH \perp DM$ (gt) nên E là trực tâm của ΔADM

Suy ra $DE \perp AM$, mà $DE//MN$ (cmt)$\Rightarrow MN \perp AM$ tại M.

Vì vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AM)$.

Đáp án cần chọn là B.

9. Lời giải:



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BH và CH.

Để chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I đường kính BH ta chứng minh $ID \perp DE$ hay $\widehat{ODI} = 90^\circ$.

Vì D, E lần lượt thuộc đường tròn đường kính BH và HC nên ta có: $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH và DE, khi đó ta có $OD = OH = OE = OA$.

Suy ra ΔODH cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OHD}$

Ta cũng có ΔIDH cân tại $I \Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IHD}$

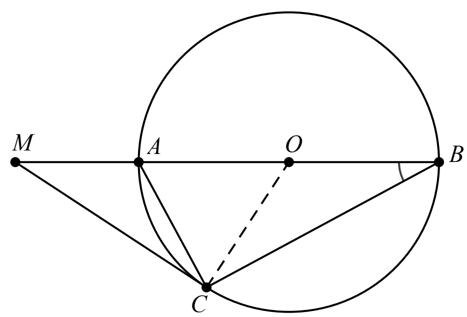
Từ đó $\Rightarrow \widehat{IDH} + \widehat{HDO} = \widehat{IHD} + \widehat{DHO} \Rightarrow \widehat{IDO} = 90^\circ \Rightarrow ID \perp DE$

Ta có $ID \perp DE, D \in (I)$ nên DE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BH.

Từ chứng minh trên suy ra các phương án B, C, D đúng.

Đáp án cần chọn là A.

10. Lời giải:

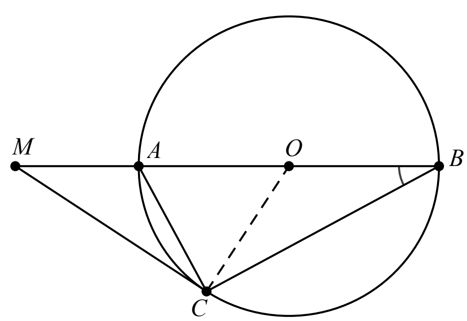


Tam giác OBC cân tại O có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ suy ra $\widehat{AOC} = 60^\circ$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng tổng hai góc trong không kề với nó).

Nên tam giác OCA là tam giác đều suy ra $AC = AO = AM = R \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^\circ \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $(O;R)$.

Đáp án cần chọn là A.

11. Lời giải:

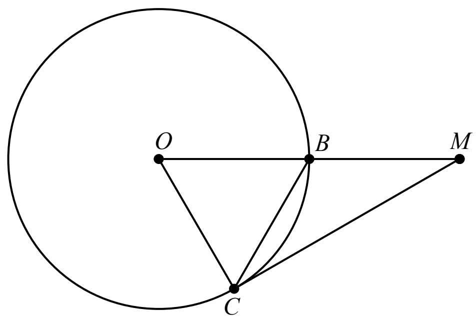


Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OCM, ta có $OM^2 = OC^2 + MC^2$

$\Rightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 3R^2 \Rightarrow MC = \sqrt{3}R$.

Đáp án cần chọn là B.

12. Lời giải:



Tam giác OBC cân tại O có $\widehat{OBC} = 60°$

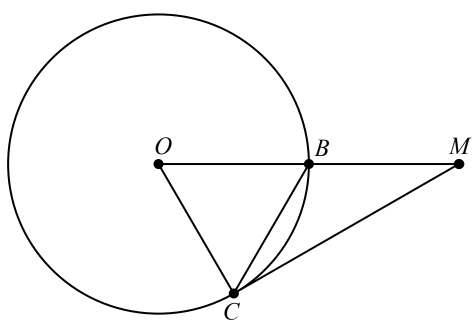
Nên tam giác OCB là tam giác đều suy ra $BC = OB = OC = 2$

Xét tam giác OCM có $BC = OB = BM = 2 = \frac{OM}{2}$ nên ΔOCM vuông tại C

$\Rightarrow OC \perp CM \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $(O;2cm)$.

Đáp án cần chọn là A.

13. Lời giải:



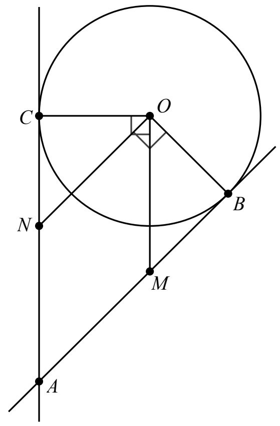
Theo câu trước ta có ΔOCM vuông tại C

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông OCM , ta có $OM^2 = OC^2 + MC^2$

$\Rightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow MC = 2\sqrt{3}cm$.

Đáp án cần chọn là C.

14. Lời giải:



Dễ có $AMON$ là hình bình hành (Vì $ON//AM;OM//AN$)

Ta chứng minh $OM = ON$

Xét tam giác OBM và tam giác OCN có:

$\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 90^\circ$;

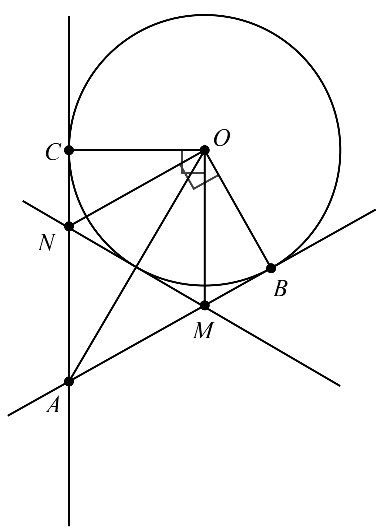
$OB = OC = R$,

Và $\widehat{OMB} = \widehat{ONC} = \widehat{A}$

$\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow AMON$ là hình thoi.

Đáp án cần chọn là B.

15. Lời giải:



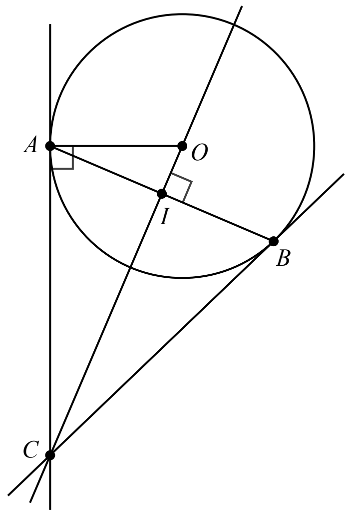
Tứ giác $AMON$ là hình thoi nên $OA \perp MN$ và

Mà độ dài OA bằng 2 lần khoảng cách từ O đến MN.

Do đó MN là tiếp tuyến đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow$ khoảng cách từ O đến MN bằng $R \Leftrightarrow OA = 2R$.

Đáp án cần chọn là A.

16. Lời giải:



Ta có $OC \perp AB \Rightarrow OC$ đi qua trung điểm của AB.

$\Rightarrow OC$ là đường cao đồng thời là trung tuyến của ΔABC.

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $C \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACO} = \widehat{BCO} \\ AC = CB \end{cases} \Rightarrow \Delta AOC = \Delta BOC$ (c – g – c)

$\Rightarrow OB \perp BC \Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của (O)

Đáp án cần chọn là B.

17. Lời giải:

Gọi I là giao điểm của OC và $AB \Rightarrow AI = BI = \dfrac{AB}{2} = 12cm$.

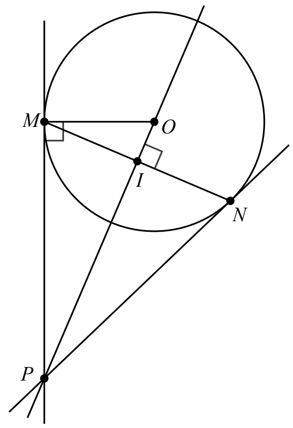
Xét tam giác vuông OAI có $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = 9cm$

Xét tam giác vuông AOC có $AO^2 = OI.OC \Rightarrow OC = \dfrac{AO^2}{OI} = \dfrac{15^2}{9} = 25cm$.

Vậy $OC = 25cm$.

Đáp án cần chọn là C.

18. Lời giải:



Gọi I là giao điểm của MN và OP

Ta có $OP \perp MN$ tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm của MN .

$\Rightarrow PI$ là đường cao đồng thời là trung tuyến của $\Delta MNP \Rightarrow \Delta MNP$ cân tại P

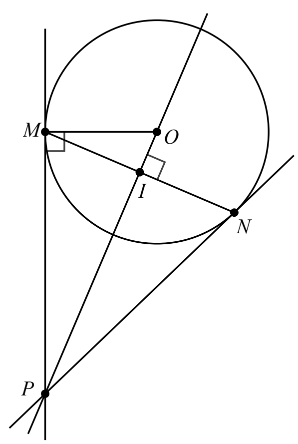
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{MPO} = \widehat{NPO} \\ PM = PN \end{cases} \Rightarrow \Delta PMO = \Delta PNO \ (\text{c} - \text{g} - \text{c})$$

$\Rightarrow \widehat{PMO} = \widehat{PNO} = 90^\circ \Rightarrow ON \perp NP$

$\Rightarrow PN$ là tiếp tuyến của (O)

Đáp án cần chọn là C.

19. Lời giải:



Gọi I là giao điểm của MN và OP

Ta có $OP \perp MN$ tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm của MN , nên $IM = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{12}{2} = 6cm$

xét tam giác vuông OMI có $OI = \sqrt{OM^2 - MI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm$

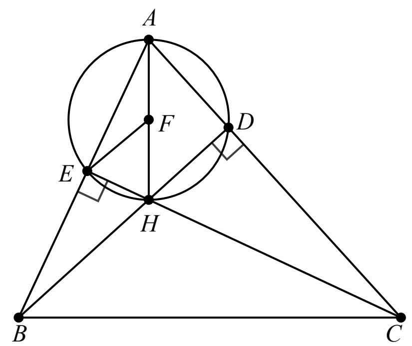
xét tam giác vuông MPO theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$MO^2 = OI.OP \Rightarrow OP = \dfrac{MO^2}{OI} = \dfrac{10^2}{8} = 12,5cm$

Vậy $OP = 12,5cm$.

Đáp án cần chọn là A.

20. Lời giải:



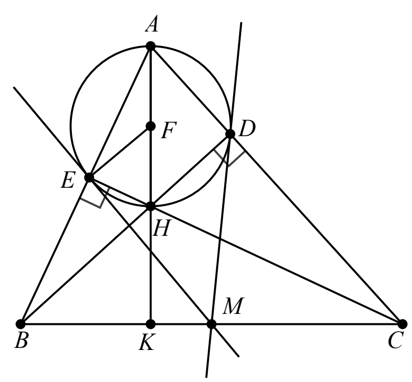
Gọi F là trung điểm của AH

Xét hai tam giác vuông AEH và ADH ta có $FA = FH = FE = FD = \dfrac{AH}{2}$

Nên bốn đỉnh A, D, H, E cùng thuộc đường tròn tâm F bán kính $\dfrac{AH}{2}$.

Đáp án cần chọn là C.

21. Lời giải:



AH cắt BC tại $K \Rightarrow AK \perp BC$ vì H là trực tâm tam giác ABC

Ta chứng minh $ME \perp EF$ tại E.

ΔFAE cân tại F (vì $FA = FE$) nên $\widehat{FEA} = \widehat{FAE}$

ΔMEC cân tại M (vì $ME = MC = MB = \dfrac{BC}{2}$) nên $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$ mà $\widehat{BAK} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

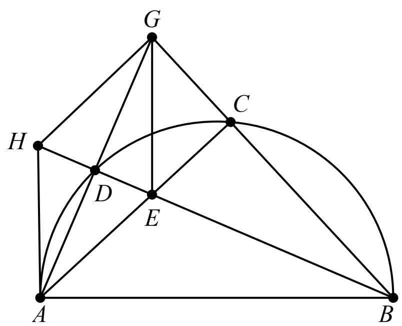
Nên $\widehat{MEC} = \widehat{FEA} \Rightarrow \widehat{MEC} + \widehat{FEC} = \widehat{FEA} + \widehat{FEC} \Rightarrow \widehat{MEF} = 90^\circ \Rightarrow ME \perp EF$ tại E.

Từ đó ME là tiếp tuyến của $\left(F;\dfrac{AH}{2}\right)$.

Tương tự ta cũng có MF là tiếp tuyến của $\left(F;\dfrac{AH}{2}\right)$.

Đáp án cần chọn là A.

22. Lời giải:



Vì D thuộc đường tròn đường kính AB nên $BD \perp AD \Rightarrow BD$ là đường cao của ΔABG, mà BD là đường phân giác của ABG (gt) nên BD vừa là đường cao vừa là đường phân giác của ΔABG.

Do đó ΔABG cân tại B suy ra BD là trung trực của AG (1).

Vì H đối xứng với E qua D (gt) nên D là trung điểm của HE (2)

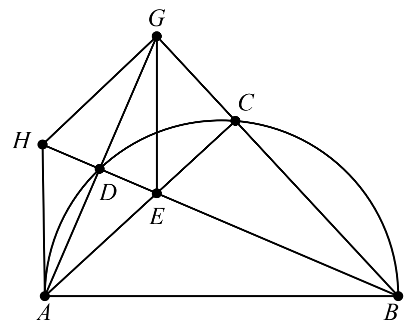
Từ (1) và (2) suy ra D là trung điểm của HE và AG

Do đó tứ giác $AHGE$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành)

Mà $HE \perp AG$ nên ΔHGE là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

Đáp án cần chọn là B.

23. Lời giải:



Vì tứ giác $AHGE$ là hình thoi (theo câu trước) nên $AH//GE$ (1)

và $HE \perp AG$ (tính chất) nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (do đó C đúng).

Xét ΔABC có BD và AC là đường cao, mà BD cắt AD tại E

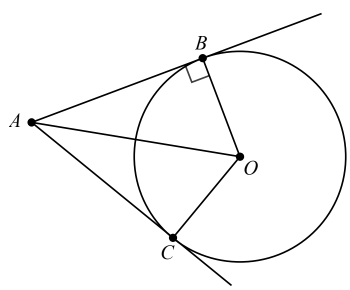
Suy ra E là trực tâm cua ΔABG, do đó $GE \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp AB$

Do đó AH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Đáp án cần chọn là D.

25. Lời giải:



Từ hình vẽ ta có $AB;AC$ là tiếp tuyến của (O) tại B,C suy ra $OC \perp AC$ tại C.

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (c – g – c) nên $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 30^\circ$

Xét ΔABO có $OB = AO.\sin A = 10.\sin 30^\circ = 5cm$.

Đáp án cần chọn là B.

26. Lời giải:

Từ hình vẽ ta có $AB;AC$ là tiếp tuyến của (O) tại B,C suy ra $OC \perp AC$ tại C.

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (c – g – c) nên $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 30^\circ$

Xét ΔABO có $AB = AO.\cos A = 10.\cos 30^\circ = 5\sqrt{3}cm$.

Đáp án cần chọn là C.

27. Lời giải:

Từ hình vẽ ta có $AB;AC$ là tiếp tuyến của (O) tại B,C suy ra $OC\perp AC$ tại C.

Suy ra $\Delta ABO=\Delta ACO$ (c – g – c) nên $\widehat{BAO}=\widehat{CAO}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=60^\circ$

Xét ΔABO có $OB=AO.\sin A=10.\sin 60^\circ=4\sqrt{3}cm$.

Đáp án cần chọn là A.

28. Lời giải:

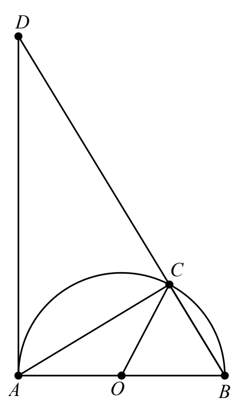
Từ hình vẽ ta có $AB;AC$ là tiếp tuyến của (O) tại B,C suy ra $OB\perp AB$ tại B và $OC\perp AC$ tại C.

Suy ra $\Delta ABO=\Delta ACO$ (c – g – c) nên $\widehat{BAO}=\widehat{CAO}=\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=60^\circ$

Xét ΔABO có $AB=AO.\cos A=8.\cos 60^\circ=4cm$.

Đáp án cần chọn là D.

29. Lời giải:



Vì AB là đường kính của $(O;R)$ nên $AB=2R$.

Vì D thuộc tia đối của tia CB nên $BD=CD+BC=3R+R=4R$

Suy ra $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{2R}{4R}=\dfrac{1}{2};\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{R}{2R}=\dfrac{1}{2}$

Xét ΔABD và ΔCBA có $\widehat{B}$ chung và $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{1}{2}$ (cmt)

Vì vậy $\Delta ABD\backsim\Delta CBA$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{DAB}=\widehat{ACB}$

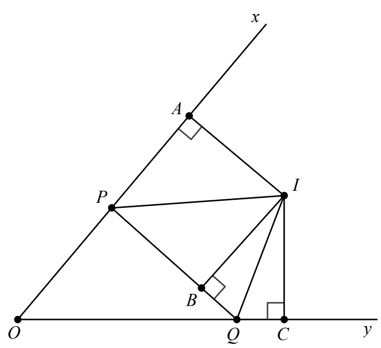
Mà C thuộc $(O;R)$ và AB là đường kính nên $OC = OA = OB = \dfrac{AB}{2}$ suy ra ΔACB vuông tại C hay $\widehat{ACB} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{DAB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $AD \perp AB$

Suy ra AD là tiếp tuyến của $(O;R)$.

Đáp án cần chọn là D.

30. Lời giải:



Gọi I là giao điểm các tia phân giác của $\widehat{xPQ};\widehat{yQP}$ và A, B, C
lần lượt là hình chiếu của I lên Ox, PQ và Oy.

Vì I thuộc phân giac của góc xPQ nên $IA = IB$.

Xét ΔPAI và ΔPBI có:

$IA = IB$ (cmt)

Chung PI

$\widehat{PAI} = \widehat{PBI} = 90^\circ$

Nên $\Delta PAI = \Delta PBI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $PA = PB$

Lí luận tương tự, ta có $QB = QC$.

$OA + OC = OP + PA + OQ + QC = OP + PB + OQ + QB = OP + PQ + QO = 2a$ (do chu vi ΔOPQ bằng $2a$)

Vì $IA = IB$ và $IB = IC$ (cmt) nên $IA = IC$.

Xét ΔOAI và ΔOCI có:

$IA = IC$ (cmt)

$\widehat{OAI} = \widehat{OCI} = 90^\circ$

Cạnh chung OI

Nên $\Delta OAI = \Delta OCI$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow OA = OC = \dfrac{2a}{2} = a$.

Vì a không đổi và A, C thuộc tia Ox, Oy cố định nên A và C cố định.

Do A và C lần lượt là hình chiếu của I lên Ox, Oy nên hai đường thẳng AI và CI cố định hay I cố định.

Do I và A cố định nên độ dài đoạn thẳng AI không đổi.

Do $IA = IB$ (cmt) nên IB là bán kính của đường tròn $(I; IA)$, mà $IB \perp PQ$ tại B nên PQ tiếp xúc với đường tròn $(I; IA)$ cố định.

Đáp án cần chọn là A.

D.TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB - 6, AC = 6, BC = 10$. Vẽ đường tròn $(B; BA)$, đường tròn $(C; CA)$

Chứng minh rằng:

AB là tiếp tuyến của đường tròn $(C; CA)$

CA là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

Bài 2: Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), C là điểm trên đường tròn (O) sao cho $AC = AB$

a) Chứng minh rằng AC là tiếp điểm của đường tròn (O)

b) D là điểm trên AC. Đường thẳng qua C vuông góc với OD tại M cắt đường tròn (O) tại E (E khác C). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB, M là điểm trên (O), AM cắt tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C

a) Tính $AM.AC$ theo R

b) Xác định vị trí M để $2AM + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy.

a) Chứng minh rằng $AD + BC$ không đổi

b) Xác định vị trí điểm M để diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất.

Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$ có AB là dây cung cố định không qua tâm O, C là điểm di động trên cung lớn AB (C không trùng với A và B)

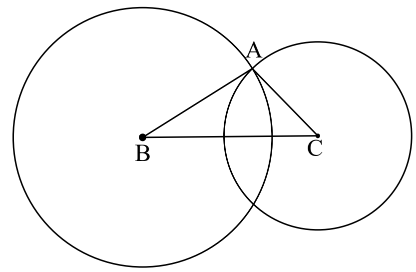
Gọi (d) là tiếp tuyến tại C của đường tròn $(O; R)$ và M, N lần lượt là chân các đường vuông góc vẽ từ A và B đến (d). Tìm vị trí của C sao cho khoảng cách MN dài nhất, ngắn nhất.

Bài 6: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Điểm M trên đường tròn (O). H là hình chiếu của M trên AB.

Xác định vị trí của M để $AH+HM$ lớn nhất.

HƯỚNG DẪN

Bài 1:



$AB^2+AC^2=8^2+6^2=100$

$BC=10^2=100$

ΔABC có: $AB^2+AC^2=BC^2$, theo định lí Py-ta-go

đảo ta có tam giác ABC vuông tại A.

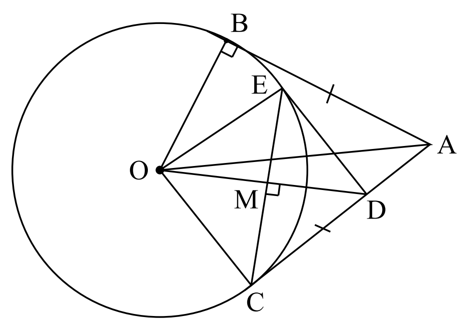
$\Rightarrow AB\perp CA$

Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn $(C;CA)$, CA là tiếp tuyến của đường tròn $(B;BA)$

Bài 2:

a) Xét ΔOAC và ΔOAB

Có $OC=OB(=R)$



OA (cạnh chung)

$AC=AB$ (gt)

Do đó: $\Delta OAC=\Delta OAB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{OCA}=\widehat{OBA}=90^0$

$\Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) $OD\perp EC$ (gt)

$\Rightarrow M$ là trung điểm EC

(Định lí đường kính vuông góc dây cung)

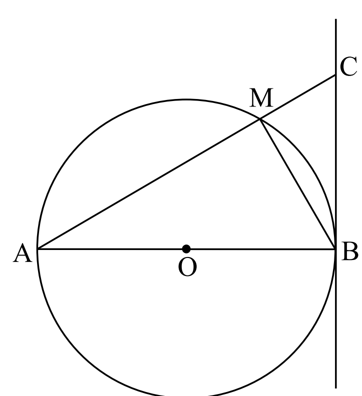
OD là đường trung trực của đoạn thẳng EC.

$\Rightarrow DE=DC$

Do đó: $\widehat{OED}=\widehat{OCD}=90^0$ (tính chất đối xứng trục)

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 3:



a) ΔMAB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \Delta MAB$ vuông tại M

CB là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0$

ΔABC vuông tại B, BM là đường cao

Nên: $AM.AC = AB^2 = 4R^2$

b) Theo bất đẳng thức Cô si cho hai số dương có:

$2AM + AC \geq 2\sqrt{2AM.AC}$

$2AM + AC \geq 4\sqrt{2}R$, không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2AM = AC$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm AC

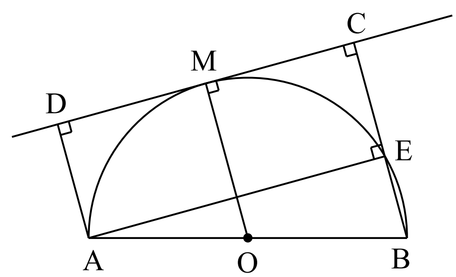
$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại B

$\Leftrightarrow M$ trên (O) sao cho $\widehat{MAB} = 45^0$

Vậy khi M trên đường tròn (O) sao cho

$\widehat{MAB} = 45^0$ thì $2AM + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4:



a) $AD \perp CD$ (gt), $BC \perp CD$ (gt)

$OM \perp CD$ (CD là tiếp tuyến của đường tròn (O))

Suy ra $AD \parallel BC \parallel OM$

Hình thang $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ có:

$OM \parallel AD \parallel BC$

O là trung điểm của AB

$\Rightarrow M$ là trung điểm của CD

Ta có OM là đường trung bình của hình thang $ABCD$

$\Rightarrow \dfrac{AD + BC}{2} = OM$

$\Rightarrow AD + BC = 2R$, không đổi

b) Vẽ $AE \perp BC$ tại E

Tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{DCE} = \widehat{CEA} = 90^0$ nên là hình chữ nhật

$CD = AE$

$AE \perp BC \Rightarrow AE \leq AB = 2R$

Do đó: $S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2}.CD = R.CD \le R.2R$

$S_{ABCD} \le 2R^2$, không đổi

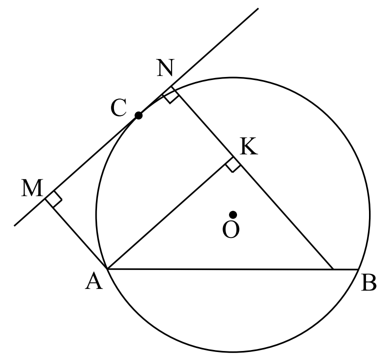
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv B$

$\Leftrightarrow DC \parallel AB$

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng vuông góc AB vẽ từ O và đường tròn (O).

Vậy khi M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ O và đường tròn (O) thì diện tích vẽ từ O và đường tròn $ABCD$ lớn nhất.

Bài 5:



- Vẽ $AK \perp BN, K \in BN$

Tứ giác $AMNK$ có:

$\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{K} = 90^0$

Nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN = AK$

Mà $AK \perp KB \Rightarrow AK \le AB$

Do đó $MN \le AB$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv B$

$\Leftrightarrow MN \parallel AB$

$\Leftrightarrow C$ là giao điểm của đường trung trực AB với cung lớn AB.

Vậy khoảng cách MN dài nhất khi C là điểm của đường trung trực AB với cung lớn AB.

- Ta có: $MN \ge 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$

$\Leftrightarrow M, N, A, B$ thẳng hàng

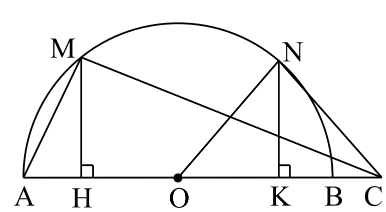
$\Leftrightarrow d \perp AB$

$\Leftrightarrow C$ là một đầu mút của đường kính song song AB

Vậy khoảng cách ngắn nhất C là một đầu mút của đường kính của đường tròn (O) song song với AB.

Bài 6:

Vẽ N ở trên đường tròn $(O;R)$ sao cho



$\widehat{BON} = 45^0$. Tiếp tuyến của nửa đường

tròn (O) tại N cắt AB tại C. Ta có N, C cố định:

- ΔNOC vuông cân tại N
- Xét $M \equiv N$

Ta có: $M \equiv N$ nên $H \equiv K$

Do đó: $AH + HM = AK + KN = AK + KC = AC$

- Xét $M \neq N$

Tia CM nằm giữa hai tia CA, CN

Do đó: $\widehat{ACM} < \widehat{ACN} = 45^0$

ΔMHC có $\widehat{MHC} = 90^0$

Nên $\widehat{HMC} + \widehat{HCM} = 90^0$

Mà $\widehat{HCM} < 45^0$ nên $\widehat{HMC} > 45^0 \Rightarrow \widehat{HCM} < \widehat{HMC}$

ΔHMC có $\widehat{HCM} < \widehat{HMC} \Rightarrow HM < HC$

Do đó: $AH + HM < AH + HC = AC$

Vậy khi M ở trên đường tròn $(O;R)$ sao cho $\widehat{BOM} = 45^0$ thì tổng $AH + HM$ lớn nhất.

-------------------- HẾT --------------------